

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Широкое применение трехслойных конструкций на транспорте обуславливает разработку методов их расчета. Деформирование трехслойных стержней под действием температуры и нейтронного потока рассмотрено в монографии [1]. Уже достаточно хорошо исследовано динамическое деформирование гладких круговых трехслойных пластин, в том числе на упругом основании. Так, в статье [2] рассмотрены свободные колебания, работа [3] посвящена исследованию резонансного нагружения круговых трехслойных пластин, а статья [4] – локального. Задачи об изгибе суживающихся анизотропных трехслойных пластин переменной толщины при действии поперечных нагрузок рассмотрены в [5]. В статье [6] исследован трехслойной стержень с нерегулярной границей. Здесь выполнена постановка задачи об осесимметричном изгибе круговой трехслойной пластины ступенчато-переменной толщины.

Пластина состоит из трех слоев различной толщины. Толщины несущих слоев могут изменяться вдоль радиуса ступенчато. Толщина заполнителя вдоль радиуса не изменяется. Во внешних несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, в заполнителе учитывается дополнительный сдвиг, для всего пакета принимается гипотеза ломаной нормали. На границах слоев перемещения непрерывны.

Через срединную плоскость заполнителя проходит цилиндрическая система координат r, φ, z . На внешнюю поверхность первого несущего слоя действует осесимметричная распределенная нагрузка $q(r)$. За искомые величины принимаются прогиб пластины $w(r)$, относительный сдвиг в заполнителе $\psi(r)$ и радиальное перемещение координатной плоскости $u(r)$, которые не зависят от окружной координаты φ .

Уравнения равновесия пластины выводятся из вариационного принципа Лагранжа

$$\delta A = \delta W,$$

где δA – вариация суммарной работы внешних нагрузок $q(r)$ и контурных усилий, δW – вариация работы внутренних сил упругости.

Получена система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, которая формально на каждом участке совпадает с системой для гладкой пластины [7].

Список литературы

- 1 Старовойтов, Э. И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск : Беларуская наука, 2017. – 275 с.
- 2 Леоненко, Д. В. Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – № 3. – С. 42–47.
- 3 Старовойтов, Э. И. Резонансные колебания круговых композитных пластин на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Механика композитных материалов. – 2015. – Т. 51, № 5. – С. 793–806.
- 4 Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.
- 5 Jeon, J. S. Bending of tapered anisotropic sandwich plates with arbitrary edge conditions / J. S. Jeon, C. S. Hong // AIAA Journal. – 1992. – No. 7. – P. 1762–1769.
- 6 Плескачевский, Ю. М. Изгиб трехслойного стержня с нерегулярной границей / Ю. М. Плескачевский, Е. Э. Старовойтова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2008. – № 3 (4). – С. 52–55.
- 7 Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 343 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Н. А. ЛОКТЕВА^{1,2}, Д. О. СЕРДЮК¹, П. Д. СКОПИНЦЕВ¹

¹Московский авиационный институт (НИИ),

²НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Российская Федерация

При создании новых безопасных или модернизации существующих конструкций, соответствующих необходимым высоким требованиям современного мира техники, необходимо особое внимание уделить исследованию процессов распространения нестационарных возмущений в конструк-

тивных элементах. Широко применяемым конструктивным элементом в таких отраслях промышленности, как машиностроение, судостроение, самолетостроение и ракетостроение, является оболочка.

Теоретический и прикладной интерес представляет собой исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек, находящихся под воздействием нестационарных ударных нагрузок, имитируемых импульсными функциями.

В трудах [1–2] исследуются вопросы нестационарной динамики изотропных пластин и оболочек. Задачи нестационарной динамики анизотропных пластин и оболочек освещены в работах [3–5].

Объектом исследования является тонкая неограниченная цилиндрическая оболочка. Оболочка имеет радиус R и толщину h . Материал цилиндрической оболочки принят упругим и анизотропным. При этом рассматривается случай анизотропии, при котором упругая среда имеет одну поверхность симметрии. В данном случае такой поверхностью является срединная поверхность оболочки. Для тонкой оболочки Кирхгофа – Лява рассматриваемый материал имеет шесть независимых упругих постоянных:

$$c_{11} = C^{1111}, c_{12} = C^{1122}, c_{16} = C^{1112}, c_{22} = C^{2222}, c_{26} = C^{1222}, c_{66} = C^{1212}.$$

В начальный момент времени оболочка находится в невозмущенном состоянии. Затем на нее воздействует нестационарная нагрузка $P(\alpha, z, \tau)$, распределенная по произвольной области D . Движение оболочки рассматривается в цилиндрической системе координат $OR\alpha z$.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения упругой оболочки Кирхгофа – Лява, соответствующие геометрические и физические соотношения с учетом симметрии свойств материала исследуемой оболочки.

Уравнения движения в перемещениях анизотропной оболочки Кирхгофа – Лява имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= K_{11}(u_\alpha) + K_{12}(u_z) + K_{13}(w) + q_\alpha, \\ \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= K_{11}(u_\alpha) + K_{12}(u_z) + K_{13}(w) + q_\alpha, \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= K_{31}(u_\alpha) + K_{32}(u_z) + K_{33}(w) + P, \end{aligned} \quad (1)$$

где K_{ij} – дифференциальные операторы, ρ – плотность материала оболочки, w – нормальное перемещение, u_α, u_z – компоненты вектора тангенциальных перемещений, P – нормальное давление, q_i – тангенциальное давление.

