

УДК 691-419:539.377

Э. И. СТАРОВОЙТОВ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ НАГРУЗКОЙ, ПРИЛОЖЕННОЙ К ЛИНИИ**

Рассмотрена задача термоупругости об осесимметричном изгибе круговой трехслойной пластины поперечной силой, приложенной вдоль окружности к несущему слою. Для описания деформирования тонких несущих слоев и относительно толстого заполнителя использованы гипотезы соответственно Кирхгофа и Тимошенко. С помощью вариационного метода получены уравнения равновесия, учитывающие работу касательных напряжений в заполнителе. Аналитическое решение краевой задачи представлено в конечном виде. При заданном законе распределения температуры по толщине численно исследовано влияние на перемещения в пластине радиуса приложения нагрузки в случае ее постоянной равнодействующей.

**Ключевые слова:** трехслойная круговая пластина, погонная нагрузка, упругость, температура, рекуррентное решение.

**Введение.** Существующие требования к оценке прочности композитных конструкций, функционирующих в условиях комплексного нагружения, обуславливают необходимость создания подходов, позволяющих описать деформирование в физически нелинейной области для разных вариантов приложения нагрузок, в том числе тепловых. В монографиях [1–3] представлена постановка ряда задач статики и динамики трехслойных элементов конструкций, рассмотрены пути их решения и представлены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния при термосиловых нагружениях. В работах [4, 5] приведены решения задач о гармонических и нестационарных колебаниях неоднородных сферических и цилиндрических оболочек. В статьях [6, 7] выполнен анализ влияния жесткости упругого основания на параметры свободных и вынужденных колебаний трехслойных круговых пластин, а также изучено действие на них локальных и резонансных нагрузок.

В ряде работ представлены исследования деформирования круговых трехслойных пластин. Так, в статьях [8, 9] построена математическая модель с учетом сжимаемости заполнителя, в [10, 11] анализируются напряжения и деформации в упругопластической пластине, взаимодействующей с основанием Пастернака. Деформирование в своей плоскости под действием неосесимметричных нагрузок рассмотрено в [12]. Термосиловое квазистатическое нагружение трехслойных цилиндрических пологих оболочек рассматривалось в работе [13]. В статье [14] исследован изгиб, вызываемый прохождением нейтронного потока через круглую трехслойную пластину.

**Постановка и решение задачи.** Исследуется несимметричная по толщине трехслойная круговая пластина. К наружной поверхности ее первого несущего

слоя вдоль окружности  $r = a$  приложена погонная поперечная нагрузка с интенсивностью  $Q_0$ , а также подводится тепловой поток  $q_t$  (рисунок 1).

Введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ , в которой срединная плоскость заполнителя принята за координатную, а ось  $z$  направлена перпендикулярно ей (к первому слою). Полагается, что для тонких внешних несущих слоев, имеющих толщины  $h_1 \neq h_2$  выполняются гипотезы Кирхгофа. Для относительно толстого жесткого заполнителя с толщиной  $h_3 = 2c$ , воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, работает гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Как поверхность  $z = -c - h_2$ , так и контур пластины теплоизолированы, поэтому параметры неоднородного температурного поля  $T(z)$  можно с достаточной точностью вычислить по формуле, приведенной в [1],

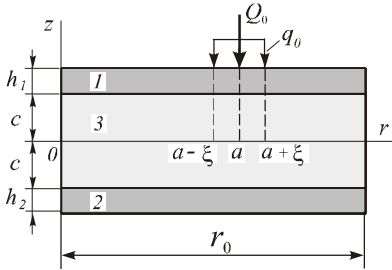


Рисунок 1 – Нагружение трехслойной пластины

где  $H$  – суммарная толщина пластины;  $\tau = at/H^2$ ;  $s = z/H$ ;  $a = \lambda/C$ ;  $t$  – время;

$$T = \frac{q_t H}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left( s + \frac{c + h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[ \pi n \left( s + \frac{c + h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где  $H = \sum_{k=1}^3 h_k$ ;  $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k / H$ ;  $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k \rho_k / H$ ;  $\lambda_k, C_k$  – коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и  $\rho_k$  – плотность материала  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$ ).

Так как нагрузка осесимметрична, то окружные перемещения в пластине отсутствуют  $u_{\varphi}^{(k)} = 0$ . Искомыми функциями при решении задачи являются: прогиб пластины  $w(r)$ , радиальное перемещение координатной плоскости  $u(r)$  и относительный сдвиг в заполнителе  $\psi(r)$ . Считаем, что на контуре пластины находится жесткая диафрагма, не допускающая относительный сдвиг слоев ( $\psi = 0$  при  $r = r_0$ ).

