

УДК 539.3

А. С. КРАВЧУК, доктор физико-математических наук, А. И. КРАВЧУК, кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет, Минск

### МОДЕЛИРОВАНИЕ НДС СЕЧЕНИЯ ТОРМОЗНОГО БАРАБАНА С ПОМОЩЬЮ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО КОЛЬЦА

Смешанные задачи для кольцевых областей с нулевыми главными векторами сил, приложенных к границам, являются моделями сечений различных конструкций тормозных барабанов. Ограничение перемещений на внешней границе кольца указывает на использование усиливающих конструктивных элементов и позволяет принять во внимание при расчете напряженного состояния сечения технологическую неточность их изготовления и монтажа. Решение смешанной задачи для кольца с заданными напряжениями на внутренней и перемещениями на внешней границах осталось без внимания в научной литературе. Предполагается, что на внутренней границе напряжения и на внешней границе перемещения представлены в виде разложений в ряды Фурье. Кроме того, демонстрируется удобство применения системы компьютерной алгебры Mathematica, позволяющей строить распределения напряжений с помощью комплекснозначных потенциалов, без предварительного выделения вещественной и мнимой частей.

**Введение.** Смешанные задачи для кольцевых областей с нулевыми главными векторами сил, приложенных к границам, являются моделями сечений различных конструкций тормозных барабанов. Ограничение перемещений на внешней границе кольца указывает на использование усиливающих конструктивных элементов и позволяет принять во внимание технологическую неточность их изготовления и монтажа.

Отметим, что решение смешанной задачи для кольца с заданными напряжениями на внутренней и перемещениями на внешней границах осталось без внимания в научной литературе. Настоящая статья призвана восполнить этот пробел. Демонстрируется общая методика, разработанная авторами для решения краевых задач для круговых областей. Она отличается от метода решения, предложенного Н. И. Мусхелишвили, изложенного им в фундаментальной монографии [1].

Хотя предлагаемый авторами метод выглядит излишне громоздким, однако является единственно возможным для решения поставленной задачи, т.к. подход Н. И. Мусхелишвили, примененный им при решении первой основной задачи для кольца [1], хотя и выглядит простым и эффективным, однако верен только в частном случае. Так, полученная им система уравнений [1, с. 209, формула (6)] имеет три неизвестные при двух разрешающих уравнениях. Далее по тексту при преобразованиях одна из неизвестных теряется, что свидетельствует о неприменимости решения в общем случае.

**Общие формулы Колосова – Мусхелишвили.** Для упругого кольца формулы в декартовых координатах имеют вид [1, 2]

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]; \tag{1}$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[z\varphi''(z) + \psi'(z)]; \tag{2}$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{3}$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  – функции, голоморфные в области кольца с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним радиусом

$R_2$  (рисунок 1);  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\kappa$  – константа, определяемая видом напряженного состояния:  $\kappa = 3 - 4\nu$  – при плоской деформации,  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  – при плоском напряженном состоянии.

В полярной системе координат для напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  можно получить уравнение [1]

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\varphi''(z) - \frac{z}{z} \cdot \psi'(z). \tag{4}$$

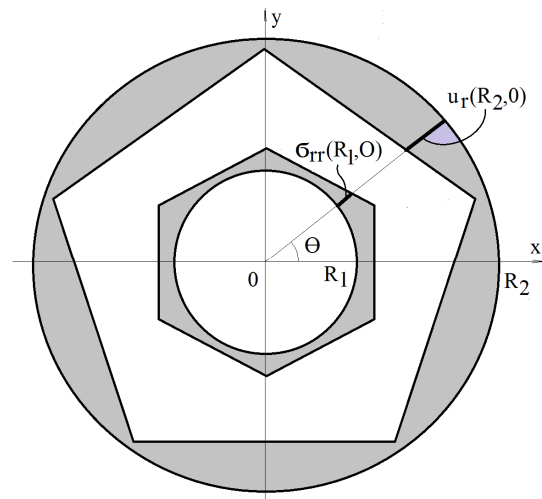


Рисунок 1 – Кольцо под действием самоуравновешивающегося внутреннего нормального напряжения  $\sigma_{rr}(R_1, \theta)$  и внешнего нормального перемещения  $u_r(R_2, \theta)$  ( $R_1$  – внутренний радиус кольца,  $R_2$  – внешний радиус кольца)

Учитывая, что на внутренней ( $n = 1$ ) и внешней ( $n = 2$ ) границах  $L_n$  кольца (где  $L_n = R_n e^{i\theta}$  ( $n = \overline{1, 2}$ ;  $\theta \in [0, 2\pi]$ )) действуют самоуравновешивающиеся нагрузки (т.е.

