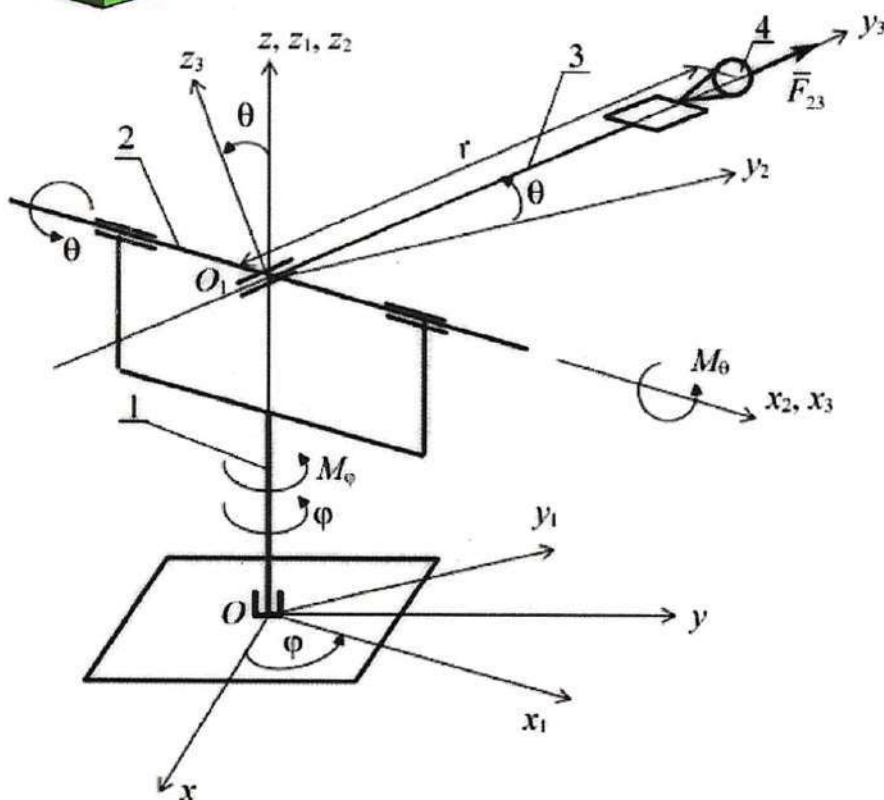
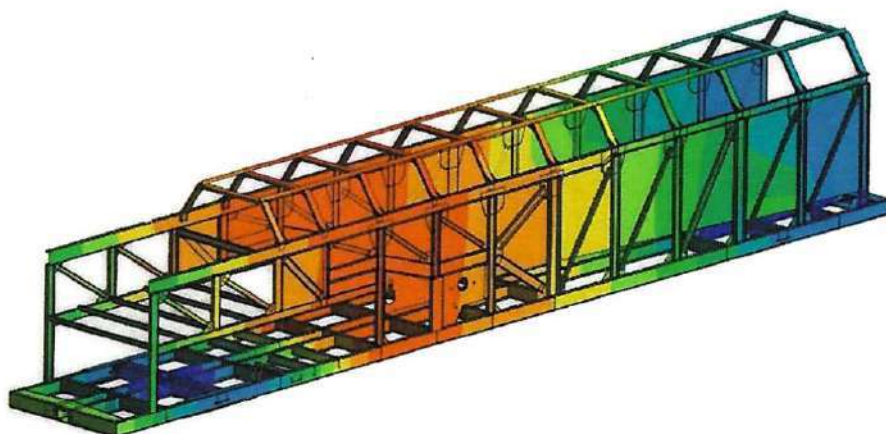


Учреждение образования
"Белорусский государственный
университет транспорта"

Кафедра
технической физики
и теоретической механики

МЕХАНИКА

ИССЛЕДОВАНИЯ И ИННОВАЦИИ



Выпуск 16

2023

MECHANICS

Researches and Innovations

Volume 16

СОДЕРЖАНИЕ

Научные публикации

<i>Абдусаттаров А., Рузиева Н. Б.</i> Деформирование подземных трубопроводов-стержней при переменном нагружении с учетом повреждаемости и взаимодействия с грунтом	5
<i>Akhramenko N. A.</i> Movement of a point material object in a massive ring plane	17
<i>Бобрицкий С. М.</i> Концепция индивидуального формирования структуры временных технических объектов, находящихся под действием нагрузок разной природы	22
<i>Бондаренко В. О.</i> Изменение напряжённо-деформированного состояния балок различного поперечного сечения в результате коррозии	28
<i>Веремейчик А. И., Нерода М. В., Холодарь Б. Г.</i> Влияние параметров зон с измененными после термообработки характеристиками материала на напряжённо-деформированное состояние образцов.....	35
<i>Ворожун И. А., Ворожун А. В.</i> Совершенствование мультимодальных перевозок труб большого диаметра	46
<i>Гахраманов В. Ф., Асланов Э. А.</i> Анализ характеристик легированных сталей после хромоалитирования.....	53
<i>Гегедеш М. Г., Ворожун А. В.</i> Особенности учета динамических нагрузок при перевозке длинномерных грузов железнодорожным транспортом.....	58
<i>Демьянчук О. В.</i> Моделирование обтекания потоком воздуха прямоугольного параллелепипеда	64
<i>Коднянко Е. В., Черноус Д. А.</i> Решение контактной задачи для тела качения с тонким деформируемым несжимаемым ободом	73
<i>Козел А. Г.</i> Термосиловой изгиб упругой трехслойной пластины, свободно лежащей на основании Пастернака.....	86
<i>Короткевич С. Г., Ковтун В. А., Лодня В. А.</i> Эксплуатационная нагруженность резервуаров для воды пожарных автоцистерн	100
<i>Кракова И. Е., Цыганок О. И.</i> Конечно-элементное моделирование вынужденных колебаний сэндвич-панелей.....	105
<i>Лачугина Е. А.</i> Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями.....	111
<i>Леоненко Д. В.</i> Неупругое деформирование ступенчатой круговой сэндвич-пластины	117
<i>Локтионов А. В.</i> Анализ движения пространственных исполнительных механизмов при работе в различных системах отсчета	122
<i>Локтионов А. В., Сидорович А. А.</i> Определение кинематических параметров центра схвата промышленного робота IRB 1400	130

<i>Максимчик К. В., Шимановский А. О.</i> Конечно-элементное моделирование деформирования рамной конструкции вагона снегоборочного поезда СМ-2.....	142
<i>Мартыненко Т. М., Смилвенко О. О., Мартыненко И. М., Лосик С. А.</i> Исследование надежности узла каркасной конструкции средствами программного комплекса ANSYS	148
<i>Отока А. Г., Холодилов О. В., Дашук П. А.</i> Автоматизированный магнитопорошковый контроль колесных пар с использованием систем видеонаблюдения и нейросетевых технологий	153
<i>Отока А. Г., Холодилов О. В., Ченик Д. Л.</i> Передвижная суспензионная система с рециркуляцией для магнитопорошковой дефектоскопии деталей вагонов и локомотивов	159
<i>Пупачёв Д. С., Кулинич Д. Д., Пинчук Н. А., Савицкий А. Н., Болотникова М. В.</i> Сочлененный снегоболотоход на базе отечественных узлов и агрегатов.....	167
<i>Русов Д. П., Шимановский А. О.</i> Нахождение остаточного ресурса рамы тележки дизель-поезда ДРБ1	178
<i>Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Абдусаттаров А.</i> Изгиб трехслойной пластины в температурном поле моментной нагрузкой	189
<i>Талецкий В. В.</i> Последствия ошибок проектирования покрытия одноэтажного промышленного здания в полном каркасе.....	196

Учебно-методические публикации

<i>Комнатный Д. В.</i> Изучение принципов регулирования в курсе «Теоретические основы автоматики и телемеханики» на базе механических регуляторов.....	201
<i>Фоменко С. А.</i> Составление уравнений движения для некоторых задач нелинейной механики и применение метода аналогий	207
<i>Чаганова О. С.</i> Применение программного комплекса Abaqus при изучении общетехнических дисциплин	217

НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ (SCIENTIFIC PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 16. Гомель, 2023

УДК 621.644

А. АБДУСАТТАРОВ, Н. Б. РУЗИЕВА

*Ташкентский государственный транспортный университет,
Ташкент, Узбекистан*

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ-СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАГРУЖЕНИИ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ГРУНТОМ

Приводится математическая модель взаимодействующих с грунтом подземных трубопроводов-стержней, которая учитывает повреждаемость их материала. На основе деформационной теории и вариационного принципа Гамильтона – Остроградского получена система дифференциальных уравнений движения трубопровода-стержня при переменном нагружении и сформулированы краевые задачи. Представлена методика расчета трубопроводов при динамическом нагружении с учетом вязкоупругого взаимодействия с грунтом. Построение решения системы дифференциальных уравнений с учетом заданных граничных и начальных условий выполнено с применением разностной схемы второго порядка точности. Представлен пример, в котором рассмотрены колебания подземной трубы с учетом ее вязкоупругого взаимодействия с грунтом и повреждаемости.

Ключевые слова: переменное нагружение, вязкоупругость, пластичность, вариационный принцип, повреждаемость, взаимодействие с грунтом.

Введение. При действии переменных нагрузок в элементах конструкций и сооружений наряду с упругостью проявляются дополнительные явления, такие как вторичные пластические деформации, изменение диаграмм деформирования от цикла к циклу, проявление свойств циклического упрочнения-разупрочнения и деформационной анизотропии, накопление повреждений и распространение трещин, приводящее к разрушению материала.

В работе [1] сформулированы основные уравнения, описывающие переменную пластичность и вязкопластичность, в том числе с учетом накопленных повреждений. Рассмотрены вопросы циклической и длительной прочности элемен-

тов конструкций. Введена функция повреждаемости для оценки прочности упругопластических и реономных тел при циклических нагружениях. Выполнено подробное описание диаграмм циклического деформирования для различных конструкционных материалов и показаны возможные уточнения и интерпретации диаграмм при решении задач циклической прочности. Создание методов расчета элементов конструкций на прочность при повторно-переменном нагружении стало возможным в результате экспериментального и теоретического изучения закономерностей циклического деформирования в упругопластической области, исследований кинетики напряжённо-деформированного состояния в зонах концентрации напряжений и разработки критериев накопления повреждений и разрушения при неоднородном напряженном состоянии [1–3].

Статья [4] посвящена проблеме построения математических моделей повреждаемых термоупруговязкопластических сред и методам экспериментального определения «нестандартных» констант моделей, связанных с параметрами поврежденности. Компьютерное моделирование процессов деформирования, поврежденности и континуального разрушения нелинейных материалов и конструкций рассматривается в работе [5]. В статье [6] представлена современная теория неупругости (термовязкопластичности), являющаяся обобщением и развитием идей, содержащихся в различных вариантах теории пластичности, ползучести, неупругости и накопления повреждений.

В работах [7, 8] рассмотрено деформирование трехслойных элементов конструкций при переменных нагружениях с учетом упругих, упругопластических и вязкоупругопластических свойств материалов. Численно исследовано напряженно-деформированное состояние при действии однократных и циклических нагрузок. На основе вариационного принципа Лагранжа сформулирована краевая задача изгиба трёхслойных стержней при переменном нагружении с учетом повреждаемости материала. Для решения сформулированных задач применен подход, базирующийся на методе упругих решений Ильюшина. Получены численные значения расчетных величин для элементов конструкций типа стержней-трубопроводов, пластин и оболочек с учетом циклических характеристик материалов и повреждаемости [9].

В работах [10, 11] исследованы условия взаимодействия трубы и грунта при продольных перемещениях трубопровода. На основе этих исследований была предложена гипотеза взаимного смещения подземных сооружений относительно грунта. Экспериментально установлено, что закон взаимодействия подземных трубопроводов с различными грунтами носит нелинейный характер, определены параметры, характеризующие нелинейные упругие, упругопластические и вязкопластические свойства взаимодействия таких трубопроводов с грунтом.

В [12, 13] излагаются методики численного расчета напряженно-деформированного состояния трубопроводов, оценки их прочности в условиях многофакторного анализа, использованы современные методы вычислитель-

ной механики. Дается описание методов численного моделирования магистральных трубопроводных систем. В указанной литературе представлены модели деформирования и колебаний трубопроводов по уточненной теории стержней, взаимодействующих с грунтом. Аналогичные задачи решены также в ряде статей, опубликованных в последнее время [14–16].

Целью представленной работы стало развитие исследований [17], связанных с комплексным учетом явлений, сопровождающих колебания трубопроводов, моделируемых стержнями.

Постановка задачи. Рассмотрим математическую модель и схему расчета трубопроводов – тонкостенных стержней при переменном нагружении на основе теории малых упругопластических деформаций и уточненной теории стержней, предложенной В. З. Власовым, Г. Ю. Джанелидзе и В. К. Кабуловым. При пространственном нагружении, включающем совместные продольные, поперечные и крутильные силы и моменты, законы распределения перемещений, деформаций и напряжений в сечениях стержня являются сложными, поэтому уточненная теория строится на основании ряда гипотез [18, 19].

Рассмотрим тонкостенный стержень произвольного сечения при воздействии внешних переменных сил. Ось OX направим по длине стержня, а оси OZ и OY разместим в плоскости поперечного сечения. Перемещения центральной линии стержня при исходном нагружении обозначим через u_i , компоненты деформаций и напряжений – через e_{ij} , σ_{ij} .

Пользуясь методом, предложенным В. В. Москвитиным [1], введем разности

$$\begin{aligned}\bar{u}_i^{(n)} &= (-1)^n (u_i^{(n-1)} - u_i^{(n)}); & \bar{e}_{ij}^{(n)} &= (-1)^n (e_{ij}^{(n-1)} - e_{ij}^{(n)}); \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} &= (-1)^n (\sigma_{ij}^{(n-1)} - \sigma_{ij}^{(n)}).\end{aligned}$$

Здесь и далее n – номер нагружения.

Перемещения точек стержня при переменном нагружении, соответствующие моменту времени t , представим в цилиндрических координатах x, r, γ ($x = x, y = r \cos \gamma, z = r \sin \gamma$):

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^{(n)}(x, r, \gamma, t) &= \bar{u}^{(n)}(x, t) - \bar{\alpha}_1^{(n)}(x, t) r \cos \gamma - \bar{\alpha}_2^{(n)}(x, t) r \sin \gamma + \\ &+ \varphi \bar{v}^{(n)}(x, t) + a_1 \bar{\beta}_1^{(n)}(x, t) + a_2 \bar{\beta}_2^{(n)}(x, t); \\ \bar{u}_2^{(n)}(x, r, \gamma, t) &= \bar{v}^{(n)}(x, t) - \bar{\theta}^{(n)}(x, t) r \sin \gamma; \\ \bar{u}_3^{(n)}(x, r, \gamma, t) &= \bar{w}^{(n)}(x, t) + \bar{\theta}^{(n)}(x, t) r \cos \gamma,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ – компоненты перемещений; $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ – углы поворота сечения при чистом изгибе; φ – функция кручения Сен-Венана; \bar{v} – погонный угол закручивания (крутка); $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$ – углы поперечного сдвига; a_1, a_2 – коэффициенты; $\bar{\theta}$ – угол закручивания.

В соответствии с теорией переменной пластичности компоненты напряжений связаны с деформациями следующим образом:

а) при переменном нагружении в фиктивных координатах (по Москвитину)

$$\bar{\sigma}_{11}^{(n)} = 3G(1-\omega^{(n)})\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)}; \quad \bar{\sigma}_{12} = G(1-\omega^{(n)})\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)}; \quad \bar{\sigma}_{13}^{(n)} = G(1-\omega^{(n)})\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)};$$

б) при переменном нагружении в текущих величинах (по Бурьеву)

$$\sigma_{11}^{(k)} = 3G \left\{ e_{11}^{(k)} - \left[\omega^{(k)} e_{11}^{(k)} + \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{\varepsilon}_{11}^{0(k-m)} \right] \right\};$$

$$\sigma_{13}^{(k)} = G \left\{ e_{31}^{(k)} - \omega^{(k)} \bar{\varepsilon}_{31}^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{\varepsilon}_{31}^{0(k-m)} \right\};$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = G \left\{ e_{12}^{(k)} - \omega^{(k)} \bar{\varepsilon}_{12}^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} \omega^{0(k-m)} \bar{\varepsilon}_{12}^{0(k-m)} \right\}.$$

Здесь G – модуль сдвига; индекс 0 соответствует началу следующего за ним номера нагружения. Функция пластичности определяется по формуле [9]

$$\omega^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{при } \bar{\varepsilon}_u^{(n)} \leq \bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta); \\ \bar{A}_n \left[1 - \frac{\bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta)}{\bar{\varepsilon}_u^{(n)}} \right]^{\bar{\alpha}_n} & \text{при } \bar{\varepsilon}_u^{(n)} > \bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta), \end{cases}$$

где $\bar{\varepsilon}_u$ – текущее значение интенсивности тензора деформаций, $\bar{\varepsilon}_s$ – предельное значение того же параметра, зависящее от функции повреждаемости η [1]; \bar{A}_n , $\bar{\alpha}_n$ – коэффициенты функции пластичности.

В случае применения обобщенного принципа Мазинга $\bar{A}_n = \lambda$, $\bar{\alpha}_n = 1$, $\bar{\varepsilon}_u^{(n)} = \bar{\alpha}_n \varepsilon_s$, при использовании диаграмм деформирования Гусенкова – Шнейдеровича $\bar{\varepsilon}_s^{(n)} = 2\varepsilon_s$, $\bar{A}_n = 1 - g_n$, где g_n – определяется экспериментально. При учете накопления повреждений

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_s^{(n)}(\eta) &= \alpha_1^{n-z} (1 + \alpha_1) \varepsilon_s + \\ &+ (3G)^{-1} B^{1/\alpha} \left[1 - 0,5(1 + \alpha_1) \alpha_1^{n-2} \right] \left[1 - (1 - \eta)^{1+\alpha} \right]^{1/\alpha} (n-1)^{-1/\alpha}. \end{aligned}$$

Функция повреждаемости η определяется из кинетического уравнения [1]

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = f(\bar{\sigma}_u, \eta_n)$$

при условии $\eta(0) = 0$, $\eta(N) = 1$, где N – число полуциклов до наступления предельного состояния (разрушения).

Вывод уравнения движения стержней – подземных трубопроводов.

Для анализа пространственного нагружения с учетом упругопластических деформаций и перечисленных выше взаимодействий используем вариационный принцип Гамильтона – Остроградского [9]

$$\delta \int_t (T - \Pi + A) dt = 0.$$

Выражения вариаций кинетической T , потенциальной Π энергий и работы A внешних сил имеют вид

$$\begin{aligned} \delta \int_t T^{(n)} dt &= \int_x \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{Y}^{(n)}}{\partial t} \mathbf{E} \delta \mathbf{Y}^{(n)} dx \Big|_t - \int_t \int_x \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}^{(n)}}{\partial t^2} \mathbf{E} \delta \mathbf{Y}^{(n)} dx dt; \\ \delta \int_t \Pi^{(n)} dt &= \int_t \left\{ (\mathbf{A}^{\text{уп}} - \mathbf{A}^{\text{пл}}) \frac{\partial \mathbf{Y}^{(n)}}{\partial x} + (\mathbf{B}^{\text{уп}} - \mathbf{B}^{\text{пл}}) \mathbf{Y}^{(n)} \right\} \mathbf{E} \delta \mathbf{Y}^{(n)} dt \Big|_x + \\ &+ \int_t \int_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left((\mathbf{A}^{\text{уп}} - \mathbf{A}^{\text{пл}}) \frac{\partial \mathbf{Y}^{(n)}}{\partial x} + (\mathbf{B}^{\text{уп}} - \mathbf{B}^{\text{пл}}) \mathbf{Y}^{(n)} \right) + \right. \\ &+ \left. (\mathbf{C}^{\text{уп}} - \mathbf{C}^{\text{пл}}) \frac{\partial \mathbf{Y}^{(n)}}{\partial x} + (\mathbf{D}^{\text{уп}} - \mathbf{D}^{\text{пл}}) \mathbf{Y}^{(n)} \right\} \mathbf{E} \delta \mathbf{Y}^{(n)} dx dt; \\ \delta \int_t A^{(n)} dt &= \int_t \mathbf{Q}^{\text{т}(n)} \delta \mathbf{Y}^{(n)} dt \Big|_x + \int_t \int_x \mathbf{Q}^{\text{гр}(n)} \delta \mathbf{Y}^{(n)} dx dt, \end{aligned}$$

где \mathbf{Y} – вектор перемещения; $\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ – матрицы девятого порядка квадратичной формы, индекс «уп» используется для упругих деформаций, «пл» – для пластических; \mathbf{E} – единичная матрица; индекс «гр» здесь и далее соответствует силам $\mathbf{Q}^{\text{гр}(n)}$ взаимодействия труб с грунтом, индекс «т» – торцевым силам $\mathbf{Q}^{\text{т}(n)}$.

В соответствии с теорией, представленной в [10, 11], при анализе взаимодействия трубопровода с грунтом поверхностные \bar{q}_i^n и торцевые $\bar{f}_i^{(n)}$ силы принимаются в виде

$$\bar{q}_i^{(n)} = -k_i^{(n)} (\bar{u}_i^{(n)} - \bar{u}_i^{0(n)}) + \tilde{q}_i^{(n)}; \quad \bar{f}_i^{(n)} = -k_i^{\text{т}(n)} (\bar{u}_i^{(n)} - \bar{u}_i^{0(n)}) + \tilde{f}_i^{(n)}, \quad (2)$$

где k_i – коэффициент, определяющий нелинейное взаимодействие трубопровода с поверхностью окружающей среды при переменном нагружении; $k_i^{\text{т}(n)}$ – коэффициент, характеризующий взаимодействия на торцах трубы; $\bar{u}_i^{0(n)}$ – составляющие пространственного сейсмического перемещения грунта по координатным осям.

Согласно (1) и (2) выражения $\bar{q}_i^{(n)}$ представим в виде

$$\begin{aligned}\bar{q}_1^{(n)} &= -k_1^{(n)} \left[(\bar{u}^{(n)} - \bar{u}^{0(n)}) - y(\bar{\alpha}_1^{(n)} - \bar{\alpha}_1^{0(n)}) - z(\bar{\alpha}_2^{(n)} - \bar{\alpha}_2^{0(n)}) + \varphi(\bar{v}^{(n)} - \bar{v}^{0(n)}) + \right. \\ &\quad \left. + a_1(\bar{\beta}_1^{(n)} - \bar{\beta}_1^{0(n)}) + a_2(\bar{\beta}_2^{(n)} - \bar{\beta}_2^{0(n)}) + \bar{q}_1^{(n)} \right]; \\ \bar{q}_2^{(n)} &= -k_2^{(n)} \left[(\bar{v}^{(n)} - \bar{v}^{0(n)}) - z(\bar{\theta}^{(n)} - \bar{\theta}^{0(n)}) + \bar{q}_2^{(n)} \right]; \\ \bar{q}_3^{(n)} &= -k_3^{(n)} \left[(\bar{w}^{(n)} - \bar{w}^{0(n)}) + y(\bar{\theta}^{(n)} - \bar{\theta}^{0(n)}) + \bar{q}_3^{(n)} \right].\end{aligned}$$

Аналогично записываются формулы для $\bar{f}_i^{(n)}$.

С учетом соотношений (1) и (2) в результате преобразований выражение вариации работ внешних сил приобрело вид

$$\begin{aligned}\delta \int_t Adt &= \iint_{t x} \left\{ (N_x^{об(n)} - N_x^{п(n)} + N_x^{вз(n)}) \delta u^{(n)} + (Q_y^{об(n)} + Q_y^{п(n)} + Q_y^{вз(n)}) \delta v^{(n)} + \right. \\ &\quad \left. + (Q_z^{об(n)} + Q_z^{п(n)} + Q_z^{вз(n)}) \delta w^{(n)} - (M_z^{об} + M_z^{п(n)} + M_z^{вз(n)}) \delta \alpha_1^{(n)} - \right. \\ &\quad \left. - (M_y^{об(n)} + M_y^{п(n)} + M_y^{вз(n)}) \delta \alpha_2^{(n)} - (M_x^{об(n)} + M_x^{п(n)} + M_x^{вз(n)}) \delta \theta^{(n)} + \right. \\ &\quad \left. + (M_\varphi^{об(n)} + M_\varphi^{п(n)} + M_\varphi^{вз(n)}) \delta v^{(n)} + (M_{a_1}^{об(n)} + M_{a_1}^{п(n)} + M_{a_1}^{вз(n)}) \delta \beta_1^{(n)} + \right. \\ &\quad \left. + (M_{a_2}^{об(n)} - M_{a_2}^{п(n)} + M_{a_2}^{вз(n)}) \delta \beta_2^{(n)} \right\} dxdt + \\ &\quad + \int_t \left\{ N^T(n) \delta u + Q_y^T \delta v^{(n)} + Q_z^T \delta w^{(n)} - M_z^T(n) \delta \alpha_1^{(n)} - \right. \\ &\quad \left. - M_y^T(n) \delta \alpha_2^{(n)} - M_x^T(n) \delta \theta^{(n)} + M_\varphi^T \delta v^{(n)} + M_{a_1}^{об(n)} \delta \beta_1^{(n)} + M_{a_2}^{об(n)} \delta \beta_2^{(n)} \right\} dt \Big|_x.\end{aligned}$$

Здесь N и Q – продольные и поперечные силы; M – моменты сил. Индекс «об» соответствует объемным нагрузкам, «п» – поверхностным; «вз» – силам взаимодействия при многократной нагрузке-разгрузке, «т» – торцевым усилиям). Сила взаимодействия, например, определяется выражением

$$\begin{aligned}N_x^{вз(n)} &= -K_{N_x}^{(n)} (u^{(n)} - u^{0(n)}) + K_{N_{a_1}}^{(n)} (\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^{0(n)}) + K_{N_{a_2}}^{(n)} (\alpha_2^{(n)} - \alpha_2^{0(n)}) + \\ &\quad + K_{N_\varphi}^{(n)} (v^{(n)} - v^{0(n)}) - K_{N_{\beta_1}}^{(n)} (\beta_1^{(n)} - \beta_1^{0(n)}) - K_{N_{\beta_2}}^{(n)} (\beta_2^{(n)} - \beta_2^{0(n)}); \end{aligned}$$

где $K_{N_x}^{(n)}$, $K_{N_{a_1}}^{(n)}$, $K_{N_{a_2}}^{(n)}$, ..., $K_{N_{\beta_2}}^{(n)}$ – коэффициенты, определяемые из эксперимента при повторно-переменном нагружении с учетом поврежденности.

Отметим, что некоторые свойства циклического нагружения наблюдаются и при переменном нагружении подземных трубопроводов, взаимодействующих с грунтом. Такие результаты были получены в экспериментах [10]. На рисунках 1 и 2 приведены диаграммы взаимодействия стальной трубы с суглинком и чугунной трубы с песком при многократном цикле нагрузки-разгрузки.

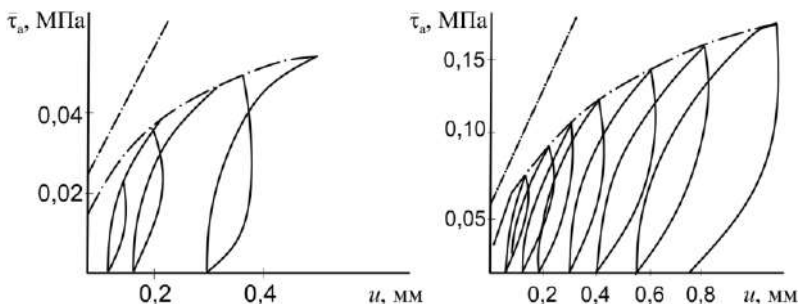


Рисунок 1 – Примеры диаграмм многократной нагрузки-разгрузки стальной трубы ($D_H = 0,189$ м, $l = 3,86$ м) при взаимодействии с суглинком

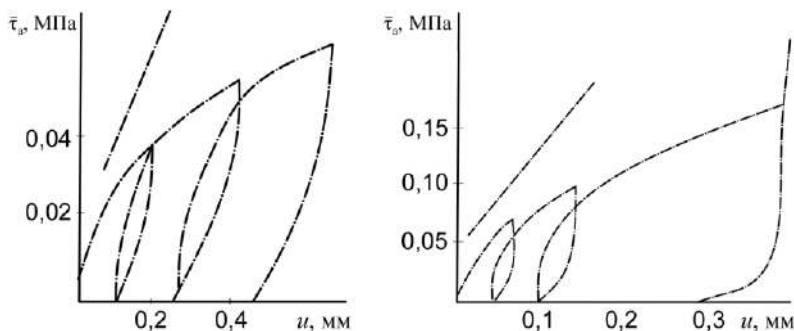


Рисунок 2 – Примеры диаграмм многократной нагрузки-разгрузки чугунной трубы ($D_H = 0,169$ м, $l = 2,00$ м) при взаимодействии с песком

Следуя [1], запишем зависимость сопротивления грунта продольному перемещению трубопровода в виде

$$\tau_a = -K_x^0 \left[u - \int_0^t R(t' - \tau') u(x, t) d\tau' \right],$$

где $R(t' - \tau')$ – функция ползучести (ядро релаксации), которая определяется экспериментально;

$$t' = \int_0^t \frac{d\xi}{a_\eta(\eta(x_\alpha, \xi))}, \quad \tau' = \int_0^{\tau} \frac{d\xi}{a_\eta(\eta(x_\alpha, \xi))}.$$

Эта функция в простейшем случае удовлетворяет условию $R(t' - \tau') = R_0(t' - \tau')^\beta$. Функцию повреждаемости при условии, что грунт обладает вязкоупругими свойствами, можно записать в виде [1]

$$\eta(t) = \frac{(m+1)}{\tilde{B}^{1+m}} \int_0^t (t-\tau)^m \sigma_u^{\alpha_0(1+m)}(\tau) d\tau.$$

При вязкоупругом взаимодействии трубопровода с окружающим грунтом для сил взаимодействия, учитывающих повреждаемость грунта по принципу Вольтерра, имеем [10, 11]:

$$\mathbf{P}^b(x, t) = \mathbf{D}_A^* (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) = \mathbf{D}_A \left[(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) - \int_0^t R(t' - \tau') [\mathbf{Y}(x, \eta) - \mathbf{Y}_0(x, \eta)] d\tau \right], \quad (3)$$

В таком случае, исходя из вариационного принципа и с учетом (3), система дифференциальных уравнений движения трубопровода приобретает вид

$$\begin{aligned} -\mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} + \mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial x^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} + \mathbf{D}_n \mathbf{Y} + \mathbf{D}_A (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) - \\ - \mathbf{D}_A \int_0^t R(t' - \tau') [\mathbf{Y}(x, \eta) - \mathbf{Y}_0(x, \eta)] d\tau + \mathbf{F} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\left[-\bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} + \bar{\mathbf{C}}_{II} \mathbf{Y} + \bar{\mathbf{C}}_A (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) - \bar{\mathbf{C}}_A \int_0^t R(t' - \tau') [\mathbf{Y}(x, \eta) - \mathbf{Y}_0(x, \eta)] d\tau + \mathbf{P}^{IP} \right] \delta \mathbf{Y} \Big|_x = 0; \quad (5)$$

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} \mathbf{E} \delta \mathbf{Y} \Big|_t = 0. \quad (6)$$

Здесь $R(t' - \tau')$ – слабосингулярное трехпараметрическое ядро типа Ржаницына – Колтунова. В частности, для первого приближения считается, что $R(t' - \tau') = R_0(t' - \tau')$. Здесь

$$R(t) = \bar{A}_b e^{-\bar{\beta} t} t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Для устранения особенности в подынтегральном выражении, следуя методике [11], произведена замена переменных для фиксированных $t_n = (n-1)\tau$. После некоторых преобразований из (4)–(6) получено

$$\begin{aligned} -\mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} + \mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial x^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} + \mathbf{D}_n \mathbf{Y} + \\ + \mathbf{D}_A \left[(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) - \frac{A_b}{\alpha} \sum_{k=1}^n B_k^b e^{-\beta t_k} [\mathbf{Y}(x, t_n - t_k) - \mathbf{Y}_0(x, t_n - t_k)] \right] + \mathbf{F} = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left\{ -\bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} + \bar{\mathbf{C}}_{II} \mathbf{Y} + \bar{\mathbf{C}}_A [(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) - \right. \\ \left. - \frac{A_b}{\alpha} \sum_{k=1}^n B_k^b e^{-\beta t_k} [\mathbf{Y}(x, t_n - t_k) - \mathbf{Y}_0(x, t_n - t_k)] \right] + \mathbf{P}^{2P} \Big\} \delta \mathbf{Y} \Big|_x = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} \mathbf{E} \delta \mathbf{Y} \Big|_t = 0. \quad (9)$$

Чтобы учесть накопление повреждений, ядра типа $R[t, \tau, \eta(\xi)]$ разлагаются в ряд, здесь ограничимся первым слагаемым:

$$R[t - \xi, \eta(\xi)] = R_0(t - \xi) + \eta(\xi)R_1(t - \xi).$$

При пространственном нагружении силы взаимодействия

$$\tau_a = \mathbf{P}^b(x, t) = R_0(0)[(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) - \psi_0(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)] - R_1(0)\psi_1(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0), \quad (10)$$

где
$$\psi_0(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) = \int_0^t R_0(t - \xi)(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)d\xi;$$

$$\psi_1(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) = \int_0^t R_1(t - \xi)\eta(\xi)(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)d\xi.$$

Дифференциальные уравнения (7)–(9) с учетом (10) приобретают вид

$$-\mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} + \mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial x^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} + \mathbf{D}_n \mathbf{Y} + \tilde{\mathbf{D}}_A [(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) - \psi_0(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)] - \tilde{\tilde{\mathbf{D}}}_A \psi_1(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) + \bar{\mathbf{F}} = 0; \quad (11)$$

$$\left\{ -\bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} - \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}_{II} [(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) - \psi_0(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0)] - \tilde{\tilde{\mathbf{C}}}_A \psi_1(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) + \mathbf{P}^{IP} \right\}_x = 0;$$

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} \mathbf{E} \delta \mathbf{Y} \Big|_t = 0. \quad (12)$$

Система уравнений решается методом итераций (l – номер итерации), при этом, например,

$$\psi_1(\mathbf{Y}^{(l)} - \mathbf{Y}_0^{(l)}) = \int_0^t R_0(t - \xi)\eta^{(l-1)}(\xi)(\mathbf{Y}^{(l)} - \mathbf{Y}_0^{(l)})d\xi;$$

$$\eta^{(l-1)}(t) = (1+m) \int_0^t (t-\xi)^m \frac{d\xi}{t_0^{1+m} [\sigma_u^{(l-1)}(\xi)]}.$$

При построении решения системы (11) с граничными и начальными условиями (12) применена разностная схема второго порядка точности, в результате чего получена система конечно-разностных уравнений, которая решалась методом прогонки [20].

Численные расчеты. Проведен расчет колебаний стальной подземной трубы с учетом повреждаемости и вязкоупругого взаимодействия с грунтом. Для трубы: $E = 2,3 \cdot 10^8$ кН/м², $\rho = 7,8$ кН·с²/м⁴, $R = 0,6$ м, $r = 0,585$ м, $L = 12$ м. Окружающая среда – песчаный грунт с коэффициентом взаимодействия $k_x = 3,75 \cdot 10^3$ кН/м³. Параметры ядра для песка: $A = 0,0748$, $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,048$. Сейсмическое воздействие принято в виде мгновенного смещения $w_0 = 0,007$ м, его направление по отношению к продольной оси подземного трубопровода составляет от 0 до 90°. Расчет произведен методом конечных разностей по пространству и по времени при явной схеме. Шаги сетки по пространству и времени приняты в безразмерном виде: $h = 1/N = 1/20$; $\tau = h^2/4$ [21, 22].

На рисунке 3 сплошная линия 1 соответствует вязкоупругому взаимодействию, а штрих-пунктирная 2 линейно вязкоупругому случаю с учетом накопленных повреждений. Из графиков видно, что в рассмотренных решениях между вязкоупругих (линия 1) и вязкоупругих с учетом накопления повреждаемости (линия 2) разница составляет до 10–15 %.

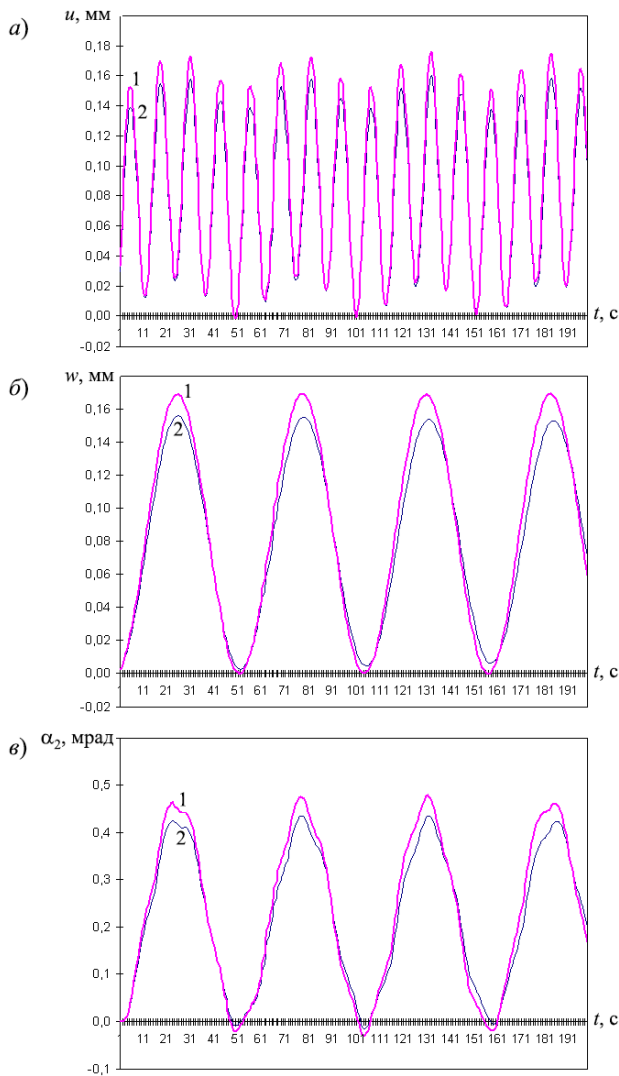


Рисунок 3 – Влияние вязкоупругости взаимодействия и поврежденности на кинетику расчётных величин: а) перемещения u ; б) прогиба w ; в) угла поворота α_2

Заключение. В работе получена система дифференциальных уравнений движения тонкостенных стержней – подземных трубопроводов в цилиндрических координатах. Сформированы краевые задачи для повторно-переменного нагружения с учетом обобщенного принципа Мазинга и повреждаемости материала. Приведены результаты расчета трубопровода с учетом взаимодействия с грунтом, продемонстрировавшие существенное изменение перемещений при совместном учете рассматриваемых факторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Москвитин, В. В.** Циклические нагрузки элементов конструкций / В. В. Москвитин. – М. : URSS, 2021. – 344 с.
- 2 Прочность конструкций при малоцикловом нагружении / Н. А. Махутов [и др.]. – М. : Наука, 1983. – 271 с.
- 3 **Гусенков, А. П.** Малоцикловая прочность оболочечных конструкций / А. П. Гусенков, Г. В. Москвитин, В. Н. Хорошилов. – М. : Наука, 1989. – 254 с.
- 4 **Киселев, А. Б.** Модели необратимого динамического деформирования и микроразрушения повреждаемых сред / А. Б. Киселев. // Упругость и неупругость : материалы Междунар. науч. симпозиума по проблемам механики деформ. тел, посвящ. 90-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. – М. : Изд-во МГУ, 2001. – С. 381–383.
- 5 **Кукуджанов, В. Н.** Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций / В. Н. Кукуджанов. – М. : МФТИ, 2008. – 215 с.
- 6 **Бондарь, В. С.** Термовязкопластичность. Теория и эксперимент / В. С. Бондарь // Упругость и неупругость : материалы Междунар. науч. симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. – М. : Изд-во Московского университета, 2011. – С. 122–128.
- 7 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных элементов конструкции на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М. : Физматлит, 2006. – 379 с.
- 8 **Старовойтов, Э. И.** Циклическое нагружение упругопластических трёхслойных стержней с учетом их повреждаемости / Э. И. Старовойтов, А. Абдусаттаров, Н. Б. Рузиева // Узбекский журнал «Проблемы механики». – 2023. – № 1. – С. 66–74.
- 9 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.
- 10 **Рашидов, Т. Р.** Сейсмостойкость подземных трубопроводов / Т. Р. Рашидов, Г. Х. Хожметов. – Ташкент : Фан, 1985. – 152 с.
- 11 **Рашидов, Т. Р.** Модели сейсмодинамики подземных сооружений при пространственном нагружении / Т. Р. Рашидов, Т. Юлдашев, А. Х. Маткаримов // Вестник ТашИИТ. – 2006. – № 1. – С. 66–74.
- 12 **Алешин, В. В.** Численный анализ прочности подземных трубопроводов / В. В. Алешин. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 320 с.
- 13 **Селезнев, В. Е.** Основы численного моделирования магистральных трубопроводов / В. Е. Селезнев, В. В. Алешин, С. Н. Прялов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : МАКС Пресс, 2009. – 436 с.