Уравнения (1) совместно с начальными условиями

$$u_\alpha|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad u_z|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad w|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0,$$

образуют начальную задачу.

Цель исследования заключается в построении нестационарной функции нормальных перемещений $w(\alpha, z, \tau)$ в ответ на воздействие нестационарной нагрузки $P(\alpha, z, \tau)$.

Метод исследования базируется на принципе суперпозиции, согласно которому прогиб оболочки w связан с воздействующим на неё нестационарным нормальным давлением $P(\alpha, z, \tau)$ посредством трехмерных интегральных соотношений по времени, осевой и угловой координатам, ядром которой является нестационарная функция влияния G_w для анизотропной оболочки.

Для построения функции влияния G_w применяются разложения в экспоненциальные ряды Фурье, интегральное преобразование Лапласа по времени и интегральное преобразование Фурье по продольной координате. Обратное интегральное преобразование Лапласа выполняется аналитически, а оригинал интегрального преобразования Фурье находится с использованием численных методов интегрирования быстро осциллирующих функций.

Рассматриваем воздействие на оболочку распределенной в виде полосы нагрузки вида:

$$p(\alpha, z, \tau) = P(\tau) H(\tau) \left[H\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - H\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \right] \times \left[H\left(z + \frac{b}{2}\right) - H\left(z - \frac{b}{2}\right) \right],$$

что соответствует приложению к боковой поверхности оболочки давления, распределенного по области $D = \left\{ (\alpha, z) : -\frac{\beta}{2} \leq \alpha \leq \frac{\beta}{2}, -\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2} \right\}$ и изменяющегося во времени по закону $P(\tau)H(\tau)$. $H(\tau)$ – функция Хэвисайда.

Нестационарный нормальный прогиб цилиндрической оболочки представляется в виде тройной свертки функции влияния G_w с поверхностным давлением $p(\alpha, z, \tau)$. Интегралы свертки берутся при помощи квадратурных формул методом прямоугольников:

$$w(\alpha, z, \tau) \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^s \frac{\beta}{n} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{\tau}{s} \cdot G_{wijk}(\alpha, z, \tau) p\left(\frac{\tau}{s}k\right),$$

$$G_{wijk}(\alpha, z, \tau) = G_w\left(\alpha - \frac{\beta}{n}i + \frac{\beta}{2}, z - \frac{b}{m}j + \frac{b}{2}, \tau - \frac{\tau}{s}k\right). \quad (2)$$

Соотношение (2) позволяет исследовать пространственно-временные распространения нестационарных колебаний в неограниченной оболочке Кирхгофа – Лява при воздействии распределенной по боковой области в виде полосы нестационарной нагрузки.

Представленный подход к построению нестационарной функции прогиба при переходе к размерным величинам открывает возможности для анализа нестационарного напряженно-деформированного состояния протяженных цилиндрических оболочек с учетом различных вариантов анизотропии материала и закона распределения нестационарной нагрузки как по координатам, так и по времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00968 А).

Список литературы

- 1 Горшков, А. Г. Волны в сплошных средах / А. Г. Горшков [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
- 2 **Tarlovskii, D. V.** Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell / D. V. Tarlovskii, G. V. Fedotenkov // *Mechanics of Solids*. – 2015. – Vol. 50, no. 2. – P. 208–2017. – DOI: 10.3103/S0025654415020107.
- 3 **Локтева, Н. А.** Нестационарная динамика тонких анизотропных упругих цилиндрических оболочек / Н. А. Локтева, Д. О. Сердюк, П. Д. Скопинцев // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVI Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 2.* – М. : ООО «ТРП», 2020.
- 4 **Сердюк, А. О.** Нестационарная динамика тонких ортотропных упругих пластин / А. О. Сердюк, Д. О. Сердюк, Г. В. Федотенков // *Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы : тезисы докладов VII Междунар. науч. семинара.* – М. : ООО ТР-Принт, 2018. – С. 108–109.
- 5 **Сердюк, А. О.** Нестационарные функции влияния для анизотропной пластины типа Кирхгофа – Лява / А. О. Сердюк // *Ломоносовские чтения : тезисы докладов.* – М. : Изд-во Московского университета. – 2019. – С. 204–205.

УДК 539.37

О ДЕФОРМИРОВАНИИ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ СУПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

И. В. ЛУЦКАЯ, В. А. МАКСИМЮК

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Тороидальные оболочки благодаря своей компактности часто используются на транспорте как сосуды высокого давления. Стремление увеличить компактность привело к оболочкам некругового поперечного сечения. Расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) таких оболочек численными сеточными методами усложняется из-за так называемого явления мембранного запираания (locking). Оно проявляется в замедленной, но устойчивой, сходимости классических численных методов вследствие значительных изгибов при небольших растяжениях. Особенно замедляется сходимость в случаях значительной эллиптичности поперечного сечения оболочек [1] вследствие больших изгибов близи полюсов эллипса. Очевидно, в случае суперэллиптического [2] сечения цилиндрических, тороидальных и других оболочек расчеты НДС еще больше усложняются.