$(F_{x,n}, F_{y,n}) = 0$ , где  $F_{x,n}, F_{y,n}$  – проекции главных векторов сил приложенных к внутренней радиуса  $R_1$  и внешней радиуса  $R_2$  границам кольца, потенциалы  $\varphi(z), \psi(z)$  приобретают вид [1, 2]

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1} \cdot z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,2}}{z^k}; \quad \psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,1} \cdot z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k,2}}{z^k}, \quad (5)$$

при

$$\begin{aligned} F_{x,n} + iF_{y,n} &= \\ &= -R_n \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sigma_{rr,n} \Big|_{r=R_n} + i\sigma_{r\theta,n} \Big|_{r=R_n} \right) e^{i\theta} d\theta = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $a_{k,1}, a_{k,2}, b_{k,1}, b_{k,2}$  – в общем случае комплексные числа, выбираемые исходя из краевых условий (см. рисунок 1).

Воспользуемся формулами, связывающими компоненты перемещений  $(u_r, u_\theta)$  в полярной системе координат с перемещениями в декартовой системе координат  $(u_x, u_y)$  [1]:

$$u_r + iu_\theta = (u_x + iu_y) e^{-i\theta}. \quad (7)$$

При решении смешанной задачи в указанной выше постановке для областей с круговой границей используются краевые условия для  $\sigma_{rr} \Big|_{r=R_1} = \sigma_{rr}(R_1, \theta)$ ,  $\sigma_{r\theta} \Big|_{r=R_2} = \sigma_{r\theta}(R_1, \theta)$ , а также  $u_r \Big|_{r=R_2} = u_r(R_2, \theta)$ ,  $u_\theta \Big|_{r=R_2} = u_\theta(R_2, \theta)$ .

Будем полагать, что на внутренней границе кольца для  $\sigma_{rr}(R_1, \theta)$  справедливо следующее равенство:

$$\sigma_{rr}(R_1, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(j\theta) + B_j \sin(j\theta)), \quad (8)$$

где  $A_j, B_j$  ( $j = \overline{1, \infty}$ ) – вещественные коэффициенты рядов Фурье, для которых выполнены условия

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{rr}(R_1, \theta) \cos(j\theta) d\theta, \quad j = \overline{0, \infty}; \\ B_j &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{rr}(R_1, \theta) \sin(j\theta) d\theta, \quad j = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (9)$$

Простейшим и наиболее часто встречающимся условием для  $\sigma_{r\theta}(R_1, \theta)$  является уравнение

$$\sigma_{r\theta}(R_1, \theta) = 0. \quad (10)$$

Наиболее общим условием для  $u_r(R_2, \theta)$ , является его задание на границах кольца с помощью двух различных рядов Фурье:

$$u_r(R_2, \theta) = \frac{A_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j^* \cos(j\theta) + B_j^* \sin(j\theta)), \quad (11)$$

где  $A_j^*, B_j^*$  – вещественные коэффициенты рядов Фурье, для которых выполнены условия

$$A_j^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_r(R_2, \theta) \cos(j\theta) d\theta, \quad j = \overline{0, \infty},$$

$$B_j^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_r(R_2, \theta) \sin(j\theta) d\theta, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (12)$$