14 **Piriyev, S. A.** On mathematical modeling of the damageability of a cylindrically isotropic thick pipe in a complex stress state / S. A. Piriyev, T. V. Shirinov, A. B. Aliyev // *Mechanics*. – 2022. – Vol. 42, is. 7. – P. 24–31.

15 Development of the Kinetic Equation of the Groove Corrosion Process for Predicting the Residual Life of Oil-Field Pipelines / G. Popov [et al.] // *Energies*. – 2023. – Vol. 16, is. 20. – Article 7067.

16 Strain demand of elastic pipes subjected to permanent ground displacements using the finite difference method / Q. Zheng [et al.] // *Journal of Pipeline Science and Engineering*. – 2021. – Vol. 1, is. 2. – P. 176–186.

17 Mathematical models of deformation of underground pipelines interacting with the ground under spatial-variable loading / A. Abdusattarov [et al.] // *AIP Conference Proceedings*. – 2023. – Vol. 2612, is. 1. – Article 040015.

18 **Кабулов, В. К.** Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности / В. К. Кабулов. – Ташкент : Фан, 1966. – 394 с.

19 **Буриев, Т.** Алгоритмизация расчета несущих элементов тонкостенных конструкций / Т. Буриев. – Ташкент : Фан, 1986. – 244 с.

20 **Годунов С. К.** Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М. : Наука, 1977. – 440 с.

21 **Абдусаттаров, А.** Уравнение движения подземных магистральных трубопроводов при пространственно-переменном упругопластическом нагружении / А. Абдусаттаров, А. И. Исомиддинов, Н. Б. Рузиева // *Современная архитектура, прочность зданий и сооружений, надежность и проблемы сейсмической безопасности : материалы Респ. науч.-практ. конф.* – Наманган : НамИСИ, 2021. – С. 135–137.

22 **Рузиева, Н. Б.** Нелинейное деформирование подземных трубопроводов при циклическом нагружении / Н. Б. Рузиева, А. Абдусаттаров // *Проблемы безопасности на транспорте : материалы XI Междунар. науч.-практ. конф.* ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2021. – Ч. 2. – С. 181–183.

A. ABDUSATTAROV, N. B. RUZIEVA

Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan

DEFORMATION OF UNDERGROUND PIPELINES-RODS UNDER VARIABLE LOADING, TAKING INTO ACCOUNT THE DAMAGEABILITY AND INTERACTION WITH SOIL

The paper presents a mathematical model for interacting underground pipeline-rods and the soil that takes into account the material damageability. Based on the deformation theory and the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, a system of differential equations of pipeline-rod motion (equilibrium) under variable loading is obtained and the boundary value problems are formulated. A method for calculating pipelines under dynamic loading is presented, taking into account viscoelastic interaction with the soil. The formulation of a solution to a system of differential equations is carried out considering the specified boundary and initial conditions and using a difference scheme of the second order accuracy. There is presented the example where the vibrations of an underground pipe are considered, taking into account its viscoelastic interaction with the soil and its damageability.

Keywords: variable loading, viscoelasticity, plasticity, variation principle, damageability, interactions with soil.

Получено 31.10.2023

UDC 531.5

N. A. AKHRAMENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

MOVEMENT OF A POINT MATERIAL OBJECT IN A MASSIVE RING PLANE

The interaction of a massive ring and a point material object is considered. The case of the point material object location and movement in the plane of the ring is investigated. It is determined that at increasing distance from the ring, the force interaction magnitude decreases. It is shown that there are possible circular trajectories of movement outside the ring, that are similar to motion around a spherical mass distribution.

Keywords: gravity field strength, force interaction, massive ring.

Introduction. In the solar system, some planets have rings. They consist of cosmic dust and ice moving around a planet. Saturn is the first planet to have rings discovered. The nature of the origin of the rings is not completely clear. The Saturn rings were studied by P. Laplace, S. V. Kovalevskaya, D. Maxwell, M. S. Bobrov et al. [1–4].

In [5], the force interaction between a massive ring and a point material object is analyzed. The case of the point material object location in the inner region of the ring plane is considered.

Unlike the spherical shape of a massive object, the ring mass configuration has a more complex force field distribution [6–8]. This paper considers the force interaction between a massive ring and a point material object located in the plane of the ring, as well as possible trajectories of movement.

Determination of a massive ring gravity field strength at points of ring plane.

It is assumed that the ring mass has radius R with linear mass density τ . Then the elementary mass dm corresponding to an element of length dl will be τdl (Figure 1).

According to the law of universal gravitation, the interaction force between two point masses m_1 and m_2 located at a distance ρ from each other is determined by the expression [9–12].

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{\rho^2}, \quad (1)$$

where G is the gravitational constant.

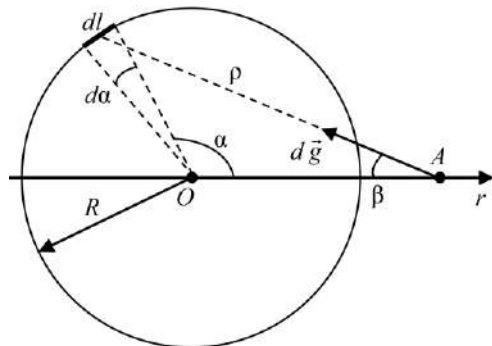


Figure 1 – The scheme of the ring

Then the gravity field strength (the ratio of the interaction force to a unit point mass), created by the elementary mass dm at point A , located at a distance ρ from it, is determined by the relation

$$dg = -\frac{Gdm}{\rho^2}. \quad (2)$$

The minus sign is caused by the fact that the gravity field strength vector is directed towards the elementary mass.

The element of the circle length dl is represented in the form of $Rd\alpha$ (Figure 1). By substituting the value of $\tau R d\alpha$ instead of dm in (2), there is obtained

$$dg = -\frac{G\tau R d\alpha}{\rho^2}. \quad (3)$$

According to the cosine theorem, it can be written

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha. \quad (4)$$

The equation (3) with taking into account the relation (4) turns to the following one

$$dg = -\frac{G\tau R d\alpha}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}.$$

The gravity field intensity vector $d\vec{g}$ is directed at an angle β to the horizontal axis (see Figure 1). The projection of the gravity field intensity vector onto the horizontal axis is presented in the form

$$dg_{OA} = -\frac{G\tau R d\alpha}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha} \cos \beta. \quad (5)$$

The cosine of the angle β can be expressed in terms of the angle α . From Figure 2, *a* it follows that $|BO| + |OA| = |BA|$. Then

$$R \cos(\pi - \alpha) + r = \rho \cos \beta.$$

From Figure 2, *b* it follows that $|OB| + |BA| = |OA|$. Then

$$R \cos \alpha + \rho \cos \beta = r.$$

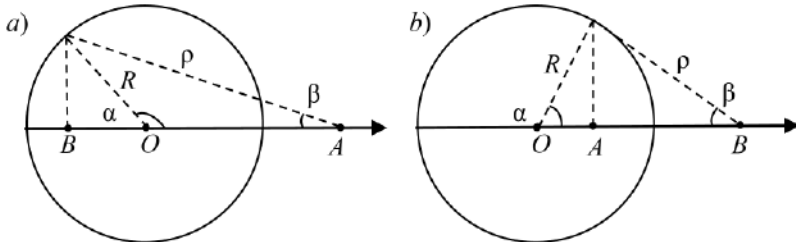


Figure 2 – The schemes for determining the angle β : *a* – for $\pi/2 < \alpha < \pi$; *b* – for $0 < \alpha < \pi/2$

From these relationships it follows that for any values of the angle α

$$\cos\beta = \frac{r - R \cos\alpha}{\rho}. \quad (6)$$

From expression (5) taking into account (6) there is obtained

$$dg_{OA} = -\frac{(r - R \cos\alpha)G\tau R d\alpha}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos\alpha)^{1,5}}.$$

Therefore, the gravity field strength created by the entire ring at point A can be presented in the following form

$$g = -2 \int_0^\pi \frac{(r - R \cos\alpha)G\tau R d\alpha}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos\alpha)^{1,5}}.$$

There can be used a parameter $k = r / R$ (where $k > 1$) and this expression transforms to the form

$$g = -\frac{2\tau G}{R} I(k); \quad I(k) = \int_0^\pi \frac{(k - \cos\alpha)d\alpha}{(1 + k^2 - 2k \cos\alpha)^{1,5}}. \quad (7)$$

If the ring mass is m , then the gravity field strength is

$$g = -\frac{Gm}{\pi R^2} I(k) = -\frac{Gm}{\pi r^2} k^2 I(k). \quad (8)$$

The expressions (7), (8) are similar to the equations obtained in [5, p. 8]. Moreover, in [5] the parameter is used but $k = r / R < 1$.

Combining the obtained results and the results of investigation [5], there is calculated the gravity field strength for all points of the ring plane (except for the case $k = 1$). The calculated values of the integral $I(k)$ for some values of k are presented in the Table 1.

Table 1 – The integral $I(k)$ values for some values of the parameter k

k	$I(k)$	k	$I(k)$	k	$I(k)$
1,1	11,0504	2	0,978308	20	0,00786874
1,2	5,65895	3	0,381552	30	0,00349357
1,3	3,77654	4	0,206128	40	0,00196442
1,4	2,8031	5	0,129581	50	0,00125701
1,5	2,20497	6	0,0891332	60	0,000872846
1,6	1,79976	7	0,0651146	70	0,00064124
1,7	1,50743	8	0,0496712	80	0,000490931
1,8	1,28704	9	0,0391484	90	0,000387887
1,9	1,1154	10	0,0316538	100	0,000314183

As the strength of the gravity field is known there can be determined the force interaction between a massive ring and a point material object

$$F = -\frac{Gmm_0}{\pi r^2} k^2 I(k), \quad (9)$$

where m_0 is the mass of a point material object.

The structure of the equation (9) differs from the structure of the expression (1) by the presence of the factor $k^2 I(k) / \pi$.

Possible circular trajectories. According to (8), the magnitude of the gravity field strength depends on the distance r from the ring center

$$g = \frac{Gm}{\pi r^2} k^2 I(k).$$

At a circular motion with velocity v of a particle (at $k > 1$), the gravity field strength can be written in the following form

$$g = \frac{v^2}{r}.$$

From these equations it follows that the radius of possible circular trajectories

$$r = \frac{Gm}{\pi v^2} k^2 I(k).$$

The discussion of the results. At $k = 10$ and $k = 100$, the values of the $k^2 I(k)$ (expression (8)) are equal to 3.16538 and 3.14183, respectively. When $k \rightarrow \infty$ the value of $k^2 I(k)$ tends to π . In this case, the expression (8) takes the form similar to the equation (1). Therefore, at large distances, the field created by the ring and the point mass will be the same.

At $k = 1.1$ and $k = 1.2$, the values of the $k^2 I(k)$ (expression (8)) are equal to 13.370984 and 8.148888, respectively. When $k \rightarrow 1_{+0}$ the value of $k^2 I(k)$ tends to ∞ . Therefore, the gravity field strength sharply increases at approaching the ring from the outside.

Since there is a minus in the equation (8), and the value of the integral is positive, the force will be directed towards the center of the ring. External particles of matter entering the gravity field outside the ring will be attracted to the ring due to a radially converging force field, which is one of the rings stability factors. Taking into account the results of analysis [5] and the obtained results, there can be generalized that the flying matter particles, approaching the ring, are attracted.

REFERENCES

1 **Laplace, P. S.** Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne / P. S. Laplace // Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. – 1787. – P. 201–234.

2 **Maxwell, J. C.** On the stability of the motion of Saturn's Rings / J. C. Maxwell // The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. – Cambridge : Cambridge University Press, 2011. – Vol. 1. – P. 288–376.

3 **Ковалевская, С. В.** Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна / С. В. Ковалевская // Научные работы. – М. : АН СССР, 1948. – С. 139–152.

4 **Бобров, М. С.** Кольца Сатурна / М. С. Бобров. – М. : Наука, 1970. – 123 с.

5 **Akhramenko, N. A.** Force interaction of a massive ring and a material point located inside the ring. / N. A. Akhramenko // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 5–10.

6 **Sakharov, A. V.** Some trajectories of a point in the potential of a fixed ring and center / A. V. Sakharov // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol. 15, no. 4. – P. 587–592.

7 **Tresaco, E.** Dynamics of a particle under the gravitational potential of a massive annulus: properties and equilibrium description / E. Tresaco, A. Elipe, A. Riaguas // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. – 2011. – Vol. 111, no. 4. – P. 431–447.

8 **Ахраменко, Н. А.** Потенциал гравитирующего кольца / Н. А. Ахраменко // Научная конференция, посвященная 110-летию со дня рождения Ф. И. Федорова (Гомель, 25 июня 2021 года) : сб. материалов. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2021. – С. 194–198.

9 **Сивухин, Д. В.** Общий курс физики. В 5 т. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Физматлит, 2005. – 560 с.

10 **Serway, R. A.** Physics for Scientists and Engineers (with PhysicsNOW and info Trac) / R. A. Serway, J. W. Jewett. – 6th ed. – Belmont: Thomson-Brooks/Cole, 2004. – 1296 p.

11 **Шиляева, К. П.** Физика. Краткая теория и задачи : пособие / К. П. Шиляева, И. О. Деликатная, Н. А. Ахраменко. – Гомель : БелГУТ, 2021. – 211 с.

12 **Доценко, Е. И.** Физика. Механика. Молекулярная физика и термодинамика : учеб.-метод. пособие для студентов заочного факультета / Е. И. Доценко, В. А. Зыкунов, И. В. Приходько. – Гомель : БелГУТ, 2014. – 203 с.

Н. А. АХРАМЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ДВИЖЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО МАТЕРИАЛЬНОГО ОБЪЕКТА В ПЛОСКОСТИ МАССИВНОГО КОЛЬЦА

Рассматривается взаимодействие массивного кольца и точечного материального объекта. Исследуется случай расположения и движения точечного материального объекта в плоскости кольца. Определено, что по мере удаления от кольца величина силового взаимодействия уменьшается. Показано, что возможны круговые траектории движения вне кольца аналогично движению около шарообразного распределения массы.

Ключевые слова: напряженность гравитационного поля, силовое взаимодействие, массивное кольцо.

Получено 22.10.2023

УДК 621.644

С. М. БОБРИЦКИЙ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

КОНЦЕПЦИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ВРЕМЕННЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАГРУЗОК РАЗНОЙ ПРИРОДЫ

Представлены традиционные методы расчетов технических объектов (временных сооружений) и нормативные нагрузки разной природы (постоянные, временные и др.). Предложен концептуальный подход к индивидуальному формированию структуры временных технических объектов на основе динамично развивающихся междисциплинарных подходов к оценке несущей способности, позволяющих учесть воздействия нагрузок разной природы.

Ключевые слова: технический объект, временные сооружения, местные материалы, формообразование, имитационное моделирование, нагрузки разной природы.

Введение. На современном этапе развития техники формирование структур технических объектов на базе математического моделирования достаточно широко применяется в машино- и приборостроении [1–4]. В значительно меньшей степени оно используется при проектировании мостовых сооружений. В отличие от капитальных временные мостовые сооружения имеют более гибкую систему ограничений по восприятию и передаче всех видов нагрузок, определяемых нормативными требованиями [5–7]. Основной отличительной особенностью временных сооружений является создание индивидуальных конструктивных решений, разрабатываемых под заданные условия пропуска поездных нагрузок и ограниченный срок эксплуатации сооружения или его отдельных элементов (пролетных строений, опор). Потребность во временных мостовых сооружениях возникает как при обеспечении капитального строительства, реконструкции и ремонте зданий и сооружений [8] так и при восстановлении поврежденной транспортной инфраструктуры в результате стихийных бедствий, чрезвычайных ситуаций [9], а также вооруженных конфликтов [7, 10].

Постановка задачи. Основными методами расчетов несущих элементов конструкций на силовые воздействия, представленные в [4, 5], являются методы предельных состояний первой и второй групп.

Первая группа предельных состояний подразумевает оценку непригодности к эксплуатации из-за потери несущей способности или по необходимости прекращения эксплуатации (без потери несущей способности). Недопущение наступления предельных состояний по первой группе следует обеспечивать расчетами на прочность конструкций (в том числе на выносливость и устойчивость формы), на устойчивость конструкций против опроки-

дывания и сдвига, на прочность грунтовых оснований на жестких опорах, плавучесть и остойчивость на плавучих опорах. Для временной нагрузки от транспортных средств дополнительно принимаются во внимание динамические коэффициенты.

Вторая группа предельных состояний включает расчеты несущих элементов мостовых сооружений под нормативные показатели веса и проектные скорости транспортных средств, затрудняющие нормальную эксплуатацию, но не требующие ее прекращения. Чтобы не допустить наступления предельных состояний второй группы, следует выполнить расчет перемещений конструкций. Значения усилий, напряжений, деформаций, перемещений и других факторов при невыгодном расположении и сочетании расчетных нагрузок не должны превышать установленных нормами расчетных значений несущей способности расчетных сопротивлений, предельных деформаций, перемещений, плавучести, остойчивости и др. Обеспечение запаса прочностных характеристик несущих элементов временных сооружений осуществляется за счет введения в расчетные нагрузки коэффициентов перегрузок, а для увеличения безопасности, связанной с неоднородностью материала, применяются коэффициенты надежности и условий работы.

Перечень нагрузок, учитываемых при расчете элементов конструкций временных сооружений по группам предельных состояний в соответствии с [4, 5], приведен в таблице 1. Сочетания различных нагрузок используются при расчете элементов конструкций временных мостовых сооружений на жестких и плавучих опорах в зависимости от вероятности одновременного их воздействия.

Математический аппарат для определения расчетных усилий, напряжений, деформаций и других факторов, указанных в действующих нормативных документах [4–6], составляют известные традиционные методы сил и перемещений. При этом для каждого несущего элемента конструкции необходимо отдельно разрабатывать расчетную схему загрузки с граничными условиями на концах рассматриваемых элементов. Кроме того, с целью упрощения расчетов вводятся названные выше коэффициенты, которые корректируют как расчетные значения действующих нагрузок, так и расчетное сопротивление материала. Такие подходы не отражают полной картины напряженно-деформированного состояния конструкций, особенно при массовом сочетании нагрузок.

В связи с этим, а также учитывая уровень развития современной науки и технических средств диагностики физико-механических свойств материалов и конструкций, становится актуальной задача адаптации накопленного в последние годы и динамично развивающегося научно-методического аппарата к решению проблемы формирования структур временных технических объектов, а также ускоренной прогнозной оценки срока их безотказной эксплуатации.

Таблица 1 – Нагрузки, учитываемые при расчете временных (краткосрочных) мостовых сооружений

Нагрузки	Временное мостовое сооружение	
	на жестких опорах	на плавучих опорах
<i>Постоянные</i>		
Собственный вес конструкции	+	+
Воздействие предварительного напряжения	+	+
Давление грунта от веса насыпи	+	+
Гидростатическое давление воды	+	+
Воздействие осадки грунта	+	–
<i>Временные</i>		
Вертикальные	+	+
Давление грунта от транспортного средства	+	+
Горизонтальная поперечная нагрузка от центробежной силы	+	–
Горизонтальные поперечные удары от транспортного средства	+	–
Горизонтальная продольная нагрузка от торможения и силы тяги	+	+
<i>Прочие временные</i>		
Ветровая	+	+
Ледовая	+	–
Нагрузка от навала судов	+	–
Гидродинамическое давление воды	–	+
Волновое воздействие	–	+
Воздействие колебаний температуры	+	–
Строительные нагрузки	+	+
Сейсмические	+	–

Метод исследования. Инструментами реализации поставленной задачи на первом этапе могут служить предлагаемый концептуальный подход и адаптированные под решение определенных задач математические методы.

В качестве концептуального подхода на первом этапе разработки предлагается укрупненная модель исследования, схема которой представлена на рисунке 1. Она включает отдельные блоки и учитывает логическую последовательность и взаимозависимость выполняемых процессов.

Рассмотрим отдельно каждый блок укрупненной модели и взаимосвязь их между собой.

В блоке *характеристика условий работы технического объекта* определяются основные задачи, выполнение которых должен обеспечивать объект в конкретных условиях использования. К ним относятся: вид поездной (пешеходной) нагрузки, габариты, скорость движения, климатический район (сезон), условия местности на основе проведенных изысканий (водная преграда, равнина, сложные грунтовые основания и др.), срок временной эксплуатации.

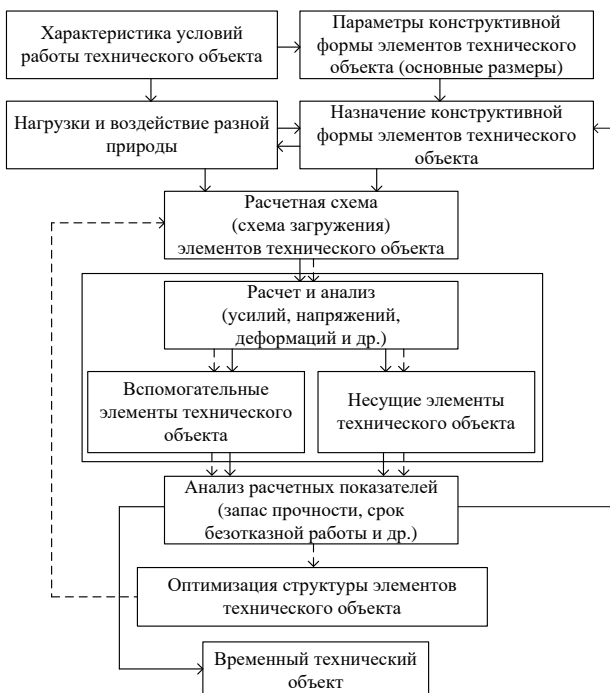


Рисунок 1 – Укрупненная схема концептуального подхода формирования структуры временных технических объектов от воздействия нагрузок разной природы

В блоке *параметры конструктивной формы элементов технического объекта* на основе имеющихся гидрогеологических и геодезических инженерных изысканий, а также заданных габаритов из условия пропускания пешеходной нагрузки осуществляется подбор основных параметров элементов технического объекта (граничные размеры элементов: длина, ширина, высота).

В блоке *назначение конструктивной формы элементов технического объекта* при использовании имеющихся в наличии инвентарных и местных материалов в виде различных конструктивных решений или сортаментов выполненных из различных материалов (сталь, древесина, бетон, железобетон, полимеры и др.) и с учетом требований, содержащихся в первых двух рассмотренных выше блоках, назначаются отдельные или составные элементы выбранной конструктивной формы.

Блок *нагрузки и воздействие разной природы* предполагает выбор расчетных значений от воздействия нагрузок как по отдельности, так при их сочетании исходя из характеристик выбранной конструктивной формы отдельного или составного элемента технического объекта (собственный вес, геометрия и др.) и условий работы.

В блоке *расчетная схема (схема загрузки) элементов технического объекта* к назначенному элементу в зависимости от его типа (стержневого, пластинчатого) составляется расчетная схема с обозначением действующих нагрузок и локальных закреплений (перемещений).

В следующем блоке выполняется *расчет и анализ (усилий, напряжений, деформаций и др.)* несущих и вспомогательных элементов технического объекта с использованием современных математических моделей расчета усилий, напряжений, деформаций и др. Здесь на основе полученных результатов производится анализ состояния элемента под нагрузками (определение его запаса прочности, прогнозирование долговечности и другие интересующие показатели). Если полученные результаты не удовлетворяют хотя бы одному из заданных параметров, то принимается решение о замене или частичной корректировке формы конструкции элемента или его материала и производятся повторные исследования, последовательность которых приведена на рисунке 1 (направление прямой линией). Если расчетные значения обеспечивают значительный запас прочности и долгосрочную эксплуатацию, то может быть принято решение об оптимизации конструктивной формы.

В блоке *оптимизация структуры элементов технического объекта* осуществляется корректировка размеров сечений элементов в областях минимальных напряжений. Также могут назначаться упрощенные требования к материалу и др.). Это требуется для уменьшения массы и стоимости изготовления элементов конструкций. При необходимости здесь могут быть использованы современные наработки в области оптимизации топологии конструкций [11–13]. Далее после проведенных мероприятий по оптимизации структуры элементов осуществляются повторный расчет и анализ по схеме (см. рисунок 1, по направлению штриховой линии).

В случае, если полученные расчетные значения элементов конструкций полностью удовлетворяют заданным эксплуатационным характеристикам, то структура формообразования технического объекта считается законченной.

Выводы. Осуществление представленного в статье концептуального подхода к индивидуальному формированию структуры временных технических объектов от воздействия нагрузок разной природы может быть реализовано путем использования накопленного опыта проектирования конструктивных решений временных технических объектов, междисциплинарного подхода к решению поставленной задачи [10], методов имитационного моделирования с использованием современных программных средств (ANSYS, T-FLEX, MATLAB и др.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Reddy, C. P. Automated optimum design of machine tool structures for static rigidity, natural frequencies and regenerative chatter stability / C. P. Reddy, S. S. Rao // ASME Journal of Engineering for Industry. – 1978. – Vol. 100, is. 2. – P. 137–146.

2 **Атапин, В. Г.** Проектирование рациональных несущих конструкций многоцелевых станков / В. Г. Атапин // *Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты)*. – 2008. – № 4 (41). – С. 18–25.

3 Формализованное описание технологических возможностей проектируемых станков в рамках методологии структурно-параметрического синтеза / В. В. Куц [и др.] // *Известия Юго-Западного государственного университета. Сер. Техника и технологии*. – 2013. – № 1. – С. 80–84.

4 **Farkas, J.** *Analysis and Optimum Design of Metal Structures* / J. Farkas, K. Jármai. – Berlin : Springer, 2013. – 265 p.

5 Инструкция по проектированию железнодорожных временных и краткосрочных мостов и труб (ПВКМ-79). – М. : ВНИИ трансп. стр-ва, 1982. – 215 с.

6 Инструкция по проектированию железнодорожных наплавных мостов и паромных переправ (ПНМ-79). – М. : МТС, 1980. – 87 с.

7 **Бобрицкий, С. М.** Временное восстановление железнодорожных мостов : учеб. пособие / С. М. Бобрицкий, А. А. Поддубный, К. В. Махаев. – Гомель : БелГУТ, 2019. – 218 с.

8 **Бобрицкий, С. М.** Проектирование конструкций временных сооружений и устройств для строительства и восстановления мостов : учеб. пособие / С. М. Бобрицкий. – Гомель : БелГУТ, 2023. – 215 с.

9 Особенности прогрессирующего разрушения применительно к мостовым сооружениям / В. Б. Караханян [и др.] // *Транспортные сооружения*. – 2020. – Т. 7, № 2. – Статья 12SATS220. – 20 с.

10 **Бобрицкий, С. М.** Подходы к проектированию сборно-разборных временных мостов из местных материалов // С. М. Бобрицкий, А. О. Шимановский // *Механика. Исследования и инновации*. – 2021. – Вып. 14. – С. 11–16.

11 **Her, Y. J.** A Study on the Topology Optimization of the Fixed Address Type ATC Frame Using a Real Number Coding Genetic Algorithm / Y. J. Her, S. H. Lim, C. M. Lee // *Journal of the Korean Society of Precision Engineering*. – 2004. – Vol. 21, no. 9. – P. 174–181.

12 Sizing and Topology Optimization of Trusses Using Genetic Algorithm / I. Delyová [et al.] // *Materials*. – 2021. – Vol. 14, is. 4. – Article 715. – 14 p.

13 **Wu, J.** Topology optimization of multi-scale structures: a review / J. Wu, O. Sigmund, J. P. Groen // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. – 2021. – Vol. 63. – P. 1455–1480.

S. M. BABRYTSKI

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

THE INDIVIDUAL FORMATION CONCEPT FOR THE TEMPORARY TECHNICAL OBJECTS STRUCTURE UNDER THE INFLUENCE OF LOADS OF DIFFERENT NATURES

Traditional methods for calculating technical objects (temporary structures) and standard loads of different nature (permanent, temporary, etc.) are presented. There is proposed a conceptual approach to the individual formation of temporary technical objects structure based on dynamically developing interdisciplinary approaches to bearing capacity assessing, allowing to take into account the effects of loads of different nature.

Keywords: technical object, temporary structures, local materials, shaping, simulation modeling, loads of different nature.

Получено 24.10.2023

УДК 539.384

В. О. БОНДАРЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ИЗМЕНЕНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БАЛОК РАЗЛИЧНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ КОРРОЗИИ

Рассматривается изгиб металлических балок различного поперечного сечения под действием статической нагрузки. Принимается во внимание изменение с течением времени геометрических параметров сечений, связанное с коррозией материала. Показано, что интенсивная коррозия сортаментных профилей типа двутавра может стать причиной увеличения напряжений в два и более раза по сравнению с их начальным уровнем.

Ключевые слова: металлическая балка, напряжённо-деформированное состояние, коррозия.

Строительные конструкции при эксплуатации подвергаются действию всевозможных факторов окружающей среды, которые приводят к износу и изменению физико-механических характеристик материалов. Превалирующими причинами снижения несущей способности изгибаемых металлических элементов являются влажность воздуха и длительность увлажнения объекта, температура и состав атмосферы, загрязнение воздуха агрессивными компонентами, которые приводят к коррозионным повреждениям [1]. Уменьшение размеров рабочего сечения элементов приводит к увеличению напряжений под действием прилагаемой нагрузки, что в свою очередь становится причиной снижения надёжности конструкций [2–4]. Поэтому существует практическая необходимость анализа влияния коррозии металлических элементов конструкций на их несущую способность.

Как правило, деформационно-прочностные характеристики металлоконструкций под влиянием агрессивной среды в значительной мере не изменяются, что достигается антикоррозионной обработкой поверхности конструкций, хотя и в этом случае возможен выход объекта из строя в связи с концентрацией напряжений в местах расположения коррозионных каверн и межкристаллических трещин.

Для оценки изменения напряжённо-деформированного состояния элементов с течением времени необходимо знать кинетику коррозионных процессов в материалах [5–7]. Большой вклад в разработку моделей деформирования различных элементов конструкций при совместном действии нагрузок и агрессивных сред внесли Д. Б. Чапаев и его коллеги [8–10].

Экспериментальные исследования влияния коррозии на прочность металлических труб рассмотрены в статьях [11–12]. На основе анализа напря-

жённо-деформированного состояния в зоне наклонных трещин в статьях было показано, что продольные поверхностные трещины развиваются в результате воздействия кольцевых напряжений, которые имеют наибольшие значения, а по направлению перпендикулярны плоскости роста этих трещин. В результате концентрации напряжений, вызванной коррозией, максимальные напряжения превысили номинальные значения более чем в три раза.

В работах И. Г. Овчинникова [13–15] рассмотрены несколько моделей коррозионного износа, которые дают различную степень потери несущей площади стальной балки и поэтому требуют оценки корректности применения в каждом конкретном случае. Анализ экспериментальных данных показал, что коррозионный износ симметричен относительно вертикальной оси сечения трубопровода. Исследования также показали, что коррозионный износ может приводить к изменению положения опасного сечения по длине пролетного строения, что необходимо учитывать при анализе надежности.

В работе [16] проведён анализ влияния факторов окружающей среды на скорость развития коррозии, а также приведены модели её прогнозирования. Полученные результаты показывают, что коррозия может приводить к уменьшению долговечности конструкции в два и более раза. В наибольшей мере на развитие коррозионных процессов в конструкциях влияют степень агрессивности среды и длительность ее воздействия.

В большинстве случаев коррозия стальных конструкций оценивается по потере площади их поперечного сечения, которая определяется глубиной коррозионного поражения. В то же время распределение напряжений в конструкции определяется видом ее деформирования. Поэтому целью представленной работы стало установление влияния поверхностной коррозии на напряженно-деформированное состояние металлических балок, опирающихся концами на горизонтальную поверхность.

Для изучения влияния коррозионного износа металлоконструкций на их напряженно-деформированное состояние рассматривались балки длиной $l = 6$ м каждая, имеющие разные виды поперечных сечений, приведенные на рисунке 1.

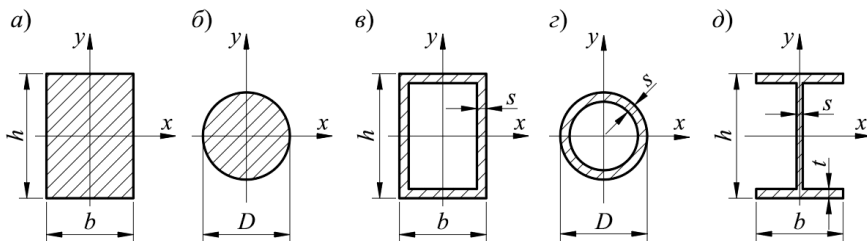


Рисунок 1 – Виды сечений стальных профилей:

a – прямоугольное; *б* – круглое; *в* – труба прямоугольная профильная; *г* – труба круглая; *д* – двутавр прокатный

Размеры, мм, прямоугольного сплошного сечения и трубы: $b = 140$, $h = 200$, $s = 30$; сплошного круга и круглой трубы: $D = 150$, $s = 30$; двутавра: $b = 90$, $h = 180$, $s = 5,1$, $t = 8,1$.

К рассматриваемым балкам прикладывалась равномерно распределенная статическая нагрузка. Чтобы обеспечить жесткость конструкций, при задании граничных условий принято, что балки опираются обоими своими концами на основание. Анализ деформаций выполнялся с учетом того, что модуль упругости стали $E = 210$ ГПа.

В рассматриваемом случае максимальные нормальные напряжения в поперечных сечениях балки определяются по формуле

$$\sigma = \frac{ql^2}{8W_x},$$

а наибольшие деформации – из соотношения [18]

$$v = \frac{5ql^4}{384EJ_x},$$

где W_x , J_x – момент сопротивления и момент инерции поперечного сечения относительно оси x .

С учётом эксплуатации в неблагоприятной среде, например хлоридсодержащей, принято, что в зависимости от условий, при которых эксплуатируются конструкции, скорость протекания равномерной поверхностной коррозии без учёта локальных дефектов составляет от 0,025 до 0,125 мм/год [17].

По результатам расчетов построены графики, демонстрирующие изменения напряжений от времени для разных скоростей проникновения развития коррозии (рисунки 2–6).

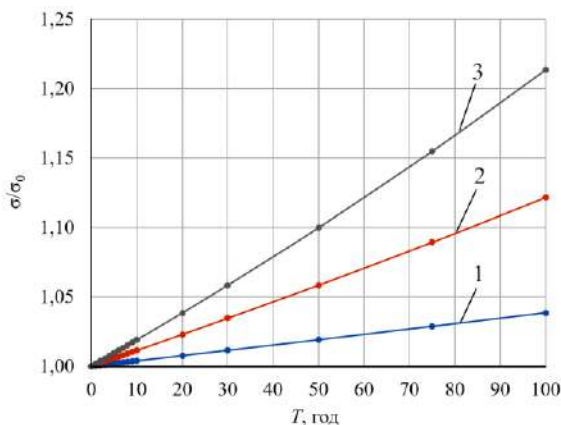


Рисунок 2 – Напряжения в прямоугольном сечении при скорости коррозии: 1 – 0,025 мм/год; 2 – 0,075 мм/год; 3 – 0,125 мм/год

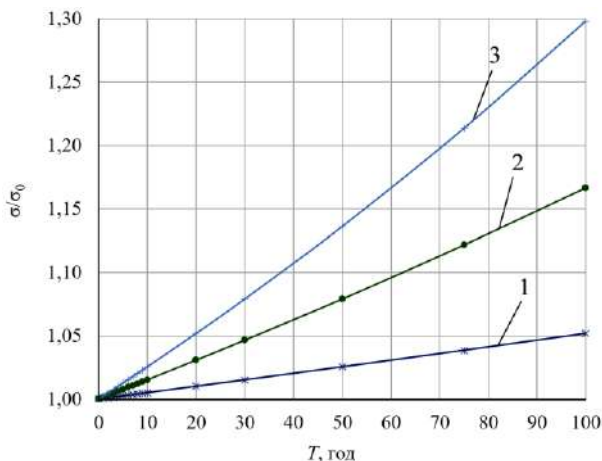


Рисунок 3 – Напряжения в круглом сечении при скорости коррозии:
 1 – 0,025 мм/год; 2 – 0,075 мм/год; 3 – 0,125 мм/год

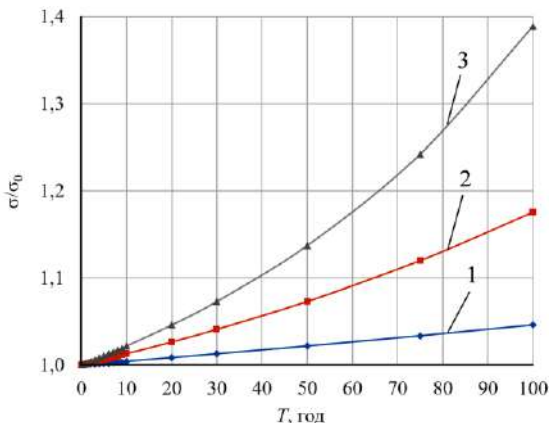


Рисунок 4 – Напряжения в прямоугольной трубе при скорости коррозии:
 1 – 0,025 мм/год; 2 – 0,075 мм/год; 3 – 0,125 мм/год

На приведенных графиках по вертикали отложены значения напряжений σ , рассчитанные по отношению к значению σ_0 , которое представляет собой максимальное напряжение в балках, не подверженных коррозии.

Из рисунков 2 и 3 следует, что изменение напряжений, связанное с коррозией балок сплошного поперечного сечения, происходит по закону, близкому к линейному. При малых скоростях проникновения коррозии увеличение напряжений за сто лет не превышает 5 % от первоначальной величины, а при увеличении скорости коррозии в 5 раз значения напряжений увеличиваются приблизительно в 6 раз.

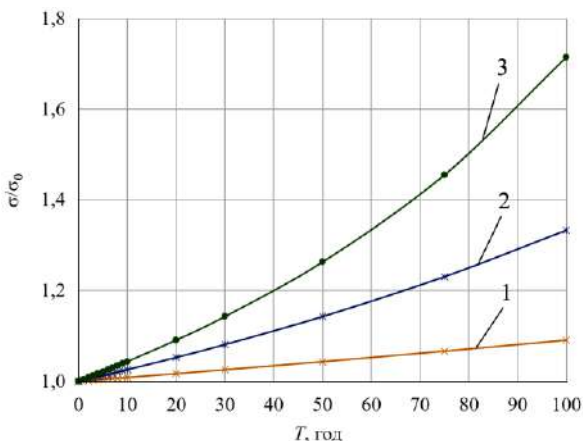


Рисунок 5 – Напряжения в круглой трубе при скорости коррозии: 1 – 0,025 мм/год; 2 – 0,075 мм/год; 3 – 0,125 мм/год

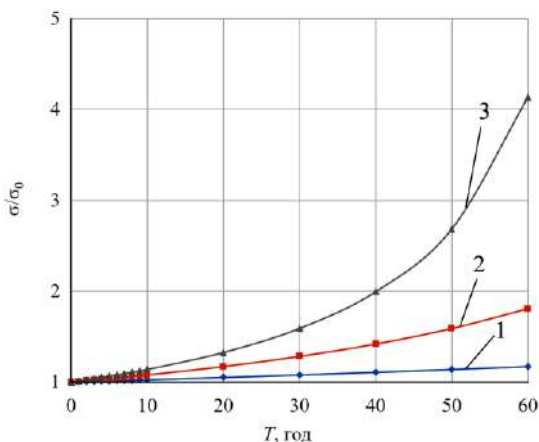


Рисунок 6 – Напряжения в двутавре прокатном при скорости коррозии: 1 – 0,025 мм/год; 2 – 0,075 мм/год; 3 – 0,125 мм/год

В случае несплошного поперечного сечения становится заметным нелинейный характер зависимости напряжений от времени коррозии, причем напряжения в круглой трубе растут быстрее, чем в прямоугольной (см. рисунки 4, 5), и по истечении 50 лет такое увеличение при высокой скорости коррозии может достигать 24 %, а через 100 лет – более 70 %.

Наибольший рост напряжений наблюдается у двутавровой балки (см. рисунок 6). Если при малых скоростях проникновения коррозии за 50 лет рост напряжений не превышает 15 %, то увеличение скорости распространения

коррозии до 0,125 мм/год приводит к увеличению напряжений в 2,7 раза по сравнению с начальным их значением. А к 75 годам несущая способность двутавра исчерпывается полностью. У тонкостенных балок такие их элементы, как стенка или полка, могут потерять устойчивость раньше, чем происходит потеря прочности балки в целом. Такая потеря устойчивости элемента сечения и выход его из работы резко ослабляют конструкцию, сечение становится несимметричным, что ведет к перемещению центра изгиба, закручиванию балки и быстрой потере ее устойчивости.

Таким образом, в работе выполнен анализ напряженно-деформированного состояния металлических балок при изгибе с учетом их коррозии. Он показал, что в некоторых условиях развитие коррозии может приводить к достаточно быстрому увеличению напряжений в конструкции и ее разрушению. Наиболее неблагоприятно воздействие коррозии на балки несплошного поперечного сечения. Полученные результаты следует учитывать при проектировании металлических конструкций сооружений с достаточно большим планируемым сроком эксплуатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Тимохова, О. М.** Исследования взаимодействия поверхности металла с агрессивной средой в зависимости от технологии обработки / О. М. Тимохова, О. Н. Бурмистрова // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2016. – № 1–2. – С. 322–326.

2 **Бондаренко, В. О.** Анализ деформирования армированной балки с учетом коррозии защитного слоя / В. О. Бондаренко, А. О. Шимановский // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 18–24.

