УДК 512.62

ОБ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ ВОРОНЦА В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЮ К ЗАДАЧАМ О ДИСПЕРСИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ТОНКИХ ТЕЛАХ

С. И. ЖАВОРОНОК

Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Российская Федерация

Предложена вариационная формулировка модели оболочки N-го порядка [1, 2] как континуальной двумерной системы со связями. Модель оболочки задана на двумерном многообразии, соответствующем реперной поверхности оболочки, множеством переменных поля первого рода, плотностью функционала Лагранжа и уравнениями связей. Переменные поля определены коэффициентами биортогонального разложения вектора перемещения, заданного компонентами в сопутствующем базисе системы координат на реперной поверхности, не зависящем от нормальной координаты [3]. Применение биортогональных базисных функций нормальной координаты обеспечивает построение моделей оболочки различного типа как традиционных двумерных с учетом высших степеней свободы [3], так и трехмерных конечно-элементных в рамках единого формализма. Краевые условия, перенесенные с лицевых на реперную поверхность оболочки, образуют уравнения связей. При разрешимости связей относительно линейных операторов над переменными поля, входящих в формулировку плотности функционала Лагранжа, получены уравнения движения, в отличие от [1, 2] не содержащие множителей связей, которые могут быть интерпретированы как обобщенные уравнения Воронца двумерной континуальной системы. На основе предложенной формулировки построены решения задач о дисперсии волн в плоском функционально-градиентном слое при степенном и экспоненциальном распределении объемной доли структурных составляющих по толщине.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00695-а).

Список литературы

1 **Zhavoronok, S. I.** On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I. N. Vekua type / S. I. Zhavoronok // Procedia Engineering. – 2015. – Vol. 111. – P. 888–895.

2 **Жаворонок, С. И.** Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода расширенной трехмерной теории N-го порядка анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21. – № 3. – С. 370–381.

3 **Векуа, И. Н.** Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / И. Н. Векуа. – М. : Наука, 1982. – 282 с.

4 **Zhavoronok, S. I.** On the use of extended plate theories of Vekua – Amosov type for Wave dispersion problems / S. I. Zhavoronok // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Vol. 14. – No. 1. – P. 36–48.

5 Modelling of the Plane Waveguide Dynamics based on the Quasi-3D Plate Theory of I.N. Vekua Type / O. V. Egorova [et al.] // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2019. – Doi: 10.1080/15376494.2019.1578008.

6 **Жаворонок, С. И.** Применение расширенной теории пластин N-го порядка к решению дисперсионной задачи для градиентно-неоднородного слоя / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т. 24. – № 2. – С. 240–258.

УДК 539.83

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ ЗАПОЛНИТЕЛЯ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Ю. В. ЗАХАРЧУК

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Вопросам расчета напряженно-деформированного состояния слоистых, в том числе трехслойных, элементов конструкций уделяется большое внимание ввиду их широкого применения в различных отраслях промышленности. Зачастую такие элементы являются составляющими сложных и ответственных сооружений. При оценке работы несущих слоистых элементов конструкций под воздействием силовых нагрузок возникают специфические проблемы, которые в первую очередь связаны с определением соответствующих напряжений и деформаций. В процессе деформирования материалы слоев могут проявлять физически нелинейные свойства, что приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям равновесия, которые не имеют точного аналитического решения. Возникает проблема выбора метода их приближенного решения.

Многочисленные опубликованные работы, посвященные деформированию круговых трехслойных пластин, как правило, используют модель с несжимаемым заполнителем, что менее адекватно описывают деформирование и значительно упрощает математическую сторону проблемы. Здесь рассматривается круговая трехслойная пластина, несущие слои которой выполнены из упругопластического материала, а сжимаемый по толщине заполнитель может проявлять упругие и нелинейно-упругие свойства.

Постановка задачи и ее решение проведены в цилиндрической системе координат r, φ, z. Система координат связана со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа. В легком заполнителе нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Функция обжатия заполнителя $v(r)$ по его толщине принимается линейной.

На внешний слой стержня действует осесимметричная распределенная нагрузка $q = q(r)$. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя ($\psi = 0$, $v = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя. Обозначим через h_k толщину k-го слоя (k = 1, 2, 3 – номер слоя), при этом $h_3 = 2c$.

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$. Для связи напряжений и деформаций в слоях пластины используются нелинейные физические уравнения состояния типа теории малых упругопластических деформаций Ильюшина:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(1-\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))э_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3; \ \alpha = r, \varphi),$$
$$s_z^{(3)} = 2G_3(1-\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))э_z^{(3)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3(1-\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))э_{rz}^{(3)}, \qquad (1)$$

где k – номер слоя; $s_\alpha^{(k)}$, $э_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев (k = 1, 2), которые при $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_y^{(k)}$ равны нулю; $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационные пределы текучести материалов; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность сжимаемого заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_s^{(k)}$, $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала; $s_z^{(3)}$, $s_{rz}^{(3)}$, $э_z^{(3)}$, $э_{rz}^{(3)}$ – девиаторы тензоров в заполнителе; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций,

$$\varepsilon_u^{(k)} = \tfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi}-\varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{rr})^2 + 6(\varepsilon_{r\varphi}^2 + \varepsilon_{\varphi z}^2 + \varepsilon_{zr}^2)}\,.$$

С помощью соотношений (1) выделим в тензоре напряжений упругие (индекс «е») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; \ k = 1, 2, 3), \quad \sigma_z^{(3)} = \sigma_{ze}^{(3)} - \sigma_{z\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)},$$