Наиболее простым и широко распространенным условием на  $u_\theta(R_2, \theta)$  является уравнение, означающее сцепление границ кольца с границами круга, внедряемого внутрь кольца (для внутренней границы кольца), и отверстия, в которое вставляется кольцо (для внешней границы кольца):

$$u_\theta(R_2, \theta) = 0. \quad (13)$$

Подставляя (5) в (4) и (5) в (3), а затем в (7), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1} k z^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a_{k,2}}{z^{k+1}} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k,1}} k \overline{z}^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_{k,2}}}{\overline{z}^{k+1}} - \\ &- \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1} k(k-1) z^k + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \frac{a_{k,2}}{z^{k+1}} \right) - \\ &- \frac{z}{z} \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,1} k z^k - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{b_{k,2}}{z^{k+1}} \right); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 2\mu(u_r + iu_\theta) &= e^{-i\theta} \left( \kappa \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,2}}{z^k} \right) - \right. \\ &- z \left( \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_{k,1}} k \overline{z}^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\overline{a_{k,2}}}{\overline{z}^{k+1}} \right) - \\ &\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_{k,1}} \overline{z}^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{b_{k,2}}}{\overline{z}^k} \right). \end{aligned}$$

Выполнив замену  $z = re^{i\theta}$  и перейдя на внутреннюю или внешнюю границу кольца при  $r = R_n$ , получаем ( $n = \overline{1, 2}$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} &= \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^{k-1} a_{k,1} e^{i(k-1)\theta} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} a_{k,2} e^{-i(k+1)\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^{k-1} \overline{a_{k,1}} e^{-i(k-1)\theta} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \overline{a_{k,2}} e^{i(k+1)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1} k(k-1) R_1^k e^{ik\theta} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_1^{k+1}} a_{k,2} e^{-i(k+1)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^k b_{k,1} e^{i(k+2)\theta} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} b_{k,2} e^{-i(k-1)\theta}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\mu(u_r(R_2, \theta) + iu_\theta(R_2, \theta)) &= \kappa \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k a_{k,1} e^{i(k-1)\theta} + \\ &+ \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} a_{k,2} e^{-i(k+1)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} k R_2^k \overline{a_{k,1}} e^{-i(k-1)\theta} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R_2^k} \overline{a_{k,2}} e^{i(k+1)\theta} - \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \overline{b_{k,1}} e^{-i(k+1)\theta} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \overline{b_{k,2}} e^{i(k-1)\theta}. \end{aligned}$$

Разделяя вещественную и мнимую части в предыдущих равенствах и используя краевые условия (8), (10), (11) и (13), получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^{k-1} \operatorname{Re}(a_{k,1} e^{i(k-1)\theta}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Re}(a_{k,2} e^{-i(k+1)\theta}) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^{k-1} \operatorname{Re}(\overline{a_{k,1}} e^{-i(k-1)\theta}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Re}(\overline{a_{k,2}} e^{i(k+1)\theta}) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) R_1^k \operatorname{Re}(a_{k,1} e^{i k \theta}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_1^{k+1}} \operatorname{Re}(a_{k,2} e^{-i(k+1)\theta}) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^k \operatorname{Re}(b_{k,1} e^{i(k+2)\theta}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Re}(b_{k,2} e^{-i(k-1)\theta}) = \\ & = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(j\theta) + B_j \sin(j\theta)); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^{k-1} \operatorname{Im}(a_{k,1} e^{i(k-1)\theta}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Im}(a_{k,2} e^{-i(k+1)\theta}) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^{k-1} \operatorname{Im}(\overline{a_{k,1}} e^{-i(k-1)\theta}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Im}(\overline{a_{k,2}} e^{i(k+1)\theta}) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) R_1^k \operatorname{Im}(a_{k,1} e^{i k \theta}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_1^{k+1}} \operatorname{Im}(a_{k,2} e^{-i(k+1)\theta}) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^k \operatorname{Im}(b_{k,1} e^{i(k+2)\theta}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Im}(b_{k,2} e^{-i(k-1)\theta}) = 0; \\ & \kappa \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \operatorname{Re}(a_{k,1} e^{i(k-1)\theta}) + \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Re}(a_{k,2} \cdot e^{-i(k+1)\theta}) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot R_2^k \cdot \operatorname{Re}(\overline{a_{k,1}} \cdot e^{-i(k-1)\theta}) + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Re}(\overline{a_{k,2}} \cdot e^{i(k+1)\theta}) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \cdot \operatorname{Re}(\overline{b_{k,1}} \cdot e^{-i(k+1)\theta}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Re}(\overline{b_{k,2}} \cdot e^{i(k-1)\theta}) = \\ & = 2\mu \cdot \left( \frac{A_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j^* \cdot \cos(j \cdot \theta) + B_j^* \cdot \sin(j \cdot \theta)) \right); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \kappa \cdot \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \cdot \operatorname{Im}(a_{k,1} \cdot e^{i(k-1)\theta}) + \kappa \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \cdot \operatorname{Im}(a_{k,2} \cdot e^{-i(k+1)\theta}) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot R_2^k \cdot \operatorname{Im}(\overline{a_{k,1}} \cdot e^{-i(k-1)\theta}) + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R_2^k} \cdot \operatorname{Im}(\overline{a_{k,2}} \cdot e^{i(k+1)\theta}) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \cdot \operatorname{Im}(\overline{b_{k,1}} \cdot e^{-i(k+1)\theta}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \cdot \operatorname{Im}(\overline{b_{k,2}} \cdot e^{i(k-1)\theta}) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя вещественную и мнимую части коэффициентов  $a_{k,1}$ ,  $a_{k,2}$ ,  $b_{k,1}$ ,  $b_{k,2}$  в (15) и (16), далее получаем вещественные уравнения, разделяя на части соответствующие системе  $\cos(m\theta)$  и  $\sin(m\theta)$ :