3 **Васильев, А. А.** Оценка и прогнозирование технического состояния железобетонных конструкций с учетом карбонизации бетона / А. А. Васильев. – Гомель : БелГУТ, 2019. – 215 с.

4 **Межнякова, А. В.** Методы оценки долговечности армированных конструкций при действии нагрузок и агрессивных сред / А. В. Межнякова, И. Г. Овчинников // Промышленное и гражданское строительство. – 2008. – № 8. – С. 54–55.

5 Влияние внутренних и внешних факторов на кинетику процесса коррозионно-механического разрушения арматурных сталей / Н. Н. Сергеев [и др.] // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2019. – № 2. – С. 410–429.

6 Влияние условий испытаний на длительную прочность высокопрочных арматурных сталей в условиях электролитического наводороживания / Д. М. Хонелидзе [и др.] // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2018. – № 12. – С. 532–540.

7 Analysis of corrosion processes kinetics on the surface of metals / M. R. Enikeev [et al.] // Chemical Engineering Journal. – 2020. – Vol. 383. – Article 123131.

8 **Ивакина, А. А.** Пример расчета скорости внутренней равномерной коррозии городских теплопроводов, протекающей с кислородной деполаризацией / А. А. Ивакина, Д. Б. Чапаев // Наука и молодежь: проблемы, поиски, решения : тр. Всерос.

науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. – Новокузнецк : СибГИУ, 2014. – Вып. 18. – Ч. 4 : Технические науки. – С. 161–164.

9 **Чапаев, Д. Б.** Учет коррозии при прогнозировании срока службы тепловых сетей / Д. Б. Чапаев, А. С. Басин // Наука и молодежь: проблемы, поиски, решения : тр. региональной науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. – Новокузнецк : СибГИУ. – 2001. – С. 390–392.

10 **Чапаев, Д. Б.** Расчет скорости внутренней коррозии трубопроводов водяных тепловых сетей из углеродистых сталей / Д. Б. Чапаев, А. А. Оленников // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2012. – № 4. – С. 33–36

11 **Богданович, А. В.** Оценка ресурса труб главного циркуляционного трубопровода АЭС по критерию трещиностойкости с учетом эксплуатационной деградации свойств / А. В. Богданович // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2020. – Т. 65, № 2. – С. 153–161.

12 **Плювинаж, Г.** Оценка опасности коррозионных дефектов при помощи диаграммы оценки областей разрушения / Г. Плювинаж, О. Буледруа, М. Хадж-Мелиани // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2018. – № 4. – С. 384–396.

13 **Овчинников, И. Г.** Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа. Расчет и оптимизация / И. Г. Овчинников, М. Ю. Почтман. – Днепропетровск : Изд-во ДГУ, 1995. – 192 с.

14 **Овчинников, И. Г.** Расчеты на прочность сложных стержневых и трубопроводных конструкций с учетом коррозионных повреждений. / И. Г. Овчинников, Г. А. Наумова. – Саратов : Саратов. гос. техн. ун-т, 2000. – 227 с.

15 **Овчинников, И. Г.** Проблемы антикоррозионной защиты мостовых сооружений / И. Г. Овчинников, Е. В. Дудкин // Мир дорог. – 2012. – № 62. – С. 37–38.

16 **Коннов, Д. В.** Прогнозирование коррозионных дефектов в нефтяных трубопроводах // Universum: технические науки. – 2023. – № 10-5 (115). – С. 22–32.

17 **Иванова, О. А.** Влияние различных факторов на коррозию конструктивных элементов плавучих сооружений в морской воде / О. А. Иванова, А. В. Родькина // Вестник ВГАВТ. – 2018. – № 56. – С. 42–50.

18 Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1988. – 464 с.

V. O. BANDARENKA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

STRESS-STRAIN STATE CHANGE OF BEAMS OF DIFFERENT CROSS SECTIONS AS A RESULT OF CORROSION

The bending of metal beams of various cross sections under the static load influence is considered. The change in geometric parameters of sections over time associated with the material corrosion is taken into account. It is shown that intense corrosion of assortment profiles such as I-beams can cause an increase in stresses by a factor of two or more compared to their initial level.

Keywords: metal beam, stress-strain state, corrosion.

Получено 17.10.2023

УДК 539.3:004.94

А. И. ВЕРЕМЕЙЧИК, М. В. НЕРОДА, Б. Г. ХОЛОДАРЬ
Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЗОН С ИЗМЕНЕННЫМИ ПОСЛЕ ТЕРМООБРАБОТКИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ МАТЕРИАЛА НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБРАЗЦОВ

Проведено компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния образцов с обработанной зоной сегментовидного сечения и промежуточной зоной серповидной формы при растяжении. Исследованы продольные и эквивалентные напряжения в зависимости от механических характеристик материала зон и их геометрических размеров. Определены коэффициенты концентрации напряжений в окрестности зон термообработки.

Ключевые слова: напряжения, модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициент концентрации, напряженно-деформированное состояние.

Введение. Использование лазерного, плазменного и других высокоэнергетических методов термообработки позволяет улучшить многие эксплуатационные показатели материалов. При этом вдоль обрабатываемой дорожки в металле возникают зоны измененной структуры материала: зона целевого воздействия и окружающая ее зона термического влияния, в которых ввиду локальности и объемной неравномерности нагрева имеют место значительные изменения фазового и структурного состояний металла. Высокие скорости нагрева определяют особенности протекания фазовых превращений как при нагреве, так и при охлаждении, а наличие градиента температур и напряжений – различие в процессах фазовых и структурных превращений по глубине обработанной области.

Результаты исследований [1–4] показывают, что в зоне термического влияния структура заметно отличается как от структуры зоны обработки, так и от исходной структуры. В литературных источниках широко представлены результаты измерений микротвердости поверхностной зоны материалов, ее износостойкости [5–8], но данные о механических характеристиках материала в этих областях (модуль упругости, коэффициент Пуассона, пределы прочности и текучести) ограничены. Однозначные аналитические зависимости между ними отсутствуют, что приводит к неопределенности их значений и, в свою очередь, затрудняет прогнозирование поведения термообработанного объекта в условиях эксплуатации.

В литературных источниках также недостаточно внимания уделено вопросам влияния различий механических характеристик зон материала, возникших после сосредоточенного высокоэнергетического воздействия, на напряженно-деформированное состояние (НДС) деталей и возможные гра-

ницы его изменения по сравнению со случаем отсутствия такого воздействия. Вопрос о концентрации напряжений в материале обработанных образцов при их растяжении рассматривался в [9, 10] для случаев, когда сечение дорожки представляло собой прямоугольник или полукруг. В настоящей работе представлен случай дорожки в виде сегмента круга разной высоты при сохранении исходной площади сечения прямоугольного образца.

Постановка задачи. Для исследования влияния различий модуля упругости и коэффициента Пуассона двух новообразованных зон образца по сравнению с характеристиками основного материала проведено конечно-элементное моделирование растяжения стержня с зоной обработанного материала, имеющей сечение в форме сегмента, окруженного промежуточной зоной термического влияния постоянной толщины. По аналогии с [10] ввиду симметрии системы рассматривается выделенная четверть образца (рисунок 1).

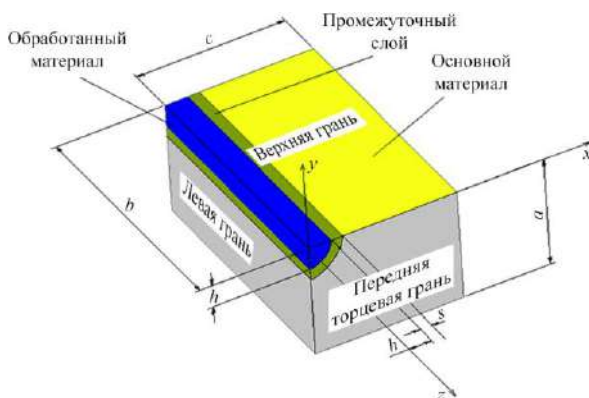


Рисунок 1 – Выделенный элемент

Левый верхний угол занимает область обработанного материала, окруженного переходной зоной. Толщина обработанного материала варьировалась в пределах $h = 0,1 \dots 0,4$ мм, переходной зоны – $s = 0,05 \dots 0,2$ мм. Остальной объем занят исходным (основным) материалом. Габаритные размеры модели $a \times b \times c = 2,0 \times 2,6 \times 4,4$ мм.

Граничные условия задавались в виде ограничения перемещения в направлении оси Oy ($V_y = 0$) в точках верхней грани тела, в направлении оси Oz ($W_z = 0$) по задней торцевой грани, Ox ($U_x = 0$) – по левой грани. На правой продольной грани задавались граничные условия двух видов: $U_x \neq 0$ – стержневой образец или $U_x = 0$ – имитация стесненной деформации (что справедливо, например, для пластин). Нагружение осуществлялось заданием перемещения передней торцевой грани на величину $w_z = 0,0044$ мм, которая определена из условия равенства осевых напряжений $\sigma_z = 200$ МПа для однородного стержня.

Модуль упругости исходного материала принимался равным $E = E_{bas} = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = \mu_{bas} = 0,3$. Модули упругости

промежуточного и обработанного слоев и их коэффициенты Пуассона варьировались, но принято, что после обработки материал тела во всех его точках остается в упругой области работы при одинаковой температуре.

Расчет НДС в моделях образцов проводился в диапазоне отношений модулей упругости и коэффициентов Пуассона обработанного материала к характеристикам исходного материала:

$$K_E = \frac{E_{pr}}{E_{bas}}, K_\mu = \frac{\mu_{pr}}{\mu_{bas}} \text{ в пределах } 0,6-1,4.$$

При расчетах принималось

$$E_{int} = \frac{E_{bas} + E_{pr}}{2}, \mu_{int} = \frac{\mu_{bas} + \mu_{pr}}{2}.$$

Индексы «*bas*», «*int*», «*pr*» относятся соответственно к исходному материалу, промежуточному слою и обработанному объему. Для расчетов применялся программный комплекс *ANSYS Workbench*.

НДС материала далее представлено через эквивалентные напряжения по Мизесу $\sigma_{эКВ}$ и продольные напряжения σ_z . Значения напряжений являются средними для соответствующих элементов. Напряжения в угловых точках элементов достаточно близки к ним и не используются ввиду малости размеров конечных элементов по сравнению с габаритными размерами тела. Главные напряжения σ_1 близки к продольным напряжениям σ_z , поэтому их уровни не выведены отдельно. Для рассматриваемой формы сечения результаты расчетов показаны на рисунках 2–9. В [10] аналогичные данные приведены для обработанного слоя в форме полукруга.

Некоторые результаты исследований. На рисунке 2 показаны распределения эквивалентных по критерию Мизеса напряжений $\sigma_{эКВ}$ по объему материала для разных геометрических условий закрепления при высоте сегмента обработанной зоны 0,3 и 0,2 мм для предельных из рассматриваемых значений модулей упругости и коэффициентов Пуассона.

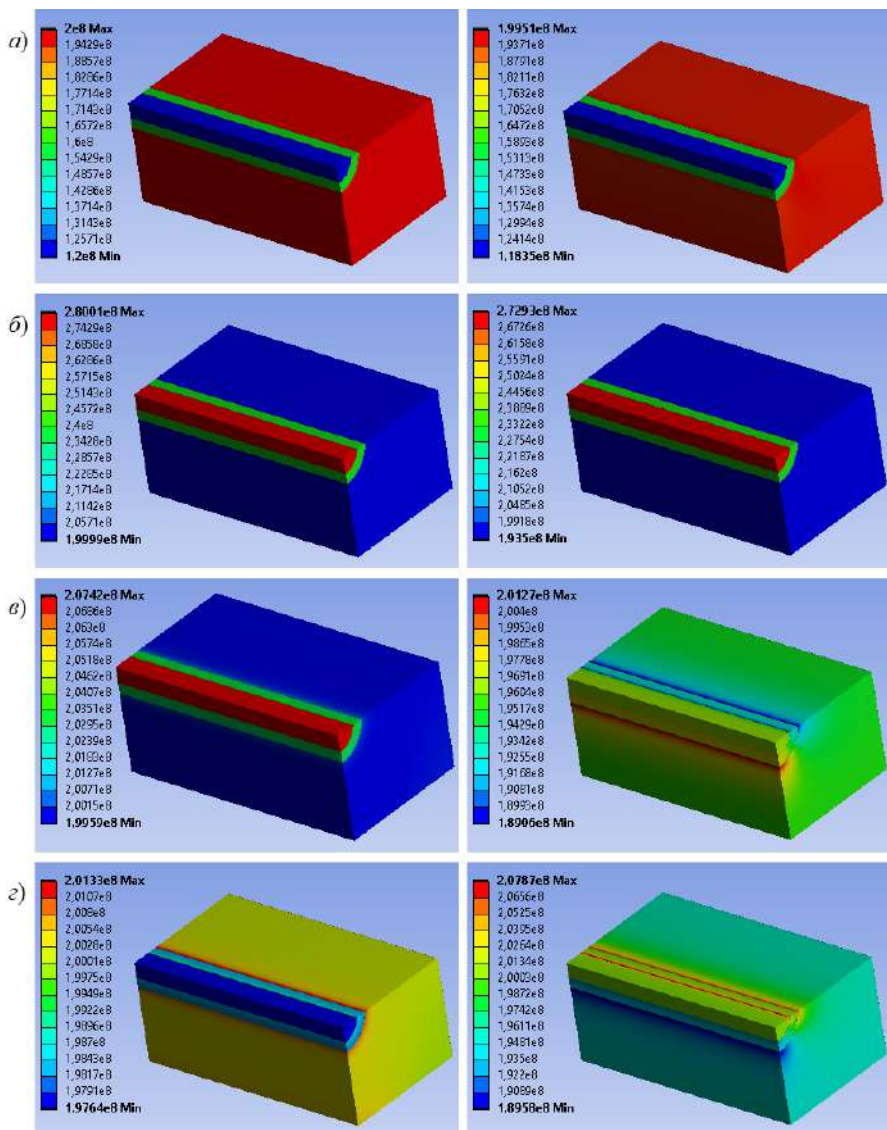
На рисунках 3, 4 приведены зависимости наибольших эквивалентных напряжений в модели образца от K_E и K_μ .

Расчеты показывают, что любое изменение характеристик материала обработанного и промежуточного слоев по отношению к основному материалу приводит к изменению НДС образцов. Максимальные по уровню напряжения могут возникать как в обработанном слое, так и в основном материале или промежуточной зоне. При свободной правой грани влияние размеров зоны обработанного материала на напряжения значительно ниже, чем при стесненной деформации.

Толщина h зоны прямого воздействия (ядра обработанного материала) практически не влияет на эквивалентные напряжения при варьировании модуля упругости (см. рисунок 3). С ростом K_E при $K_E > 1$ эквивалентные напряжения $\sigma_{эКВ}$ линейно возрастают.

Свободная правая грань

Закрепленная правая грань

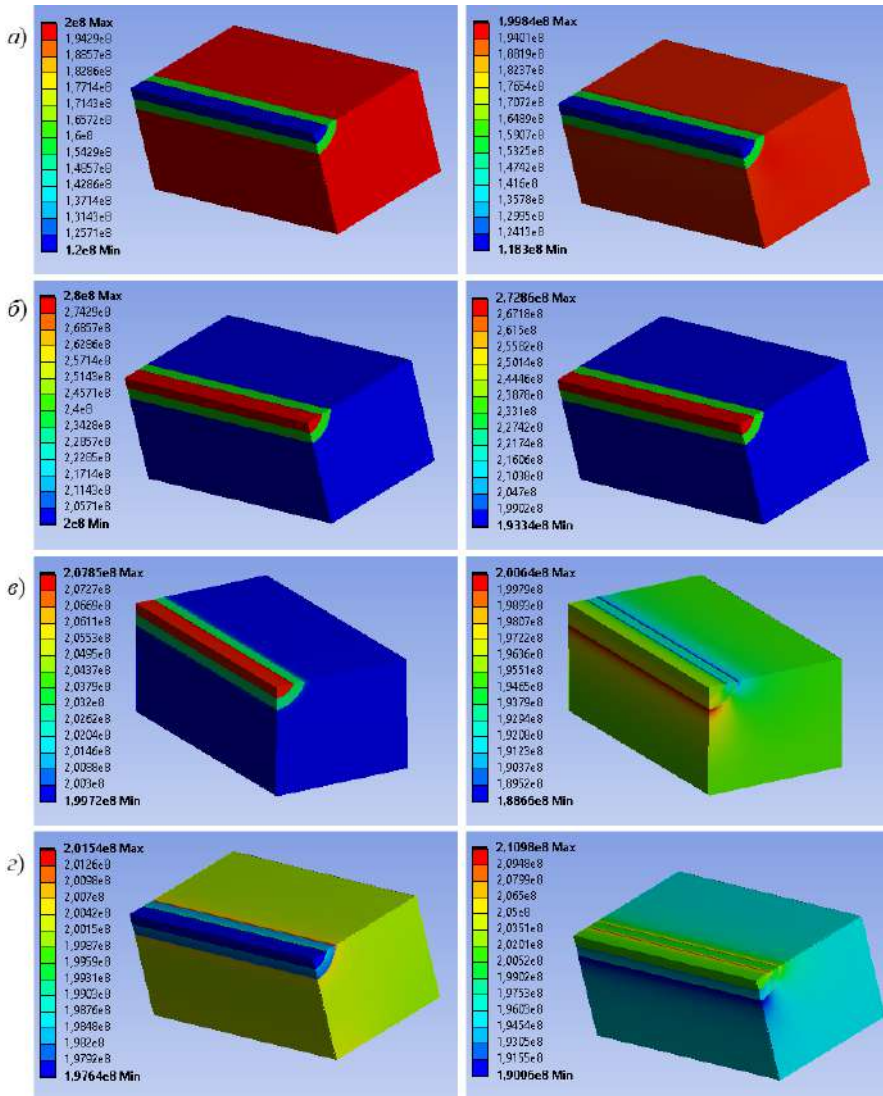


$h = 0,3 \text{ мм}$

Рисунок 2 (начало) – Распределение эквивалентных напряжений в образце

Свободная правая грань

Закрепленная правая грань



$h = 0,2$ мм

Рисунок 2 (окончание) – Распределение эквивалентных напряжений в образце:

$a - E_{bas} = 200$ ГПа, $E_{int} = 160$ ГПа, $E_{pr} = 120$ ГПа, $\mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$;

$б - E_{bas} = 200$ ГПа, $E_{int} = 240$ ГПа, $E_{pr} = 280$ ГПа, $\mu_{bas} = \mu_{int} = \mu_{pr} = 0,3$;

$в - E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$ ГПа, $\mu_{bas} = 0,3$, $\mu_{int} = 0,24$, $\mu_{pr} = 0,18$;

$г - E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$ ГПа, $\mu_{bas} = 0,3$, $\mu_{int} = 0,36$, $\mu_{pr} = 0,42$

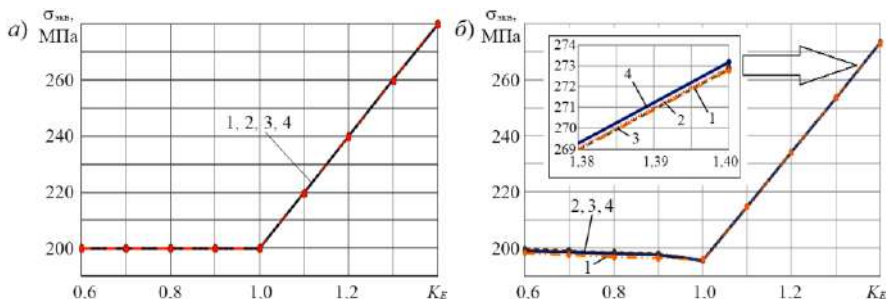


Рисунок 3 – Зависимость наибольших эквивалентных напряжений от K_E для случаев *a* – свободной и *б* – закрепленной правой грани:
 1 – $h = 0,1$ мм; 2 – $h = 0,2$ мм; 3 – $h = 0,3$ мм; 4 – $h = 0,4$ мм;

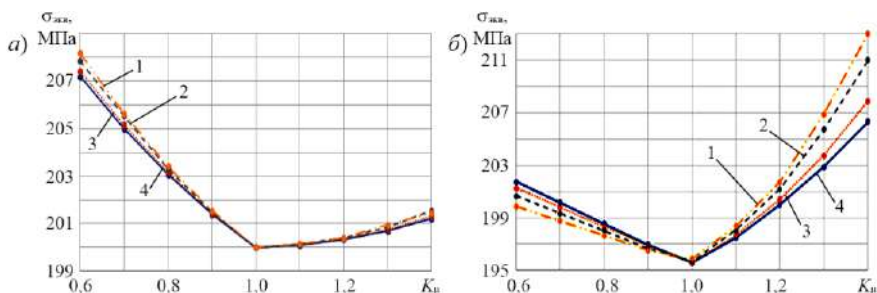


Рисунок 4 – Зависимость наибольших эквивалентных напряжений от K_μ для случаев *a* – свободной и *б* – закрепленной правой грани:
 1 – $h = 0,1$ мм; 2 – $h = 0,2$ мм; 3 – $h = 0,3$ мм; 4 – $h = 0,4$ мм;

При свободной правой грани (см. рисунок 4, *a*) в диапазоне $K_\mu = 0,6-1,0$ эквивалентные напряжения практически не изменяются (уменьшаются на 4 %), а для $K_\mu > 1$ незначительно возрастают. При этом на всём диапазоне K_μ эквивалентные напряжения выше для меньших толщин h обработанного материала. В случае стесненной деформации картина распределения эквивалентных напряжений иная – при $K_\mu = 0,6...1,4$ эквивалентные напряжения у образца с ядром сечения в форме полукруга выше, чем у образца с ядром сегментовидного сечения, а при $K_\mu > 1$ эквивалентные напряжения возрастают у образцов с небольшой толщиной обработанного материала.

На рисунке 5 приведены зависимости коэффициента концентрации напряжений $K_\sigma = \sigma_z^{\max} / \sigma_N$ как отношения максимальных продольных напряжений σ_z^{\max} к значению номинальных продольных напряжений, соответствующему случаю $K_E = K_\mu = 1$, в зависимости от отношений K_E или K_μ для случая закрепленной правой грани (в случае свободной правой грани различия между коэффициентами концентрации напряжений при варьировании K_E и K_μ незначительны).

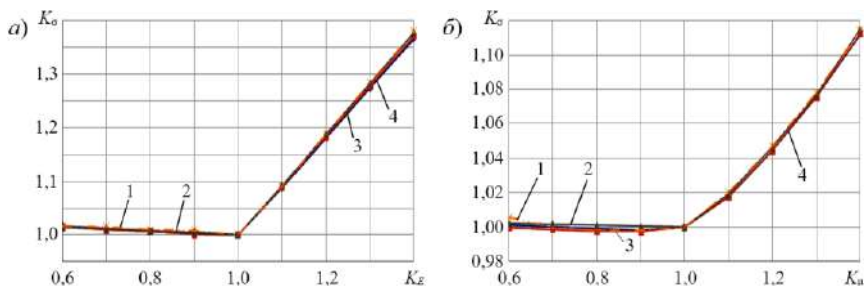


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента концентрации напряжений от K_E (а) и K_μ (б) для случая стесненной деформации при $s = 0,2$ мм

Рассмотрено влияние размеров промежуточного слоя на характер распределения напряжений. Расчеты показали, что уровень напряжений практически не зависит от размеров ядра h обработанного материала. Толщина промежуточного слоя s также практически не влияет на уровень $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ и σ_z образцов при изменении K_E . Более заметно изменение величины s сказывается на напряжениях при некоторых значениях K_μ (рисунки 6, 7).

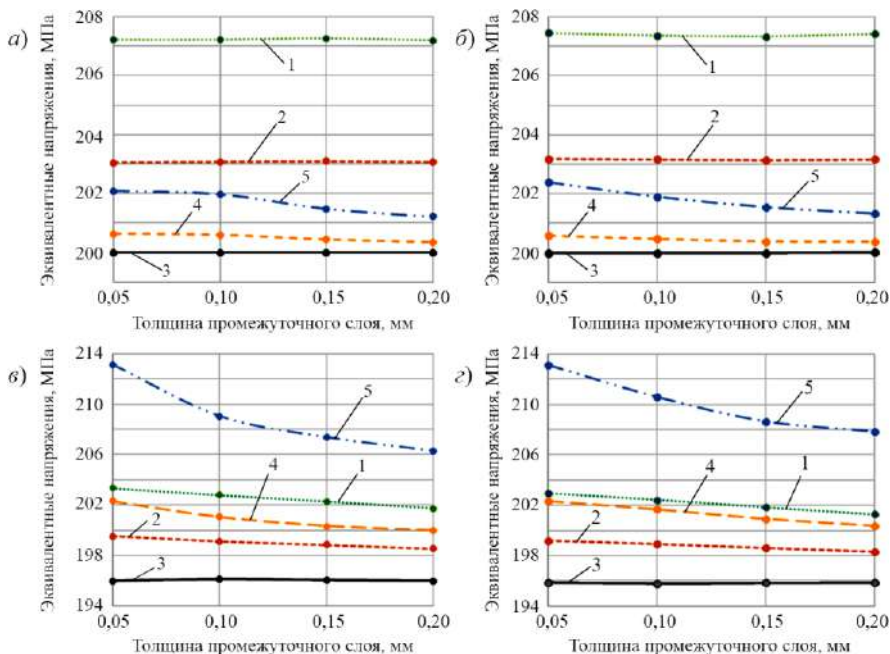


Рисунок 6 – Зависимость эквивалентных напряжений от толщины промежуточного слоя s ($E_{bas} = E_{mt} = E_{pr} = 200$ ГПа) в случаях свободной (а, б) и закрепленной (в, з) правой грани при $h = 0,4$ мм (а, в) и $h = 0,3$ мм (б, з):
 1 – $K_\mu = 0,6$; 2 – $K_\mu = 0,8$; 3 – $K_\mu = 1,0$; 4 – $K_\mu = 1,2$; 5 – $K_\mu = 1,4$

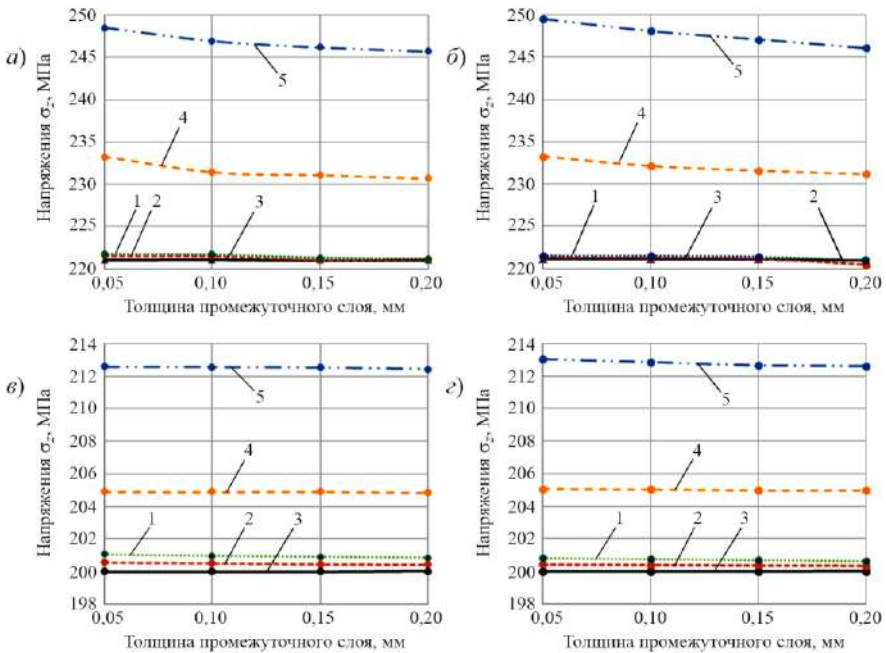


Рисунок 7 – Зависимость осевых напряжений σ_z от толщины промежуточного слоя s ($E_{bas} = E_{int} = E_{pr} = 200$ ГПа) в случаях свободной (а, б) и закрепленной (в, з) правой грани при $h = 0,4$ мм (а, в) и $h = 0,3$ мм (б, з):

1 – $K_\mu = 0,6$; 2 – $K_\mu = 0,8$; 3 – $K_\mu = 1,0$; 4 – $K_\mu = 1,2$; 5 – $K_\mu = 1,4$

Наибольшее влияние толщина промежуточного слоя оказывает на эквивалентные напряжения (см. рисунок 6) в случаях, когда коэффициент Пуассона обработанного слоя выше аналогичного параметра основного материала, причем изменение эквивалентных напряжений имеет нелинейный характер и с ростом толщины промежуточного слоя уровень напряжений снижается. Установлено незначительное изменение продольных напряжений (см. рисунок 7) при изменении размеров промежуточной зоны.

Более наглядно влияние изменения механических характеристик материала в зоне обработки высокоэнергетическими потоками может быть представлено через коэффициенты концентрации напряжений. В качестве примера на рисунке 8 показано влияние толщины промежуточного слоя на коэффициенты концентрации напряжений при изменениях K_μ для полукруглой формы сечения обработанной зоны (для сечений в форме сегмента она выражена в меньшей степени). Различие в модулях упругости практически не изменяет K_σ .

Как видно из рисунков 8, 9, наибольшие эквивалентные и продольные напряжения возникают при наименьшей толщине s промежуточной зоны, причем при $s > 0,1$ мм продольные напряжения для образца с обработанной

зоной в форме полукруга практически не зависят от толщины. Зависимость напряжений в интервале $0,6 \leq K_{\mu} \leq 1,0$ близка к линейной, при $K_{\mu} > 1,0$ графики имеют явно заметный нелинейный характер.

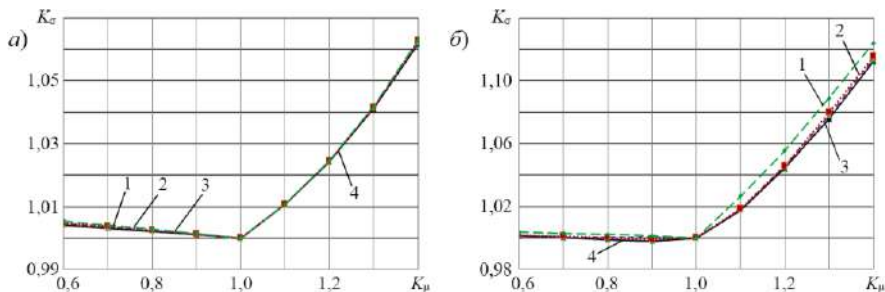


Рисунок 8 – Зависимость коэффициента концентрации напряжений в образце с полукруглым сечением от K_{μ} в случаях свободной (а) и закрепленной (б) правой грани при толщинах промежуточного слоя:

1 – $s = 0,05$ мм; 2 – $s = 0,10$ мм; 3 – $s = 0,15$ мм; 4 – $s = 0,20$ мм

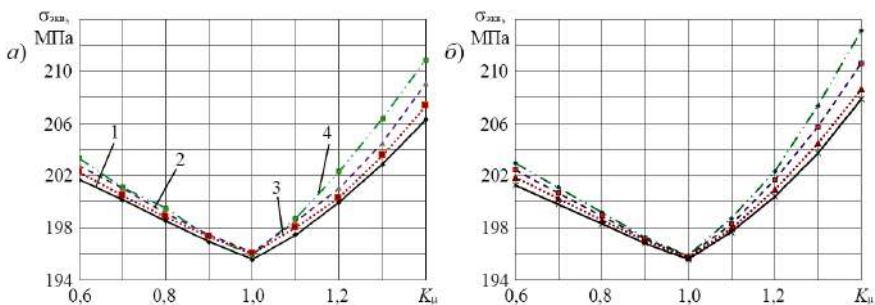


Рисунок 9 – Зависимость эквивалентных напряжений от K_{μ} при в случаях толщины ядра $h = 0,4$ мм (а) и $h = 0,3$ мм (б) при толщинах промежуточного слоя:

1 – $s = 0,05$ мм; 2 – $s = 0,10$ мм; 3 – $s = 0,15$ мм; 4 – $s = 0,20$ мм

Заключение. В широком диапазоне размеров и механических характеристик материала проведены исследования напряженно-деформированного состояния образцов с зонами, отличающимися трансформированной структурой материала, в случае их растяжения. Представлено распределение нормальных и эквивалентных напряжений для различной формы и характеристик материалов зон с измененной структурой. Для различных размеров поперечного сечения образцов получены зависимости напряжений и коэффициентов концентрации напряжений от модуля упругости, коэффициента Пуассона и размеров промежуточного слоя.

Установлено, что НДС образца зависит от глубины проникновения зон трансформированной структуры внутрь образца, а также характера и направления изменения основных механических характеристик материала.

Наибольшие напряжения (продольные и эквивалентные) изменяются нелинейно и достигают наибольших величин при максимальных значениях коэффициентов K_E и K_μ , кроме случая эквивалентных напряжений при свободной правой грани образца, когда они соответствуют минимальному исследованному значению $K_\mu = 0,6$. Любое отклонение от исходных параметров ведет к изменению распределения напряжений по объему образца. Максимальные напряжения возникают как в обработанном слое, так и в основном материале, промежуточном слое или на границах слоев.

Резкое отличие напряженного состояния и, соответственно, коэффициентов концентрации при $K_\mu < 1$ и $K_\mu > 1$ можно объяснить увеличением сдвиговой жесткости при уменьшении коэффициента Пуассона. Поэтому при малых значениях μ обработанной зоны по сравнению с коэффициентом Пуассона основного материала эффекты проявления сдвиговых деформаций уменьшаются, а напряженное состояние становится более однородным по объему тела. При этом одновременно возрастает и хрупкость материала обработанных слоев [12–14] и всего тела в целом.

Полученные результаты соответствуют и конкретизируют результаты, приведенные в работах [9–11], и подчеркивают важность проведения исследований по определению механических характеристик материалов в зоне измененной структуры, а также необходимость дальнейших исследований свойств материалов при наличии их обработки высокоэнергетическими струями в целях более точного прогнозирования работоспособности элементов конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Гуляев, А. П.** Металловедение / А. П. Гуляев. – М. : Книга по требованию, 2020. – 542 с.

2 **Иванцевский, В. В.** Управление структурным и напряженным состоянием поверхностных слоев деталей машин при их упрочнении с использованием концентрированных источников нагрева и финишного шлифования : дис. ... д-ра техн. наук : 05.16.09 / В. В. Иванцевский. – Новосибирск, 2012. – 425 с.

3 **Гулаков С. В.** Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния элементов составных конструкций при воздействии локального источника нагрева / С. В. Гулаков, С. В. Щербаков, Н. Г. Заварика // Вісник Приазовського державного технічного університету. – 2004. – Вип. 14. – С. 223–226.

4 Влияние режимов лазерной закалки на свойства стали 40X13 / О. М. Миширук [и др.] // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2023. – Т. 68, № 2. – С. 103–112.

5 **Safonov, E. N.** Plasma hardening of medium carbon steels / E. N. Safonov, M. V. Mironova // Journal of Physics : Conference Series. – 2019. – Vol. 1353(1). – Article 012065. – 5 p.

6 **Шарапова, Д. М.** Эволюция структуры и свойств конструкционных низколегированных сталей при кратковременных локальных термических воздействиях кон-

центрированными источниками тепла : дис. ... канд. техн. наук : 05.16.09 / Д. М. Шарпова. – СПб., 2018. – 140 с.

7 **Войтович, О. Н.** Исследование влияния параметров лазерной термообработки на свойства упрочненных поверхностных слоев / О. Н. Войтович, И. Н. Соколов // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2013. – № 2. – С. 6–14.

8 **Fadara, T. G.** Effect of Heat Treatment on Mechanical Properties and Microstructure of NST 37-2 Steel / T. G. Fadara, O. Y. Akanbi, D. A. Fadare // Journal of Minerals & Materials Characterization & Engineering. – 2011. – Vol. 10, no. 3. – P. 299–308.

9 **Веремейчик, А. И.** Конечно-элементное моделирование задачи о растяжении материала с зонами измененной структуры / А. И. Веремейчик, М. В. Нерода, Б. Г. Холодарь // Механика машин, механизмов и материалов. – 2022. – № 3 (60). – С. 77–84.

10 **Веремейчик, А. И.** Исследование напряженно-деформированного состояния образцов с серповидными зонами измененной структуры материала при осевом растяжении / А. И. Веремейчик // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 37–49.

11 **Веремейчик, А. И.** Влияние глубины зоны обработки материала высокоэнергетическим воздействием на его напряженно-деформированное состояние / А. И. Веремейчик, М. В. Нерода, Б. Г. Холодарь // Перспективные материалы и технологии : материалы Междунар. симпозиума, Минск, 21–25 августа 2023 г. – Минск : ИВЦ Минфина, 2023. – С. 282–284.

12 Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1 / под ред. С. Д. Пономарева. – М. : ГНТИ машиностроительной литературы, 1956. – 884 с.

13 **Холодарь, Б. Г.** Критерий максимального формоизменения как условие перехода материала в пластическое состояние / Б. Г. Холодарь // Деформация и разрушение материалов. – 2016. – № 3. – С. 2–5.

14 **Холодарь, Б. Г.** Максимальное формоизменение в точке тела и критерий текучести материала / Б. Г. Холодарь // Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР) : материалы Междунар. науч.-техн. конф., Брест, 30–31 марта 2017 г. – Брест : БрГТУ, 2017. – С. 169–174.

A. I. VERAMEICHYK, M. V. NERODA, B. G. HOLODAR
Brest State Technical University, Brest, Belarus

INFLUENCE OF THE PARAMETERS OF ZONES WITH CHANGED MATERIAL CHARACTERISTICS AFTER HEAT TREATMENT ON THE STRESS-STRAIN STATE OF SAMPLES

A computer simulation of the stress-strain state of samples with a treated segmental cross-section zone and an intermediate sickle-shaped zone under tension is carried out. There are analyzed the longitudinal and equivalent stresses depending on the material mechanical characteristics of the zones and their geometric dimensions. Stress concentration coefficients in the areas of heat treatment zones are determined.

Keywords: stresses, elastic modulus, Poisson's ratio, concentration coefficient, stress-strain state.

Получено 05.10.2023.

УДК 656.073.22

И. А. ВОРОЖУН, А. В. ВОРОЖУН

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МУЛЬТИМОДАЛЬНЫХ ПЕРЕВОЗОК ТРУБ БОЛЬШОГО ДИАМЕТРА

Рассмотрены варианты размещения и крепления труб в полувагонах, на железнодорожных универсальных и специализированных платформах, автотранспортных средствах, а также в универсальных контейнерах. Предложена схема пакетирования труб, предполагающая их размещение в специализированном контейнере, которая позволяет сократить объем погрузочно-разгрузочных работ при смене вида транспорта.

Ключевые слова: полувагон, платформа, перевозка труб, устройства крепления, контейнер для труб.

Для транспортирования жидких и газообразных веществ в мире широко используются трубопроводные сети. В них используется широкий ассортимент металлических, железобетонных, асбестоцементных, полимерных и других труб, которые имеют различные размеры, конфигурации и свойства поверхностей. Доставка таких грузов на большие расстояния осуществляется с привлечением нескольких видов транспорта, что требует неоднократного выполнения погрузочно-разгрузочных работ и применения различных устройств для крепления груза. Целью представленной работы является анализ существующих способов транспортировки труб большого диаметра и выработка на его основе технического решения, позволяющего усовершенствовать мультимодальные перевозки таких труб.

Размещение и крепление труб на железнодорожном подвижном составе выполняется в соответствии с требованиями, изложенными в нормативных документах [1, 2]. В них рассмотрены особенности, которые необходимо учитывать для труб различных типоразмеров, причем особое внимание уделяется трубам большого диаметра. Отличительная особенность таких труб состоит в том, что они при относительно малой массе имеют значительные габаритные размеры.

Специфической особенностью перевозки труб большого диаметра на железнодорожном подвижном составе в соответствии с действующими нормативами является применения крепежных реквизитов одноразового пользования. В работе [3] отмечается, что применение универсального подвижного состава для перевозки таких труб имеет также следующие недостатки:

- расчетная грузоподъемность вагонов используется только на 40–50 %;
- погрузочный проем не позволяет осуществлять перевозку труб длиной свыше 12 м;

- высока вероятность повреждения антикоррозийного покрытия и подготовленных для сваривания кромок торцов труб;
- погрузка труб требует значительных затрат материалов и ручной работы, связанных с паковкой и креплением;
- наличие сложных в изготовлении и недостаточно удобных при эксплуатации устройств для крепления труб, натяжные гибкие элементы которых после погрузки требуют переустановки и фиксации.

Действующими техническими документами предусматривается размещение в четырехосном полувагоне четырех труб диаметром 1420 мм и длиной до 11800 мм в два яруса (рисунок 1). Крепление труб в полувагоне осуществляется с применением пиломатериалов (бруски, клинья), гвоздей и проволоочной обвязки.



Рисунок 1 – Перевозка труб в полувагонах

В работах [4, 5] предложены устройства крепления четырех труб диаметром 1420 мм с полиэтиленовым покрытием на железнодорожной платформе (рисунок 2, *а*), причем они предназначены для многократного использования. Перспективным является создание специализированных вагонов, позволяющих максимально использовать грузоподъемность вагонов и механизировать погрузочно-разгрузочные работы (рисунок 2, *б*).

