

2 Козунова, О. В. Нелинейный расчет балочных плит на слоистых основаниях с биогенными включениями / О. В. Козунова // Геотехника Беларуси: теория и практика. – Минск: БНТУ, 2008. – С. 37–65.

3 Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход к решению контактной задачи для нелинейно-упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета. Ч. 1 / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 1. – С. 5–13.

4 Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход к решению контактной задачи для нелинейно-упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Результаты расчета. Ч. 2 / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 2. – С. 15–19.

5 Козунова, О. В. Нелинейный расчет фундаментных плит на слоистых основаниях с использованием секущего модуля деформации / О. В. Козунова // Строительство и архитектура. – Вестник БрГТУ. – 2009. – № 1 (55) – С. 32–39.

6 Козунова, О. В. Нелинейный расчет инженерной системы «плита – основание» с использованием переменного модуля деформации / О. В. Козунова, Е. А. Сигаи // Вестник гражданских инженеров. – Санкт-Петербург, СПбГАСУ – 2011. – № 1 (26) – 213 с. – С. 72–82.

7 Козунова, О. В. Верификация вариационно-разностного подхода при расчете нелинейно-упругого неоднородного основания под балочной плитой / О. В. Козунова, Н. С. Щетько // Строительная наука и техника. – Минск – 2011. – № 2 (35) – 84 с. – С. 57–61

8 Лукаш, П. А. Основы нелинейной строительной механики / П. А. Лукаш. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.

9 Быховцев, В. Е. Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твердых тел / В. Е. Быховцев. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скарныны, 2007. – 219 с.

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, СЖАТОГО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ (ЗАДАЧА ЯСИНСКОГО)

Э. Г. КОСЫХ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В работе уточнено классическое решение «задачи Ясинского» о критической нагрузке [1].

Рассмотрим защемленную нижним торцом стойку длиной L , которая нагружена погонной нагрузкой $p(x)$ и сосредоточенной силой P (рисунок 1, а). Произвольное сечение стойки с координатой x при продольном изгибе отклоняется на величину $y(x)$.