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^{k-1} \operatorname{Re}(a_{k,1}) \cos((k-1)\theta) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Re}(a_{k,2}) \cos((k+1)\theta) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) R_1^k \operatorname{Re}(a_{k,1}) \cos(k\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_1^{k+1}} \operatorname{Re}(a_{k,2}) \cos((k+1)\theta) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^k \operatorname{Re}(b_{k,1}) \cos((k+2)\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Re}(b_{k,2}) \cos((k-1)\theta) = \\ & = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(j\theta)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \kappa \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \operatorname{Re}(a_{k,1}) \cos((k-1)\theta) + \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Re}(a_{k,2}) \cos((k+1)\theta) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k R_2^k \operatorname{Re}(a_{k,1}) \cos((k-1)\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Re}(a_{k,2}) \cos((k+1)\theta) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \operatorname{Re}(b_{k,1}) \cos((k+1)\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Re}(b_{k,2}) \cos((k-1)\theta) = \\ & = 2\mu \left( \frac{A_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j^* \cos(j\theta) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) R_1^k \operatorname{Re}(a_{k,1}) \sin(k\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_1^{k+1}} \operatorname{Re}(a_{k,2}) \sin((k+1)\theta) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^k \operatorname{Re}(b_{k,1}) \sin((k+2)\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Re}(b_{k,2}) \sin((k-1)\theta) = 0; \\ & \kappa \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \operatorname{Re}(a_{k,1}) \sin((k-1)\theta) - \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Re}(a_{k,2}) \sin((k+1)\theta) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k R_2^k \operatorname{Re}(a_{k,1}) \sin((k-1)\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Re}(a_{k,2}) \sin((k+1)\theta) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \operatorname{Re}(b_{k,1}) \sin((k+1)\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Re}(b_{k,2}) \sin((k-1)\theta) = 0; \\ & - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^{k-1} \operatorname{Im}(a_{k,1}) \sin((k-1)\theta) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Im}(a_{k,2}) \sin((k+1)\theta) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) R_1^k \operatorname{Im}(a_{k,1}) \sin(k\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_1^{k+1}} \operatorname{Im}(a_{k,2}) \sin((k+1)\theta) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^k \operatorname{Im}(b_{k,1}) \sin((k+2)\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Im}(b_{k,2}) \sin((k-1)\theta) = \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(j\theta); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & - \kappa \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \operatorname{Im}(a_{k,1}) \sin((k-1)\theta) + \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Im}(a_{k,2}) \sin((k+1)\theta) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k R_2^k \operatorname{Im}(a_{k,1}) \sin((k-1)\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Im}(a_{k,2}) \sin((k+1)\theta) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \operatorname{Im}(b_{k,1}) \sin((k+1)\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Im}(b_{k,2}) \sin((k-1)\theta) = \\ & = 2\mu \sum_{j=1}^{\infty} B_j^* \sin(j\theta), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) R_1^k \operatorname{Im}(a_{k,1}) \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{R_1^{k+1}} \operatorname{Im}(a_{k,2}) \cos((k+1)\theta) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k R_1^k \operatorname{Im}(b_{k,1}) \cos((k+2)\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R_1^{k+1}} \operatorname{Im}(b_{k,2}) \cos((k-1)\theta) = 0; \\ & \kappa \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \operatorname{Im}(a_{k,1}) \cos((k-1)\theta) + \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Im}(a_{k,2}) \cos((k+1)\theta) + \\ & + \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Im}(a_{k,2}) \cos((k+1)\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} k R_2^k \operatorname{Im}(a_{k,1}) \cos((k-1)\theta) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Im}(a_{k,2}) \cos((k+1)\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} R_2^k \operatorname{Im}(b_{k,1}) \cos((k+1)\theta) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_2^k} \operatorname{Im}(b_{k,2}) \cos((k-1)\theta) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (19) и (20) очевидно, что если  $B_j = B_j^* = 0$ , т.е.  $\sigma_{rr}(R_1, \theta)$  и  $u_r(R_2, \theta)$  – четные функции аргумента  $\theta$ , то все мнимые части коэффициентов  $a_{k,n}$  и  $b_{k,n}$  будут равны нулю, т.е.  $\operatorname{Im}(a_{k,n}) = \operatorname{Im}(b_{k,n}) = 0$  и достаточно определить вещественные части упомянутых коэффициентов с помощью двух систем (17) и (18).