где

$$\sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_kэ_\alpha^{(k)} + K_k\theta^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k\omega_kэ_\alpha^{(k)}, \quad \sigma_{ze}^{(3)} = 2G_3э_z^{(3)} + K_3\theta^{(3)}, \quad \sigma_{z\omega}^{(3)} = 2G_3\omega_3э_z^{(3)},$$
$$\sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3э_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3\omega_3э_{rz}^{(3)}.$$

Ранее, используя вариационный принцип Лагранжа без применения уравнений связи напряжений и деформаций, были получены уравнения равновесия в обобщенных усилиях *упругой* круговой трехслойной пластины со *сжимаемым заполнителем* и граничные условия. Воспользовавшись ими в рассматриваемом случае, получим систему уравнений равновесия в перемещениях, которую можно записать в виде

$$\begin{gathered}L_2(a_1u+a_2\psi-a_3w,_r-a_4v,_r)+K_3^-v,_r=p_\omega\,,\\ L_2(a_2u+a_5\psi-a_6w,_r-a_7v,_r)=h_\omega\,,\\ L_3(a_3u+a_6\psi-a_8w,_r-a_9v,_r)=-q+q_\omega\,,\\ L_3(a_4u+a_7\psi-a_9w,_r-a_{10}v,_r)+\frac{c}{6}K_3^-\left(v,_{rr}+\frac{v,_r}{r}\right)=-q+g_\omega\,,\end{gathered}\tag{2}$$

где

$$a_1=\sum_{k=1}^{3}h_kK_k^+\,,\quad a_2=c(h_1K_1^+-h_2K_2^+)\,,\quad a_3=h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)K_1^+-h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)K_2^+,\quad a_4=h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)K_1^++\frac{c^2}{3}K_3^+,$$

$$a_5=c^2\left(h_1K_1^++h_2K_2^+\right)+\frac{2}{3}c^3K_3^+,\quad a_6=c\left[h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)K_1^++h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)K_2^++\frac{2}{3}c^2K_3^+\right],$$

$$a_7=c\left[h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)K_1^++\frac{c^2}{3}K_3^+\right],\quad a_8=h_1\left(c^2+ch_1+\frac{h_1^2}{3}\right)K_1^++h_2\left(c^2+ch_2+\frac{h_2^2}{3}\right)K_2^++\frac{2}{3}c^3K_3^+,$$

$$a_9=h_1\left(c^2+ch_1+\frac{h_1^2}{3}\right)K_1^++\frac{c^3}{3}K_3^+,\quad a_{10}=h_1\left(c^2+ch_1+\frac{h_1^2}{3}\right)K_1^++\frac{4}{15}c^3K_3^+,$$

$$K_k^+=K_k+\frac{4}{3}G_k\,,\quad K_k^-=K_k-\frac{2}{3}G_k\,;$$

L_2, L_3 – дифференциальные операторы,

$$L_2(g)\equiv\left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r\equiv g,_{rr}+\frac{g,_r}{r}-\frac{g}{r^2}\,,\quad L_3(g)\equiv\frac{1}{r}\big(rL_2(g)\big),_r\equiv g,_{rrr}+\frac{2g,_{rr}}{r}-\frac{g,_r}{r^2}+\frac{g}{r^3}\,;$$

$p_\omega, h_\omega, q_\omega, g_\omega$ – нелинейные добавки, вычисляемые через нелинейные составляющие внутренних усилий.

Краевая задача замыкается добавлением к дифференциальным уравнениям (2) силовых или кинематических граничных условий на контуре.

Система уравнений равновесия (2) является существенно нелинейной. Для ее решения применен метод последовательных приближений, основанный на методе упругих решений Ильюшина. В результате система приводится к итерационному виду

$$\begin{gathered}L_2(a_1u^{(n)}+a_2\psi^{(n)}-a_3w^{(n)},_r-a_4v^{(n)},_r)+K_3^-v^{(n)},_r=p_\omega^{(n-1)}\,,\\ L_2(a_2u^{(n)}+a_5\psi^{(n)}-a_6w^{(n)},_r-a_7v^{(n)},_r)=h_\omega^{(n-1)}\,,\\ L_3(a_3u^{(n)}+a_6\psi^{(n)}-a_8w^{(n)},_r-a_9v^{(n)},_r)=-q+q_\omega^{(n-1)}\,,\\ L_3(a_4u^{(n)}+a_7\psi^{(n)}-a_9w^{(n)},_r-a_{10}v^{(n)},_r)+\frac{c}{6}K_3^-\left(v^{(n)},_{rr}+\frac{v^{(n)},_r}{r}\right)=-q+g_\omega^{(n-1)}\,,\end{gathered}\tag{3}$$

где n – номер приближения.

Нелинейные добавки в (3) вычисляются по результатам предыдущего приближения с помощью соотношений $(\alpha=r,\psi)$

$$p_\omega^{(n-1)}=T_{r\omega}^{(n-1)},_r+\frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n-1)}-T_{\varphi\omega}^{(n-1)})\,,\quad h_\omega^{(n-1)}=H_{r\omega}^{(n-1)},_r+\frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)}-H_{\varphi\omega}^{(n-1)})\,,$$

$$q_\omega^{(n-1)}=M_{r\omega}^{(n-1)},_{rr}+\frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)},_r-M_{\varphi\omega}^{(n-1)},_r)\,,\quad g_\omega^{(n-1)}=D_{r\omega}^{(n-1)},_{rr}+\frac{1}{r}\left(2D_{r\omega}^{(n-1)},_r-D_{\varphi\omega}^{(n-1)},_r\right).$$

Решение системы уравнений равновесия получено в рекуррентном виде.