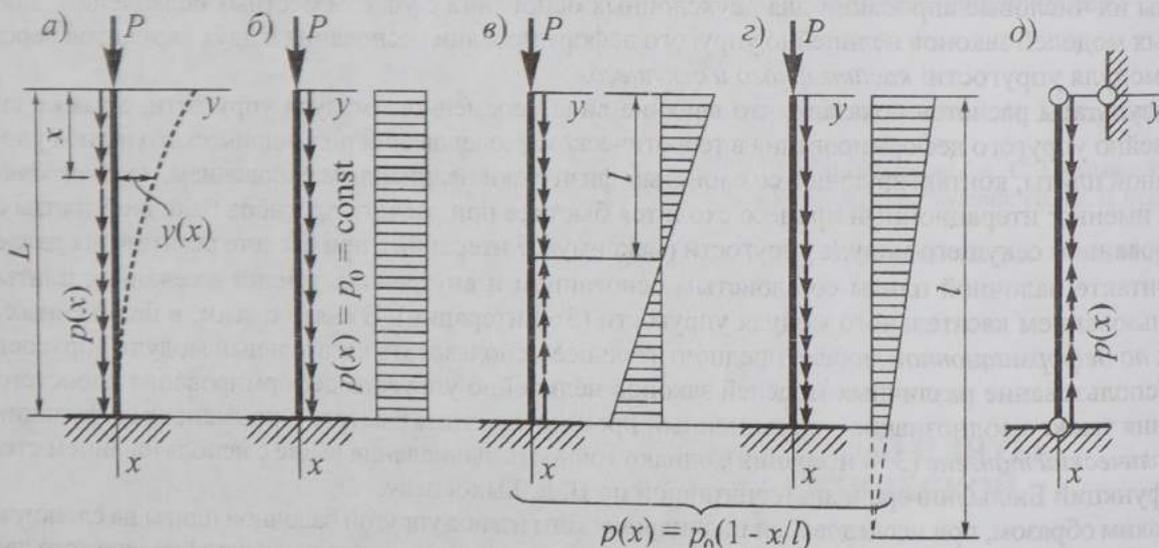


Рисунок 1

Пусть функция интенсивности нагрузки представлена в виде конечного многочлена $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots$ ($p_k = \text{const}$, $k = 0, 1, 2, \dots$). В частности, если $p_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), имеем равномерно распределенную нагрузку $p(x) = p_0 = \text{const}$, эпюра которой показана на рисунке 1, б. При $p_1 = -p_0/l$, $p_k = 0$ ($k = 2, 3, \dots$) нагрузка изменяется вдоль оси стойки линейно по закону $p(x) = p_0(1 - x/l)$. Здесь l – координата точки на оси x , где многочлен $p(x)$ имеет нулевое значение. При $l = 0,5L$ (рисунок 1, в)

погонная нагрузка ниже сечения $x > L/2$ направлена вверх, а в заделке сжимающее усилие нулевое. Нагрузка для случая $l > L$ показана на рисунке 1, з. Заметим, что при $l \gg L$ решение должно стремиться к результатам для случая $p(x) = \text{const}$, что может служить проверкой правильности расчетов. Вычисляя продольную силу в произвольном сечении стойки от распределенной погонной нагрузки

$$N(x) = \int_0^x p(x) dx = p_0 x + p_1 \frac{x^2}{2} + p_2 \frac{x^3}{3} + \dots,$$

и учитывая сосредоточенную силу P , получим следующее дифференциальное уравнение продольного изгиба стойки:

$$(EI y'')'' + \left[\left(P + p_0 x + p_1 \frac{x^2}{2} + p_2 \frac{x^3}{3} + \dots \right) y' \right]' = 0. \quad (1)$$

Удержание первых двух членов многочлена $p(x)$ достаточно для понимания методики решения задачи, поэтому в (1) положим все $p_k = 0$, если $k \geq 2$. Жесткость стойки будем считать постоянной: $EI = \text{const}$. Введем обозначения: $\alpha = PL^2/EI$ – безразмерная сосредоточенная сила; $\beta = p_0 L^3/EI$, $\beta_k = p_k L^{k+3}/EI$ (для $k \geq 1$) – безразмерные параметры распределенной нагрузки.

С учетом принятых обозначений и ограничений вместо (1) получим уравнение

$$(y'')'' + \left[(\alpha + \beta x + \beta_1 x^2 / 2) y' \right]' = 0. \quad (2)$$

В случае линейной нагрузки параметр $\beta_1 = -\beta/\phi$ ($\phi = l/L$), причем при $L/l = 2$ (см. рисунок 1, в) $\phi = 0,5$, а при $0 < L/l < 1$ (см. рисунок 1, з) $\phi \geq 1$.

Следуя предложенному автором в [2] методу интегрирования систем уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, выполним преобразование: $y \equiv y_1$; $y_1'' = y_2$. Тогда вместо (2) получим:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta + \beta_1 x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha + \beta x + \beta_1 x^2 / 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

Матричное уравнение (3) приводится к виду

$$\{y\}'' + \text{In}(x)\{y\} = 0, \quad (4)$$

где вектор $\{y\}^T = (y_1, y_2)$, $\text{In}(x)$ – инвариант, описываемый следующим выражением:

$$\begin{aligned} \text{In}(x) = & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -0,5\beta_1 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5\beta & 0 \\ -0,5\alpha\beta & 0,5\beta \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0,25\beta_1 & 0 \\ -0,25(\beta^2 + \alpha\beta_1) & 0,25\beta_1 \end{pmatrix} x^2 + \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,25\beta\beta_1 & 0 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,0625\beta_1^2 & 0 \end{pmatrix} x^4. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение (5) можно использовать при наличии или отсутствии торцевой силы P как для стержня, шарнирно закрепленного обоими торцами, приняв в случае симметричной нагрузки $\phi = 0,5$ (рисунок 1, д), так и для стержня с заделкой в нижнем торце. Если интенсивность распределенной нагрузки постоянна, то надо в (5) положить $\beta_1 = 0$, если меняется линейно до нуля в заделке, то $\phi = 1$. Решение системы (1), приведенной к форме (4), получено в замкнутом виде с помощью матричных функций $\text{Com}(\text{In}(x))$, $\text{Sim}(\text{In}(x))$ [2]. В работе приведены результаты конкретных расчетов.