Далее будем решать поставленную задачу, используя только (17), (18) и, соответственно, гипотезу о четности  $\sigma_{rr}(R_1, \theta)$  и  $u_r(R_2, \theta)$ . Для констант из (17), (18) можно получить следующие уравнения:

$$2a_{1,1} + \frac{1}{R_1^2} b_{1,2} = \frac{A_0}{2}; (\kappa - 1)R_2 a_{1,1} - \frac{1}{R_2} b_{1,2} = \mu A_0^*. \quad (21)$$

Для функций аргумента  $\theta$  из (17), (18) можно получить две системы:

$$\begin{aligned} 4R_1 a_{2,1} + \frac{2}{R_1^3} b_{2,2} &= A_1; (\kappa - 2)R_2^2 a_{2,1} - \frac{1}{R_2^2} b_{2,2} = 2\mu A_1^*, \\ \text{Re}(b_{2,2}) &= 0; (\kappa + 2)R_2^2 a_{2,1} - \frac{1}{R_2^2} b_{2,2} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

которые автоматически удовлетворяются при условии, что  $A_1 = A_1^* = 0$ .

Рассмотрим более детально напряженное состояние на контуре (при  $r = R_1 \wedge R_2$ ), которое определяет вещественные коэффициенты  $a_{2,1}$ ,  $b_{2,2}$  (остальные  $a_{k,n}$  и  $b_{k,n}$  будут равны нулю). Из (4) и (5) можно получить

$$(\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta})|_{r=R_n} = 2 \left( a_{2,1} R_n + b_{2,2} \frac{1}{R_n^3} \right) e^{-i\theta}. \quad (23)$$

Подставляя (15) в (6), получаем

$$\begin{aligned} F_{x,n} + iF_{y,n} &= -2 \left( a_{2,1} R_n + b_{2,2} \frac{1}{R_n^3} \right) R_n \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^2 d\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) очевидно, что величины  $a_{2,1}$ ,  $b_{2,2}$  определяют величины главных векторов сил, приложенных к границам кольца в случае четности  $u_r(R_n, \theta)$  относительно аргумента  $\theta$  (т.е. при  $B_j = B_j^* = 0$ ), а следовательно [с учетом (22)], для самоуравновешивающегося случая достаточно, чтобы  $A_1 = A_1^* = 0$  в разложениях напряжений  $\sigma_{rr}(R_1, \theta)$  и перемещений  $u_r(R_2, \theta)$  на границах кольца в ряд Фурье.