Решение задачи выполним, используя результаты, полученные для случая распределенной по кольцу  $a - \xi \leq r \leq a + \xi$  поверхностной равномерно распределенной нагрузки  $q_0$  при изотермическом нагружении [15]. Предположим, что кольцо тонкое  $\xi \ll 1$ . Тогда произведем в искомых функциях замену  $q_0 = Q_0/(2\xi)$  (см. рисунок 1) и устремим параметр  $\xi$  к нулю, оставляя  $Q_0$  постоянной. Для искомых перемещений получим выражения

$$\psi = A_2 I_1(\beta r) + A_3 K_1(\beta r) + \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta} H_0(a-r) \left( \frac{1}{\beta r} - K_1(\beta r) I_0(\beta a) - I_1(\beta r) K_0(\beta a) \right) + \frac{A_1 \gamma_1}{\beta^2 r};$$

$$w = \frac{1}{b_3} \left( b_2 \int \psi dr + \int L_3^{-1}(Q_0) dr - \frac{A_1}{4} r^2 (\ln r - 1) + \frac{A_5 r^2}{4} \right) + A_6 \ln r + A_4;$$

$$u = \frac{a_3}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \psi + \frac{A_7 r}{2} + \frac{A_8}{r}, \quad (2)$$

где запятой в нижнем индексе обозначена операция дифференцирования по следующей за ней координате;  $A_1, \dots, A_8$  – константы интегрирования;  $\psi_r(r)$  – частное решение уравнения Бесселя для функции сдвига в заполнителе;  $I_1(r)$ ,  $K_1(r)$  – функции Бесселя;  $H_0(r)$  – функция Хэвисайда;  $L_3^{-1}$  – линейный интегральный оператор:

$$\begin{aligned} L_3^{-1}(f) &\equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f \, dr \, dr \, dr; \\ \int L_3^{-1}(Q_0) \, dr &= \frac{Q_0 a}{4} \left( r^2 - a^2 - a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) - r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right) H_0(a-r); \\ \int \psi \, dr &= \frac{A_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{A_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{A_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta^2} H_0(a-r) \times \\ &\times \left( \ln\left(\frac{r}{a}\right) + I_0(\beta a) K_0(\beta r) - K_0(\beta a) I_0(\beta r) \right). \end{aligned}$$

В случае усреднения температурного поля (1) по толщине  $k$ -го слоя значения упругих параметров внутри этого слоя постоянны:

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}), \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k}), \quad T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int T_k(z, t) \, dz,$$

и они вычисляются в зависимости от температуры по известной формуле Белла [3]. В этом случае коэффициенты в (2) будут

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); \quad a_3 = h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+; \\ a_4 &= c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right); \quad a_5 = c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \\ a_6 &= h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \\ \beta^2 &= \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}; \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}; \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}; \end{aligned}$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+; \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-.$$

Константы интегрирования определяются из требования ограниченности решения в центре пластины и с учетом выполнения граничных условий:

– в случае заделки контура

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = 1;$$

– при шарнирном опирании

$$u = \psi = w = M_r = 0 \text{ при } r = 1, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{где } M_r = & \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z \, dz = \left[ K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \\ & + \left[ K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\ & + \left[ cK_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\ & + \left[ cK_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\ & - \left[ K_1^+ h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\ & - \left[ K_1^- h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r} + \\ & + \sum_{k=1}^3 3K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T_k z \, dz ; \end{aligned}$$

$\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения.

Для случая заземленного контура получаем

$$\begin{aligned} A_1 = -Q_0 a ; \quad A_2 = \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta^2 I_1(\beta)} (1 - \beta K_1(\beta) I_0(\beta a)) ; \quad A_3 = \frac{\gamma_1 Q_0 a I_0(\beta a)}{\beta} ; \\ A_4 = -\frac{b_2 \gamma_1 Q_0 a}{b_3 \beta^3 I_1(\beta)} (I_0(\beta) - I_0(\beta a)) + \frac{Q_0 a (a^2 + 1)}{8b_3} ; \quad A_5 = \frac{Q_0 a}{2} (1 - a^2) ; \quad (4) \\ A_6 = \frac{Q_0 a^3}{4b_3} ; \quad A_7 = 0 ; \quad A_8 = 0. \end{aligned}$$