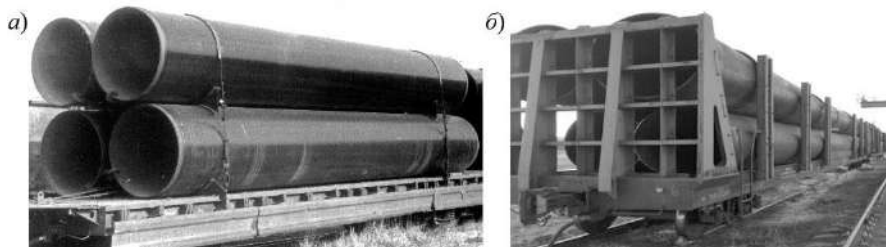


Рисунок 2 – Крепление труб на универсальной (*а*) и специализированной (*б*) платформах

В связи с большим объемом перевозок труб для газопроводов в США применяют платформы с упругими торцовыми стенками. При соударениях вагонов трубы могут сдвигаться. Гашение продольных инерционных сил осуществляют упругие стенки.

В работе [6] рассматривается вагон-платформа модели 13-4108 (рисунок 3), предназначенный для перевозки по сети магистральных железных дорог труб большого диаметра с полимерным защитным покрытием и без него, причем размеры труб могут варьироваться в достаточно широком диапазоне. Их диаметр может составлять 530–1420 мм, а толщина стенок – 8–40 мм. Разработанная конструкция платформы упрощает процесс погрузки и снижает трудоемкость закрепления труб.

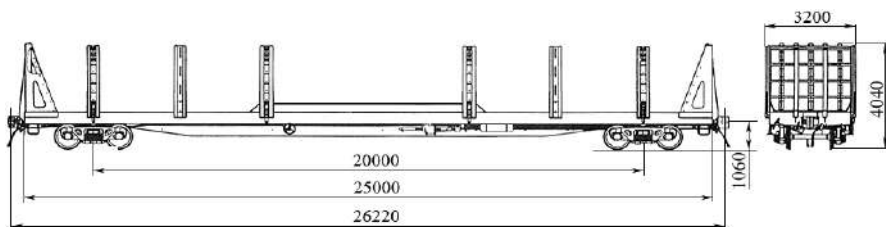


Рисунок 3 – Вагон-платформа модели 13-4108

Перевозка труб также осуществляется автотранспортными средствами. В статье [7] приведен анализ различных способов *крепления грузов на автомобильном транспорте*. Авторы отмечают, что в настоящее время на автотранспорте для крепления грузов в большинстве случаев используются стяжные ремни.

В качестве основы для правильного крепления грузов в глобальном масштабе предлагается применять методы расчетов, рекомендуемые Международной морской организацией (ИМО) и стандартами, поскольку они дают наиболее разумное количество крепежных средств. Отмечается целесообразность применения противоскользящих ковриков и их влияние на необходимое количество ремней [8]. Элементы расчетов крепления различных грузов на полуприцепе рассмотрены в работах [9, 10]. Авторы статьи [11] отмечали, что в Европейских стандартах, принятых в 2010 г., представлены расчетные соотношения, позволяющие подбирать крепления, но известны случаи, при которых они не обеспечивали достаточных сил для удержания груза. Поэтому стандарт был пересмотрен и дополнен. В настоящее время при выборе способа крепления груза на автомобиле разработчик должен руководствоваться обновленными нормативными документами, например, стандартом [12].

При определении способов и выборе устройств крепления на автомобиле труб большого диаметра, обладающих большой массой, возникает необхо-

димось учета деформаций средств крепления под действием приложенных нагрузок [13]. В некоторых случаях при резких торможениях такие деформации могут стать причиной постепенного изменения положения груза на автотранспортном средстве. Оно, в свою очередь, может привести к нарушению сохранности груза и повреждению автомобиля.

Еще одна проблема, на которую обращают внимание авторы работ [14, 15], связана с состоянием используемых при перевозках транспортных средств. Используемые на территории Евросоюза стандарты [16, 17] регламентируют требования к конструкциям транспортных средств, позволяющие рассматривать их как часть системы крепления груза. В то же время значительное число эксплуатируемых на территории Российской Федерации автотранспортных средств не соответствует указанным стандартам ни по прочностным характеристикам кузова, ни по наличию необходимых точек крепления груза. Такая ситуация не только вызывает проблемы при осуществлении международных перевозок, но и повышает статистику дорожно-транспортных происшествий, связанных с неправильным закреплением грузов.

С учетом описанных обстоятельств предусматривается, что на автотранспортном средстве, оборудованном боковыми стойками (ригелями), размещают четыре трубы в два яруса (рисунок 4, а). Однако при транспортировке таким образом труб диаметром более 1200 мм груз выходит за разрешенные стандартами габариты (транспортное средство считается крупногабаритным, если его размеры превышают хотя бы один из следующих показателей: высота 4,0 м от поверхности дороги, ширина 2,5 м, длина 20 м для автопоезда с одним прицепом или полуприцепом и 24 м – для автопоезда с двумя и более прицепами, а также если груз выступает за заднюю точку габарита транспортного средства более чем на 2 м) [18].

Для того чтобы не превысить допустимых габаритов при перевозке труб большого диаметра, автотранспортное средство оборудуют турникетными устройствами (рисунок 4, б). Трубы крепятся к ним с помощью поперечной обвязки с натяжными устройствами. Удержание от сдвига в продольном направлении осуществляется силами трения.



Рисунок 4 – Размещение и крепление труб на полу автотранспортного средства (а) и с помощью турникетного устройства (б)

Авторы изобретения [19] для перевозки длинномерных труб предлагают использовать автопоезд, включающий тягач и прицеп-ропуск, на которых установлены поперечные балки с ложементами для размещения труб, причем на прицепе-ропуске ложементы закреплены жестко, а на тягаче – с возможностью перемещения в поперечной плоскости. Продольные перемещения труб при трогании с места и торможениях ограничиваются канатами, закрепленными на торцах труб и поперечных балках.



Рисунок 5 – Размещение труб в универсальном контейнере

Анализ способов крепления труб при мультимодальной перевозке показывает, что смена вида транспорта обуславливает необходимость выполнения погрузочно-разгрузочных работ, связанных как с разгрузкой и последующей погрузкой труб, которая сопровождается заменой способа крепления. Также в этом случае часто возникает потребность в складировании труб. Поэтому в настоящее время развиваются *контейнерные перевозки*, позволяющие значительно сократить объем промежуточных погрузочно-разгрузочных работ (рисунок 5).

Одним из путей, который дает возможность сокращения объема работ по погрузке и выгрузке, выполняемых при мультимодальной перевозке, является пакетирование труб на заводе-изготовителе. Данный подход предполагает размещение и крепление труб в *специализированном пакет-контейнере* (рисунок 6).

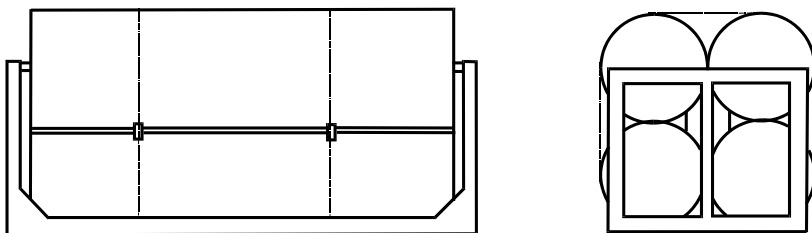


Рисунок 6 – Трубы в пакет-контейнере

Погрузка и разгрузка такого контейнера осуществляется погрузчиками или кранами по аналогии со стандартными контейнерами. Крепление пакета-контейнера с трубами на железнодорожной или автомобильной платформе осуществляется аналогично креплению стандартных контейнеров.

Кроме того, конструкция такого контейнера может предусматривать изменение его габаритов в зависимости от длины транспортируемых труб, а

также при перевозке пустого контейнера, что позволит снизить затраты, связанные с доставкой груза.

Заключение. В работе рассмотрены особенности транспортировки труб большого диаметра железнодорожным и автомобильным транспортом. Показано, что потребность в погрузочно-разгрузочных работах, возникающая при мультимодальных перевозках из-за смены вида транспорта, делает целесообразной перевозку труб в контейнерах. Пакетирование труб на заводе-изготовителе дает возможность обеспечения безопасности при доставке пакета труб к месту назначения с одновременным сокращением объема промежуточных погрузочно-разгрузочных работ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Соглашение о международном железнодорожном грузовом сообщении (СМГС) (с изм. и доп. по состоянию на 1 июля 2023 года) / Организация сотрудничества железных дорог (ОСЖД). – 119 с.

2 Размещение и крепление труб. Правила размещения и крепления грузов в вагонах и контейнерах : приложение 14 к СМГС / Организация сотрудничества железных дорог (ОСЖД), 2010. – С. 384–393.

3 Особенности проектирования вагона-платформы для перевозки труб большого диаметра модели 13-4108 / С. В. Мямлин [и др.] // Подвижной состав XXI века : идеи, творения, проекты : сб. науч. статей. – 2007. – Вып. 4. – С. 72–76.

4 Устройство для крепления труб на раме транспортного средства : пат. 10789 С1 Респ. Беларусь, МПК (2006): В 60Р 7/00 / И. А. Ворожун, А. В. Заворотный; заявитель Белорус. гос. ун-т трансп. – № а 20051196; заявл. 12.05.05; опубл. 30.06.08, Афіц. бюл. / Вынаходства карысныя мадэлі прамысловыя узоры. – 2008. – № 3. – С. 87.

5 Устройство для крепления стальных труб на раме транспортного средства : пат. 10789 С1 Респ. Беларусь, МПК (2006): В 60Р 7/00 И. А. Ворожун; заявитель Белорус. гос. ун-т трансп. – № а 20190102; заявл. 08.04.19; опубл. 30.06.08, Афіц. бюл. / Вынаходства карысныя мадэлі прамысловыя узоры. – 2019. – № 3. – С. 87.

6 **Дьомін, Ю. В.** Аналіз сучасных тэхнічных вырашэнь конструкцый спецыялізаваных вагонаў для інтэраперабельных та інтэрмодальных перавезень / Ю. В. Дьомін, А. А. Стецько // Збірнік навуковых праць Дзяржаўнага эканаміка-тэхналагічнага ўніверсітэту транспарту. Сер. : Транспартныя сістэмы і тэхналогіі. – 2011. – Вип. 19. – С. 43–49.

7 **Болотов, Н. М.** Выбор средств крепления грузов для повышения безопасности при перевозке автомобильным транспортом / Н. М. Болотов, Красникова Д. А. // Научная мысль. – 2016. – № 3. – С. 138–142.

8 **Andersson, P.** Differences in cargo securing regulations. How could we achieve harmonization? / P. Andersson, S. Sökjer-Petersen, J. Jagelčák // HVT12 : 12th International Symposium on Heavy Vehicle Transportation Technology. – Stockholm, 2012. – P. 1–15.

9 Международное руководство по безопасному креплению груза на автомобильном транспорте. – Женева : Генеральный секретариат IRU, 2014. – 76 с.

10 **De Pont, J.** Safety gains in log transport in New Zealand / J. de Pont, P. Baas, W. Wilshier // Proceedings of the Ninth International Symposium on Heavy Vehicle Weights and Dimensions. – Pennsylvania : State College, 2006. – 11 p.

11 **Jagelcak, J.** Different measures for load securing create barriers in international road freight transport / J. Jagelcak, J. Gnap // Archives of Transport System Telematics. – 2011. – Vol. 4, is. 2. – P. 10–17.

12 СТБ EN 12195-1-2019 Крепление груза на дорожных транспортных средствах. Безопасность. Ч. 1. Расчет сил крепления. – Введ. 01.12.2019. – Минск : Госстандарт, 2019. – 40 с.

13 Cargo fastening on automobile transport considering its deformation / A. O. Shimanovsky [et al.] // Transport Means: Proceedings of the 22nd International Conference. – 2018. – Vol. 1. – P. 192–196.

14 **Евсеева, А. А.** Повышение эффективности и безопасности методов крепления грузов при перевозке автомобильным транспортом / А. А. Евсеева, Д. А. Красникова, М. А. Якунин // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – Т. 3. – С. 2811–2815.

15 **Евсеева, А. А.** Применение метода фрикционной фиксации крепления грузов при перевозке автомобильным транспортом для повышения безопасности перевозочного процесса / А. А. Евсеева // Вестник СГТУ. – 2013. – № 2 (71). – С. 307–309.

16 DIN EN 12640:2020 Intermodal loadings units and commercial vehicles. Lashing points for cargo securing. Minimum requirements and testing. – Released: 01.05.2020. – Berlin : Deutsches Institut für Normung, 2020. – 17 p.

17 DIN EN 12642:2017 Securing of cargo on road vehicles. Body structure of commercial vehicles – Minimum Requirements. – Released: 01.03.2017. – Berlin : Deutsches Institut für Normung, 2020. – 28 p.

18 **Троицкая, Н. А.** Перевозка крупногабаритных и тяжеловесных грузов автомобильным транспортом // Н. А. Троицкая. – М. : Транспорт, 1992. – 157 с.

19 Устройство для крепления длинномерных труб на автопоезде : а. с. 1369949 СССР, МКИ В 60 Р 3/40, 7/12 / Е. Л. Семин, В. Г. Горбачев, З. Г. Набиев; ВНИИ по строительству магистральных трубопроводов. – № 4116031; заявл. 26.06.86; опубл. 30.01.88, Бюл. № 4. – 4 с.

I. A. VARAZHUN, A. U. VARAZHUN

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

IMPROVING MULTIMODAL TRANSPORTATION OF LARGE DIAMETER PIPES

Options for placing and fastening pipes in gondola cars, on universal and specialized railway platforms, vehicles, as well as in universal containers are considered. A pipe packaging scheme is proposed and it involves placing them in a specialized container, which allows to reduce the volume of loading and unloading work at changing transport type.

Keywords: gondola car, flatcar, transportation of pipes, fastening devices, container for pipes.

Получено 15.10.2023

УДК 621.785:539.43

В. Ф. ГАХРАМАНОВ¹, Э. А. АСЛАНОВ²¹Бакинский инженерный университет, Хырдалан, Азербайджан²Азербайджанский технический университет, Баку, Азербайджан**АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕГИРОВАННЫХ СТАЛЕЙ
ПОСЛЕ ХРОМОАЛИТИРОВАНИЯ**

Выполнен экспериментальный анализ характеристик сталей 3Х2В8Ф и 4Х5В2ФС, поверхностный слой которых насыщался хромом и алюминием газовым методом в порошках. Приведено сравнение размеров аустенитного зерна, полученного при разной длительности термообработки, и жаростойкости при температурах от 800 до 1000 °С. Показано, что хромоалитирование позволяет значительно улучшить характеристики поверхностного слоя обрабатываемого изделия.

Ключевые слова: легированная сталь, хромоалитирование, размер зерна, жаростойкость.

Штампы, используемые для горячего деформирования, работают в условиях переменного многократного нагрева и охлаждения рабочего слоя. Повышенные температуры и динамические нагрузки становятся причиной образования и развития термических трещин. Для обеспечения высокой долговечности инструмента, стали, из которых он изготавливается, должны обладать высокой теплостойкостью, твёрдостью, достаточной устойчивостью против разгара [1]. В числе материалов, которые наиболее часто применяются для штампов горячего деформирования, легированные стали типа 3Х2В8Ф, 4Х5В2ФС [2, 3].

Сталь 3Х2В8Ф применяется при обработке легированных конструкционных сталей и жаропрочных сплавов, в пресс-формах литья под давлением медных сплавов. Ее западноевропейские аналоги – Х30WCrV9-3, ВН21, Z30WCV9 и др. [4–6]. Сталь 4Х5В2ФС, зарубежным аналогом которой является сталь Х40CrMoV5-1 [7], используется в пресс-формах литья под давлением цинковых, алюминиевых и магниевых сплавов, для горячего деформирования конструкционных сталей и жаропрочных материалов.

В таблице 1 представлен химический состав данных сталей (содержание серы, фосфора и меди не превышает 0,3 %). В таблице 2 приведены их механические характеристики.

Таблица 1 – Химический состав рассматриваемых сталей

В процентах

Сталь	C	Si	Mn	Ni	Cr	W	V
3Х2В8Ф	0,3–0,4	0,15–0,4	0,15–0,4	< 0,35	2,2–2,7	7,5–8,5	0,2–0,5
4Х5В2ФС	0,35–0,45	0,8–1,2	0,15–0,45	< 0,4	4,5–5,5	1,6–2,2	0,6–0,9

Таблица 2 – Механические характеристики сталей при температуре 20 °С

Сталь	Предел текучести σ_t , МПа	Предел прочности σ_b , МПа	Относительное удлинение при разрыве, %	Относительное сужение, %	Ударная вязкость КСУ, кДж/м ²
3Х2В8Ф	1530	1390	12	36	200
4Х5В2ФС	1690	1760	–	–	300

Одним из способов, позволяющих повысить долговечность изделий из рассматриваемых сталей, является хромоалитирование [8, 9]. Оно представляет собой процесс химико-термической обработки металлов, при котором осуществляется одновременное насыщение их поверхностного слоя хромом и алюминием и проводится с целью придания обработанному изделию повышенной, по сравнению с хромированными деталями, эрозийной стойкости, окислительной стойкости и жаростойкости. Чтобы удовлетворить требования, предъявляемые к обрабатываемому изделию, изменяют состав насыщающей среды. При этом удается получить поверхностные слои с различными соотношениями концентраций диффундирующих элементов.

Представленная работа продолжает ранее выполненные исследования, связанные с анализом характеристик сталей, поверхность которых подвергается химико-термической обработке [10, 11]. Ее цель состоит в определении влияния хромоалитирования на физические характеристики изделий из рассматриваемых сталей.

Исследование проводилось на цилиндрических образцах сталей 3Х2В8Ф и 4Х5В2ФС. Образцы цилиндрические высотой 10 мм и диаметром 9 мм. Хромоалитирование осуществлялось газовым методом в порошках, составы которых аналогичны приведенным в работе [10]: 1) 65 % Cr, 34 % Al₂O₃, 1 % NH₄J; 2) 50 % Cr, 43 % Al₂O₃, 7 % NH₄Cl. После нагревания и выдержки при высокой температуре образцы закаливали, после чего осуществляли отпуск.

В ходе испытаний установлено (рисунок 1), что у менее легированной стали 4Х5В2ФС выдержка в течение 4 ч в случае нагрева до 1035 °С привела к росту зерна до 9-го балла, при нагреве до 1090 °С – до 8-го балла. Дальнейшее увеличение выдержки не приводило к изменению размера зерна. При температуре 1120 °С замедление роста размера зерна наблюдалось только после 8 ч нагрева, а балл зерна оказался близким к 4.

При термообработке более легированной стали 3Х2В8Ф, которая содержит 8 % W, размер зерна не увеличился выше балла 9 даже в случае выдержки 10 ч и нагреве до 1120 °С (рисунок 1).

Проведенный анализ структуры поверхностного слоя показал, что на поверхности изделий из стали 4Х5В2ФС карбидный слой сразу переходит в основную структуру, как это показано на рисунке 2, а. С другой стороны, в стали 3Х2В8Ф под карбидным слоем образуется безуглероденная зона (рисунок 2, б). Исследования показали, что данный дефект устраняется при повторном

нагреве до температуры 1080 °С и выдержке в течение одного часа. Твердость поверхностного слоя стали 4Х5В2ФС, содержащей больше хрома, на HV 50–90 выше, чем твердость аналогичного слоя на стали 3Х2В8Ф, имеющей в 1,5–2 раза больше карбидной фазы.

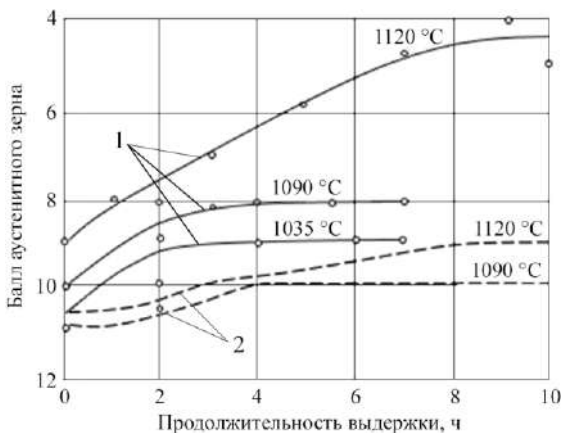


Рисунок 1 – Влияние температуры и продолжительности выдержки на размер аустенитного зерна (1 – сталь 4Х5В2ФС; 2 – сталь 3Х2В8Ф)

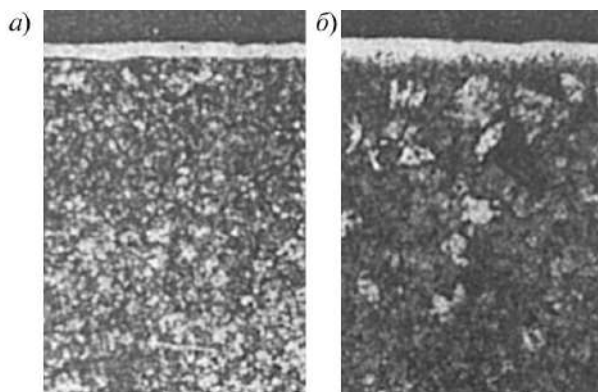


Рисунок 2 – Структура поверхностного слоя, полученного при температуре нагрева 1040 °С и выдержке 6 ч:
а – сталь 3Х2В8Ф; б – сталь 4Х5В2ФС

Для определения жаростойкости термообработанные образцы размерами 25×15×3 мм нагревали в воздушной электрической печи до 800–1000 °С. Жаростойкость оценивалась по увеличению массы $\mu = \frac{\Delta m}{A}$, где Δm – привес, кг; A – площадь поверхности образца, м².

Окисление необработанных образцов оказалось значительным (рисунок 3, *а*), причем стойкость против окисления у стали 3Х2В8Ф при 800 °С оказалась выше, чем у стали 4Х5В2ФС. При более высоких температурах (900 и 1000 °С) ситуация изменилась на противоположную, что связано с влиянием хрома, содержание которого в стали 4Х5В2ФС выше.

Поверхность хромоалитированных образцов окисляется в несколько раз медленнее, что видно из рисунка 3, *б*.

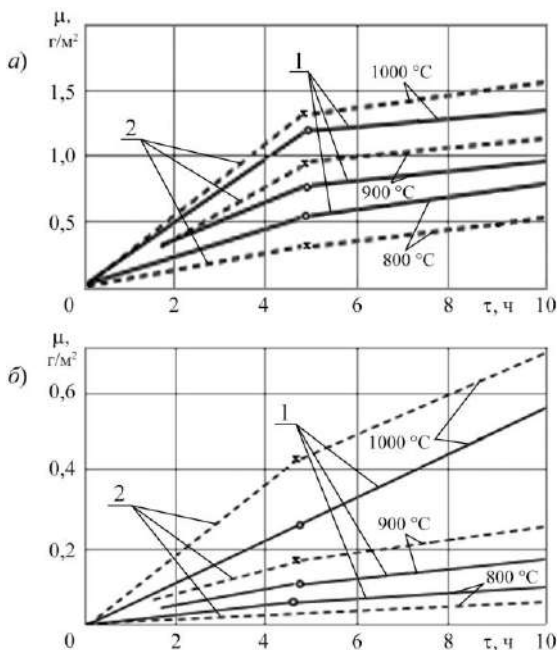


Рисунок 3 – Жаростойкость нехромоалитированных (*а*) и хромоалитированных (*б*) образцов (1 – сталь 4Х5В2ФС; 2 – сталь 3Х2В8Ф)

Таким образом, в ходе проведенных экспериментов установлено, что хромоалитирование позволяет существенно улучшить свойства поверхностного слоя обоих рассмотренных сталей. Анализ структуры такого слоя показал, что даже при температуре выдержки 1120 °С размер зерна стали 3Х2В8Ф остается небольшим (его балл составляет 9 и более). В то же время для стали 4Х5В2ФС, если при температурах до 1100 °С размер зерна тоже невелик (8 баллов и более), то при больших температурах он существенно увеличивается и может достигать 4 баллов при 1120 °С. С другой стороны, твердость поверхностного слоя стали 4Х5В2ФС на HV 50–90 выше, стали 3Х2В8Ф. Кроме того, в результате хромоалитирования значительно повышается жаростойкость сталей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Влияние комплексного легирования на структуру и стойкость низколегированных штамповых сталей / С. В. Бобырь [и др.] // Фундаментальные и прикладные проблемы черной металлургии. – 2010. – Вып. 22. – С. 213–220.

2 **Геллер, Ю. А.** Инструментальные стали / Ю. А. Геллер. – М. : Металлургия, 1975. – 584 с.

3 **Резинкина, Г. П.** Особенности термической обработки штамповых сталей и сталей для литья под давлением на предприятиях Крыма / Г. П. Резинкина, Э. С. Гордеева // Вісник СевНТУ. – Сер. «Машиноприладобудування та транспорт». – 2014. – Вип. 150. – С. 128–132.

4 **Zumbilev, A.** About the influence of heat treatment over the resistance against fragile destruction of BH21 steel / A. Zumbilev // Annals of Faculty Engineering Hunedoara : International Journal of Engineering. – 2010. – Т. VIII, f. 1. – P. 21–24.

5 Processing and wear of cast MMCs with cemented carbide scrap / H. Rojacz [et al.] // Journal of Materials Processing Technology. – 2014. – Vol. 214, is. 6. – P. 1285–1292.

6 Fatigue thermique des aciers à outils pour travail à chaud / D. Rousseau [et al.] // Revue de métallurgie. – 1975. – Vol. 72, no. 12. – P. 875–890.

7 Multi-scale hot working tool damage (X40CrMoV5-1) analysis in relation to the forging process / A. Alimi [et al.] // Engineering Failure Analysis. – 2016. – Vol. 62. – P. 142–155.

8 **Панков, В. П.** Исследование диффузионных покрытий, нанесенных методом хромоалитирования в вакууме / В. П. Панков, В. Д. Ковалев // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2020. – Т. 16, № 2 (182). – С. 85–92.

9 Многокомпонентные диффузионные покрытия / Л. С. Ляхович [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1974. – 286 с.

10 **Гахраманов, В. Ф.** Диффузионное хромирование и карбохромирование штамповых сталей / В. Ф. Гахраманов // Нефтегазовое дело. – 2021. – Т. 19, № 3. – С. 121–127.

11 **Гахраманов, В. Ф.** Влияние предварительного окисления на процесс азотирования сплавов железа / В. Ф. Гахраманов, Э. А. Асланов // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 2 (55). – С. 54–59.

V. F. GAKHRAMANOV¹, E. A. ASLANOV²

¹Baku Engineering University, Khirdalan city, Azerbaijan

²Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

ANALYSIS OF CHARACTERISTICS OF ALLOYED STEELS AFTER CHROMOALITATION

There is performed an experimental analysis of the characteristics of steels 3Kh2V8F and 4Kh5V2FS with the surface layer saturated with chromium and aluminum by the gas method in powders. A comparison of the sizes of austenite grains obtained at different heat treatment durations and heat resistance at temperatures from 800 to 1000 °C is carried out. It is shown that chromoalizing can significantly improve the characteristics of the surface layer of the processed product.

Keywords: alloy steel, chromium aluminizing, grain size, heat resistance.

Получено 18.04.2023

УДК 629.4.045:629.4.015

М. Г. ГЕГЕДЕШ, А. В. ВОРОЖУН

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ОСОБЕННОСТИ УЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ПРИ ПЕРЕВОЗКЕ ДЛИННОМЕРНЫХ ГРУЗОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫМ ТРАНСПОРТОМ

Выполнен анализ особенностей транспортировки длинномерных грузов на железнодорожном подвижном составе, обусловленных геометрическими параметрами грузов, свойствами материалов, из которых выполнены грузы и средства крепления, а также характером динамических нагрузок, испытываемых такими грузами в процессе перевозки.

Ключевые слова: длинномерный груз, устройства крепления, динамические нагрузки при транспортировке, колебания длинномерных грузов.

Постоянное расширение ассортимента перевозимых грузов требует совершенствования как вагонного парка, так и способов размещения и крепления грузов на подвижном составе. На каждом виде транспорта существует понятие длинномерного или крупногабаритного груза. Так, при перевозках железнодорожным транспортом это понятие применяется к грузам, длина которых превышает длину вагона более чем на 400 мм с каждой торцевой стороны [1]. К их числу относятся, например, металлопрокат и железобетонные изделия.

Один из путей решения задачи о транспортировке длинномерных грузов связан с созданием новых вагонов. Так, в работе [2] отмечают, что на ОАО «Абаканвагонмаш» создана многофункциональная платформа, длиной 26,06 м для перевозки крупнотоннажных контейнеров, труб большого диаметра и штрипсов. Аналогичная платформа изготовлена на ОАО «Трансмаш» в г. Энгельсе. Как утверждают авторы [2], платформы прошли весь комплекс испытаний и могут быть рекомендованы к производству. Однако такой подход требует значительных затрат временных и материальных ресурсов.

В настоящее время в Республике Беларусь при подготовке груза к транспортированию, проведении расчетов по размещению и средствам крепления грузов необходимо руководствоваться Правилами [3]. Если в них какие-либо грузы не рассматриваются, то их размещение и крепление может быть выполнено в соответствии с Местными техническими условиями (далее МТУ), действующими на железной дороге отправления, или схемами размещения и крепления грузов (далее – НТУ), которые должны быть разработаны в соответствии с требованиями, указанными в [3]. Кроме того, рекомендуется использовать межгосударственный стандарт ГОСТ 26653-2015 «Подготовка генеральных грузов к транспортированию. Общие требования», который действует в Беларуси, Армении, Казахстане, Киргизии, России и Таджики-

стане и устанавливает общие требования по подготовке генеральных грузов к транспортированию в прямом и смешанном сообщениях автомобильным, железнодорожным, воздушным и водным видами транспорта. На зарубежных железных дорогах пользуются аналогичными нормативными документами, например [4, 5], или схемами крепления грузов, рассчитанными отдельно.

Современные локомотивы обладают повышенной мощностью, в результате чего возможно увеличение длины и массы составов грузовых поездов, динамика которых может существенно отличаться от поездов стандартной длины вследствие действия продольно-динамических сил в межвагонных соединениях [6, 7], которые оказывают влияние на плавность хода подвижного состава и относительные смещения транспортируемых грузов в кривых участках, переломах профиля пути и на затяжных спусках, что также необходимо учитывать при подборе схем крепления длинномерных грузов.

Нагруженность элементов конструкций подвижного состава и таких грузов при транспортировке отличается для случаев погрузки на один вагон, сцеп вагонов или сочлененные вагоны. Наибольшие динамические нагрузки возникают при перевозке длинномерных грузов на сцепе вагонов при провисании таких грузов между опорными устройствами и смещении осей вагонов друг относительно друга в случае движения по криволинейному в плане или профилю пути.

Цель представленной работы – исследование особенностей транспортировки длинномерных грузов на сцепе вагонов, связанных с динамикой таких грузов при различных режимах движения.

Авторы [8] отмечают, что при транспортировке длинномерных объектов с размещением на сцепе из двух вагонов-платформ возникает продольно-изгибные колебания груза. На основе аналитического и компьютерного моделирования динамической нагруженности штабеля определена нагруженность платформ сцепа и рассчитаны динамические показатели системы «длинномерный груз – сцеп вагонов», учет которых важен для обеспечения безопасности перевозки и сохранности грузов.

В работе [9] представлены результаты расчетов, полученные в ходе компьютерного моделирования устройства крепления рельсов при их перевозке на сцепе из двух платформ. Моделирование выполнялось с использованием инженерного пакета MSC ADAMS. Отмечено, что отсутствие в рельсах отверстий для болтовых соединений обуславливает сложность их увязки в ярусы. Результаты моделирования показывают, что средства крепления рельсов подвержены значительным деформациям при переходных режимах движения подвижного состава.

Для удержания транспортируемых длинномерных грузов от их относительного перемещения в процессе перевозки используют такие специализированные устройства, как фитинговые упоры [10, 11]; упругие, гравитационные и комбинированные турникетно-крепежные устройства (ТКУ) [12, 13],

а также иные конструкции, которые необходимо разрабатывать и испытывать на прочность для каждого отдельного вида грузов.

В работе [14] рассмотрены закономерности колебаний длинномерных грузов и установлены оптимальные параметры амортизирующих устройств путем математического моделирования динамической системы «железнодорожная платформа – турникет – длинномерный груз» с учетом динамики столкновения. Защита длинномерного груза осуществляется путем дополнительной подвески. Снижение вертикальных ускорений возможно за счет снижения жесткости рессорной подвески нагруженных тележек. Авторы работы указывают на то, что увеличение жесткости межвагонного соединения приводит к увеличению ускорения и движения турникетного устройства; увеличение нагрузки на турникет увеличивает степень его износа, поскольку сцепка платформы полностью нагружена.

Моделирование пространственных колебаний платформы с прикрепленным длинномерным грузом представлено в работе [15]. Автор полагает, что перевозка сверхдлинных грузов на сцепе платформ встречается крайне редко. В связи с этим рассматривается крепление длинномерного груза на платформе посредством двух упругих опор. При этом концы груза (консоли) располагаются над платформами прикрытия. Представленная расчетная схема (рисунок 1) позволяет моделировать поведение механической системы «платформа – груз» при разной массе и длине груза.

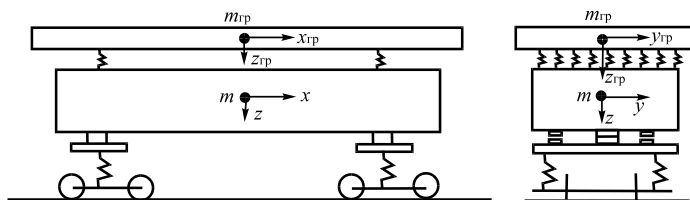


Рисунок 1 – Расчетная схема вагона-платформы с длинномерным грузом

Особый интерес представляет моделирование поведения механической системы «платформа – груз» при многоярусном по высоте размещению груза. Моделированию поведения платформы, загруженной железобетонными плитами в четыре яруса, в процессе соударения вагонов посвящена работа [16]. Представленная в ней математическая модель учитывает влияние сил упругости элементов крепления, а также сил сухого трения между ярусами груза (рисунок 2). В ходе проведения исследований установлено, что верхняя плита имеет наибольшее перемещение, а нижняя – наименьшее. Полученные аналитическим способом выводы о закономерности продольного смещения ярусов железобетонных плит подтверждены результатами натурных испытаний.



Рисунок 2 – Многоярусная погрузка железобетонных плит

В работе [17] представлена транспортировка длинномерных грузов на вагонах сочлененного типа, отличающихся от обычных опиранием секций на одну общую тележку. В таких вагонах шарнирное соединительное устройство является составной несъемной частью несущей конструкции вагона и соединяет две секции вагона, передавая нагрузки от их опор на общую тележку. Например, вагон-платформа модели 13-9894 (рисунок 3) при грузоподъемности 89,5 т имеет конструктивную скорость 140 км/ч.



Рисунок 3 – Сочлененный вагон-платформа модели 13-9894

Для перевозки крупногабаритных железобетонных конструкций рекомендуется использовать 6-осные сочлененные вагоны модели 13-470-01, а также двухплатформенные вагоны модели 13-470. Закрепление длинномерных конструкций на них осуществляется турникетно-крепёжными устройствами. Однако в этом случае требуется выбрать места установки турникетных опор, при которых обеспечиваются одинаковые нагрузки на тележки.

Иные конструктивные решения сочлененных грузовых вагонов представлены в [18]. Проведенный технико-экономический анализ их применения для транспортировки контейнеров показал, что наиболее предпочтителен вагон из двух-трех секций, для соединения которых целесообразно использовать устройства сочленения, обеспечивающие вращение вокруг трех осей координат. Для перевозки автомобилей перспективен обладающий большой вместимостью восьмиосный вагон из трех секций (рисунок 4).

Таким образом, анализ имеющихся исследований демонстрирует, что особенности динамического взаимодействия длинномерных грузов с подвижным составом обусловлены их колебаниями в вертикальной плоскости, а также упругими свойствами материалов, из которых изготовлены грузы и средства их крепления, что не нашло отражения в нормативных документах, регламентирующих транспортировку.

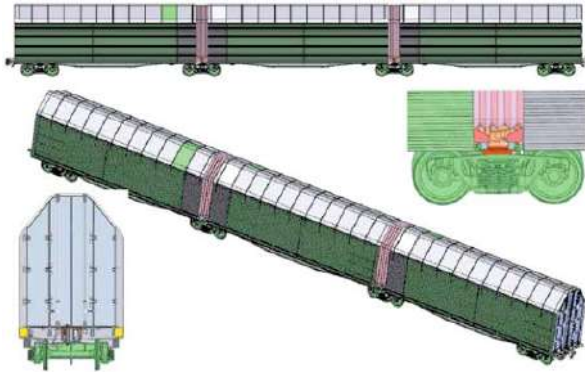


Рисунок 4 – Трехсекционный сочлененный вагон для перевозки автомобилей

Развитие теории транспортировки длинномерных грузов требует создания новых математических и компьютерных моделей, учитывающих перемещение таких грузов относительно вагонов при переходных режимах движения как стандартных по массе, числу вагонов и скорости движения поездов, так и скоростных составов, имеющих повышенную массу и длину.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект T22M-073).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Технические условия размещения и крепления грузов в вагонах и контейнерах № ЦМ-943 : утв. 27.05.2003 МПС России. – М. : Юртранс, 2003. – 544 с.

2 **Порядин, С. И.** О ходе создания грузовых вагонов нового поколения / С. И. Порядин, Ю. П. Бороненко, В. Н. Цюренко // Подвижной состав XXI века: идеи, требования, проекты : сб. науч. статей. – СПб. : ПГУПС, 2005. – С. 5–16.

3 Соглашение о международном железнодорожном грузовом сообщении (СМГС): действует с 1 ноября 1951 г., с изм. и доп. на 1 июля 2015 г. – Минск : Амалфея, 2015. – 216 с.

4 Tiedown Handbook for Rail Movements / R. E. Kerr [et al.] ; Transportation Engineering Agency ; ed. by R. E. Kerr. – Virginia : Newport News, 2003. – 97 p.

5 Equipment for rational securing of cargo on railway wagons / N. Andersson [et al.]. – Högansås : Vinnova – Swedish Agency for Innovation Systems, 2004. – 228 p.

6 The influence of resistant force equations and coupling system on long train dynamics simulations / N. Bosso [et al.] // Journal of Rail and Rapid Transit. – Vol. 236, is. 1. – P. 35–47.

7 **Сахаров, П. А.** Исследование продольных сил в грузовых поездах при движении по переломам продольного профиля пути / П. А. Сахаров // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 209–219.

8 **Шатунов, О. В.** Динаміка зчепу вагонів-платформ під час перевезення довгомірного вантажу / О. В. Шатунов, А. О. Швець // Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. – 2020. – № 4 (88). – С. 114–131.

9 **Мозгрин, С. В.** Эффективность организации перевозок длинномерных грузов на фитинговых платформах с различной длиной погрузочных площадок / С. В. Мозгрин, Г. Е. Писаревский // Вестник ВНИИЖТ. – 2019. – Т. 78, № 4. – С. 203–209.

10 **Васильев, С. М.** Совершенствование подвижных турникетно-крепежных устройств с целью установки на современные типы грузовых вагонов / С. М. Васильев, А. А. Железняков, Л. П. Целковицова // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 29–34.

11 **Петрачков, С. А.** Компьютерное моделирование длинномерных грузов на сцепе из двух платформ / С. А. Петрачков, М. Г. Гегедеш // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2022. – № 2 (45). – С. 117–120.

12 **Васильев, С. М.** Математическое моделирование динамических воздействий на длинномерные грузы и опорные вагоны / С. М. Васильев // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2006. – № 1–2 (12–13). – С. 30–36.

13 Research of the operation of the turnstile support-fastening device during the transportation of a long-dimensional heavy load / J. Musayev [et al.] // Vibroengineering Procedia. – 2023. – Vol. 49. – P. 80–85.

14 **Legeza, V. P.** Dynamic Processes in a Mechanical System with Shock-Absorbing Cargo-Securing Devices with Dry Friction / V. P. Legeza // International Applied Mechanics. – 2021. – Vol. 57, is. 4. – P. 455–465.

15 **Анисимов, П. С.** Модель пространственных колебаний платформы с длинномерным грузом / П. С. Анисимов // Мир транспорта. – 2013. – № 4. – С. 6–13.

16 **Псеровская, Е. Д.** Изучение динамики многоярусного груза и воспринимаемых креплением нагрузок при маневровых соударениях вагонов / Е. Д. Псеровская, С. Ю. Хорунжин // Известия Транссиба. – 2010. – № 1 (1). – С. 106–112.

17 **Чаганова, О. С.** Особенности крепления грузов на сочленённых вагонах-платформах / О. С. Чаганова, Т. И. Быстренкова, Е. В. Меньшова // Проблемы безопасности на транспорте : материалы X Междунар. науч.-практ. конф. В 5 ч. Ч. 5. – Гомель : БелГУТ, 2020. – С. 143–145.

18 **Бороненко, Ю. П.** Выбор конструктивных решений сочлененных грузовых вагонов для колеи 1520 мм / Ю. П. Бороненко, Т. М. Белгородцева, Н. А. Кукушкина // Транспорт Российской Федерации. – 2013. – № 3. – С. 3–9.