Очевидно, что в случае, когда  $B_j = B_j^* = 0$ , для функций аргумента  $k\theta$  (где  $k \geq 2$  – произвольное целое число) из (17), (18) можно получить систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2(k+1)R_1^k a_{(k+1),1} - \frac{(k-1)(k+1)}{R_1^k} a_{(k-1),2} + \\ + \frac{k+1}{R_1^{k+2}} b_{(k+1),2} &= (A_k + k(k-1)R_1^k a_{k,1} + \\ &+ (k-2)R_1^{(k-2)} b_{(k-2),1}); \end{aligned} \quad (25)$$

$$(\kappa - (k+1))R_2^{(k+1)} a_{(k+1),1} + (\kappa + (k-1)) \cdot \frac{1}{R_2^{(k-1)}} a_{(k-1),2} - \quad (26)$$

$$\begin{aligned} -R_2^{(k-1)} b_{(k-1),1} - \frac{1}{R_2^{(k+1)}} b_{(k+1),2} &= 2\mu A_k^*; \\ -\frac{(k-1)k}{R_1^k} a_{(k-1),2} + \frac{(k+1)}{R_1^{(k+2)}} b_{(k+1),2} &= \\ = -(k-2)R_1^{(k-2)} b_{(k-2),1} - k(k-1)R_1^k a_{k,1}; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} (\kappa + (k+1))R_2^{(k+1)} a_{(k+1),1} - (\kappa - (k-1)) \frac{1}{R_2^{(k-1)}} a_{(k-1),2} + \\ + R_2^{(k-1)} b_{(k-1),1} - \frac{1}{R_2^{(k+1)}} b_{(k+1),2} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, из (21), (22), (25)–(28) получаем значения коэффициентов  $a_{k,n}$  и  $b_{k,n}$  потенциалов (5) с условием, что  $B_j = B_j^* = 0$  в (8) и (11). Для коэффициентов  $a_{k,1}$  справедливы следующие равенства:

$$a_{1,1} = \frac{1}{\kappa + 1} \left( \frac{A_0}{2} + \mu \frac{A_0^*}{R_2} \right); a_{2,1} = 0.$$

Для любого  $k \geq 3$  получаем:

$$\begin{aligned} a_{k,1} &= \left( R_1^{k+1} \left( (k-1)R_1^2 - kR_2^2 \right) A_{k-1} - kR_1^2 R_2^k \times \right. \\ &\times \mu A_{k-1}^* + R_1^{2(k-1)} \left( (1+2(k-1))R_1^2 - 2kR_2^2 \right) \times \\ &\times \left( (k-2)(k-1)R_1^2 a_{(k-1),1} + (k-3)b_{(k-3),1} \right) \Big/ \left( kR_1^2 \times \right. \\ &\times \left. \left( 2R_1^{2(k-1)} \left( (k-1)R_1^2 - kR_2^2 \right) - \kappa R_2^{2k} \right) \right) \end{aligned}$$

Далее для коэффициентов  $a_{k,2}$  ( $k \geq 1$ ) получаем уравнения:

$$\begin{aligned} a_{k,2} &= R_1^{k-1} \left( \kappa R_2^{2k+4} \left( 2R_2^{k+1} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left( k(k+1)R_1^2 a_{(k+1),1} + (k-1)b_{(k-1),1} \right) + R_1^2 A_{k+1} \right) + \\ &+ 2R_1^{3-k+5} \left( k(k+1)R_1^2 a_{(k+1),1} + (k-1)b_{(k-1),1} \right) - \\ &- 2\mu(k+2)A_{k+1}^* R_1^{k+3} R_2^{k+2} \Big/ \left( k \times \right. \\ &\times \left. \left( 2R_1^{2(k+1)} \left( (k+1)R_1^2 - (k+2)R_2^2 \right) - \kappa R_2^{2k+4} \right) \right) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $b_{k,1}$  при  $k \geq 1$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} b_{k,1} &= R_2 \left( R_1^{k+3} R_2 A_{k+1} \times \right. \\ &\times \left( R_2^2 + (1+k) \left( kR_1^2 - (k+1)R_2^2 \right) - \kappa^2 R_2^2 \right) - \\ &- kR_1^2 R_2^{k+3} (2+k+\kappa) \mu A_{k+1}^* - \\ &- 2R_1^{4-k+6} R_2^{-(2-k+1)} \kappa \times \\ &\times \left( k(1+k)R_1^2 a_{(k+1),1} + (k-1)b_{(k-1),1} + \right. \\ &+ R_1^{2(k+1)} R_2^{-(k+1)} \times \\ &\times \left. \left( 2R_1^2 \left( R_2^2 + (k+1) \left( kR_1^2 - (1+k)R_2^2 \right) + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. (k+2)\kappa R_2^2 \right) \mu A_{k+1}^* - R_2^{k+2} \times \right. \\ &\times \left. \left( (k+2 - 2(k+1)^2) R_1^2 + 2R_1^2 (\kappa^2 - 1 + (k+1)^2) \right) \right) \times \\ &\times \left( k(1+k)R_1^2 a_{(k+1),1} + (k-1)b_{(k-1),1} \right) \Big/ \left( kR_1^2 \times \right. \\ &\times \left. \left( -2R_2^{2(k+1)} \left( (1+k)R_1^2 - (k+2)R_2^2 \right) + \kappa R_2^{2k+4} \right) \right) \end{aligned}$$