Задача о критической нагрузке для шарнирно опертого стержня, нагруженного симметрично относительно среднего сечения, впервые была решена Ф. С. Ясинским в работе [1]. В сечении посередине стержня им было получено значение критического напряжения $\sigma_{cr} = 31,35E(i/L)^2$ (E – модуль

Юнга, i – радиус инерции сечения). Согласно нашему решению это значение меньше:
 $\sigma_{cr} = 25,61E(i/L)^2$.

Таким образом, в работе уточнено классическое решение в «задаче Ясинского» о критической силе для стойки закрепленной в нижнем торце и сжатой распределенной нагрузкой постоянной интенсивности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Ясинский, Ф. С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней / Ф. С. Ясинский // Госиздат. – М.-Л., 1952. – 427 с.
- 2 Косых, Э. Г. Продольно-поперечный изгиб трехслойных стержней / Э. Г. Косых // Вестник СамГУ. Естественная серия. – 2008. – № 1 (67). – С. 390–399.

УДК 624.191.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ

А. Е. ЛАМОТКИН, В. П. ПРОКОПЬЕВ, Т. А. РОЩЕВА

*Уральский Федеральный Университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Российская Федерация*

Задача о распределении напряжений вблизи скважины долгие годы сводилась к задаче Ламе для бесконечной трубы, что как показала практика далеко от истины. Более точная картина напряжений может быть получена, с учетом конечной глубины скважины, а также наличие у нее дна (забоя). Цель данной работы при помощи численных методов получить картину напряжений с учетом вышеназванных факторов. Объектом исследования служит цилиндрическая выработка конечной глубины в горном массиве, который для упрощения расчетов моделируется, как однородное упругое изотропное тяжелое полупространство. Предметом исследования является напряженное состояние вблизи указанной выработки.

Для проведения дальнейших исследований из полупространства был выделен толстостенный цилиндр, который полностью содержит выработку, по высоте на четверть превосходящий глубину скважины и внешним радиусом $7R$, где R – радиус выработки. Данная замена возможна благодаря экспериментальным данным, которые свидетельствует о том, что влияние выработки на напряженное состояние исчезает на расстоянии $5R-7R$ от центра выработки. Для нахождения компонент тензора перемещения, закон Гука для изотропной среды, с учетом осесимметричности задачи составлены выражения компонент тензора напряжений через компоненты вектора перемещения и уравнения равновесия в перемещениях, также были записаны простейшие краевые условия. Далее были составлены разностные аналоги полученных выражений, для чего исследуемая плоская область была покрыта равномерной сеткой. Полученная система алгебраических уравнений была решена при помощи пакета для математических вычислений Matlab R2012b, при следующих значениях: количество точек разбиения по радиальному и вертикальному направлению одинаково равно 80, радиус цилиндрической выработки $R = 0,1$ м, глубина выработки $H = 800$ м, модуль Юнга $E = 3 \cdot 10^8$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$, плотность $\rho = 2400$ кг/м³. В соответствии с теорией механического подобия, для обеспечения подобия при моделировании равновесия упругих систем достаточно выполнить условие: $\rho g H = \text{const}$, в связи с этим для расчетов брались следующие значения параметров: $R = 0,1$ м, $H = 0,8$ м, $E = 3 \cdot 10^8$ Па, $\nu = 0,25$, $\rho = 2,4 \cdot 10^6$ кг/м³.

При анализе нас прежде всего интересовало значение вертикальной компоненты тензора напряжений, относительно нее можно сделать следующий вывод: на слоях вдали от забоя наблюдается разгрузка, т.е. напряжения по абсолютной величине убывают при приближении к поверхности выработки, физически это можно объяснить снижением плотности материала, а на слоях вблизи торца наблюдается нагрузка, т.е. напряжения по абсолютной величине возрастают при приближении к границе выработки. Также отметим, что для радиальной и касательной компонент вблизи забоя наблюдалось резкое