M. G. GEGEDESH, A. U. VARAZHUN

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

PECULIARITIES OF LONG CARGO TRANSPORTATION BY RAILWAY TRANSPORT

There is performed an analysis of the long cargo railway transportation peculiarities, determined by the geometric parameters of the cargo, the properties of the materials of the cargo and fastening devices, as well as the nature of the dynamic loads experienced by such cargo during transportation.

Keywords: long cargo, fastening devices, dynamic loads at transportation, long cargo oscillations.

Получено 22.10.2023.

УДК 533.6.011:004.94

О. В. ДЕМЬЯНЧУК

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ПОТОКОМ ВОЗДУХА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Рассматривается обтекание потоком воздуха железнодорожного вагона, моделируемого прямоугольным параллелепипедом. Описываются особенности конечно-элементной модели, построенной в среде ANSYS CFX. Выполнено сравнение результатов определения скоростей потока воздуха и его давления на стенку вагона для моделей турбулентности $k-\varepsilon$ и $k-\omega$. Получены значения коэффициентов аэродинамического сопротивления.

Ключевые слова: аэродинамика, конечно-элементное моделирование, турбулентность, аэродинамический коэффициент.

Обеспечение безопасности движения, повышение энергоэффективности железнодорожного транспорта требует решения задач аэродинамики железнодорожного подвижного состава. В существующих Правилах тяговых расчетов эмпирические коэффициенты, учитывающие, в том числе, силы сопротивления воздуха, были определены укрупненно только для трех типов вагонов: полувагонов, цистерн и рефрижераторов. К настоящему времени в эксплуатацию поступило свыше 100 новых моделей вагонов. Имеющиеся формулы для определения сил сопротивления их движению не учитывают особенности конструкции ходовых частей и кузова, поэтому, как отмечается в работе [1], погрешность определения таких сил может достигать 60 %.

В настоящее время на железных дорогах колеи 1520 мм основное сопротивление движению определяется с помощью динамометрического метода, недостатком которого является высокая стоимость проведения испытаний. С другой стороны, авторами [1] отмечается необходимость отказа от формул, определяющих основное сопротивление вагонов в среднем, и перехода к определению сопротивления движению конкретной модели. В работе [2] приведены выражения сил сопротивления движению и значения используемых эмпирических коэффициентов, которые более точно соответствуют различным типам подвижного состава. Однако авторы [2] отмечают, что приведенных вариантов недостаточно, и они не учитывают влияние многих факторов. Конструкции кузова подвижного состава имеют более значительные отличия, чем это следует из нескольких представленных поправочных коэффициентов для определения воздушного сопротивления. Поэтому возможны значительные расхождения между расчетами и фактическими значениями.

Для получения аэродинамических характеристик транспортных средств используются полномасштабные испытания, эксперименты в аэродинамической

трубе, методы аналитического расчета и численного моделирования. Полномасштабные испытания характеризуются высокой стоимостью, а также сложностью проведения, вследствие чего большая часть испытаний проводится на масштабированных моделях, в ходе экспериментов с которыми возникают определенные трудности при получении результатов, соответствующих полномасштабным прототипам. Различия в аэродинамическом сопротивлении между масштабированными моделями и полномасштабными транспортными средствами может достигать 30 %, в зависимости от масштаба и метода испытаний.

В работе [3] выполнены испытания грузовых поездов, состоящих из полувагонов и вагонов-хопперов, в аэродинамической трубе. Установлено, что наибольшее снижение аэродинамического сопротивления может быть достигнуто за счет установки закрывающего верха. Также положительный эффект позволяет получить уменьшение межвагонных зазоров. Авторами [4] рассмотрена аэродинамика вагонов-цистерн и выполнена оценка мероприятий по снижению их аэродинамического сопротивления. Исследования проводились в аэродинамической трубе, использовалась конфигурация поезда, состоящая из трех вагонов-цистерн. По результатам испытаний определен коэффициент лобового сопротивления вагона-цистерны в базовой конфигурации, составивший 0,135. Полученные результаты испытаний показали большой потенциал снижения лобового сопротивления за счет применения дополнительных устройств к существующей геометрии вагонов-цистерн – до 30 %.

Проведение исследований с помощью технологий вычислительной гидродинамики (Computational Fluid Dynamics или CFD) на основе трехмерного моделирования объектов является одним из наиболее эффективных путей решения задачи [5]. Вычислительная гидродинамика может заменять или дополнять существующие аналитические методы, применяться в случаях, когда невозможно проведение эксперимента из-за таких ограничивающих факторов, как его масштаб, стоимость, возможность проведения или опасность [6]. В настоящее время CFD широко используется для проектирования транспортных средств, расчета и оптимизации их основных аэродинамических параметров.

Значительная часть исследований, связанных с изучением аэродинамики железнодорожного подвижного состава, посвящена движению высокоскоростных пассажирских поездов [7, 8]. Применение вычислительной гидродинамики для определения аэродинамических коэффициентов устойчивости пассажирского поезда при боковом ветре рассмотрено в работе [8], авторами которой обобщены результаты и рекомендации по использованию CFD для оценки устойчивости транспортных средств при боковом ветре в соответствии со стандартом EN 14067-6:2010 [9]. Полученные результаты показывают, что хорошо работающая модель CFD позволяет определить аэродинамический коэффициент обтекаемых поездов с достаточно высокой точностью. Моделирование может использоваться в качестве альтернативы испытаниям в аэродинамической трубе во всех случаях при условии, что точность подхода

подтверждена на эталонном поезде с характеристиками, аналогичными характеристикам моделируемого поезда.

Также значительное внимание уделено изучению аэродинамических характеристик вагонов-платформ, используемых при перевозке контейнеров. Авторами работы [10] выполнены натурные испытания контейнерного поезда для оценки аэродинамических характеристик контейнеров, погруженных на платформы. По результатам испытаний установлено, что распределение давления на переднюю и заднюю поверхности, полученное в условиях слабого ветра, соответствует результатам экспериментов, проведенных с использованием аэродинамической трубы, и также путем моделирования.

Моделирование обтекания воздушным потоком платформы-контейнерова с использованием метода больших вихрей рассмотрено в статье [11]. Значения коэффициентов воздушного сопротивления, определенные расчетом для случаев отдельно стоящего вагона и вагона в составе поезда, хорошо согласуются с результатами, полученными при полномасштабных испытаниях, а также испытаниях в аэродинамической трубе для аналогичных типов вагонов.

К решению задач о нахождении сил давления ветра на различные сооружения имеется также значительный интерес в строительстве. В своде правил «Нагрузки и воздействия» [12], устанавливающем требования по назначению нагрузок, воздействий и их сочетаний, учитываемых при расчетах зданий и сооружений, приводится методика расчета ветровых нагрузок и аэродинамических коэффициентов. Имеется ряд публикаций, посвященных исследованию обтекания воздухом зданий и городских застроек. Так, в работе [13] выполнена верификация метода компьютерного моделирования на основе сравнения полученных аэродинамических коэффициентов с результатами натуральных экспериментов [14] и результатами, полученными при расчете по общепринятой методике. Авторами [14] сделан вывод о том, что компьютерное моделирование аэродинамики позволяет получить приемлемую для практики точность получаемых результатов. Анализ аэродинамической структуры потока за отдельными зданиями и в городской застройке выполнен в работе [15], автором которой установлены некоторые закономерности взаимодействия потока с элементами застройки.

Однако получение описанных выше результатов является весьма трудоемкой задачей. Поэтому целью данной статьи стала разработка алгоритма, который позволит оценивать значения сил, действующих на железнодорожный подвижной состав и иные объекты при наличии ветра.

Моделирование обтекания воздушным потоком железнодорожного вагона осуществлялось в программном комплексе ANSYS CFX 2023. Вагон рассматривался как параллелепипед, размеры которого соответствуют полномасштабной конструкции.

Построена конечно-элементная сетка, на первоначальном этапе моделирования состоящая из 777,3 тыс. узлов, 4 млн ячеек, с характерным размером одного элемента 0,250 м. В области вагона выполнено сгущение сетки до

размера элемента 0,15 м с помощью функции Sizing, также использован инструмент Inflation для построения призматических слоев вблизи поверхности вагона (количество слоев – 7, максимальный размер элемента – 0,15 м). В дальнейшем выполнено сгущение сетки в области железнодорожного вагона до 0,1 м, при этом количество ячеек составило 4,4 млн.

Одним из требований, предъявляемых к вычислительной области, относится соответствие ее размеров параметрам, исключающим влияние расчетной области на поле потока вокруг моделируемого объекта. Для целей исследования приняты размеры расчетной области: длина – 65 м, ширина – 29 м, высота – 16,7 м. Выбраны следующие расчетные параметры: тип среды – идеальный газ, значение температуры – 288,15 К, давление – 100 кПа, скорость потока воздуха – 10 м/с.

На рисунке 1 представлена расчетная область с указанием используемых при моделировании граничных условий. На входе (граничное условие Inlet) задавалась скорость ветра $v = 10$ м/с, на выходе (граничное условие Outlet) – давление $p = 0$. На боковых и верхней поверхностях расчетной области использовались граничные условия Opening (давление задавалось равным нулю), на нижней поверхности и поверхности вагона – условие «Wall» (непроницаемая стенка).

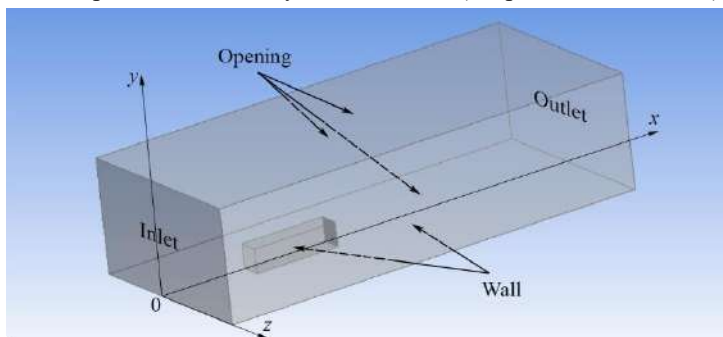


Рисунок 1 – Расчетная область

Для расчета использованы две модели турбулентности: $k-\epsilon$ и $k-\omega$. Итерации производились до достижения точности 10^{-4} .

Продолжительность расчета при характерном размере сетки 0,15 м для модели $k-\epsilon$ составила 51 мин 45 с, для модели $k-\omega$ – 58 мин 33 с. При измельчении сетки – 1 ч 15 мин 51 с и 1 ч 24 мин 23 с соответственно. Таким образом, использование модели турбулентности $k-\epsilon$ позволяет сократить время расчета на 12–14 %.

На рисунке 2 приведены схемы распределения давления на лобовой поверхности вагона, а на рисунке 3 – соответствующие графики изменения давления на высоте 1,75 м от основания вагона. Аналогичные схемы и графики для боковой поверхности вагона представлены на рисунках 4 и 5.

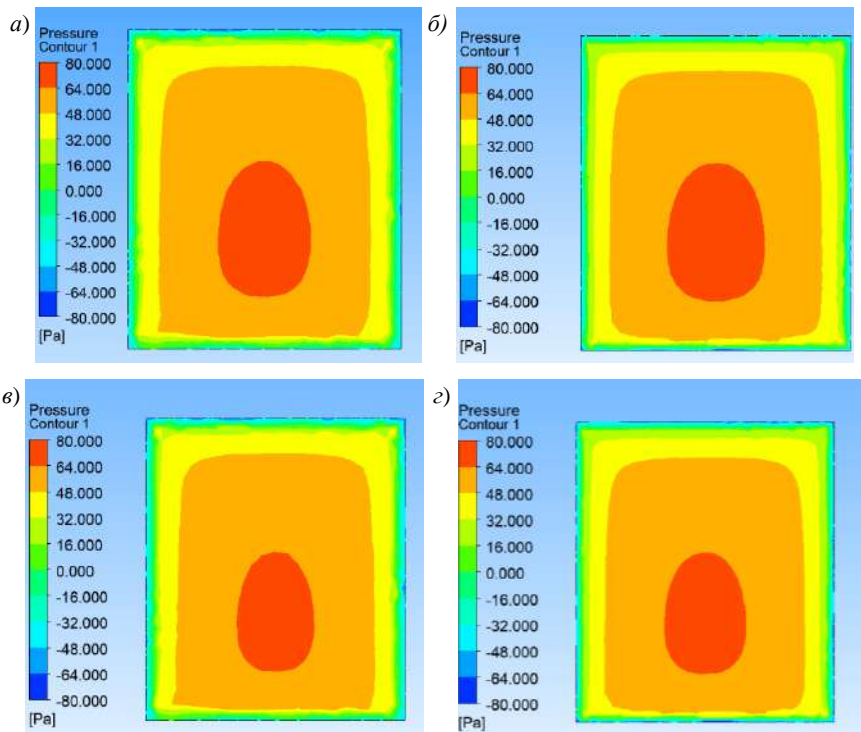


Рисунок 2 – Распределение давления, Па, на лобовой поверхности вагона:

a – модель турбулентности $k-\epsilon$, размер элемента на поверхности вагона – 0,150 м;

б – модель турбулентности $k-\epsilon$, размер элемента на поверхности вагона – 0,100 м;

в – модель турбулентности $k-\omega$, размер элемента на поверхности вагона – 0,150 м;

г – модель турбулентности $k-\omega$, размер элемента на поверхности вагона – 0,100 м

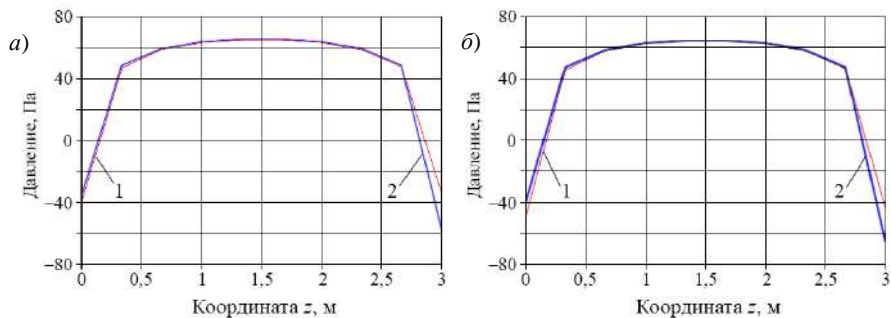


Рисунок 3 – Распределение давления на лобовой поверхности вагона при использовании моделей турбулентности $k-\epsilon$ (а) и $k-\omega$ (б); размеры элементов на поверхности вагона: 1 – 0,15 м; 2 – 0,10 м

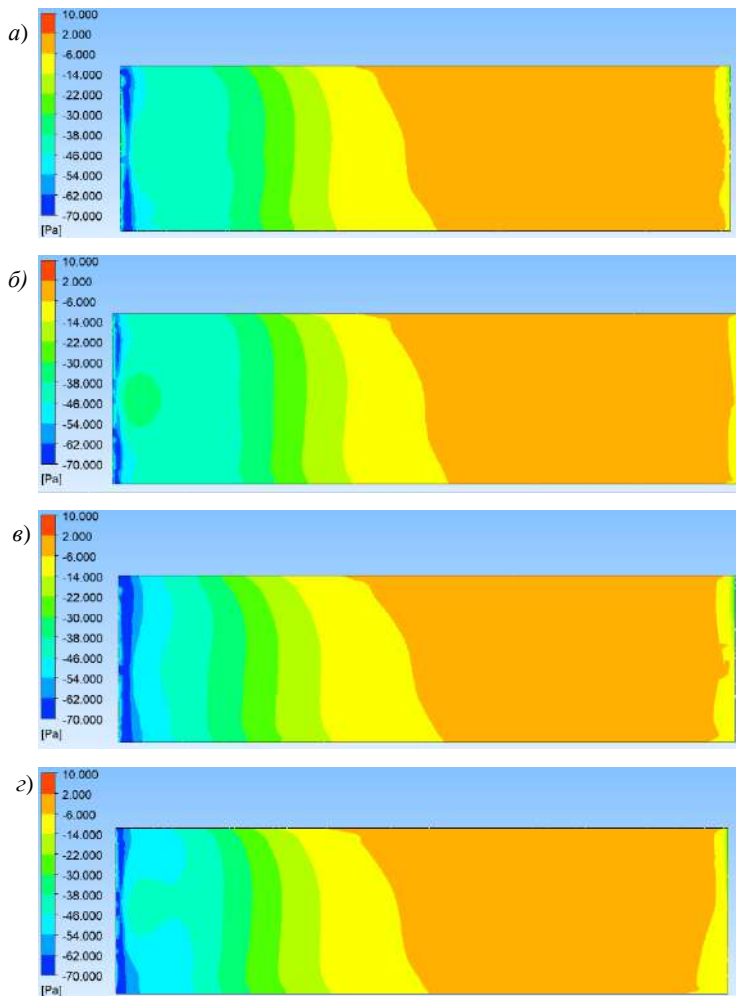


Рисунок 4 – Распределение давления на боковой поверхности вагона:
а – модель турбулентности $k-\epsilon$, размер элемента на поверхности вагона – 0,150 м;
б – модель турбулентности $k-\epsilon$, размер элемента на поверхности вагона – 0,100 м;
в – модель турбулентности $k-\omega$, размер элемента на поверхности вагона – 0,150 м;
г – модель турбулентности $k-\omega$, размер элемента на поверхности вагона – 0,100 м

Из представленных на рисунке 4 схем видно, что влияние размеров сетки конечных элементов на результаты расчетов весьма незначительно. Некоторые расхождения наблюдаются главным образом на границах рассматриваемой области. Расчет по модели турбулентности $k-\omega$ приводит к несколько меньшему размеру области с повышенным давлением (более 64 Па) на лобовой поверхности вагона.

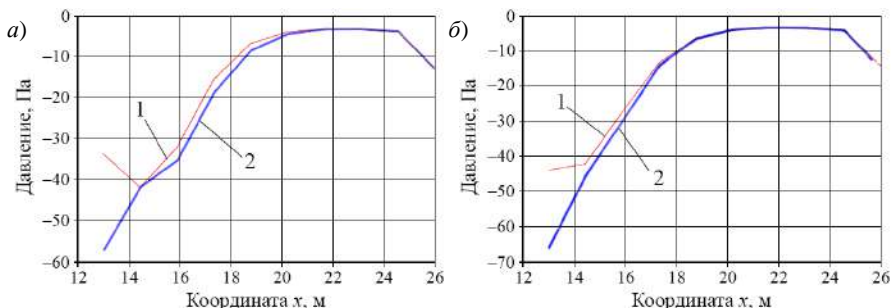


Рисунок 5 – Распределение давления на боковой поверхности вагона при использовании моделей турбулентности $k-\varepsilon$ (а) и $k-\omega$ (б); размеры элементов на поверхности вагона: 1 – 0,15 м; 2 – 0,10 м

Определены значения коэффициента аэродинамического сопротивления C_x , который вычисляется по формуле [7]

$$C_x = \frac{2F}{\rho v^2 A},$$

где F – значение силы, действующей на тело при обтекании его воздухом, Н; ρ – плотность воздуха, $\text{кг}/\text{м}^3$; v – скорость потока воздуха, $\text{м}/\text{с}$; A – площадь поперечного сечения обтекаемого тела, м^2 .

В таблице 1 приведены результаты расчета аэродинамического коэффициента для вариантов расчета с различными параметрами сетки и моделями турбулентности. Из нее видно, что обе модели турбулентности дают практически идентичные результаты, разница полученных коэффициентов аэродинамического сопротивления не превышает 0,2 %. Сгущение сетки вызывает увеличение значения силы и аэродинамического коэффициента до 2,4 %.

Таблица 1 – Аэродинамические коэффициенты при разных параметрах модели

Модель турбулентности	Размер элемента на поверхности вагона, м	Сила сопротивления, Н	Аэродинамический коэффициент C_x
$k-\varepsilon$	0,150	540,664	0,855
	0,100	553,675	0,876
$k-\omega$	0,150	541,416	0,857
	0,100	552,878	0,875

На рисунке 6 приведены схемы распределения скоростей потока в расчетной области. Результаты расчета показали, что максимальные значения скорости потока для модели турбулентности $k-\varepsilon$ составляют 14,13 (при характерном размере сетки конечных элементов 0,150 м) и 14,83 $\text{м}/\text{с}$ (при размере сетки 0,100 м). Для модели турбулентности $k-\omega$ соответствующие значения составляют 14,40 и 15,26 $\text{м}/\text{с}$. Таким образом, расхождение значений, полученных по разным моделям, составляет 1,9 и 2,9 % для крупной и измельченной сетки соответственно.

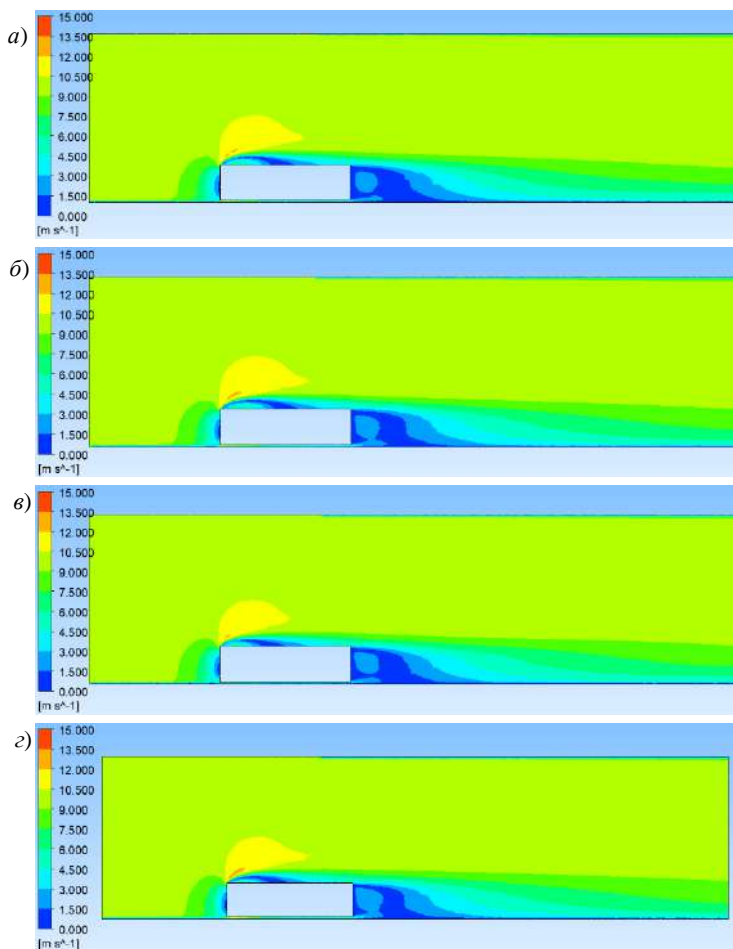


Рисунок 6 – Распределение скоростей потока, м/с, в расчетной области:
а – модель турбулентности $k-\epsilon$, размер элемента на поверхности вагона – 0,150 м;
б – модель турбулентности $k-\epsilon$, размер элемента на поверхности вагона – 0,100 м;
в – модель турбулентности $k-\omega$, размер элемента на поверхности вагона – 0,150 м;
г – модель турбулентности $k-\omega$, размер элемента на поверхности вагона – 0,100 м

Таким образом, выполненный анализ обтекания железнодорожного вагона с использованием двух моделей турбулентности $k-\epsilon$ и $k-\omega$ и разных размерах сетки показал близость получаемых значений давления, скоростей потока и коэффициента аэродинамического сопротивления. Разработанная методика компьютерного моделирования обтекания может быть использована для анализа аэродинамических сил, действующих на объекты, которые имеют форму, близкую к параллелепипеду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Определение энергоэффективности грузовых вагонов / Ю. П. Бороненко [и др.] // Транспорт шелкового пути. – 2022. – № 2. – С. 22–30.
- 2 Design and simulation of heavy haul locomotives and trains / M. Spiryagin [et al.]. – Boca Raton : CRC Press, 2016. – 447 p.
- 3 **Watkins, S.** Aerodynamic drag reduction of goods trains / S. Watkins, J. W. Saunders, H. Kumar // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 1992. – Vol. 40, is. 2. – P. 147–178.
- 4 Aerodynamic drag reduction of railroad tank wagons / C. N. Nayeri [et al.] // Fluids. – 2022. – Vol. 7, is. 8. – Article 283.
- 5 High-speed Rail Aerodynamic Assessment and Mitigation Report: technical report / P. Derkowski [et al.]. – Washington : Transportation Technology Center, 2015. – 258 p.
- 6 **Raman, R. K.** A review on applications of computational fluid dynamics / R. K. Raman, Y. Dewang, J. Raghuvanshi // International Journal of LNCT. – 2018. – Vol. 2, is. 6. – P. 137–143.
- 7 Effects of different aerodynamic configurations on crosswind stability of a conventional train / C. E. A. Reyes [et al.] // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2023. – Vol. 242. – Article 105588. – 12 p.
- 8 Computational fluid dynamics simulation of rail vehicles in crosswind: Application in norms and standards / M. Sima [et al.] // Journal of Rail and Rapid Transit. – 2015. – Vol. 229, is. 6. – P. 635–643.
- 9 EN 14067–6:2018+A1:2022. Railway applications – Aerodynamics. – Part 6: Requirements and test procedures for cross wind assessment. – Publication Date 20.07.2022. – 140 p.
- 10 A field study on the aerodynamics of freight trains / A. Quazi [et al.] // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2021. – Vol. 209. – Article 104463.
- 11 **Östh, J.** A study of the aerodynamics of a generic container freight wagon using Large-Eddy Simulation / J. Östh, S. Krajnović // Journal of Fluids and Structures. – 2014. – Vol. 44. – P. 31–51.
- 12 Нагрузки и воздействия : СП 20.13330.2016. – Введ. 04.06.2017. – М. : Стандартинформ, 2018. – 95 с.
- 13 **Дубинский, С. И.** Верификация методики компьютерного моделирования для расчета распределения давлений воздуха на наружной поверхности наружных ограждающих конструкций / С. И. Дубинский, П. Е. Болотов // Вестник МГСУ. – 2011. – № 7. – С. 276–282.
- 14 AIAA guidelines for practical applications of CFD to pedestrian wind environment around buildings / Y. Tominaga [et al.] // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2008. – Vol. 96. – P. 1749–1761.
- 15 **Афанасьева, И. Н.** Адаптивная методика численного моделирования трехмерных динамических задач строительной аэрогидроупругости : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.18 / И. Н. Афанасьева. – М. : МГСУ, 2014. – 200 л.

V. U. DZEMYANCHUK

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

SIMULATION OF AIR FLOW MOVEMENT AROUND A RECTANGULAR PARALLELEPIPED

The air flow around a railway car modeled by a rectangular parallelepiped is considered. There are described the peculiarities of the finite element model built in the ANSYS CFX environment. The comparison of results of determining the air flow velocities and its pressure on the railway car wall for the $k-\varepsilon$ and the $k-\omega$ turbulence models is performed. The values of the aerodynamic drag coefficients are obtained.

Keywords: aerodynamics, finite element modeling, turbulence, aerodynamic coefficient.

Получено 12.10.2023

УДК 539.62

Е. В. КОДНЯНКО^{1,2}, Д. А. ЧЕРНОУС²

¹ЗАО «Солигорский институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством», Солигорск, Беларусь

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛА КАЧЕНИЯ С ТОНКИМ ДЕФОРМИРУЕМЫМ НЕСЖИМАЕМЫМ ОБОДОМ

Предложена модификация ранее разработанной асимптотической методики решения контактных задач для жесткого тела качения, имеющего тонкий деформируемый обод, позволяющая получить решения в случае несжимаемого материала обода. Построены расчетные диаграммы «сила – смещение» для различных значений коэффициента трения. Определены эпюры контактного давления и сдвигового контактного напряжения, установлено распределение интенсивности тензора напряжений в ободе. Выполнено сравнение с результатами, полученными методом конечных элементов.

Ключевые слова: контактная задача, асимптотическое приближение, тонкий слой, несжимаемый материал, контактное давление, контактное сдвиговое напряжение, интенсивность тензора напряжений.

Введение. Одной из тенденций развития современной техники является активное использование деталей с покрытиями или поверхностными слоями из полимерных материалов. Для повышения эффективности использования полимерных покрытий требуется разработка расчетных методик, позволяющих прогнозировать значения функциональных параметров соответствующих контактных пар. Решению контактных задач для тел с покрытиями посвящено множество известных научных публикаций, например [1–3]. Точное решение данной задачи для покрытия произвольной толщины основано на интегральном преобразовании Фурье и последующем решении системы интегральных уравнений. Его непосредственное использование в практических инженерных расчетах контактных пар не всегда возможно, поэтому наряду с точным решением используются асимптотические приближения [4, 5] или различные модели основания [6]. Ранее [7] в рамках модели основания Винклера [6] была разработана методика решения контактной задачи об установленном качении жесткого цилиндра с деформируемым ободом. Получены расчетные эпюры контактного давления и сдвигового контактного напряжения в зонах сцепления и проскальзывания.

Вместе с тем большинство полимеров, используемых для антифрикционных покрытий, по своим упругим характеристикам близки к несжимаемым материалам (коэффициент Пуассона ν больше 0,45). Для покрытия, жестко связанного с поверхностью детали и образованного несжимаемым материалом, модель основания Винклера неприменима. В этом случае значение ко-

коэффициента нормальной жесткости (коэффициента постели) стремится к бесконечности. С другой стороны, деформирование тонкого несжимаемого покрытия может быть описано в рамках асимптотического приближения второго порядка для тонкого слоя [8, 9]. Так в работе [9] на основе асимптотического приближения были выведены дифференциальные уравнения для контактного давления и сдвигового контактного напряжения в осесимметричной постановке. Описано распределение напряжений в объеме покрытия. Однако при этом рассматривались только частные решения определяющих уравнений и не учитывалось наличие в области контакта зон сцепления и проскальзывания. Указанные недостатки были устранены в работе [10]. Вместе с тем предложенная математическая постановка задачи не может быть в полной мере реализована для несжимаемого материала.

Цель настоящего исследования состоит в разработке методики решения контактной задачи для жесткого колеса с упругим несжимаемым ободом при учете частичного проскальзывания в области контакта, основанной на асимптотическом приближении второго порядка.

Решение контактной задачи. Как и в работах [7, 10], в качестве исследуемой модели тела качения примем абсолютно жесткий цилиндр, окруженный тонким деформируемым ободом (рисунок 1). Обод толщины h жестко связан с поверхностью жесткого цилиндра и образован изотропным несжимаемым линейно упругим материалом. Механические свойства данного материала будем характеризовать модулем сдвига G . Принимается, что обод находится в условиях плоской деформации. Радиус составного (вместе с ободом) цилиндра R , длина образующей L . Цилиндр находится в контакте с горизонтальной недеформируемой шероховатой поверхностью. Коэффициент трения опорной поверхности с ободом f . К центру цилиндра приложена вертикальная сила P . Координатная ось x располагается в области контакта. Начало координат лежит на линии действия силы P . Символом «сц» на рисунке 1 обозначена зона сцепления, а символами «ск» – зоны проскальзывания с указанием знака сдвигового контактного напряжения в данной зоне.

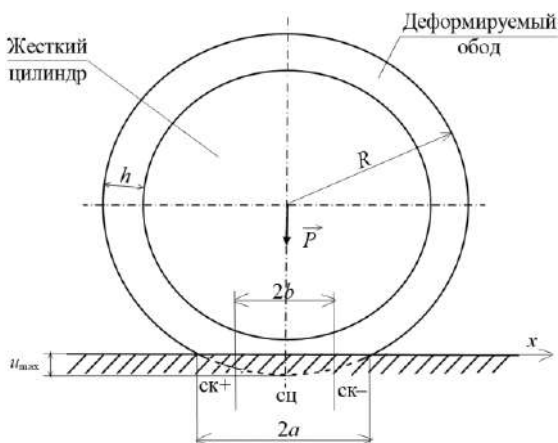


Рисунок 1 – Расчетная схема составного цилиндра, контактирующего с опорной поверхностью при действии вертикальной силы P

Под действием силы P точки внешней поверхности обода, которые находятся в области контакта, приобретают вертикальные u и горизонтальные w смещения относительно соответствующих (имеющих ту же координату x) точек внутренней поверхности (поверхности жесткого цилиндра). Полагая, что размеры области контакта малы по сравнению с радиусом R , относительные вертикальные смещения можно записать в виде

$$u = u_{\max} - \frac{x^2}{2R},$$

где u_{\max} – вертикальное смещение центра составного цилиндра.

В работе [10] выведены дифференциальные уравнения, устанавливающие связь контактного давления p и сдвигового контактного напряжения τ со смещениями u и w :

$$u = Z_{0u}p + Z_{1u}\frac{d\tau}{dx} + Z_{2u}\frac{d^2p}{dx^2}; \quad w = Z_{0w}\tau + Z_{1w}\frac{dp}{dx} + Z_{2w}\frac{d^2\tau}{dx^2}. \quad (1)$$

Коэффициенты в системе (1) определяются толщиной h , модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν материала обода:

$$Z_{0u} = \frac{h(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}; \quad Z_{0w} = 2\frac{h(1+\nu)}{E}; \quad Z_{1u} = -Z_{1w} = -\frac{h^2(1-4\nu)(1+\nu)}{2E(1-\nu)};$$

$$Z_{2u} = \frac{h^3\nu(1-4\nu)(1+\nu)}{3E(1-\nu)^2}; \quad Z_{2w} = \frac{h^3(1+\nu)(3+4\nu)}{3E(1-\nu)}.$$

Для несжимаемого материала обода ($\nu = 0,5$) система (1) приобретает вид

$$u = \frac{h^2}{2G} \left(\frac{d\tau}{dx} - \frac{2h}{3} \frac{d^2p}{dx^2} \right), \quad w = \frac{h}{G} \left(\tau - \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{5h^2}{3} \frac{d^2\tau}{dx^2} \right). \quad (2)$$

Приведенные в работе [10] выражения для распределения проекций упругих смещений точек обода, в случае несжимаемого материала можно записать следующим образом:

$$u_x = \frac{z}{G} \left[\tau - h \left(1 - \frac{z}{2h} \right) \frac{dp}{dx} + h^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{z}{2h} - \frac{z^2}{3h^2} \right) \frac{d^2\tau}{dx^2} \right],$$

$$u_z = -\frac{z^2}{2G} \left[\frac{d\tau}{dx} - h \left(1 - \frac{z}{3h} \right) \frac{d^2p}{dx^2} \right]. \quad (3)$$

Здесь координата z отсчитывается от внутренней поверхности обода (z изменяется от 0 до h).

Решение системы (2) различно для зон сцепления и проскальзывания.

Зона сцепления. Горизонтальные смещения w в зоне сцепления при рассматриваемом режиме нагружения составного цилиндра будут равны нулю.

Изложенная в работе [10] методика решения системы (1) в зоне сцепления для несжимаемого материала оказывается неприменима. При получении общего решения однородной ($u = w = 0$) системы (2) два из четырех корней характеристического уравнения [10] оказываются равными нулю. При этом невозможно удовлетворить всем условиям на границе раздела зон сцепления и проскальзывания (неразрывность контактного давления, сдвигового контактного напряжения, производных от данных величин по координате x и горизонтального смещения w). В связи с этим предлагается следующий порядок решения системы дифференциальных уравнений (2). Возьмем производную по x от обеих частей второго уравнения и выразим первую производную от сдвигового контактного напряжения:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{h}{2} \frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{5h^2}{3} \frac{d^3 \tau}{dx^3}. \quad (4)$$

Уравнения (2) получены в приближении второго порядка по степени малого параметра $\gamma = h/a$, представляющего собой отношение толщины покрытия к полуширине области контакта [8–10]. Поэтому после подстановки выражения (4) в первое уравнение системы (2) слагаемое, содержащее третью производную от сдвигового напряжения τ , приравнивается к нулю. После математических преобразований получим дифференциальное уравнение для контактного давления:

$$u_{\max} - \frac{x^2}{2R} = -\frac{h^3}{12G} \frac{d^2 p}{dx^2}.$$

Его общее решение имеет вид

$$p^{\text{сц}} = -\frac{6}{h^3} Gu_{\max} x^2 + \frac{Gx^4}{2Rh^3} + C_1^{\text{сц}} x + C_0^{\text{сц}}. \quad (5)$$

Здесь $C_0^{\text{сц}}$, $C_1^{\text{сц}}$ – константы, определяемые из граничных условий. Верхний индекс «сц» свидетельствует о том, что соответствующая величина определена для зоны сцепления.

Подставим решение (5) в формулу (4). Ограничиваясь частным решением полученного уравнения, для сдвигового напряжения τ имеем

$$\tau^{\text{сц}} = C_1^{\text{сц}} \frac{h}{2} - \frac{6}{h^2} Gu_{\max} x - 10G \frac{x}{R} + \frac{Gx^3}{Rh^2}. \quad (6)$$

Зона проскальзывания. В данной зоне выполняется закон кулонова трения для сдвигового напряжения

$$\tau^{\text{ск}} = \pm fp^{\text{ск}}. \quad (7)$$

Верхний индекс «ск» свидетельствует о том, что соответствующая величина определена для зоны проскальзывания. Здесь и далее верхний и нижний знаки соответствуют зонам проскальзывания, в которых сдвиговое контактное напряжение соответственно положительно и отрицательно. Подставив равенство (7) в первое соотношение системы (2), получим уравнение для контактного давления в зоне проскальзывания

$$u_{\max} - \frac{x^2}{2R} = \frac{h^2}{2G} \left(\pm f \frac{dp}{dx} - \frac{2h}{3} \frac{d^2 p}{dx^2} \right).$$

Его решение имеет вид

$$p^{\text{ск}} = \pm 2G \left(\frac{u_{\max}}{fh^2} - \frac{4}{9f^3 R} \right) x - \frac{2G}{3f^2 Rh} x^2 \mp \frac{G}{3fRh^2} x^3 + C_0^{\text{ск}} + C_e^{\text{ск}} e^{kx}. \quad (8)$$

Здесь $C_0^{\text{ск}}$, $C_e^{\text{ск}}$ – константы, которые определяются из граничных условий. Коэффициент k в показателе экспоненты задается соотношением

$$k = \pm \frac{3f}{2h}.$$

Для использования полученных решений (5)–(8) требуется предварительно определить максимальное вертикальное смещение u_{\max} , константы интегрирования $C_0^{\text{сц}}$ и $C_0^{\text{ск}}$ для зоны сцепления, а также константы интегрирования $C_0^{\text{ск}}$ и $C_e^{\text{ск}}$ для зоны проскальзывания.

В рамках настоящего исследования будем рассматривать только вертикальное смещение цилиндра под действием вертикальной силы P . В этом случае область контакта включает центральную зону сцепления и две симметрично расположенные зоны проскальзывания (рисунок 1). Ширина области контакта $2a$. Зона сцепления имеет ширину $2b$. Требование симметричности распределения контактного давления при рассматриваемом режиме нагружения будет выполняться если константы интегрирования $C_0^{\text{ск}}$, $C_e^{\text{ск}}$ для обеих зон проскальзывания будут одинаковы. Данное условие также предполагает, что $C_1^{\text{сц}} = 0$. Остальные константы определяются из следующих условий:

– неразрывность контактного давления, сдвигового контактного напряжения и производной от контактного давления по координате x на границе раздела зон сцепления и проскальзывания:

$$p^{\text{сц}} \Big|_{x=b} = p^{\text{ск}} \Big|_{x=b}, \quad \tau^{\text{сц}} \Big|_{x=b} = \tau^{\text{ск}} \Big|_{x=b}, \quad \frac{dp^{\text{сц}}}{dx} \Big|_{x=b} = \frac{dp^{\text{ск}}}{dx} \Big|_{x=b}; \quad (9)$$

– контактное давление и производная от контактного давления по координате x равны нулю на границе области контакта:

$$p^{\text{ck}} \Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{dp^{\text{ck}}}{dx} \Big|_{x=a} = 0. \quad (10)$$

Для составного цилиндра выполняется условие равновесия в проекциях на вертикальную ось

$$P = L \int_{-a}^a p dx. \quad (11)$$

Выражения (9)–(11) позволяют составить систему шести нелинейных уравнений для определения констант интегрирования $C_0^{\text{сц}}$, C_0^{ck} , C_e^{ck} , максимального вертикального смещения u_{max} , полуширины области контакта a и полуширины зоны сцепления b . После определения названных констант можно установить явный вид распределения контактного давления и сдвигового контактного напряжения в области контакта по формулам (9)–(11). Если задана не сила P , а смещение u_{max} , то условие (11) используется для определения силы, требуемой для реализации данного смещения.

Подставив найденные функции $p(x)$, $\tau(x)$ в уравнения (3), установим распределение компонент упругого смещения в деформируемом ободе. Затем можно определить распределения компонент тензора деформаций ε_{ij} , интенсивности тензоров деформаций ε_u и напряжений σ_u :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{z}{G} \frac{d\tau}{dx} + \frac{hz}{2G} \left(2 - \frac{z}{h} \right) \frac{d^2 p}{dx^2}; \quad \varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{zz}; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = 0; \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2G} \left[\tau - h \left(1 - \frac{z}{h} \right) \frac{dp}{dx} + \frac{h^2}{2} \left(5 - 2 \frac{z}{h} - 3 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{d^2 \tau}{dx^2} \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sigma_u = 3\varepsilon_u = \sqrt{2G} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)}.$$

Рассмотрим предельный случай весьма малого трения в области контакта ($f \rightarrow 0$). При этом зона сцепления отсутствует, а для зоны проскальзывания контактное давление удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u_{\text{max}} - \frac{x^2}{2R} = -\frac{h^3}{3G} \frac{d^2 p}{dx^2}.$$

Его общее решение –

$$p = -\frac{3G}{2h^3} x^2 \left(u_{\text{max}} - \frac{x^2}{12R} \right) + C_0 + C_1 x,$$

где C_0 , C_1 – константы интегрирования.