При шарнирно опертом контуре изменяются константы интегрирования

$$\begin{aligned} A_4 = \frac{b_2}{b_3} \left( -\frac{A_2 I_0(\beta)}{\beta} + \frac{A_3 K_0(\beta)}{\beta} \right) - \frac{1}{4b_3} (A_1 + A_5) ; \\ A_5 = \frac{Q_0 a}{2} (1 - a^2) \frac{a_3^2 - a_1 b_3 + a_7 a_1}{a_1 (a_6 + a_7)} - \frac{6b_3}{a_6 + a_7} \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z \, dz ; \quad (5) \\ A_7 = \frac{2a_3}{a_1 (a_6 + a_7)} \left( 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z \, dz + \frac{Q_0 a}{2} (1 - a^2) \right). \end{aligned}$$

Константы  $A_1, A_2, A_3, A_6, A_8$  сохраняют вид (4).

Следует отметить, что температура в явном виде в перемещения (2) не входит, она влияет на механические характеристики материалов слоев и содержится в последних трех константах интегрирования (5) в случае шарнирного опирания контура пластины.

**Численные результаты.** Исследована круговая трехслойная пластина, набранная из материалов Д16Т–фторопласт-4–Д16Т (их механические характеристики приведены в [1]). Толщины слоев и прогиб отнесены к радиусу пластины  $r_0$ :  $h_3 = 0,4$ ;  $h_2 = 0,04$ . Изменение максимального прогиба пластины в зависимости от радиуса окружности, вдоль которой прикладывались поперечные погонные нагрузки (их значения подбирались из условия постоянства равнодействующей), показано на рисунке 2. Максимум наблюдается при  $b = 0$ , что соответствует сосредоточенной силе, приложенной к центру пластины. При продвижении нагрузки к контуру прогиб уменьшается до нуля. При нагревании прогиб увеличивается пропорционально.

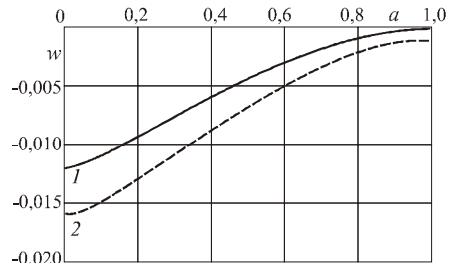


Рисунок 2 – Зависимости прогиба в центре трехслойной пластины от радиуса  $a$  силовой окружности ( $T_1 = 293\text{ K}$ ,  $T_2 = 323\text{ K}$ )

**Заключение.** Полученное решение краевой задачи позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние упругих трехслойных круговых пластин при локальных погонных нагрузках в температурном поле. Численные результаты подтвердили, что температура существенно влияет на перемещения в пластине.

*Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция».*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 Reddy, J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells / J. N. Reddy. – Boca Raton : CRC Press, 2003. – 858 p.
- 3 Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore–London : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
- 4 Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.
- 5 Tarlakovskii, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.
- 6 Starovoitov, E. I. Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, no. 5. – P. 561–570.

7 Старовойтов, Э. И. Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая // Проблемы прочности. – 2002. – Т. 34. – № 5. – С. 70–79.

8 Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

9 Захарчук, Ю. В. Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.

10 Козел, А. Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

11 Козел, А. Г. Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.

12 Нестерович, А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.

13 Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 5. – С. 114–119.

14 Старовойтов, Э. И. Изгиб трехслойной пластины нейтронным потоком / Э. И. Старовойтов // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 221–225.

15 Плескачевский, Ю. М. Термоупругие перемещения в трехслойной круговой металлополимерной пластине при кольцевых нагрузках / Ю. М. Плескачевский, М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – Вып. 34. – С. 3–9.

*E. I. STAROVOITOV*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

### **A THREE-LAYER PLATE BENDING IN A TEMPERATURE FIELD BY A LOAD APPLIED TO A LINE**

The problem of thermoelasticity of a circular three-layer plate axisymmetric bending by a transverse force applied along the circumference to the carrier layer is considered. The hypotheses of Kirchhoff and Timoshenko, respectively, are used to describe the deformation of thin carrier layers and relatively thick filler. Using the variational method, equilibrium equations are obtained and they take into account the shear stresses work in the filler. The analytical solution of the boundary value problem is presented in the final form. For a given law of temperature distribution over the thickness, the load application radius influence on the displacements in the plate for the case of its constant resultant is numerically investigated.

**Keywords:** three-layer circular plate, linear load, elasticity, temperature, recursive solution.

Получено 05.11.2022