Рассмотрим коэффициенты  $b_{k,2}$ :

$$b_{1,2} = \frac{2R_1^2}{(\kappa + 1)} \left( (\kappa - 1) \frac{A_0}{4} - \mu \frac{A_0^*}{R_2} \right); b_{2,2} = 0.$$

Для коэффициентов  $b_{k,2}$  ( $k \geq 3$ ) получаем уравнения:

$$\begin{aligned} b_{k,2} &= -\mu R_1^{k-1} R_2 \left( \kappa R_2^{2(k-1)} \left( (2k-1)R_1^{k-1} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left( (k-2)(k-1)R_1^2 + (k-3)b_{(k-3),1} \right) + \right. \\ &+ \left. (k-1)R_1^2 A_{k-1} \right) + 2kR_1^{3-(k-1)} R_2 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( (k-2)(k-1)R_1^2 a_{(k-1),1} + (k-3)b_{(k-3),1} \right) - \\ & - 2\mu(k-1)kR_1^{k+1}R_2^{k-1}A_{k-1}^* \Big/ \left( k \times \right. \\ & \left. \times \left( 2R_1^{2(k-1)} \left( (k-1)R_1^2 - kR_2^2 \right) - \kappa R_2^{2k} \right) \right) \end{aligned}$$

Для проведения численного эксперимента зададим распределение радиальных напряжений  $\sigma_{rr}(R_1, \theta)$  на внутренней поверхности кольца и радиальных перемещений  $u_r(R_2, \theta)$  на внешней границе кольца с помощью отрезка ряда Фурье, приближающего гипотрохоиду [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(R_1, \theta) &= \Sigma \sqrt{(1+l_1^2) + 2l_1 \cos((1+m_1)\theta)}; \\ u_r(R_2, \theta) &= U \sqrt{(1+l_2^2) + 2l_2 \cos((1+m_2)\theta)}, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $U$  и  $\Sigma$  – произвольные нормирующие множители;  $m_n$  – целое число;  $l$  ( $0 \leq l_n \leq 1/m_n$ ) – вещественная константа.

Коэффициенты  $A_j$  и  $A_j^*$  ( $j = \overline{0,5}$ ) вычисляются численно при подстановке конкретных значений  $U$  и  $\Sigma$ ,  $m_n$  и  $l_n$  в (31), а затем полученного выражения в (9) и (12) (рисунки 2, 3).

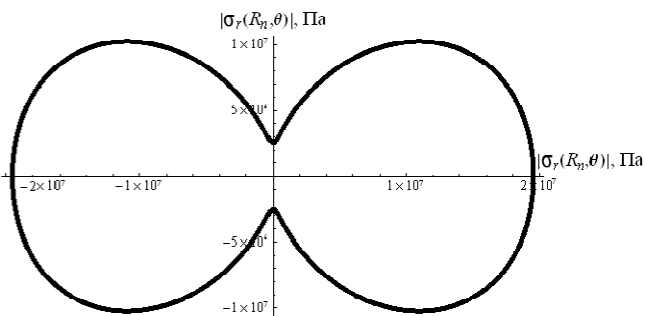


Рисунок 2 – Распределение модуля нормальных радиальных напряжений  $|\sigma_{rr}(R_1, \theta)|$  на внутренней границе кольца, приближенного в смысле отрезка ряда (8) для  $j = \overline{0,5}$  с вычисленными по (9) коэффициентами  $A_j$  ( $\Sigma = -10^7$  Па,  $m_1 = 1$ ,  $l_1 = 1$ )

Вычисленные коэффициенты  $A_j$  и  $A_j^*$  ( $j = \overline{0,5}$ ) подставляются в уравнения, определяющие коэффициенты  $a_{k,n}$  и  $b_{k,n}$ , далее полученные значения применяются в (5) и с помощью (1), (2) и (4) можно получить распределение напряжений в кольце (рисунок 4).