Условие симметрии контактного давления будет выполняться при $C_1 = 0$. Используя условия (10) на границе области контакта и условие равновесия (11), определяем константу C_0 , максимальное смещение u_{\max} и полуширину a

$$a = \left(\frac{15PRh^3}{2LG} \right)^{0,2}, \quad u_{\max} = \frac{a^2}{6R}, \quad C_0 = \frac{Ga^4}{8Rh^3}. \quad (13)$$

Распределение контактного давления при этом описывается функцией

$$p = \frac{G}{8Rh^3} (a^2 - x^2)^2. \quad (14)$$

Уравнения (13) и (14) совпадают с соответствующими соотношениями, приведенными в монографии [12] для тонкого ($h \ll a$) несжимаемого ($\nu \rightarrow 0,5$) покрытия при пренебрежении трением в области контакта.

Наряду с разработанной методикой для решения задачи о вертикальном смещении цилиндра рассмотрим два альтернативных подхода:

- конечно-элементное моделирование в программной среде ANSYS [13];
- основанное на использовании интегрального преобразования Фурье точное решение краевой задачи теории упругости для полосы произвольной толщины [2, 12].

Конечно-элементная модель составного цилиндра, опирающегося на жесткую опорную поверхность, представлена на рисунке 2. Рассматривается фрагмент составного цилиндра высотой 12 мм. Симметричность решаемой задачи позволяет рассматривать только «правую» половину этого фрагмента. Жесткий цилиндр (площадь A1 на рисунке 2, a) имеет радиус $r = R - h$. Деформируемый обод (площадь A5) имеет толщину h . Опорная поверхность моделируется прямоугольником длины 140 мм и высотой 5 мм (площадь A3). Характеристики внутреннего (жесткого) цилиндра и опоры приняты таким образом, чтобы впоследствии имела возможность учета деформируемости основной детали и опорной поверхности. Принято, что смещение нижнего ребра элемента A3 равно нулю. Для ребер всех элементов, соответствующих оси симметрии ($x = 0$), назначены условия равенства нулю проекции смещения на ось x . Верхнему ребру элемента A1 придано вертикальное отрицательное смещение u_{\max} . Для дискретизации численной модели использованы 4-узловые плоские конечные элементы PLANE182 [13]. Общее количество элементов – 1046, количество элементов в ободе (площадь A5) – 380. В области контакта используются контактные линейные элементы CONTA172 для поверхности обода и TARGE 169 [13] для опорной поверхности. Количество контактных элементов – 120.

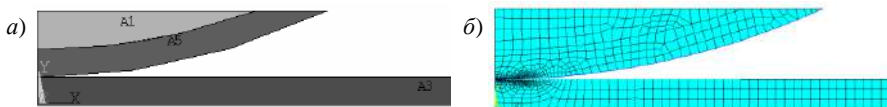


Рисунок 2 – Геометрическая (а) и конечно-элементная (б) модели области контакта

При описании контакта с использованием точного решения краевой задачи теории упругости для полосы [12] приходится производить численное интегрирование с контролем сходимости при бесконечном верхнем пределе интегрирования, после чего осуществляется численное решение системы интегральных уравнений [1, 2]. В связи с очевидной трудоемкостью реализации точного решения сопоставление с результатами данного подхода будем проводить только для случая отсутствия трения в области контакта. При этом распределение контактного давления определяется из интегрального уравнения

$$u_{\max} - \frac{x^2}{2R} = \frac{\chi + 1}{4G\pi} \int_{-a}^a p(y) K\left(\frac{x-y}{h}\right) dy. \quad (15)$$

Здесь $\chi = 3 - 4\nu = 1$. Функция влияния $K(x)$ задается выражением

$$K(x) = \int_0^{\infty} \frac{4\beta - 2\chi \operatorname{sh}(2\beta)}{(\chi + 1)^2 + 4\beta^2 + 4\chi \operatorname{sh}^2\beta} \frac{\cos(x\beta)}{\beta} d\beta.$$

Пример использования методики. В качестве расчетного примера использования разработанной методики рассмотрим стальной цилиндр радиусом $r = R - h = 0,12$ м и длиной образующей $L = 0,08$ м. С боковой поверхностью цилиндра жестко сцеплена обкладка толщиной $h = 5$ мм ($R = 0,125$ м), образованная полиуретаном с твердостью по Шору 85 ед. На составной цилиндр действует вертикальная сила P , прижимающая его к стальной горизонтальной поверхности. Размеры и материалы рассматриваемого объекта соответствуют ролику, который двигается по проводникам скипо-клетового ствола № 2 ИРУ ОАО «Беларуськалий» [14]. Модуль сдвига материала обкладки аналогично работе [15] принят равным $G = 7$ МПа.

На рисунке 3 представлены расчетные диаграммы «сила – смещение», полученные на основе разработанной методики, в ходе конечно-элементного моделирования и численного решения интегрального уравнения (15).

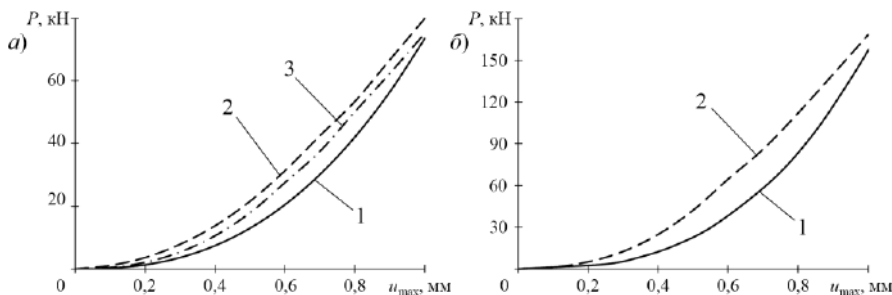


Рисунок 3 – Расчетные диаграммы «сила – смещение» при отсутствии трения (а) и при значении коэффициента трения $f = 0,3$ (б):

1 – по разработанной методике; 2 – конечно-элементная модель;

3 – решение интегрального уравнения (15)

Учитывая, что решение интегрального уравнения (15) обеспечивает наиболее точный прогноз значений параметров контакта, получено, что использование разработанной методики приводит к несколько заниженным, а использование метода конечных элементов – завышенным оценкам силы P при заданном смещении u_{\max} составного цилиндра (рисунок 3, а).

В рассматриваемом примере для диапазона значений u_{\max} от нуля до 1 мм среднее относительное отклонение значений силы, определенных в рамках конечно-элементной модели, от соответствующих результатов использования интегрального уравнения (15) составило 7 %. Аналогичное отклонение для разработанной методики – 11 %. Увеличение максимальной осадки составного цилиндра u_{\max} сопровождается ростом ширины области контакта и, соответственно, уменьшением малого параметра γ . Поэтому при больших значениях смещения u_{\max} погрешность результатов использования предлагаемого асимптотического подхода будет ниже.

Учет наличия трения в области контакта приводит к увеличению расчетных значений вертикальной силы P (рисунок 3, б). Номинальное [14] значение силы прижатия ролика для толщины обкладки в 5 мм составляет 33 кН. При таком значении силы относительное отклонение расчетного значения смещения u_{\max} , определенного по разработанной методике, от соответствующей оценки, которая получена методом конечных элементов, составило 12 % при $f = 0$ и 10 % при $f = 0,3$.

При использовании разработанной методики максимальное значение контактного давления оказалось ниже, а максимальное по модулю значение сдвигового контактного напряжения – выше соответствующих расчетных оценок, полученных на основе конечно-элементной модели (рисунок 4).

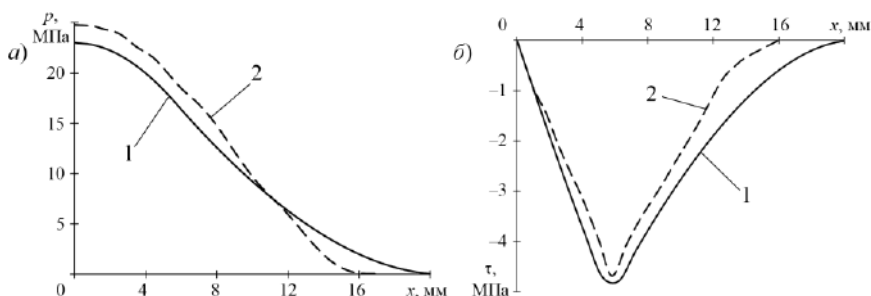


Рисунок 4 – Эпюры контактного давления (а) и сдвигового контактного напряжения (б) при $P = 33$ кН и $f = 0,3$:

1 – в соответствии с разработанной методикой; 2 – конечно-элементное моделирование

Применение соотношений (5)–(8) приводит к несколько завышенным, по сравнению с результатами конечно-элементного моделирования, оценкам ширины области контакта.

Как было отмечено выше, разработанная методика позволяет не только определить распределение контактных напряжений, но и полностью описать напряженно-деформированное состояние обода в рассматриваемом составном цилиндре. Так, на рисунке 5 представлены расчетные распределения интенсивности тензора напряжений по координате x при трех различных значениях координаты. При этом $z = 0$ соответствует внутренней поверхности обода (сцепление с жестким цилиндром), а $z = h$ – внешней поверхности (область контакта). Можно отметить, что максимальное значение интенсивности σ_{rr} реализуется на внутренней поверхности обода на некотором расстоянии от оси симметрии (линии действия силы P). При малых ($f < 0,1$) значениях коэффициента трения положение максимума σ_{rr} практически соответствует середине зоны проскальзывания. При больших f максимальное значение интенсивности тензора напряжений реализуется на границе зон сцепления и проскальзывания.

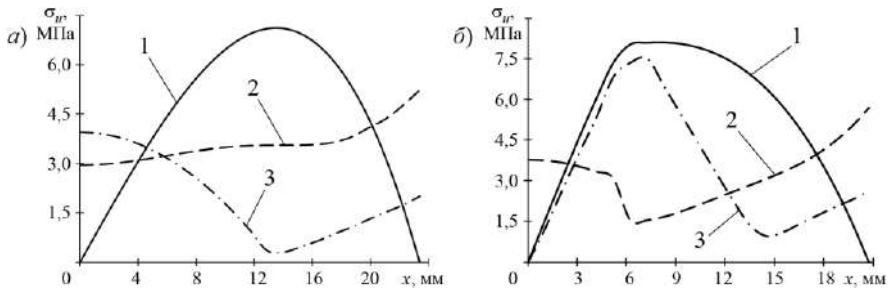


Рисунок 5 – Расчетные зависимости интенсивности тензора напряжений при $P = 33$ кН для $f = 0$ (а) и $f = 0,3$ (б):
 $1 - z = 0$; $2 - z = h/2$; $3 - z = h$

Отмеченные особенности распределения интенсивности тензора напряжений согласуются с результатами конечно-элементного моделирования, представленными на рисунке 6.

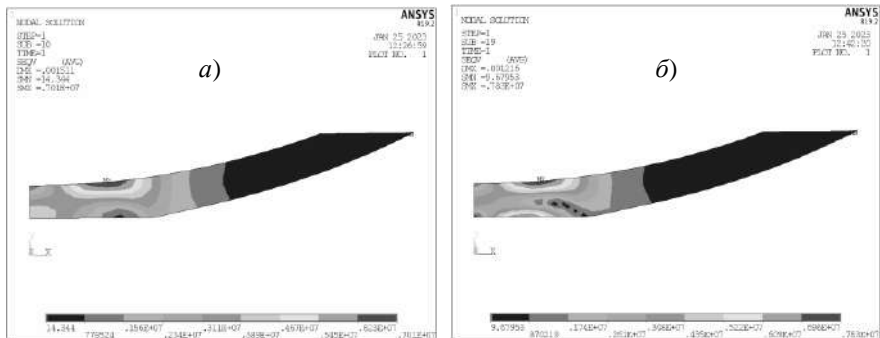


Рисунок 6 – Распределение интенсивности тензора напряжений в деформируемом обode, полученное методом конечных элементов при $P = 33$ кН для $f = 0$ (а) и $f = 0,3$ (б)

Положение максимума интенсивности $\sigma_{ii \max}$ смещено относительно оси симметрии $x = 0$ только если материал деформируемого обода по своим упругим характеристикам близок к несжимаемому ($\nu = 0,5$). При $\nu < 0,45$ максимум интенсивности $\sigma_{ii \max}$ локализован на оси симметрии на некотором расстоянии от поверхности контакта (рисунок 7).

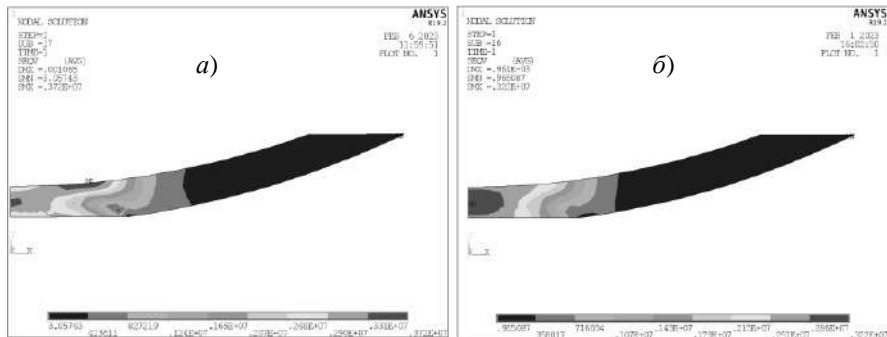


Рисунок 7 – Распределение интенсивности тензора напряжений в деформируемом обode, полученное методом конечных элементов при $P = 33 \text{ кН}$ и $f = 0,3$ для $\nu = 0,45$ (а) и $\nu = 0,4$ (б)

При фиксированном значении силы P максимальное контактное давление p_{\max} и максимальная интенсивность $\sigma_{ii \max}$ будут изменяться в зависимости от коэффициента трения (рисунок 8). Давление p_{\max} с увеличением коэффициента f возрастает. Влияние коэффициента трения на максимальное контактное давление более существенно при малых $f < 0,15$. Максимум интенсивности тензора напряжений в диапазоне $f < 0,07$ с увеличением коэффициента трения несколько снижается. При дальнейшем увеличении f максимальная интенсивность $\sigma_{ii \max}$ практически линейно возрастает.

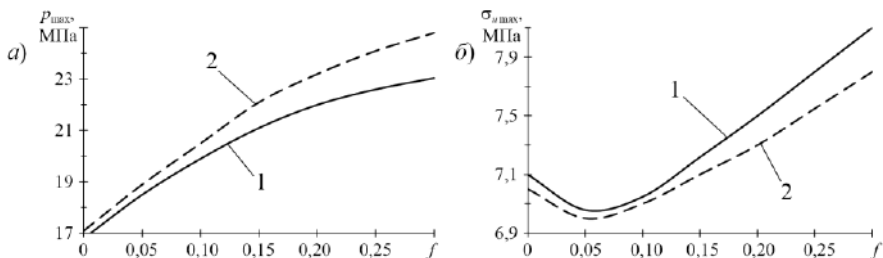


Рисунок 8 – Зависимость максимального контактного давления (а) и максимального значения интенсивности тензора напряжений (б) от коэффициента трения:

1 – в соответствии с разработанной методикой; 2 – конечно-элементная модель

Относительное отклонение расчетных оценок максимального контактного давления, полученных на основе разработанной методики, от соответствующих результатов использования конечно-элементной модели составило 5 % при $f = 0$ и 11 % при $f = 0,3$. Для максимального значения интенсивности тензора напряжений – 6 и 9 % соответственно.

Заключение. Выполненные исследования показали, что расчетные значения параметров контактного взаимодействия, полученные на основе предложенной методики, хорошо согласуются с результатами использования метода конечных элементов. В рассмотренном примере при фиксированном значении вертикальной нагрузки на составной цилиндр и изменении коэффициента трения от 0 до 0,3 относительное отклонение полученных значений вертикального смещения центра цилиндра от соответствующих оценок, полученных в рамках конечно-элементной модели, не превышает 12 %. Для максимального контактного давления такое отклонение составляет не более 11 %, а для максимального значения интенсивности тензора напряжений в деформируемом ободе – не более 9 %. Кроме того, установлено, что при действии на составной цилиндр вертикальной (прижимающей) силы максимум интенсивности тензора напряжений в несжимаемом ободе локализуется на «внутренней» поверхности (поверхности сцепления обода с жестким цилиндром) на некотором расстоянии от вертикальной оси, проходящей через центр области контакта.

Основное преимущество разработанной методики оценки напряженно-деформированного состояния деформируемой накладки перед альтернативными подходами заключается в возможности использования для расчетов относительно несложных аналитических соотношений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 320 с.
- 2 **Александров, В. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, 1983. – 183 с.
- 3 **Fabrikant, V. I.** Solution of contact problems for a transversely isotropic elastic layer bonded to an elastic half-space / V. I. Fabricant // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2009. – Vol. 223, is. 11. – P. 2487–2499.
- 4 **Argatov, I. I.** Depth-sensing indentation of a transversely isotropic elastic layer: Second-order asymptotic models for canonical indenters / I. I. Argatov // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – Vol. 15. – P. 3444–3452.
- 5 **Aleksandrov, V. M.** Asymptotic solution of the contact problem for a thin elastic layer / V. M. Aleksandrov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1969. – Vol. 33, is. 1. – P. 49–63.
- 6 **Кравчук, А. С.** Прикладные контактные задачи для обобщенной стержневой модели покрытия / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук. – СПб. : Научное издание, 2019. – 221 с.

7 **Коднянко, Е. В.** Расчет контактного сдвигового напряжения для колеса с деформируемой периферией / Е. В. Коднянко, Д. А. Черноус // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 83–89.

8 **Wu, J.** An analytical solution to the adhesive cylindrical indentation of a compressible elastic thin layer / J. Wu, C. Q. Ru // The Journal of Adhesion. – 2021. – Vol. 97, is. 14. – P. 1291–1309.

9 **Jaffar, M. J.** Asymptotic behaviour of thin elastic layer bonded and unbonded to a rigid foundation / M. J. Jaffar // International Journal of Mechanical Sciences. – 1989. – Vol. 31, is. 3. – P. 229–235.

10 **Черноус, Д. А.** Асимптотический подход к решению контактной задачи для тела качения с тонким деформируемым ободом / Д. А. Черноус, Е. В. Коднянко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2023. – № 1 (62). – С. 79–87.

11 **Попов, В. Л.** Механика контактного взаимодействия и физика трения / В. Л. Попов. – М. : Физматлит, 2013. – 350 с.

12 **Можаровский, В. В.** Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 270 с.

13 **Bahrami, M. R.** ANSYS Tutorial: An Introduction to Elasticity and Contact Problems in Mechanical APDL 15.0 / M. R. Bahrami. – St. Petersburg : Peter the Great St. Petersburg Polytechnic university. – 2018. – 69 p.

14 Скин шахтный : пат. 11460 Респ. Беларусь : МПК (2006.01) В 66В 17/32 / В. Я. Прушак, В. Я. Щерба, Д. А. Морев. – u 20170053; заявл. 22.02.2017 ; опубл. 30.08.2017. – 6 с.

15 **Яковлев, С. Н.** Расчет полиуретановых деталей, работающих на сжатие при статической нагрузке / С. Н. Яковлев // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Машиностроение. – 2014. – № 1 (190). – С. 137–142.

E. V. KADNIANKA^{1,2}, D. A. CHERNOUS²

¹*JSC "Soligorsk Institute of Resources Saving Problems with Pilot Production", Soligorsk, Belarus*

²*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

SOLUTION OF THE CONTACT PROBLEM FOR A ROLLING BODY WITH A THIN DEFORMABLE INCOMPRESSIBLE RIM

A modification of a previously developed asymptotic method for the contact problems solving for a rigid rolling body with a thin deformable rim is proposed, it allows to obtain solutions for the case of an incompressible rim material. Calculated "force – displacement" diagrams are obtained for various friction coefficient values. Diagrams of contact pressure and shear contact stress are determined, and the stress tensor intensity distribution in the rim is established. There is carried out the comparison with the results obtained by the finite element method.

Keywords: contact problem, asymptotic approximation, thin layer, incompressible material, contact pressure, contact shear stress, stress tensor intensity.

Получено 02.10.2023

УДК 691-419:539.377

*А. Г. КОЗЕЛ**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель***ТЕРМОСИЛОВОЙ ИЗГИБ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, СВОБОДНО ЛЕЖАЩЕЙ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА**

Исследован термосиловой изгиб упругой трехслойной круговой пластины, свободно лежащей на упругом основании, работа которого описывается моделью Пастернака. Деформирование несущих слоев происходит в соответствии с гипотезами Кирхгофа, легкого относительно толстого заполнителя – с гипотезой Тимошенко. На контуре пластины установлена жесткая диафрагма. Краевая задача сводится к определению прогиба пластины, радиального перемещения срединной плоскости заполнителя относительно сдвига в нем и осадки основания за пределами пластины. Получено решение дифференциального уравнения четвертого порядка для прогиба в функциях Бесселя, через который выражены относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение. Частное аналитическое решение системы уравнений равновесия при произвольной осесимметричной нагрузке получено с помощью ядра Коши. Определены соответствующие граничным условиям константы интегрирования для случая произвольной осесимметричной нагрузки. Проведено численное исследование зависимости прогиба и осадки основания от его механических характеристик.

Ключевые слова: трехслойная пластина, термоупругость, основание Пастернака, осадка основания, осесимметричная нагрузка, ядро Коши.

Введение. При проектировании элементов конструкций и деталей машин стремятся создать функциональные и экономичные инженерные решения. Поэтому популярность приобрели многослойные композиты, обладающие рядом преимуществ по сравнению с традиционными однокомпонентными материалами. Сочетание физико-механических свойств разнородных материалов наряду с высокими прочностными и жесткостными характеристиками при минимальном удельном весе позволяет противостоять ряду негативных воздействий, возникающих при различных условиях эксплуатации. Внедрение композитных материалов в производство и строительство требует разработки эффективных, достоверных методов их расчета.

В монографиях [1–3] представлены основы механики многослойных конструкций. Термосиловые и терморadiационные воздействия на них рассмотрены в работах [4–6]. Статьи [7, 8] посвящены исследованию сжимаемости заполнителя в деформируемых упруго и упругопластически трехслойных круговых и прямоугольных пластинах. Неосесимметричное нагружение трехслойных пластин в своей плоскости изучалось в работе [9]. Осесимметричные колебания, возбуждаемые температурным воздействием, круглых пластин с изменяемой вдоль радиуса толщиной из функционально-градиентного материала исследованы в статьях [10, 11]. Собственные колебания ступенчатой круговой трехслойной пластины рассмотрены в работе [12]. Задачи динамики и статики композит-

ных пластин при взаимодействии с упругими основаниями решены в статьях [13, 14]. В работе [15] рассмотрен термосиловой изгиб связанных с двухпараметрическим основанием Пастернака сэндвич-пластин из функционально-градиентных материалов. В статье [16] на основе сравнения решений краевых задач о деформировании связанных с упругим основанием трехслойных круговых пластин, в которых использованы модели Винклера и Пастернака, сделан вывод о необходимости применения двухпараметрической модели.

Влияние механических характеристик материалов несущих слоев и заполнителя на перемещения и напряжения при изгибе связанной с основанием Пастернака упругой круговой сэндвич-пластины исследовано в статье [17]. Упругий и термоупругий изгиб под действием равномерно распределенных нагрузок круговых трехслойных пластин, связанных с основанием Пастернака, изучен в работах [18, 19]. В данной статье, в отличие от предыдущих публикаций, рассмотрен термосиловой изгиб упругой круговой трехслойной пластины, которая свободно лежит на основании Пастернака, под действием произвольной поперечной осесимметричной нагрузки.

Постановка краевой задачи. Рассмотрим термоупругий изгиб трехслойной круговой пластины радиуса R , свободно лежащей на основании Пастернака (рисунок 1). К верхнему несущему слою пластины приложена произвольная распределенная осесимметричная поперечная нагрузка интенсивностью q . Реакция упругого основания принимается в соответствии с моделью Пастернака [20]

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \left(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right), \quad (1)$$

где κ_0 , t_f – коэффициенты, характеризующие сжатие и сдвиг основания; запятой в нижнем индексе обозначена операция дифференцирования по координате r .

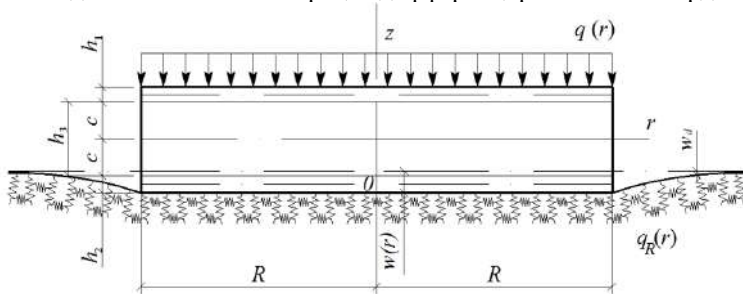


Рисунок 1 – Схема деформирования равномерно распределенной нагрузкой пластины при ее свободном опирании

Описание деформирования тонких и жёстких внешних слоев пластины толщиной h_1 и h_2 осуществляется с использованием гипотезы Кирхгофа. Для легкого несжимаемого по толщине срединного слоя (заполнителя) принята модель Тимошенко, радиальные перемещения распределены по толщине

$h_3 = 2c$ линейно, работа касательных напряжений не учитывается. Предполагается, что на контуре пластины расположена жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев.

Используется цилиндрическая система координат r, φ, z , связанная со срединной плоскостью заполнителя. Краевая задача сводится к определению четырех искомых функций: прогиба пластины $w(r)$, осадки основания $w_d(r)$ за пределами пластины, относительного сдвига $\psi(r)$ в заполнителе и радиального перемещения $u(r)$ координатной плоскости.

Физические уравнения, определяющие связь напряжений и деформаций в пластине, принимаются в виде ($\beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} s_{\beta}^{(k)} &= 2G_k(T_k) \vartheta_{\beta}^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3(T_3) \vartheta_{rz}^{(3)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k \Delta T_k), \end{aligned} \quad (2)$$

где $s_{\beta}^{(k)}, \sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений слоя с номером k , Па; $\vartheta_{\beta}^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая часть тензора деформаций; $G_k(T_k), K_k(T_k)$ – зависящие от температуры модули сдвиговой и объёмной деформации материала, Па; α_k – коэффициент линейного температурного расширения; ΔT_k – приращение температуры, которое отсчитывается от некоторого начального значения T_0, K .

Полагаем, что зависимость от температуры модулей упругости несущих слоев определяется формулой Дж. Ф. Белла [21]

$$\begin{aligned} \{G_k(T), K_k(T)\} &= \{G_k(0), K_k(0)\} \varphi_{12}(T); \\ \varphi_{12}(T) &= \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < T/T_m \leq 0,06; \\ 1,03(1 - T/2T_m) & \text{при } 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases} \end{aligned}$$

а параметров упругости заполнителя (полимерного материала) – выражением, предложенным Э. И. Старовойтовым [3]

$$\begin{aligned} \{G_3(T), K_3(T)\} &= \{G_3(0), K_3(0)\} / \varphi_3(T); \\ \varphi_3(T) &= 1 + B[\Delta T / T_m]^{\gamma} \operatorname{sgn} \Delta T, \end{aligned}$$

где $G_k(0), K_k(0)$ – значения модулей упругости при температуре T_0 , принимаемой за начальную, Па; T_m – температура плавления материала, К; B, γ – параметры материала заполнителя, получаемые экспериментально; $\Delta T = T - T_0$.

Описывающая деформирование рассматриваемой пластины система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях получена в [19] с помощью принципа Лагранжа для общего случая, поэтому её можно использовать и здесь. Выражая внутренние усилия через перемещения с использованием (1), (2), получаем систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0,$$

$$\begin{aligned} L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r}) &= 0; \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) + t_f \Delta w - \kappa_0 w &= -q, \end{aligned} \quad (3)$$

где L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы,

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}; \end{aligned}$$

a_i – коэффициенты, которые учитывают геометрические параметры и зависимость модулей упругости материалов слоев по толщине от температуры:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}^+; \quad a_2 = c(K_{10}^+ - K_{20}^+); \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}^+; \quad a_4 = K_{32}^+ + c^2(K_{10}^+ + K_{20}^+); \\ a_5 &= K_{32}^+ + c(K_{11}^+ - K_{21}^+); \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2}^+; \\ K_{km}^+ &= \int_{h_k} \left(K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right) z^m dz, \quad m = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Во внешней по отношению к пластине области реакция основания отсутствует. Ее деформирование описывается однородным дифференциальным уравнением, которое имеет вид [22, с. 248]

$$\Delta w_d - \lambda^2 w_d = 0, \quad (4)$$

где
$$\lambda^2 = \frac{\kappa_0}{t_f \sqrt{\kappa_0 D}} = \frac{\sqrt{\kappa_0}}{t_f \sqrt{D}};$$

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Постановка краевой задачи завершается добавлением к системе (3) граничных условий на контуре свободно лежащей пластины ($r = R$)

$$\psi = 0, \quad T_r = 0, \quad M_r = 0, \quad Q = 0, \quad (5)$$

где T_r, M_r, Q – внутренние усилия на контуре пластины, выраженные через перемещения

$$\begin{aligned} T_r &= a_1 u_{,r} + a_7 \frac{u}{r} + a_2 \psi_{,r} + a_8 \frac{\psi}{r} - a_3 w_{,rr} - a_9 \frac{w_{,r}}{r} - T_t; \\ T_t &= \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 3K_k(T_k) \alpha_k \Delta T_k dz; \end{aligned}$$

$$M_r = a_3 u_{,r} + a_9 \frac{u}{r} + a_5 \Psi_{,r} + a_{11} \frac{\Psi}{r} - a_6 w_{,rr} - a_{12} \frac{w_{,r}}{r} - M_t ;$$

$$M_t = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 3K_k(T_k) \alpha_k \Delta T_k z dz ;$$

$$Q = M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = a_3 u_{,rr} + a_9 \frac{u_{,r} r - u}{r^2} + a_5 \Psi_{,rr} + a_{11} \frac{\Psi_{,r} r - \Psi}{r^2} - a_6 w_{,rrr} - a_{12} \frac{w_{,rr} r - w_{,r}}{r^2} + \frac{1}{r} \left(a_3 u_{,r} + a_9 \frac{u}{r} + a_5 \Psi_{,r} + a_{11} \frac{\Psi}{r} - a_6 w_{,rr} - a_{12} \frac{w_{,r}}{r} - a_9 u_{,r} - a_3 \frac{u}{r} - a_5 \frac{\Psi}{r} - a_{11} \Psi_{,r} + a_{12} w_{,rr} + a_6 \frac{w_{,r}}{r} \right) ;$$

$$a_7 = \sum_{k=1}^3 K_{k0}^- ; \quad a_8 = c(K_{10}^- - K_{20}^-) ; \quad a_9 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}^- ;$$

$$a_{10} = K_{32}^- + c^2 (K_{10}^- + K_{20}^-) ; \quad a_{11} = K_{32}^- + c (K_{11}^- - K_{21}^-) ; \quad a_{12} = \sum_{k=1}^3 K_{k2}^- ;$$

$$K_{km}^- = \int_{h_k} \left(K_k(T_k) - \frac{2}{3} G_k(T_k) \right) z^m dz , \quad m = 0, 1, 2.$$

Равенство прогибов на контуре пластины приводит к дополнительному условию

$$w(R) = w_d(R) . \quad (6)$$

Общее решение краевой задачи. Чтобы решить систему уравнений (3), используя первое уравнение, исключаем из второго и третьего функцию u . Теперь второе уравнение дает возможность исключения из первого и третьего функции ψ . Двукратное интегрирование первых двух полученных уравнений и преобразование третьего дает

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r} ; \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r} ;$$

$$w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} - t_f D(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r}) + \kappa_0 D w = q D , \quad (7)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования;

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2} , \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2} .$$

Решение третьего уравнения системы (7) получено по методике, представленной в [18], в виде

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}kr) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}}kr) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}kr) + w_p(r), \quad (8)$$

где C_5, C_6, C_7, C_8 – константы интегрирования; $J_0(\sqrt{a}kr), J_0(\sqrt{\bar{a}}kr)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка; $H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr), H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}kr)$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка; $\kappa^4 = \kappa_0 D$, a и \bar{a} – коэффициенты, которые зависят от характеристик упругого основания [18]; $w_p(r)$ – частное решение уравнения.

Решение уравнения (4) в соответствии с [22] может быть записано в виде

$$w_d = C_9 I_0(\lambda kr) + C_{10} K_0(\lambda kr), \quad (9)$$

где C_9, C_{10} – константы интегрирования; $I_0(\lambda kr), K_0(\lambda kr)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода (функция Макдональда) нулевого порядка аргумента λkr .

Функции $H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr), H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}kr)$ неограниченно возрастают при $r = 0$, поэтому в решении (8) необходимо принять $C_6 = C_8 = 0$. Также искомое решение ограничено в начале координат, поэтому $C_2 = C_4 = 0$. Функция $I_0(\lambda kr)$ при $r \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, в то время как осадки упругого основания вдали от места приложения нагрузки пренебрежимо малы ($w_d \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$). Следовательно, необходимо положить $C_9 = 0$.

Таким образом, общее решение задачи об изгибе круговой упругой трехслойной пластины на основании Пастернака в температурном поле, соответствующее формулам (7)–(9), принимает вид

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r;$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r;$$

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}kr) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}}kr) + w_p(r);$$

$$w_d = C_{10} K_0(\lambda kr), \quad (10)$$

где $C_1, C_3, C_5, C_7, C_{10}$ – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (5), (6).

Случай произвольной осесимметричной нагрузки. Построим частное решение $w_p(r)$ дифференциального уравнения (8), используя ядро Коши $K(r, s)$ [23, с. 122], в виде

$$w_p(r) = \int_0^r K(r, s) q_1(s) ds, \quad (11)$$

где $q_1 = qD$ – правая часть третьего уравнения системы (7).

Ядро Коши выражается через фундаментальные решения:

$$K(r, s) = B_1^{(1)}(s)J_0(\sqrt{a}kr) + B_2^{(1)}(s)H_0^{(1)}(\sqrt{a}kr) + \\ + B_3^{(1)}(s)J_0(\sqrt{a}kr) + B_4^{(1)}(s)H_0^{(2)}(\sqrt{a}kr). \quad (12)$$

Функции $B_i^{(1)}(s)$ можно определить из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} B_1^{(1)}J_0(\sqrt{a}ks) + B_2^{(1)}H_0^{(1)}(\sqrt{a}ks) + B_3^{(1)}J_0(\sqrt{a}ks) + B_4^{(1)}H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) = 0; \\ B_1^{(1)}J_0'(\sqrt{a}ks) + B_2^{(1)}H_0^{(1)'}(\sqrt{a}ks) + B_3^{(1)}J_0'(\sqrt{a}ks) + B_4^{(1)}H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) = 0; \\ B_1^{(1)}J_0''(\sqrt{a}ks) + B_2^{(1)}H_0^{(1)''}(\sqrt{a}ks) + B_3^{(1)}J_0''(\sqrt{a}ks) + B_4^{(1)}H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) = 0; \\ B_1^{(1)}J_0'''(\sqrt{a}ks) + B_2^{(1)}H_0^{(1)'''}(\sqrt{a}ks) + B_3^{(1)}J_0'''(\sqrt{a}ks) + B_4^{(1)}H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) = 1, \end{cases} \quad (13)$$

где штрихами обозначены операции дифференцирования по параметру s .

Решая систему (13) методом Крамера, получим выражения для определения функций, составляющих ядро Коши:

$$B_1^{(1)}(s) = \frac{W_1^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)}; \quad B_2^{(1)}(s) = \frac{W_2^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)}; \quad B_3^{(1)}(s) = \frac{W_3^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)}; \quad B_4^{(1)}(s) = \frac{W_4^{(1)}(s)}{W^{(1)}(s)}, \quad (14)$$

где определители выражаются через функции Бесселя и их производные

$$W^{(1)}(s) = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a}ks) & H_0^{(1)}(\sqrt{a}ks) & J_0(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'(\sqrt{a}ks) & H_0^{(1)'}(\sqrt{a}ks) & J_0'(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) \\ J_0''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(1)''}(\sqrt{a}ks) & J_0''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(1)'''}(\sqrt{a}ks) & J_0'''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) \end{vmatrix};$$

$$W_1^{(1)}(s) = \begin{vmatrix} 0 & H_0^{(1)}(\sqrt{a}ks) & J_0(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) \\ 0 & H_0^{(1)'}(\sqrt{a}ks) & J_0'(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) \\ 0 & H_0^{(1)''}(\sqrt{a}ks) & J_0''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) \\ 1 & H_0^{(1)'''}(\sqrt{a}ks) & J_0'''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) \end{vmatrix};$$

$$W_2^{(1)}(s) = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a}ks) & 0 & J_0(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'(\sqrt{a}ks) & 0 & J_0'(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'}(\sqrt{a}ks) \\ J_0''(\sqrt{a}ks) & 0 & J_0''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)''}(\sqrt{a}ks) \\ J_0'''(\sqrt{a}ks) & 1 & J_0'''(\sqrt{a}ks) & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a}ks) \end{vmatrix};$$

$$W_3^{(1)}(s) = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)}(\sqrt{a\kappa s}) & 0 & H_0^{(2)}(\sqrt{a\kappa s}) \\ J_0'(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)'}(\sqrt{a\kappa s}) & 0 & H_0^{(2)'}(\sqrt{a\kappa s}) \\ J_0''(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)''}(\sqrt{a\kappa s}) & 0 & H_0^{(2)''}(\sqrt{a\kappa s}) \\ J_0'''(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)'''}(\sqrt{a\kappa s}) & 1 & H_0^{(2)'''}(\sqrt{a\kappa s}) \end{vmatrix};$$

$$W_4^{(1)}(s) = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)}(\sqrt{a\kappa s}) & J_0(\sqrt{a\kappa s}) & 0 \\ J_0'(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)'}(\sqrt{a\kappa s}) & J_0'(\sqrt{a\kappa s}) & 0 \\ J_0''(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)''}(\sqrt{a\kappa s}) & J_0''(\sqrt{a\kappa s}) & 0 \\ J_0'''(\sqrt{a\kappa s}) & H_0^{(1)'''}(\sqrt{a\kappa s}) & J_0'''(\sqrt{a\kappa s}) & 1 \end{vmatrix}.$$

Частное решение (11) и ядро Коши (12) удовлетворяют условиям

$$w_p(0) = w_p'(0) = w_p''(0) = w_p'''(0) = 0;$$

$$K(s, s) = K'(s, s) = K''(s, s) = 0; \quad K'''(s, s) = 1, \quad (15)$$

что в ряде случаев удобно при получении констант интегрирования.

Решение для свободного опирания контура пластины. Используя граничные условия (5), получим систему четырех алгебраических уравнений:

$$\psi(R) = b_2 w_{,r}(R) + C_3 R = 0;$$

$$T_r(R) = a_1 u_{,r}(R) + a_7 \frac{u(R)}{R} + a_2 \psi_{,r}(R) - a_3 w_{,rr}(R) - a_9 \frac{w_{,r}(R)}{R} - T_t = 0;$$

$$M_r(R) = a_3 u_{,r}(R) + a_9 \frac{u(R)}{R} + a_5 \psi_{,r}(R) - a_6 w_{,rr}(R) - a_{12} \frac{w_{,r}(R)}{R} - M_t = 0;$$

$$Q(R) = a_3 u_{,rr}(R) + a_9 \frac{u_{,r}(R)R - u(R)}{R^2} + a_5 \psi_{,rr}(R) + a_{11} \frac{\psi_{,r}R}{R^2} - a_6 w_{,rrr}(R) -$$

$$- a_{12} \frac{w_{,rr}(R)R - w_{,r}(R)}{R^2} - \frac{1}{R} \left(a_9 u_{,r}(R) + a_3 \frac{u(R)}{R} +$$

$$+ a_{11} \psi_{,r}(R) - a_{12} w_{,rr}(R) - a_6 \frac{w_{,r}(R)}{R} - M_t \right) = 0. \quad (16)$$

Производные от прогиба, входящие в систему (16), –

$$w_{,r}(R) = C_5 b_3 + C_7 b_4 + w_{p,r}(R);$$

$$w_{,rr}(R) = C_5 b_5 + C_7 b_6 + w_{p,rr}(R); \quad (17)$$

$$w_{,rrr}(R) = C_5 b_7 + C_7 b_8 + w_{p,rrr}(R),$$

где

$$b_3 = -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R); \quad b_4 = -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R);$$

$$w_{p,r}(r) = \frac{d}{dr} \int_0^r K(r,s)q_1(s) ds = \int_0^r \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) ds + K(r,r)q_1(r);$$

$$b_5 = \frac{\kappa\sqrt{a}}{R} J_1(\sqrt{a}\kappa R) - \kappa^2 J_0(\sqrt{a}\kappa R); \quad b_6 = \frac{\kappa\sqrt{a}}{R} J_1(\sqrt{a}\kappa R) - \bar{a}\kappa^2 J_0(\sqrt{a}\kappa R);$$

$$w_{p,rr}(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\int_0^r \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) ds \right] = \int_0^r \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) ds + \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) \Big|_{s=r};$$

$$b_7 = \sqrt{a}\kappa \frac{\sqrt{a}\kappa R J_0(\sqrt{a}\kappa R) - 2J_1(\sqrt{a}\kappa R)}{R^2} + \kappa^3 a \sqrt{a} J_1(\sqrt{a}\kappa R);$$

$$b_8 = \sqrt{a}\kappa \frac{\sqrt{a}\kappa R J_0(\sqrt{a}\kappa R) - 2J_1(\sqrt{a}\kappa R)}{R^2} + \kappa^3 \bar{a} \sqrt{a} J_1(\sqrt{a}\kappa R);$$

$$w_{p,rrr}(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left[\int_0^r \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) ds \right] = \int_0^r \frac{\partial^3 K(r,s)}{\partial r^3} q_1(s) ds + \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) \Big|_{s=r}.$$

Учитывая условия (15), получаем производные от частного решения (11) и их значения на контуре:

$$w_{p,r}(r) = \int_0^r \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) ds; \quad w_{p,r}(R) = \int_0^R \frac{\partial K(r,s)}{\partial r} q_1(s) ds \Big|_{r=R};$$

$$w_{p,rr}(r) = \int_0^r \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) ds; \quad w_{p,rr}(R) = \int_0^R \frac{\partial^2 K(r,s)}{\partial r^2} q_1(s) ds \Big|_{r=R};$$

$$w_{p,rrr}(r) = \int_0^r \frac{\partial^3 K(r,s)}{\partial r^3} q_1(s) ds; \quad w_{p,rrr}(R) = \int_0^R \frac{\partial^3 K(r,s)}{\partial r^3} q_1(s) ds \Big|_{r=R}.$$

Используя первые два из решений (10), с учетом выражений производных прогиба (17) систему (16) приведем к виду

$$\begin{cases} C_3 R + C_5 b_2 b_3 + C_7 b_2 b_4 = -b_2 w_{p,r}(R); \\ C_1 (a_1 + a_7) + C_5 k_1 + C_7 k_2 = w_{p1}^*(R) + T_t; \\ C_1 (a_3 + a_9) + C_5 k_3 + C_7 k_4 = w_{p2}^*(R) + M_t; \\ -\frac{a_3 + a_9}{R} C_1 + C_5 k_5 + C_7 k_6 = w_{p3}^*(R) - \frac{M_t}{R}, \end{cases} \quad (18)$$

где введены коэффициенты

$$k_1 = \frac{b_3}{R}(a_7b_1 - a_2b_2 - a_9) + b_5(a_1b_1 + a_2b_2 - a_3),$$

$$k_2 = \frac{b_4}{R}(a_7b_1 - a_2b_2 - a_9) + b_6(a_1b_1 + a_2b_2 - a_3),$$

$$k_3 = \frac{b_3}{R}(a_9b_1 - a_5b_2 - a_{12}) + b_5(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6),$$

$$k_4 = \frac{b_4}{R}(a_9b_1 - a_5b_2 - a_{12}) + b_6(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6),$$

$$k_5 = b_7(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6) + \frac{b_3}{R^2}(-b_1(a_3 + a_9) + a_{12} + a_6),$$

$$k_6 = b_8(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6) + \frac{b_4}{R^2}(-b_1(a_3 + a_9) + a_{12} + a_6),$$

$$w_{p1}^*(R) = -\frac{w_{p'',r}(R)}{R}(a_7b_1 - a_2b_2 - a_9) - w_{p',rr}(R)(a_1b_1 + a_2b_2 - a_3),$$

$$w_{p2}^*(R) = -\frac{w_{p'',r}(R)}{R}(a_9b_1 - a_5b_2 - a_{12}) - w_{p',rr}(R)(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6),$$

$$w_{p3}^*(R) = -\frac{w_{p'',r}(R)}{R^2}(-b_1(a_3 + a_9) + a_{12} + a_6) - w_{p',rrr}(R)(a_3b_1 + a_5b_2 - a_6).$$

В результате решения системы (18) имеем константы интегрирования

$$C_1 = \frac{W_1}{W}, C_3 = \frac{W_2}{W}, C_5 = \frac{W_3}{W}, C_7 = \frac{W_4}{W}, \quad (19)$$

где определители

$$W = \begin{vmatrix} 0 & R & b_2b_3 & b_2b_4 \\ (a_1 + a_7) & 0 & k_1 & k_2 \\ (a_3 + a_9) & 0 & k_3 & k_4 \\ -\frac{(a_3 + a_9)}{R} & 0 & k_5 & k_6 \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} -b_2w_{p'',r}(R) & R & b_2b_3 & b_2b_4 \\ w_{p1}^*(R) + T_t & 0 & k_1 & k_2 \\ w_{p2}^*(R) + M_t & 0 & k_3 & k_4 \\ w_{p3}^*(R) - \frac{M_t}{R} & 0 & k_5 & k_6 \end{vmatrix},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 0 & -b_2w_{p'',r}(R) & b_2b_3 & b_2b_4 \\ (a_1 + a_7) & w_{p1}^*(R) + T_t & k_1 & k_2 \\ (a_3 + a_9) & w_{p2}^*(R) + M_t & k_3 & k_4 \\ -\frac{(a_3 + a_9)}{R} & w_{p3}^*(R) - \frac{M_t}{R} & k_5 & k_6 \end{vmatrix},$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 0 & R & -b_2 w_{p,r}(R) & b_2 b_4 \\ (a_1 + a_7) & 0 & w_{p1}^*(R) + T_t & k_2 \\ (a_3 + a_9) & 0 & w_{p2}^*(R) + M_t & k_4 \\ -\frac{(a_3 + a_9)}{R} & 0 & w_{p3}^*(R) - \frac{M_t}{R} & k_6 \end{pmatrix},$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 0 & R & b_2 b_3 & -b_2 w_{p,r}(R) \\ (a_1 + a_7) & 0 & k_1 & w_{p1}^*(R) + T_t \\ (a_3 + a_9) & 0 & k_3 & w_{p2}^*(R) + M_t \\ -\frac{(a_3 + a_9)}{R} & 0 & k_5 & w_{p3}^*(R) - \frac{M_t}{R} \end{pmatrix}.$$

Из условия равенства прогибов на контуре пластины (6) следует выражение для константы интегрирования

$$C_{10} = \frac{C_5 J_0 (\sqrt{a} \kappa R) + C_7 J_0 (\sqrt{a} \kappa R) + w_p(R)}{K_0 (\lambda \kappa R)}. \quad (20)$$

Решение (10) с константами интегрирования (19), (20) описывает перемещение упругой круглой трехслойной пластины с легким наполнителем при свободном опирании на основании Пастернака в случае произвольной осесимметричной нагрузки, распределенной по внешней поверхности верхнего слоя.

Численный параметрический анализ. Результаты расчета изотермического изгиба трехслойной пластины радиуса $R = 1$ м, свободно лежащей на упругом основании, получены при помощи математического пакета Maple. Нагрузка интенсивностью $q = -1$ МПа принята равномерно распределенной по верхнему слою пластины. Толщины несущих слоев приняты постоянными: $h_1 = h_2 = 0,04$ м, наполнителя – $h_3 = 0,4$ м. Механические характеристики материалов слоев приняты в соответствии с [3]: сплав Д16-Т для внешних слоев – $G = 0,267 \cdot 10^5$ МПа, $K = 0,8 \cdot 10^5$ МПа; фторопласт-4 для наполнителя – $G_3 = 90$ МПа, $K_3 = 345$ МПа.

На рисунке 2 представлены зависимости прогиба пластины и осадки основания за ее пределами при постоянном коэффициенте сдвига основания $t_f = 1$ МПа·м для различных коэффициентов сжатия κ_0 . При увеличении коэффициента сжатия основания прогиб пластины уменьшается, при этом оставаясь равномерным под пластиной. Осадка основания за пределами пластины убывает сопоставимо коэффициенту сжатия. На графиках (рисунок 3) показана осадка основания w_d за пределами пластины. Коэффициент сжатия основания принят постоянным: $\kappa_0 = 100$ МПа/м, а коэффициенты сдвига t_f различны.

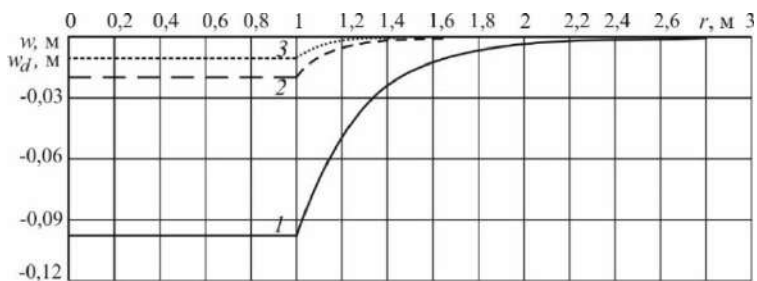


Рисунок 2 – Прогиб w и осадки основания w_d за границами пластины при постоянном коэффициенте сдвига основания $t_f = 1$ МПа·м:

$$1 - \kappa_0 = 10 \text{ МПа/м}; 2 - \kappa_0 = 50 \text{ МПа/м}; 3 - \kappa_0 = 100 \text{ МПа/м}$$

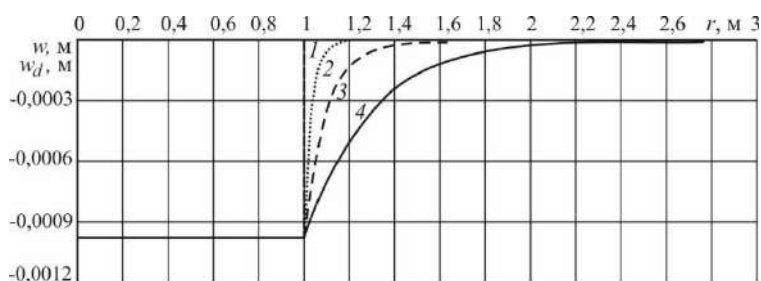


Рисунок 3 – Прогиб w и осадки основания w_d за границами пластины при постоянном коэффициенте сжатия основания $\kappa_0 = 100$ МПа/м:

$$1 - t_f = 0; 2 - t_f = 0,1 \text{ МПа·м}; 3 - t_f = 1 \text{ МПа·м}; 4 - t_f = 10 \text{ МПа·м}$$

В случае $t_f = 0$, что соответствует модели Винклера, график идет по радиальной оси за пределами пластины, имея ступенчатый вид (кривая 1), так как перемещения за пределами пластины в этом случае отсутствуют, что вызывает сомнения в правомерности этой модели. При расчете в соответствии с моделью Пастернака увеличение коэффициента сдвига ведет к увеличению области за пределами пластины, в которой заметны осадки основания, а прогиб под пластиной остается постоянным.

Заключение. Предложенная в работе математическая модель, полученные общее и частное решения краевой задачи позволяют рассматривать осесимметричную нагрузку произвольного вида как равномерно распределенную, так и локально приложенную: круговую, кольцевую, погонную и т. д. Численный параметрический анализ показал существенную зависимость прогиба пластины и осадки основания за ее пределами пластины от параметров модели основания Пастернака.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т22М-072).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 2 **Reddy, J. N.** Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis / J. N. Reddy. – 2nd ed. – Boca Raton : CRC Press, 2003. – 858 p.
- 3 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 4 **Carrera, E.** Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications / E. Carrera, F. A. Fazzolari, M. Cinefra. – Amsterdam : Academic Press, 2016. – 410 p.
- 5 **Старовойтов, Э. И.** Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.
- 6 **Pronina, P. F.** Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // *Periódico Tchê Química*. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.
- 7 **Захарчук, Ю. В.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – Вып. 11. – С. 80–87.
- 8 **Зеленая, А. С.** Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Сер. Естественные науки*. – 2017. – № 6 (105). – С. 89–95.
- 9 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2020. – Вып. 35. – С. 246–252.
- 10 **Lal, R.** On radially symmetric vibrations of functionally graded non-uniform circular plate including non-linear temperature rise / R. Lal, R. Saini // *European journal of mechanics. A/Solids*. – 2019. – Vol. 77. – Article 103796.
- 11 **Saini, R.** Effect of thermal environment and peripheral loading on axisymmetric vibrations of non-uniform FG circular plates via generalized differential quadrature method / R. Saini, R. Lal // *Journal of vibration engineering*. – 2021. – Vol. 9. – P. 873–886.
- 12 **Маркова, М. В.** Собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // *Механика. Исследования и инновации*. – 2021. – Вып. 14. – С. 147–158
- 13 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // *Механика композитных материалов*. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.
- 14 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2014. – № 1. – С. 59–63.
- 15 **Zenkour, A. M.** Thermomechanical bending response of functionally graded non-symmetric sandwich plates / A. M. Zenkour, N. A. Alghamdi // *Journal of Sandwich Structures and Materials*. – 2010. – Vol. 12, no. 1. – P. 7–46.

16 **Козел, А. Г.** Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А. Г. Козел // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2021. – № 1 (54). – С. 30–37.

17 **Козел, А. Г.** Влияние материалов слоев на изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2022. – Вып. 36. – С. 21–26.

18 **Старовойтов, Э. И.** Влияние жесткости основания Пастернака на деформирование круговой трёхслойной пластины / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2019. – № 2. – С. 107–114.

19 **Козел, А. Г.** Термосиловой изгиб упругой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации*. – 2021. – Вып. 14. – С. 90–96.

20 **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Госстройиздат, 1954. – 56 с.

21 **Белл, Дж. Ф.** Экспериментальные основы механики деформируемых тел. Ч. 1. Малые деформации / Дж. Ф. Белл. – М. : Наука, 1984. – 600 с.

22 **Власов, В. З.** Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Физматлит, 1960. – 491 с.

23 **Тихонов, А. Н.** Курс высшей математики и математической физики. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – М. : Наука, 1980. – 231 с.

A. G. KOZEL

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

THERMAL-FORCE BENDING OF AN ELASTIC THREE-LAYER PLATE FREELY LYING ON THE PASTERNAK FOUNDATION

There is investigated the thermal-force bending of an elastic three-layer circular plate lying freely on an elastic base, the operation of the plate is described by the Pasternak model. Deformation of the load-bearing layers occurs in accordance with the Kirchhoff's hypotheses, and of light filler relative to the thick one – with the Timoshenko's hypothesis. A rigid diaphragm is installed on the plate contour. The boundary value problem comes down to determining the plate deflection, the radial movement of the middle plane of the filler, the relative shear in it, and the drawdown of the base outside the plate. A solution to the fourth-order differential equation for deflection in the Bessel functions is obtained, the relative shift in the filler and radial displacement are expressed from it. A particular analytical solution to the system of equilibrium equations under an arbitrary axisymmetric load is obtained using the Cauchy kernel. The integration constants corresponding to the boundary conditions are determined for the case of an arbitrary axisymmetric load. A numerical analysis of the deflection and base drawdown dependence on its mechanical characteristics is carried out.

Keywords: three-layer plate, thermoelasticity, Pasternak foundation, foundation drawdown, axisymmetric load, Cauchy kernel.

Получено 08.10.2023.

УДК 614.846.63

С. Г. КОРОТКЕВИЧ¹, В. А. КОВТУН¹, В. А. ЛОДНЯ²

¹ Университет гражданской защиты МЧС Беларуси, Минск, Беларусь

² Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ЭКСПЛУАТАЦИОННАЯ НАГРУЖЕННОСТЬ РЕЗЕРВУАРОВ ДЛЯ ВОДЫ ПОЖАРНЫХ АВТОЦИСТЕРН

Выполнен анализ влияния режимов и условий эксплуатации пожарных автоцистерн на шасси МАЗ-5337 и МАЗ-6317 на уровень инерционных нагрузок, действующих на их резервуары. Установлены диапазоны ускорений, возникающих в конструкциях резервуаров для воды объемом 5, 8 и 10 м³ при различных режимах движения. Показано, что максимальные ускорения наблюдаются в случае движения пожарных автомобилей по грунтовой дороге категории VI-б со скоростью 20–30 км/ч.

Ключевые слова: пожарный автомобиль, резервуар автоцистерны, режим движения, датчик, ускорение.

Введение. При производстве пожарных автомобилей особенно важным является соблюдение повышенных требований к прочности конструкций резервуаров автоцистерн, которые при движении испытывают значительные нагрузки [1, 2]. Это обусловлено, в первую очередь, частым использованием при ежедневной эксплуатации таких режимов, как ускорение, торможение, поворот. Согласно статистике, в нашей стране более 60 % всех пожаров происходит в сельской местности и природных экосистемах, что приводит к необходимости движения пожарных автоцистерн по проселочным дорогам и в условиях бездорожья. В таких случаях конструкции резервуаров автоцистерн испытывают значительные инерционные нагрузки, которые передаются через раму шасси, а также обусловлены колебаниями перевозимой жидкости. Действующие на автоцистерны динамические нагрузки становятся причиной нарушения герметичности конструкций резервуаров. Поэтому существует необходимость в разработке подходов, позволяющих повысить надежность и долговечность резервуаров пожарных автоцистерн.

Вибродиагностика является современным и точным средством контроля состояния сложных технических систем, которые подвержены воздействиям множества факторов в различных условиях эксплуатации. К таким системам в первую очередь относится автомобильный транспорт [3–5]. В общем случае в целях вибрационного контроля состояния машин используют акселерометры, выходной сигнал которых подвергается соответствующему преобразованию для получения требуемой величины; датчики скорости, выходной сигнал которых может быть проинтегрирован для получения сигнала перемещения; датчики бесконтактного типа, выходной сигнал которых пропорционален относительному перемещению подвижных частей машины [6]. Акселерометры являются датчиками инерционного типа. Их выходной сигнал пропорционален ускорению поверхности, на которой они установлены. Выбор датчика зависит от условий его применения.

Проведенный анализ показал, что применение пьезоэлектрических виброизмерительных преобразователей (акселерометров) [7, 8] дает возможность оценки величин максимальных ускорений, возникающих под действием инерционных нагрузок в конструкциях резервуаров пожарных автоцистерн при различных режимах движения. Для проведения экспериментальных исследований целесообразно использование однокомпонентных пьезоэлектрических акселерометров типа 352С18, в которых в качестве пьезоэлемента используется пьезокерамика [9]. Согласно данным периодической аттестации таких датчиков погрешность по коэффициенту преобразования не превышает 5 %.

Целью работы является экспериментальный анализ влияния режимов движения пожарных автомобилей на значения ускорений, возникающих в конструкциях резервуаров автоцистерн под действием инерционных нагрузок.

Постановка эксперимента и результаты исследований. В качестве объекта исследований выбраны пожарные автоцистерны на шасси МАЗ-5337 с объемом резервуаров 5 м³, а также на шасси МАЗ-6317 с объемом резервуаров 8 и 10 м³, которые наиболее распространены в Республике Беларусь.

Эксперимент проводился при полностью заполненных водой резервуарах автоцистерн, чего требует специфика работы пожарных автомобилей. Датчики устанавливались снаружи конструкции резервуаров равноудаленно по отношению к сварным швам, ребрам жесткости и иным элементам, влияющим на жесткость конструкции [10]. Анализ схемы гидравлического нагружения резервуара автоцистерны показал, что устанавливать датчики на его передней и боковой стенках необходимо на высоте 1/3 от дна (рисунок 1).

Работа измерительного оборудования осуществлялась при температуре окружающей среды 22 °С. При подготовке измерительного комплекса Larson-Davis 2900 выполнена установка нулевого значения ускорения, а также нахождение диапазона изменения измеряемой величины. Испытания были сведены к измерению общего уровня ускорения, возникающего в конструкции резервуаров пожарных автоцистерн при различных параметрах и условиях движения автомобилей. На измерительном комплексе устанавливались следующие настройки: усреднение сигнала – экспоненциальное, время усреднения – 1 с, вид оконной функции быстрого преобразования Фурье – окно Хеннинга.

Выполненный анализ показал, что при движении пожарных автоцистерн к месту возникновения пожара наиболее типичными являются следующие режимы:

1) движение со скоростью 50 ± 2 км/ч по прямому участку асфальтированной дороги;

2) движение с допустимой скоростью 20–30 км/ч по грунтовой дороге категории VI-б (рисунок 2);

3) движение со скоростью 50 ± 2 км/ч по прямому участку асфальтированной дороги с последующим замедлением двигателем до скорости 10–15 км/ч для вхождения в левый поворот на 90°;

4) ускорение с места до скорости 30 ± 2 км/ч по прямому участку асфальтированной дороги и экстренное торможение до полной остановки.

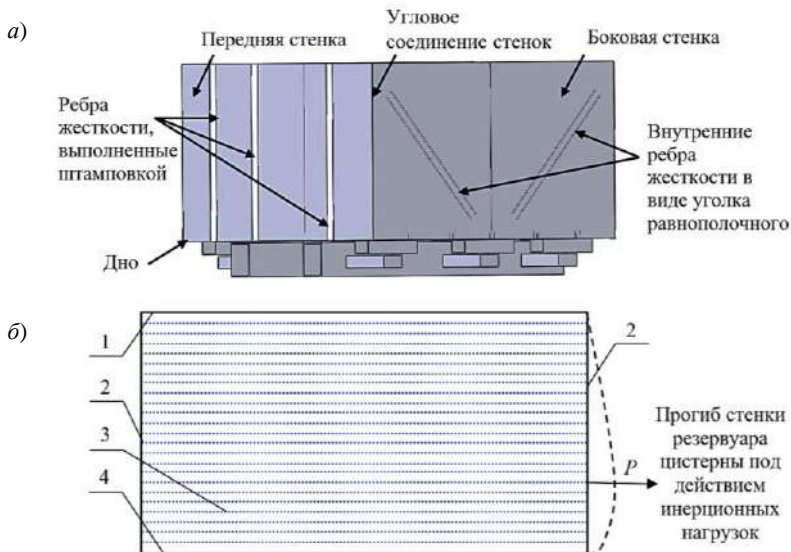


Рисунок 1 – Модель (а) и схема гидравлического нагружения (б) резервуара пожарной автоцистерны:

1 – крыша; 2 – стенка; 3 – перевозимая жидкость; 4 – дно; P – давление жидкости



Рисунок 2 – Движение пожарной автоцистерны на шасси МАЗ-5337 с резервуаром объемом 5 м³ в соответствии с режимом № 2

На рисунке 3 приведен график изменения ускорения, возникающего под действием инерционных нагрузок в резервуаре объемом 5 м³ пожарной автоцистерны на шасси МАЗ-5337, которые были получены одним из датчиков после обработки данных измерительным комплексом Larson-Davis 2900.

В таблице 1 представлены максимальные значения ускорения, м/с², возникающего под действием инерционных нагрузок в резервуарах объемом 5, 8 и 10 м³ при исследуемых режимах движения пожарных автоцистерн на шасси МАЗ-5337 и МАЗ-6317 после обработки экспериментальных данных.

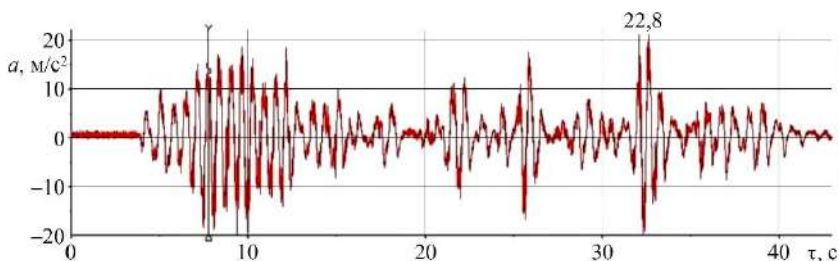


Рисунок 3 – Изменение ускорения точки резервуара пожарного автомобиля при движении по грунтовой дороге категории VI-б с допустимой скоростью 20–30 км/ч (режим движения № 2)

Таблица 1 – Максимальные значения ускорения a_{\max} , м/с², зафиксированные в точках резервуаров автоцистерн

Режим движения	Объем резервуаров и модель шасси пожарных автоцистерн		
	5 м ³ на шасси МАЗ-5337	8 м ³ на шасси МАЗ-6317	10 м ³ на шасси МАЗ-6317
Режим № 1	7,4 ± 0,7	9,2 ± 0,8	10,8 ± 0,9
Режим № 2	22,3 ± 1,7	24,6 ± 1,8	25,2 ± 1,9
Режим № 3	17,9 ± 1,4	18,1 ± 1,5	19,4 ± 1,5
Режим № 4	15,8 ± 1,2	22,7 ± 1,7	22,9 ± 1,8

Полученные результаты свидетельствуют о том, что значения ускорений, возникающих в точках резервуаров под действием инерционных нагрузок, в значительной мере определяются режимами движения пожарных автомобилей. Максимальные значения ускорения зафиксированы в случае движения пожарных автомобилей по грунтовой дороге категории VI-б с допустимой скоростью 20–30 км/ч (режим № 2), которые составили для резервуаров объемом 5 м³ пожарных автоцистерн на шасси МАЗ-5337 22,3 м/с², а для резервуаров объемом 8 и 10 м³ пожарных автоцистерн на шасси МАЗ-6317 – 24,6 и 25,2 м/с² соответственно.

Заключение. С использованием измерительного комплекса Larson-Davis 2900 и пьезоэлектрических акселерометров 352С18 проведены экспериментальные исследования для оценки общего уровня ускорений, возникающих в конструкциях цистерн при различных режимах движения пожарных автомобилей. В результате испытаний и обработки полученных данных установлено влияние режимов движения пожарных автоцистерн на шасси МАЗ-5337 и МАЗ-6317 на значения ускорений, которые возникают под действием инерционных нагрузок в конструкциях их резервуаров объемом 5, 8 и 10 м³ для транспортировки воды. Показано, что режимы и условия эксплуатации пожарных автоцистерн определяют высокую нагруженность элементов их конструкций. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейших прочностных расчетов с использованием программных продуктов конечно-элементного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Высоцкий, М. С.** Динамика автомобильных и железнодорожных цистерн / М. С. Высоцкий, Ю. М. Плескачевский, А. О. Шимановский. – Минск : Белавтотракторостроение, 2006. – 320 с.

2 **Shimanovsky, A. O.** Recent research of dynamics and strength of tank vehicles / A. O. Shimanovsky // Механика машин, механизмов и материалов. – 2016. – № 3 (36). – С. 59–70.

3 Study of tank containers for foodstuffs / A. Liguori [et al.] // Machines. – 2021. – Vol. 9, is. 2. – Article 44. – 21 p.

4 **Орлов, Д. В.** Диагностика вибраций узлов транспортных средств методом вейвлет анализа границ сфокусированного оптического изображения / Д. В. Орлов, В. Е. Махов, И. Ф. Кацан // Инженерный вестник Дона. – 2014. – № 3. – С. 1–14.

5 **Hajdu, F.** Examination of chaotic vibrations during operation of a fire truck / F. Hajdu, R. Kuti // Proceedings of MAC 2018 in Prague. – Prague : MAC Prague consulting spol., 2018. – P. 163–170.

6 ГОСТ ИСО 8042-2002. Вибрация и удар. Датчики инерционного типа для измерений вибрации и удара. Устанавливаемые характеристики = Shock and vibration measurements – Characteristics to be specified for seismic pick-ups. – Введ. РБ 01.04.08. – М. : Межгос. совет по стандартизации, метрологии и сертификации, 2002. – 8 с.

7 **Костюков, В. Н.** Основы виброакустической диагностики и мониторинга машин : учеб. пособие / В. Н. Костюков, А. П. Науменко. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011. – 360 с.

8 **Янчич, В. В.** Пьезоэлектрические датчики вибрационного и ударного ускорения : учеб. пособие / В. В. Янчич. – Ростов н/Д : Издательство ЮФУ, 2008. – 77 с.

9 Вибропреобразователи компании GLOBALTEST [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://globaltest.ru/ru/katalog/datchiki/vibropreobrazovateli/uskoreniya/>. – Дата доступа : 17.11.2019.

10 **Ковтун, В. А.** Компьютерное моделирование и исследование напряженно-деформированного состояния конструкций цистерн пожарных автомобилей / В. А. Ковтун, С. Г. Короткевич, В. А. Жаранов // Вестник Университета гражданской защиты МЧС Беларуси. – 2018. – Т. 2, № 1. – С. 81–90.

S. G. KOROTKEVICH¹, V. A. KOVTUN¹, V. A. LODNYA²

¹*University of Civil Protection of the Ministry of Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk, Belarus*

²*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

OPERATIONAL LOADING OF FIRE TANKERS WATER RESERVOIR

An analysis of the influence of modes and operating conditions of fire tankers on the MAZ-5337 and MAZ-6317 chassis on the level of inertial loads acting the tanks is carried out. The ranges of accelerations that occur in the reservoirs of water tanks with a volume of 5, 8 and 10 m³ under various driving modes are established. It is shown that maximal accelerations are observed when fire trucks move along a dirt road of category VI-b at a velocity of 20–30 km/h.

Keywords: fire tankers, water reservoir, motion mode, sensor, acceleration.

Получено 24.10.2023

УДК 691-41:539.37

И. Е. КРАКОВА, О. И. ЦЫГАНОВ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СЭНДВИЧ-ПАНЕЛЕЙ

Рассматриваются вынужденные колебания, сопровождающие транспортировку пакета сэндвич-панелей в кузове автотранспортного средства. Представлены особенности построения конечно-элементной модели пакета сэндвич-панелей в программном комплексе ANSYS. Определены частоты собственных колебаний рассматриваемой системы. Выполнен анализ влияния частоты вынуждающего кинематического воздействия, возникающего вследствие вертикальных колебаний транспортного средства, на амплитуды колебаний различных точек сэндвич-панелей.

Ключевые слова: сэндвич-панель, конечно-элементное моделирование, вынужденные колебания, амплитудно-частотная характеристика.

В машиностроении, строительстве, на транспорте широко применяются многослойные конструкции, обладающие при небольшой массе достаточно высокой прочностью и жесткостью [1]. Практическое применение таких конструкций потребовало развития исследований в области их прочности и колебаний. Использование положений теории упругости и пластичности привело к созданию математических моделей, позволяющих анализировать прочность и динамику слоистых конструкций при различных вариантах их нагружения. В то же время необходимость учета различных геометрических и физических нелинейностей потребовала введения упрощающих гипотез либо использования численных методов [2, 3].

В диссертационной работе [3] Богданов А. В. получил уравнения собственных поперечных колебаний изотропной прямоугольной пластины для случаев шарнирного и жесткого закрепления по контуру, используя в рамках аналитического подхода метод декомпозиции. Также им выполнены исследования нормального удара по поверхности пластины.

Трехслойные пластины могут совершать колебания, при которых срединная плоскость остается неподвижной, а движутся, принимая волнообразную форму, только облицовочные слои вместе с прилегающим заполнителем, имеющим малую жесткость. В статье [4] для такого случая получены выражения частот собственных колебаний при шарнирном закреплении краев несущих слоев.

Авторы работы [5] представили математическую модель, описывающую вынужденные колебания пакета плоских тонких пластин с точечными упругими связями, а также предложили алгоритм решения полученных уравнений.

Малые свободные осесимметричные поперечные колебания упругой круглой трехслойной пластины, которая связана с основанием средней жесткости

и находится под действием параболических и синусоидальных поверхностных нагрузок, представлены в [6, 7]. Вынужденные колебания прямоугольных трехслойных пластин рассмотрены в работах [8, 9], где принималось во внимание нарушение связи между несущим слоем и заполнителем, а также учитывалась неоднородность последнего.



Рисунок 1 – Транспортный пакет сэндвич-панелей

В зданиях сэндвич-панели располагаются, как правило, в один слой. В то же время для перевозки их укладывают друг на друга (рисунок 1). Получающиеся при этом транспортные пакеты грузоотправители с целью увеличения загрузки автомобиля часто размещают в два яруса, что становится причиной высокого расположения центра тяжести перевозимого груза над уровнем пола автоплатформы и при переходных режимах движения приводит к значительным динамическим нагрузкам. Вследствие малой жесткости среднего слоя сэндвич-панели обладают высокой деформативностью, поэтому частоты вертикальных колебаний автоплатформы могут совпадать с собственными

частотами колебаний груза, что является условием возникновения резонансов. Их появление, в свою очередь, может стать причиной повреждения сэндвич-панелей в процессе транспортировки [10].

Выполненный анализ показал, что на данный момент имеется значительное число исследований, в которых рассматриваются прочность и колебания отдельных многослойных конструкций, но недостаточно изученное поведение остается их в составе системы, получающейся при укладке ряда панелей друг на друга. Целью данной работы стало исследование вынужденных колебаний пакета строительных сэндвич-панелей при перевозке их автотранспортным средством для выявления возможного резонанса. В качестве основы для исследования была принята методика моделирования колебаний пакетов сэндвич-панелей, представленная в [10, 11].

С целью определения частот вынужденных колебаний пакета стеновых сэндвич-панелей была создана конечно-элементная модель в среде многоцелевой программы проектирования и анализа ANSYS [12]. В ней каждая панель представлена состоящей из объемов, включающих два профилированных металлических листа (обшивку) и средний слой из минераловатных плит. Размер панели принят равным $7,2 \times 1,0 \times 0,08$ м, толщина обшивки составляла 0,5 мм. Десять таких панелей размещались друг над другом, а между ними и под нижней панелью симметрично располагались пенопластовые прокладки размером $0,4 \times 1,0 \times 0,04$ м. Полученная геометрическая модель представлена на рисунке 2.

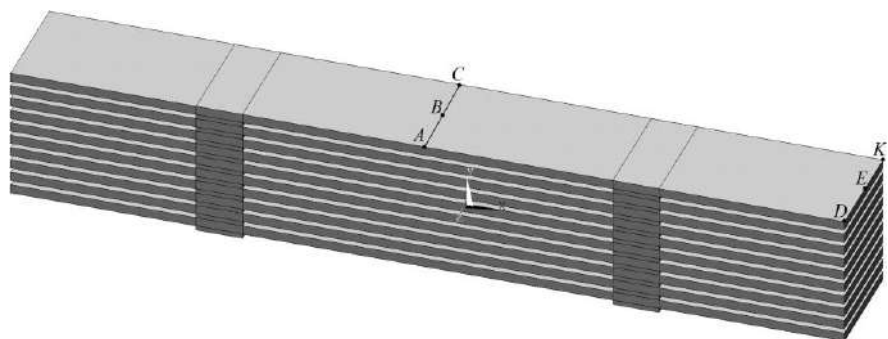


Рисунок 2 – Геометрическая модель

Построение конечно-элементной модели потребовало задания свойств материалов. Учитывая, что все материалы, из которых изготовлены тела системы, линейно упругие и изотропные, для них были заданы значения модулей Юнга E_i и коэффициентов Пуассона μ_i . Решение динамических задач требует также задания плотности ρ_i . Численные значения названных параметров материалов, использованные для расчетов, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Механические характеристики материалов пакета сэндвич-панелей

Элемент системы	Модуль Юнга E_i , МПа	Коэффициент Пуассона μ_i	Плотность ρ_i , кг/м ³
Металлическая обшивка (сталь)	200000	0,3	7800
Заполнитель (минеральная вата)	5,6	0,12	75
Подкладка (пенопласт)	10	0,2	15

Для построения конечно-элементной сетки использованы шестигранные восьмиузловые элементы SOLID185, разбиение геометрической модели на которые осуществлялось в автоматическом режиме.

Граничные условия задавались только для нижних пенопластовых подставок, соприкасающихся с кузовом. Было запрещено перемещение контактирующих с кузовом площадок по осям x и z (в продольном и поперечном направлениях по отношению к направлению движения автомобиля). Чтобы проанализировать влияние вертикальных колебаний кузова автотранспортного средства на движение груза, при выполнении гармонического анализа задавалась амплитуда вертикальных колебаний точек нижних поверхностей подставок вдоль оси y (в вертикальном направлении) 0,02 м.

Для установления значений частот, при которых возможен резонанс, выполнен модальный анализ пакета из 10 сэндвич-панелей. Как и в случае, описанном в [10], получены несколько диапазонов близких значений собственных частот, которые соответствуют однотипным колебаниям отдельных панелей. Частоты, соответствующие первым таким диапазонам, приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Частоты собственных колебаний пакета сэндвич-панелей

Номер формы колебаний	1	5	10	15	20
Значения собственных частот, Гц	7,7	12,7	14,1	14,8	14,9

На следующем этапе выполнен расчет вынужденных колебаний пакета в диапазоне частот возбуждения 4–40 Гц. Коэффициент демпфирования, который используется для построения матрицы демпфирования, принят равным $\beta = 10^{-6}$ с. В результате расчетов получены зависимости амплитуд перемещений характерных точек (*A, B, C, D, E, K*) от частоты вынуждающей силы. Соответствующие амплитудно-частотные характеристики представлены на рисунке 3.

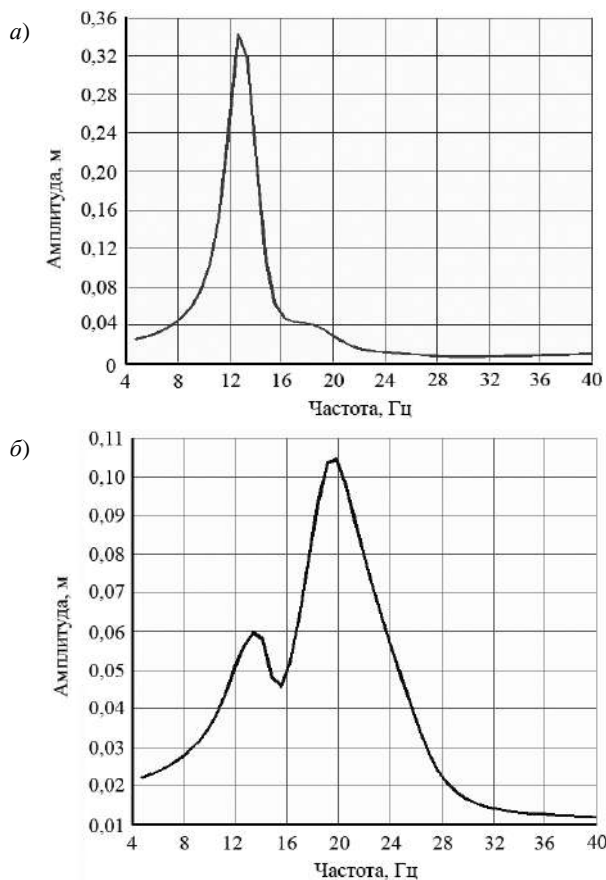


Рисунок 3 – Амплитудно-частотные характеристики:

a – для точек *D, E, K* верхнего облицовочного слоя;

б – для точек *A, B, C* верхнего облицовочного слоя

Анализ полученных результатов показал, что зависимости для всех точек, которые находятся на каждом из отрезков, параллельных оси z , практически не отличаются. Резонанс для точек D, E, K соответствует частоте 13 Гц (см. рисунок 3, a). Для точек A, B, C при частоте 13 Гц также наблюдается увеличение амплитуды колебаний, но их максимальные значения соответствуют частоте около 20 Гц.

На рисунке 4 представлены формы колебаний, соответствующие резонансным частотам. При частоте 13 Гц все точки панелей перемещаются в одну сторону, причем наибольшие амплитуды наблюдаются у концов верхних рядов. При частоте вынуждающей силы 20 Гц максимальные амплитуды наблюдаются в центральных частях верхней и нижней панелей, причем эти части смещаются разнонаправленно. Отсутствие резонансов при некоторых частотах собственных колебаний, приведенных в таблице 2, объясняется выбранным вариантом приложения возмущающего воздействия.

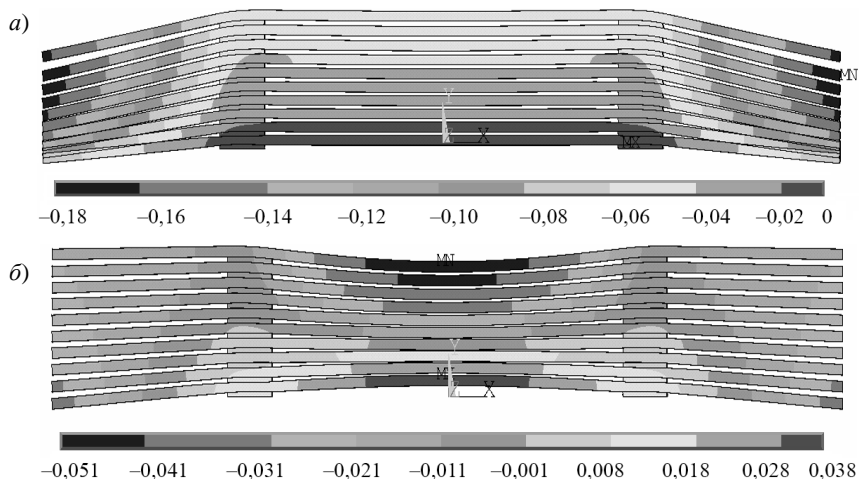


Рисунок 4 – Формы вынужденных колебаний пакета из 10 панелей для резонансных частот: a – 13 Гц; b – 20 Гц (амплитуды колебаний приведены в метрах)

Выполненные расчеты продемонстрировали, что значения амплитуд вынужденных колебаний достаточно велики. Поэтому при некоторых режимах движения автомобиля возможно возникновение в сэндвич-панелях значительных деформаций и напряжений. Чтобы обеспечить безопасную доставку груза получателю, следует осуществлять такое крепление сэндвич-панелей, которое обеспечит их необходимую жесткость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 A systematic study on composite materials in civil engineering / V. Monfared [et al.] // Ain Shams Engineering Journal. – 2023. – Vol. 14, is. 12. – Article 102251. – 18 p.