**Заключение.** В настоящей статье впервые поставлена и решена смешанная задача для кольца с заданными напряжениями на внутренней границе и перемещениями на внешней.

Предполагается, что на внутренней границе напряжения и на внешней границе перемещения представлены в виде разложений в ряды Фурье.

Кроме того, демонстрируется удобство применения системы компьютерной алгебры Mathematica, позволяющей строить распределения напряжений с помощью

Получено 26.03.2016

**A. S. Kravchuk, A. I. Kravchuk.** Simulation of stress-strain state of the brake drum section by a solution of a mixed problem for an elastic ring.

The mixed problem for a ring with a given stresses at the inner and displacements on the outside boundaries was first posed and solved in this paper. It is assumed that stress at the inner boundary and displacement at the outer boundary represented as a Fourier series. Besides usability of application of the computer algebra system Mathematica was demonstrated. It allows building a distribution of stresses with help of complex potentials, without prior separation of the real and imaginary parts of solution.

комплекснозначных потенциалов, без предварительного выделения вещественной и мнимой частей.

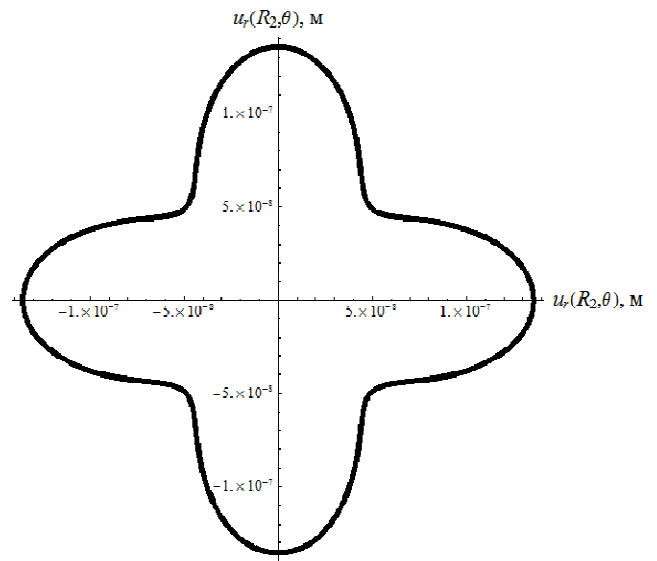


Рисунок 3 – Распределение радиальных перемещений  $u_r(R_2, \theta)$  внешней границы кольца, приближенных в смысле отрезка ряда (11) для  $j = \overline{0,5}$  с вычисленными по (12) коэффициентами  $A_j^*$  ( $U = 10^{-7}$  м,  $m_2 = 3$ ,  $l_2 = 1/3$ )

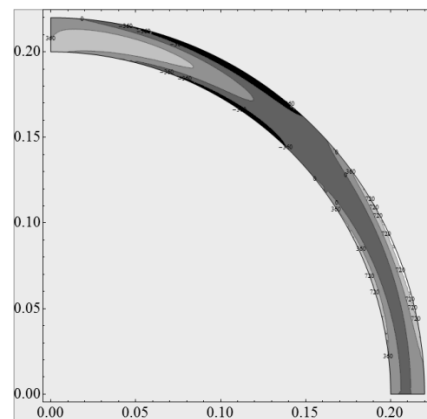


Рисунок 4 – Распределение нормальных напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$  в кольце ( $R_1 = 0,2$  м и  $R_2 = 0,22$  м при заданных нормальных напряжениях  $\sigma_{rr}(R_1, \theta)$  на внутренней границе кольца и перемещениях  $u_r(R_2, \theta)$ , на внешней границе кольца при  $\Sigma = -10^7$  Па,  $U = 10^{-7}$  м,  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 3$ ,  $l_n = 1/m_n$ )

#### Список литературы

1 **Мухелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.

2 **Амензаде, Ю. А.** Теория упругости / Ю. А. Амензаде. – М. : Высшая школа, 1976. – 272 с.