2 **Журавков, М. А.** Повторное деформирование упругопластического трехслойного стержня локальной нагрузкой / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2016. – № 3 (38). – С. 71–79.

3 **Богданов, А. В.** Исследование колебаний трехслойной пластины : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 01.02.04 / А. В. Богданов. – М. : Моск. гос. строит. ун-т, 2009. – 21 с.

4 **Lopatin, A. V.** Symmetrical facing wrinkling of composite sandwich panels / A. V. Lopatin, E. V. Morozov // *Journal of Sandwich Structures and Materials*. – 2008. – Vol. 10, is. 6. – P. 475–497.

5 **Берикханова, Г. Е.** Математическая модель колебаний пакета прямоугольных пластин с учетом точечных связей / Г. Е. Берикханова, Б. Т. Жумагулов, Б. Е. Кангужин // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2010. – № 1. – С. 72–86.

6 **Ярвая, А. В.** Вынужденные колебания трехслойной пластины под действием параболических нагрузок / А. В. Ярвая // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2020. – Вып. 35. – С. 54–60.

7 **Ярвая, А. В.** Вынужденные колебания трехслойной круглой пластины под действием синусоидальной нагрузки / А. В. Ярвая // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2017. – № 2. – С. 87–94.

8 **Burlayenko, V. N.** Nonlinear dynamic analysis of harmonically excited debonded sandwich plates using finite element modelling / V. N. Burlayenko, T. Sadowski // *Composite Structures*. – 2013. – Vol. 108. – P. 354–366.

9 **Vranić, A.** Analysis of Design Parameters Influences on Modal Behaviour of Sandwich Panels / A. Vranić, S. Ćirić Kostić // *IMK-14 – Research & Development in Heavy Machinery*. – 2015. – Vol. 21, is. 1. – P. 29–34.

10 **Шимановский, А. О.** Моделирование колебаний и напряженно-деформированного состояния пакетов сэндвич-панелей при их транспортировке / А. О. Шимановский, И. Е. Кракова // *Строительная механика и конструкции*. – 2022. – № 4 (35). – С. 49–57.

11 **Кракова, И. Е.** Свободные колебания транспортных пакетов из сэндвич-панелей / И. Е. Кракова, О. И. Якубович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – Вып. 11. – С. 150–154.

12 **Altabay, W. A.** Using ANSYS for finite element analysis. Vol. II : Dynamic, probabilistic design and heat transfer analysis / W. A. Altabay, M. Noori, L. Wang. – New York, NY : Momentum Press, 2018. – 224 p.

I. E. KRAKAVA, V. I. TSYHANOK

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

FINITE ELEMENT MODELING OF SANDWICH PANELS FORCED VIBRATIONS

The forced vibrations at the transportation of a package of sandwich panels in a vehicle body are considered. The features of finite element model building for a sandwich panel package in the ANSYS software package are presented. The natural oscillation frequencies of the system under consideration are determined. There is performed an analysis of the influence of the frequency of forcing kinematic action that is a result of vehicle vertical vibrations on the vibration amplitudes of various points of the sandwich panels.

Keywords: sandwich panel, finite element modeling, forced vibrations, amplitude-frequency characteristic.

Получено 30.10.2023

УДК 691-419:534.1

*Е. А. ЛАЧУГИНА**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С ЛЕГКИМИ ЗАПОЛНИТЕЛЯМИ**

Рассматриваются свободные колебания круговой пятислойной пластины, симметричной по толщине. Предполагается, что для трех тонких несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа. Описание деформирования относительно толстых заполнителей осуществляется с применением гипотезы Тимошенко о прямолинейности и сохранении длины деформированной нормали. Уравнения свободных колебаний получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Выведены формулы для вычисления собственных чисел и частот колебаний для случая заделки контура пластины. Проведен численный параметрический анализ частот собственных колебаний.

Ключевые слова: пятислойная пластина круглой формы, свободные колебания, собственные частоты.

Введение. Область применения многослойных конструкций, в частности, пятислойных, которые находят применение во многих областях современной техники, постоянно расширяется. Это требует создания новых и развития известных методов их расчета. Поэтому исследование динамики пятислойных элементов конструкций является актуальным.

Основные методы расчета и постановки различных краевых задач для слоистых элементов конструкций приведены в монографиях [1–4]. Влияние облучения нейтронным потоком на деформирование слоистых балок и пластин рассмотрено в работах [5, 6]. Публикации [7–9] содержат информацию об изгибе трехслойных пластин для случаев сжимаемого заполнителя, взаимодействия с упругим основанием Пастернака, а также растяжения-сжатия в своей плоскости. В статьях [10–12] содержатся результаты исследований динамики неоднородных слоистых оболочек. Пятислойные элементы конструкций ранее рассматривались в публикациях [13, 14].

Целью рассмотренной работы стало получение аналитического решения начально-краевой задачи о свободных колебаниях симметричной по толщине пятислойной пластины с легкими заполнителями.

Постановка начально-краевой задачи. Исследуется пластина круглой формы, симметричная по толщине, которая набрана из пяти слоев, в том числе двух легких заполнителей, не воспринимающих тангенциальные нагрузки (рисунок 1). Используется цилиндрическая система координат, которая связана со срединной поверхностью внутреннего несущего слоя l . Деформирование тонких несущих слоев $1, 2, 4$ соответствует гипотезам Кирхгофа, согласно которым нормаль не изменяет своей длины и остается нормальной к срединной поверхности. Для сравнительно толстых легких

заполнителей 3, 5 справедлива гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости нормали, которая поворачивается на подлежащий определению дополнительный угол $\psi(r, t)$, где r – радиальная координата; t – время.

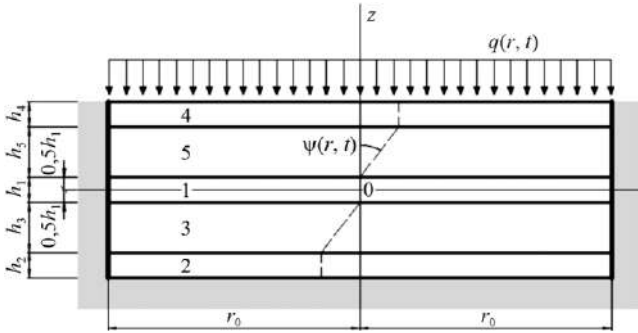


Рисунок 1 – Пятислойная пластина

Предполагается, что имеющаяся на контуре пластины жесткая диафрагма предотвращает относительный сдвиг слоев $\psi(r_0, t) = 0$. Радиальные перемещения $u_r^{(k)}$ в слоях пластины (k – номер слоя) выражаются через прогиб $w(r, t)$ и относительный сдвиг $\psi(r, t)$:

$$u_r^{(4)} = -zw_{,r} + h_3\psi, \quad (0,5h_1 + h_3 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3 + h_2);$$

$$u_r^{(5)} = -zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi, \quad (0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3);$$

$$u_r^{(1)} = -zw_{,r}, \quad (-0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1);$$

$$u_r^{(3)} = -zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi, \quad (-0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1);$$

$$u_r^{(2)} = -zw_{,r} - h_3\psi, \quad (-0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3),$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в индексе обозначает производную по последующей координате.

Уравнения, описывающие осесимметричные колебания пластины в случае жестких заполнителей, были выведены в [15]:

$$\begin{aligned} L_2(a_1\psi - a_2w_{,r}) - 2h_3G_3\psi &= 0, \\ L_3(a_3\psi - a_4w_{,r}) - M_0\ddot{w} &= -q, \end{aligned} \quad (1)$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы,

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}; \end{aligned}$$

a_i – коэффициенты,

$$a_1 = \left[2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right]; a_2 = \left[K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$a_3 = \left[2K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$a_4 = \left[2K_2^- h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^- \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^- h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k; \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k,$$

G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования материала k -го слоя; $M_0 \ddot{w}$ – инерционные поперечные силы, $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5) r_0^2$, ρ_k – плотность материала k -го слоя; $q(r, t)$ – внешняя нагрузка.

Начальные прогиб и скорость движения принимаются нулевыми. Контур пластины предполагается заделанным, то есть должны выполняться следующие условия:

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = r_0. \quad (2)$$

Уравнения свободных колебаний. Легким считается заполнитель, работой касательных напряжений в котором можно пренебречь. Тогда при отсутствии внешней нагрузки $q = 0$ система (1) приводится к виду:

$$L_2(a_1 \psi - a_2 w_{,r}) = 0; \quad L_3(a_3 \psi - a_4 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} = 0.$$

С помощью первого уравнения избавляемся от переменной ψ во втором. Далее, после двукратного интегрирования первого уравнения, получим

$$\psi = b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r; \quad L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = 0. \quad (3)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования; b_1, M, D – коэффициенты,

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}; \quad M^4 = M_0 D; \quad D = \frac{a_1}{a_1 a_3 - a_2^2}.$$

Относительный сдвиг в центре пластины ограничен, поэтому $C_2 = 0$. Решение дифференциального уравнения для прогиба принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (4)$$

где $v(r)$ – некоторая искомая функция; ω – частота колебаний пластины; A и B – константы, следующие из начальных условий задачи.

После подстановки прогиба (4) во второе уравнение системы (3), получим дифференциальное уравнение для определения функции $v(r)$:

$$L_3(v_{,r}) - \beta^4 v = 0 \quad (5)$$

или, с учетом оператора L_3 , записанного в развернутом виде,

$$v_{,rrrr} + \frac{2}{r}v_{,rrr} - \frac{1}{r^2}v_{,rr} + \frac{1}{r^3}v_{,r} - \beta^4v = 0,$$

где $\beta^4 = M^4 \omega^2$.

Решение дифференциального уравнения (5) таково:

$$v(\beta r) = C_3 J_0(\beta r) + C_4 I_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r) + C_6 K_0(\beta r),$$

где C_3, \dots, C_6 – искомые константы интегрирования; J_0, I_0, Y_0, K_0 – функции Бесселя, Бесселя (модифицированная), Неймана и Макдональда соответственно.

Следует заметить, что функции $Y_0(\beta r)$ и $K_0(\beta r)$ имеют особенность типа логарифма в начале координат, поэтому необходимо принять $C_5 = C_6 = 0$.

В итоге решение системы уравнений (3) записываем в виде

$$\varphi(r, t) = b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r; \quad w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

$$v(r) = C_3 J_0(\beta r) + C_4 I_0(\beta r).$$

Удовлетворяя граничным условиям (2), получим систему алгебраических уравнений относительно констант интегрирования C_3, C_4 :

$$C_3 J_0(\beta r_0) + C_4 I_0(\beta r_0) = 0; \quad -C_3 J_1(\beta r_0) + C_4 I_1(\beta r_0) = 0.$$

Полученная однородная система имеет ненулевое решение при условии равенства нулю определителя:

$$I_1(\beta r_0) J_0(\beta r_0) + I_0(\beta r_0) J_1(\beta r_0) = 0. \quad (6)$$

Решениями трансцендентного уравнения (6) являются собственные числа β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), после получения которых частоты собственных колебаний пластины определяются по формуле

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}.$$

Численные результаты. Первые 10 собственных чисел β_n и собственных частот колебаний ω_n для пятислойной пластины ($r_0 = 1$), несущие слои которой – из алюминиевого сплава Д16Т, а наполнитель – фторопласт-4, приведены в таблице 1. Модули упругости материалов взяты из [2]. Толщины слоев, отнесенные к радиусу пластины, приняты следующими: $h_2 = h_4 = h_1 = 0,02, h_3 = h_5 = 0,2$.

Также выполнен анализ влияния толщины h_1 слоя пластины, остальные размеры которой аналогичны указанному случаю, на частоты колебаний.

Таблица 1 – Собственные числа и собственные частоты пятислойной пластины

Номер n	β_n	ω_n	Номер n	β_n	ω_n
0	3,196	166,779	5	18,857	5805,944
1	6,306	649,252	6	21,997	7900,499
2	9,439	1454,721	7	25,138	10317,847
3	12,577	2582,746	8	28,279	13057,371
4	15,716	4032,846	9	31,378	16076,006

Графики (рисунок 2), построенные для различных несущих слоев: 1 – Д16Т – фторопласт – Д16Т – фторопласт – Д16Т; 2 – титан – фторопласт – титан – фторопласт – титан; 3 – кордиерит – фторопласт – Д16Т – фторопласт – кордиерит; показывают, что частоты ω_0 нелинейно зависят от толщины внутреннего несущего слоя h_1 . При расчетах приняты следующие характеристики материалов: Д16Т – $K = 92,14$ ГПа, $G = 30,75$ ГПа, $\rho = 2700$ кг/м³; титан – $K = 104$ ГПа, $G = 41$ ГПа; $\rho = 4500$ кг/м³; кордиерит – $K = 558$ ГПа; $G = 258$ ГПа; $\rho = 2660$ кг/м³. То есть рост собственной частоты ω_0 связан с увеличением жесткости несущих слоев.

На рисунке 3 представлены аналогичные зависимости для различных материалов заполнителя: 1 – фторопласт; 2 – пенополиуретан; 3 – пенопласт – и несущих слоях из дюралюминия. При уменьшении модуля упругости заполнителя значение коэффициента D изменяется незначительно (в третьей значащей цифре), однако уменьшение плотности существенно увеличивает параметр M_0 , что приводит к росту частоты собственных колебаний ω_0 .

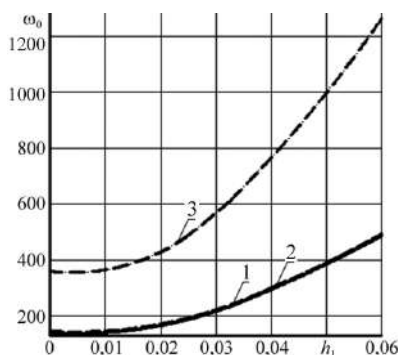


Рисунок 2 – Зависимость собственных частот ω_0 от размера h_1 при различных материалах несущих слоев

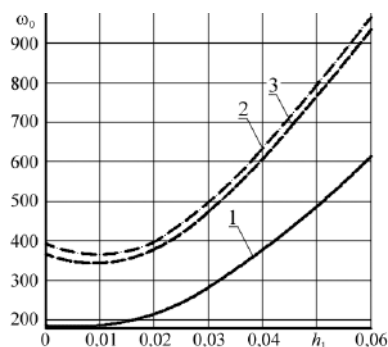


Рисунок 3 – Зависимость собственных частот ω_0 от толщины внутреннего несущего слоя h_1 при различных заполнителях

Заключение. Построенная в работе математическая модель деформирования симметричной по толщине пятислойной круговой пластины позволила оценить влияние геометрических и физических параметров слоев на частоты собственных колебаний конструкции и подтвердить, что их рост достигается увеличением жесткости несущих слоев и уменьшением плотности заполнителей.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
- 3 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

4 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2023. – 308 p.

5 **Vakhneev, S.** Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, is. 4. – P. 699–704.

6 **Pronina, P. F.** Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // Periódico Tchê Química. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.

7 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в упругой круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 61–69.

8 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

9 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

10 **Tarlakovskii, D. V.** Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

11 **Fedotenkov, G. V.** Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovskiy, Y. A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.

12 **Леоненко, Д. В.** Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2010. – № 3 (12). – С. 53–56.

13 **Лачугина, Е. А.** Задача о свободных колебаниях пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. : в 2 ч. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. – С. 202–204.

14 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими наполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

E. A. LACHUGINA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

FREE VIBRATIONS OF A FIVE-LAYER CIRCULAR PLATE WITH LIGHTWEIGHT FILLERS

Free vibrations of a five-layer circular plate, symmetrical in thickness, are considered. It is assumed that the Kirchhoff's hypotheses are valid for the three thin load-bearing layers. The deformation of relatively thick fillers is described using Timoshenko's hypotheses on straightness and conservation of the length of the deformed normal. The free vibrations equations are obtained using Lagrange's variational method. The formulas are derived for calculating the eigenvalues and oscillation frequencies for the case of the plate contour fixing. A numerical parametric analysis of natural oscillation frequencies is carried out.

Keywords: five-layer circular plate, free vibrations, natural frequencies.

Получено 11.09.2023

УДК 539.374

Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТУПЕНЧАТОЙ КРУГОВОЙ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ

Исследуется осесимметричный изгиб круговой неупругой трехслойной сэндвич-пластины ступенчато-переменной толщины. Материалы пластины проявляют неупругие свойства. Получены выражения перемещений и деформаций конструкции методом упругих решений Ильюшина. Произведен численный анализ для конкретной пластины.

Ключевые слова: трехслойная пластина, ступенчатая толщина несущих слоев, упругопластичность.

Введение. Трехслойные конструкции широко применяются в машиностроении, строительстве и других отраслях народного хозяйства. Начиная с середины XX века начала бурно развиваться теория их расчета [1–5]. С учетом минимизации весовых параметров элементы конструкции с изменяющейся толщиной обладают рядом преимуществ по сравнению с элементами, у которых толщина постоянна. Деформирование однослойных круговых пластин с переменным изменением толщины исследовали как отечественные [6, 7], так и зарубежные [8–11] ученые. Термоупругий изгиб ступенчатой пластины рассмотрен в [12]. Дальнейшее развитие теории расчета пластин заключается в использовании более сложных моделей, учитывающих неупругое поведение материалов слоев. В данной работе рассмотрен осесимметричный поперечный изгиб неупругой круговой трехслойной пластины, имеющей ступенчато-переменную толщину.

Постановка задачи. Пластина (рисунок 1) включает три слоя. Деформирование внешних несущих слоев одинаковой толщины удовлетворяет гипотезам Кирхгофа, внутреннего слоя (заполнителя) – гипотезе Тимошенко. Заполнитель считается легким, т. е. пренебрегаем работой внутренних сил в тангенциальном направлении. Предполагается, что толщины несущих слоев ступенчато изменяются вдоль радиуса пластины, а на ее контуре расположена жесткая диафрагма. В местах склейки слоев перемещения непрерывны.

Систему координат r, φ, z связываем со срединной плоскостью заполнителя. К поверхности верхнего несущего

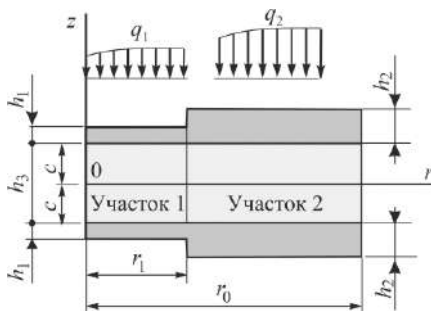


Рисунок 1 – Пластина под действием распределенных нагрузок

слоя приложены осесимметричные нагрузки интенсивности $q_1(r)$, $q_2(r)$. В качестве неизвестных на каждом участке l принимаются прогиб срединной поверхности пластины $w_l(r)$, а также относительный сдвиг в заполнителе $\psi_l(r)$, которые не зависят от окружной координаты φ .

Искомые перемещения ищем в виде

$$\begin{aligned}\psi(r) &= \psi_1(r) + (\psi_2(r) - \psi_1(r))H_0(r - r_1); \\ w(r) &= w_1(r) + (w_2(r) - w_1(r))H_0(r - r_1),\end{aligned}$$

где $H_0(r)$ – функция Хевисайда [13].

Напряжения и деформации в слоях пластины связаны в соответствии с теорией малых упругопластических деформаций Ильюшина [14]:

$$\begin{aligned}s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\varepsilon_{\alpha}^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)}; \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(3)}))\varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi),\end{aligned}\tag{1}$$

где $s_{\alpha}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиатор и шаровой тензор напряжений; G_k , K_k – модули сдвига и объемной деформации; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции, описывающие физическую нелинейность характеристик слоев; $\varepsilon_{\alpha}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиатор и шаровой тензор деформаций; $s_{rz}^{(3)}$, $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе.

Для участка l система уравнений равновесия в усилиях имеет вид

$$H_{re,r}^l + \frac{1}{r}(H_{re}^l - H_{\varphi e}^l) = h_{l\omega};\tag{2}$$

$$M_{re,rr}^l + \frac{1}{r}(2M_{re,rr}^l - M_{\varphi e,rr}^l) = -q_l + q_{l\omega},$$

где

$$M_{\alpha e}^l \equiv \int_c^{c+h_l} \sigma_{\alpha e}^{(1)l} dz + \int_{-c}^c \sigma_{\alpha e}^{(3)l} dz + \int_{-c-h_l}^{-c} \sigma_{\alpha e}^{(2)l} dz;$$

$$H_{\alpha e}^l = \int_{-c}^c \sigma_{\alpha e}^{(3)l} dz + c \left(\int_c^{c+h_l} \sigma_{\alpha e}^{(1)l} dz - \int_{-c-h_l}^{-c} \sigma_{\alpha e}^{(2)l} dz \right).$$

Слагаемые в правых частях уравнений, учитывающие нелинейность, таковы:

$$h_{l\omega} = H_{r\omega,r}^l + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^l - H_{\varphi\omega}^l); \quad q_{l\omega} = M_{r\omega,rr}^l + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,rr}^l - M_{\varphi\omega,rr}^l);\tag{3}$$

где

$$M_{\alpha\omega}^l \equiv \int_c^{c+h_l} \sigma_{\alpha\omega}^{(1)l} dz + \int_{-c}^c \sigma_{\alpha\omega}^{(3)l} dz + \int_{-c-h_l}^{-c} \sigma_{\alpha\omega}^{(2)l} dz;$$

$$H_{\alpha e}^l = \int_{-c}^c \sigma_{\alpha\omega}^{(3)l} dz + c \left(\int_c^{c+h_l} \sigma_{\alpha\omega}^{(1)l} dz - \int_{-c-h_l}^{-c} \sigma_{\alpha e}^{(2)l} dz \right).$$

Напряжения, входящие в (2) и (3), следуют из соотношений (1)

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\varepsilon}^{(k)l} &= 2G_k \varepsilon_{\alpha}^{(k)l} + 3K_k \varepsilon^{(k)l}; \quad \sigma_{\alpha\omega}^{(k)l} = 2G_k \omega^{(k)l} \varepsilon_{\alpha}^{(k)l} \quad (k = 1, 2); \\ \sigma_{\alpha\varepsilon}^{(3)l} &= 2G_3 \varepsilon_{\alpha}^{(3)l} + 3K_3 \varepsilon^{(3)l}; \quad \sigma_{\alpha\omega}^{(3)l} = 2G_3 \omega^{(3)l} \varepsilon_{\alpha}^{(3)l} \quad (\alpha = r, \varphi).\end{aligned}$$

Обобщенные внутренние усилия, фигурирующие в уравнениях (2), можно выразить через искомые перемещения, используя соотношения (1). Тогда система нелинейных дифференциальных уравнений (2) для определения перемещений $\psi_l(r)$ и $w_l(r)$ преобразуется к виду

$$L_2(b_{1l}\psi_l - b_{2l}w_{l,r}) = h_{l\omega}; \quad L_3(b_{2l}\psi_l - b_{3l}w_{l,r}) = -q_l + q_{l\omega}.$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы, представленные в работе [2]; выражения коэффициентов b_{jl} системы приведены в [12].

Задача отыскания функций $\psi(r)$ и $w(r)$ сопровождается учетом силовых или кинематических граничных условий.

Решение методом упругих решений Ильюшина [14]. Перепишем систему (3) в итерационном виде:

$$L_2(b_{1l}\psi_l^n - b_{2l}w_{l,r}^n) = h_{l\omega}^{n-1}; \quad L_3(b_{2l}\psi_l^n - b_{3l}w_{l,r}^n) = -q_l + q_{l\omega}^{n-1}. \quad (4)$$

Здесь n – номер приближения, величины $h_{l\omega}^{n-1}, q_{l\omega}^{n-1}$ рассматривают как дополнительные внешние нагрузки. На первом этапе они приравняются к нулю, а затем вычисляются по результатам предыдущего приближения. Для этого используют выражения типа (2), в которых все слагаемые определяются на основании предыдущей итерации. Таким образом, на каждом шаге решается упругая задача по известным дополнительным внешним нагрузкам, которые находятся по формулам (3).

Решая систему (4), получим итерационные соотношения для перемещений:

$$\begin{aligned}\psi_l^n &= \frac{b_{2l}}{b_{1l}} w_{l,r}^n + C_{1l}^n r + \frac{C_{2l}^n}{r} + \frac{1}{b_{1l}} \frac{1}{r} \int r \int h_{l\omega}^{n-1} dr dr; \\ w_l^n &= C_{3l}^n + C_{4l}^n r^2 + C_{5l}^n \ln(r) + C_{6l}^n r^2 \ln(r) + w_l^{*n-1}; \\ w_l^{*n-1} &= \frac{b_{2l}}{S_l} \int \frac{1}{r} \int r \int h_{\omega l}^{n-1} dr dr dr + \frac{b_{1l}}{S_l} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (q_l - q_{\omega l}^{n-1}) r dr dr dr dr, \\ S_l &= b_{3l} b_{1l} - b_{2l}^2,\end{aligned} \quad (5)$$

где C_{il}^n – константы интегрирования, которые зависят от условий на границах участка l пластины ($i = 1, \dots, 6$).

При шарнирном закреплении контура выполняются следующие условия:

$$\psi_2^n = 0; \quad w_2^n = 0; \quad M_r^{2n} = 0.$$

Выразив момент через перемещения, третье выражение запишем в виде

$$\left(b_{22}\psi_{2,r}^n + b_{22}^- \frac{\psi_2^n}{r} - b_{32}w_{2,rr}^n - b_{32}^- \frac{w_{2,r}^n}{r} \right) \Big|_{r=r_0} =$$

$$= \int_c^{c+h_1} \sigma_{r\omega}^{(1)2(n-1)} z dz + \int_{-c}^c \sigma_{r\omega}^{(3)2(n-1)} z dz + \int_{-c-h_1}^{-c} \sigma_{r\omega}^{(2)2(n-1)} z dz.$$

Кроме этого, необходимо учесть условия на границе участков при $r = r_1$ и ограниченности перемещений в начале координат ($r=0$). В результате получим систему двенадцати линейно-независимых алгебраических уравнений, из которой определяются константы интегрирования $C_{11}^n, C_{21}^n, \dots, C_{62}^n$.

Таким образом, решение (5) дает перемещения при нелинейном деформировании круговой ступенчатой трехслойной пластины.

Численное исследование. Для проверки полученных итерационных решений была рассмотрена сэндвич-пластина со слоями Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т ($h_1 = 0,01$ м, $h_2 = 0,02$ м, $c = 0,15$ м, $r_0 = 1$ м), константы для материалов которой взяты из [2]. Интенсивность поперечной нагрузки $q_1 = q_2 = 300$ кПа.

Рисунок 2 демонстрирует сходимость метода упругих решений при исследовании неупругого изгиба трехслойной пластины. Номер кривой соответствует шагу итерации. Первое приближение соответствует упругой пластине, 2-е приближение (как прогибы w , так и углы ψ) отличается от него в среднем на 16 %. При дальнейшем итерационном процессе разница между решениями уменьшается, и 4-е приближение принято за искомое (разница с третьим – порядка 0,5 %). Дальнейшие вычисления показали устойчивую тенденцию к сближению решений при увеличении номера итерации.

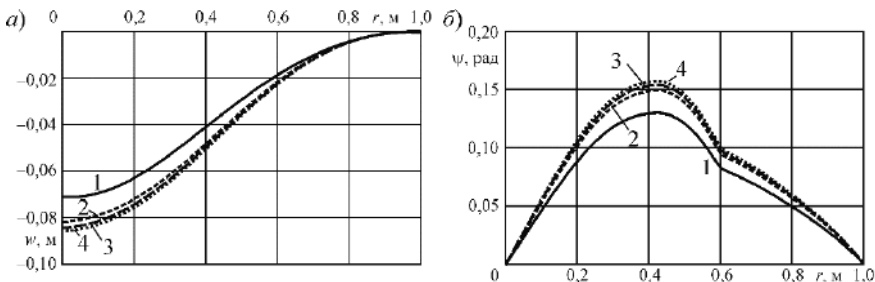


Рисунок 2 – Сходимость метода упругих решений при определении:
а – прогибов $w(r)$; б – углов $\psi(r)$

Заключение. В работе представлена модель и итерационным методом получены числовые решения краевой задачи о неупругом деформировании круговых ступенчатых пластин. Установлено, что учет неупругих свойств материалов пластины ведет к увеличению ее перемещений до 20 %.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект T22УЗБ-015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Григолюк, Э. И. Современное состояние теории многослойных оболочек / Э. И. Григолюк, Ф. А. Коган // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8, № 6. – С. 5–17.
- 2 Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.
- 3 Леоненко, Д. В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
- 4 Старовойтов, Э. И. Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.
- 5 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.
- 6 Коваленко, А. Д. Круглые пластины переменной толщины / А. Д. Коваленко. – М. : Физматгиз, 1959. – 294 с.
- 7 Долгополов, В. М. Изгиб круглой ортотропной пластинки переменной толщины / В. М. Долгополов // Некоторые задачи прикладной теории упругости : сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Саратовского политех. ин-та, 1971. – С. 44–50.
- 8 Vivio, F. Closed form solutions of axisymmetric bending of circular plates having nonlinear variable thickness / F. Vivio, V. Vullo // International Journal of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol. 52, is. 9. – P. 1234–1252.
- 9 Kang, J. H. Three-dimensional vibration analysis of thick, circular and annular plates with nonlinear thickness variation / J. H. Kang // Computers & Structures. – 2003. – Vol. 81, is. 16. – P. 1663–1675.
- 10 Liang, B. Natural frequencies of circular annular plates with variable thickness by a new method / B. Liang, S. F. Zhang, D. Y. Chen // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2007. – Vol. 84, is. 5. – P. 293–297.
- 11 Javanshir, J. Free flexural vibration response of integrally-stiffened and/or stepped-thickness composite plates or panels / J. Javanshir, T. Farsadi, U. Yuceoglu // International Journal of Acoustics and Vibration. – 2014. – Vol. 19, no. 2. – P. 114–126.
- 12 Леоненко, Д. В. Изгиб ступенчатой круговой сэндвич-пластины при тепловом нагружении / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 123–127.
- 13 Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.
- 14 Ильюшин, А. А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

D. V. LEONENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

INELASTIC DEFORMATION OF A STEP CIRCULAR SANDWICH PLATE

The axisymmetric bending of a circular inelastic three-layer sandwich plate of stepwise variable thickness is investigated. The plate materials have inelastic properties. Expressions for the displacements and deformations of the structure are obtained using Ilyushin's method of elastic solutions. A numerical analysis for a specific plate is carried out.

Keywords: three-layer plate, stepped thickness of load-bearing layers, elastoplasticity.

Получено 25.10.2023

УДК 531.8:621.865.8

А. В. ЛОКТИОНОВ

Витебский государственный технологический университет, Витебск, Беларусь

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПРИ РАБОТЕ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Представлены алгоритмы получения динамических уравнений движения роботов-манипуляторов для случаев их работы в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Координатным и матричным способами выведены аналитические выражения скорости центра схвата трёхзвенного робота, имеющего три степени подвижности. С использованием уравнений Лагранжа II рода получены дифференциальные уравнения движения рассмотренных пространственных исполнительных механизмов в обобщенных координатах.

Ключевые слова: исполнительный механизм, декартовы координаты, цилиндрические координаты, сферические координаты, дифференциальные уравнения движения.

Введение. Манипулятор – это пространственный механизм, в котором кинематические пары обеспечивают угловое или поступательное относительное движение звеньев, образующих кинематические цепи. Перемещения рабочего органа в рабочей зоне манипулятора обеспечиваются переносными степенями подвижности, минимально необходимое число которых равно трем. Угловая ориентация реализуется ориентирующими степенями подвижности. Их необходимое число равно трем и осуществляется кинематическими парами, которые обеспечивают поворот рабочего органа манипулятора как относительно его продольной, так и еще двух взаимно перпендикулярных осей.

Рабочая зона манипуляторов, которые работают в прямоугольной системе координат, имеет форму параллелепипеда. Перемещения всех звеньев в них только поступательные, поэтому такие манипуляторы наиболее удобны для осуществления прямолинейных движений. При работе в цилиндрической системе координат наряду с поступательными осуществляется одно угловое перемещение. В случае сферической системы координат имеют место два угловых перемещения и поступательное движение рабочего органа.

Чтобы оценить технический потенциал промышленных роботов-манипуляторов [1, 2], требуется иметь информацию об их кинематических характеристиках, которые используются при конструировании звеньев, оценке динамических свойств механизма и прочностных расчетах. Так, чтобы разместить механизм в корпусе машинного агрегата, требуется знать траектории движения его звеньев, а также те их положения, которые определяют габаритные размеры механизма. Силовой расчет предполагает определение сил сопротивления движению и инерции звеньев, для чего следует знать скорость и ускорение центра схвата робота [3–5].

Для нахождения геометрических параметров, кинематических и силовых характеристик исполнительных механизмов роботов-манипуляторов используются различные методы, из которых наиболее прост векторный [1, 6, 7]. Методика его применения предполагает нахождение координат, которые определяют положение звеньев, а по ним – проекций скорости и ускорения на неподвижные оси координат. Векторный способ удобно применять в случаях расположения звеньев в одной плоскости. Его применение к двухзвенному исполнительному механизму, имеющему три степени подвижности [6, 7], сопряжено со значительными сложностями, поэтому при пространственном расположении звеньев он применяется редко. В этих случаях удобным оказывается матричный метод, который дает возможность нахождения скорости центра схвата робота как в подвижной, так и в неподвижной системах координат [1, 7, 8]. В работах [9, 10] рассмотрены некоторые особенности составления дифференциальных уравнений движения пространственного механизма в цилиндрических и сферических координатах.

Целью представленной статьи является анализ алгоритмов получения дифференциальных уравнений движения центра схвата робота, имеющего три звена и обладающего тремя степенями подвижности, при работе в различных системах координат. Для исследования динамики механической системы манипулятора применяются уравнения Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где t – время; T – кинетическая энергия системы; \dot{q}_j, q_j – обобщенная скорость и координата; Q_j – обобщенная сила; n – число степеней свободы.

Работа робота-манипулятора в прямоугольной системе координат. Механизм (рисунок 1) включает колонну для вертикального перемещения, устройство для горизонтального перемещения, которое состоит из звеньев 1 и 2, а также выдвигающуюся горизонтальную руку со схватом 3. Звенья имеют массы m_1, m_2, m_3 . Приводами в поступательных парах создаются движущие силы F_{01}, F_{12}, F_{23} . Трением пренебрегаем.

Учитывая, что механизм обладает тремя степенями свободы, назначаем три обобщенные координаты: $q_1 = x$ – горизонтальное перемещение выдвигающейся руки со схватом 3, $q_2 = y$ – горизонтальное перемещение звена 2 и $q_3 = z$ – вертикальное перемещение звена 1.

Кинетические энергии звеньев:

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{z}^2}{2}, \quad T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{z}^2 + \dot{y}^2), \quad T_3 = \frac{m_3}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

В таком случае кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} [m_3 \dot{x}^2 + (m_2 + m_3) \dot{y}^2 + (m_1 + m_2 + m_3) \dot{z}^2].$$

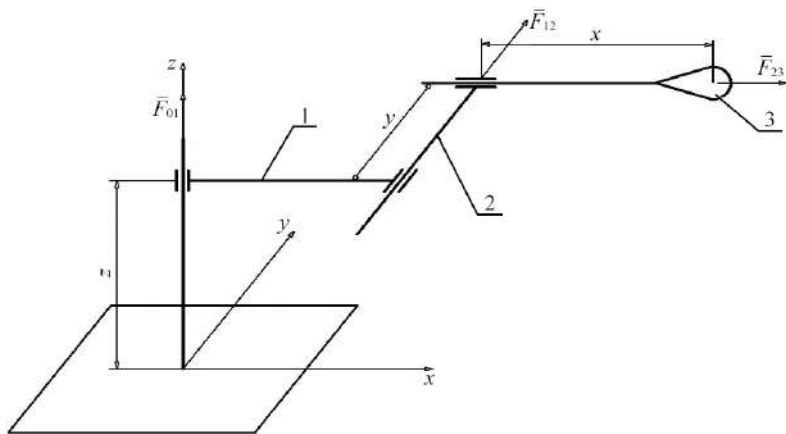


Рисунок 1 – Робот-манипулятор в прямоугольной системе координат

Последовательно сообщая механизму независимые возможные перемещения δx , δy и δz , находим обобщенные силы:

$$Q_x = F_{23}, \quad Q_y = F_{12}, \quad Q_z = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

Подстановка в (1) дает

$$m_3 \ddot{x} = F_{23}; \quad (m_2 + m_3) \ddot{y} = F_{12}; \quad (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{z} = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

Интегрируя эти уравнения дважды, получаем

$$x = \frac{F_{23}}{2m_3} t^2 + C_1 t + C_2; \quad y = \frac{F_{12}}{2(m_2 + m_3)} t^2 + C_3 t + C_4;$$

$$z = \left(\frac{F_{01}}{m_1 + m_2 + m_3} - g \right) \frac{t^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

Задаваясь начальными условиями, можно определить значения постоянных интегрирования C_1, \dots, C_6 .

Анализ работы в цилиндрической системе координат. Механизм (рисунок 2 [11, задача 48.49]) включает поворотную колонну 1, устройство для вертикального перемещения 2 и выдвигающуюся руку со схватом 3. Принимаем, что момент инерции звена 1 относительно его оси вращения I_1 ; масса звена 2 равна m_2 , его момент инерции относительно оси вращения I_2 ; масса руки 3 со схватом – m_3 , ее момент инерции относительно центральной оси I_3 , а расстояние от центра масс до оси вращения – ρ . К звену 1 приложен момент M . Приводами в поступательных парах создаются движущие силы, которые равны F_{12} и F_{23} .

В качестве обобщенных координат принимаем: $q_1 = \varphi$ – угол поворота колонны 1, $q_2 = z$ – перемещения по вертикали и $q_3 = \rho$ – перемещение руки со схватом 3.

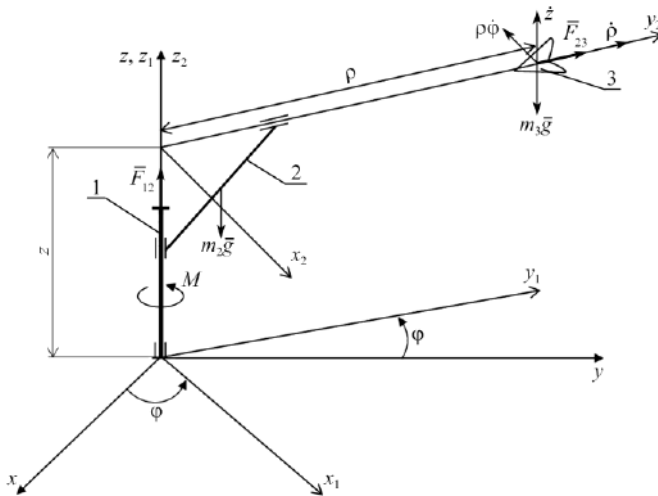


Рисунок 2 – Схема робота-манипулятора в цилиндрических координатах

Кинетическая энергия колонны 1 – $T_1 = \frac{I_1 \dot{\varphi}^2}{2}$, устройства 2, осуществляющего вертикальное перемещение, – $T_2 = \frac{m_2 \dot{z}^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\varphi}^2}{2}$.

Суммируя кинетические энергии штанги во вращательном движении и центра схвата в сложном движении и учитывая составляющие абсолютной скорости центра схвата: $\dot{\rho}$ – в перемещении вдоль штанги; $\rho\dot{\varphi}$ – во вращении вместе со штангой вокруг оси z ; \dot{z} – в вертикальном перемещении вдоль оси z , имеем

$$T_3 = \frac{I_3 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_3}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{(m_3 \rho^2 + I_3) \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_3}{2} \dot{z}^2 + \frac{m_3}{2} \dot{\rho}^2. \quad (2)$$

Скорость центра схвата 3 также может быть определена матричным методом. Координаты центра схвата в этом случае свяжем соотношением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ z \end{pmatrix}; \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор скорости центра схвата в системе xuz определяется равенством

$$\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_\varphi * \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ z \end{pmatrix} + A_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\rho} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \dot{A}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из него получим

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\rho\dot{\varphi} & \cos\varphi \\ -\rho\dot{\varphi} & \sin\varphi \\ 0 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\rho} & \sin\varphi \\ \dot{\rho} & \cos\varphi \\ \dot{z} & \end{pmatrix}.$$

Проекция центра схвата на оси x, y, z

$$\dot{x} = -\rho\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\rho}\sin\varphi; \quad \dot{y} = -\rho\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\rho}\cos\varphi; \quad \dot{z} = \dot{z}.$$

Тогда кинетическая энергия центра схвата

$$T_3' = \frac{m_3}{2} v^2 = \frac{m_3}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m_3}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2),$$

что полностью соответствует второму слагаемому формулы (2).

Соответственно кинетическая энергия механизма в целом (см. рисунок 2)

$$T = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + m_3 \dot{\rho}^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2 + m_3}{2} \dot{z}^2 + \frac{m_3 \dot{\rho}^2}{2}.$$

Сообщая механизму три независимых обобщенных перемещения $\delta\varphi, \delta z, \delta\rho$, находим обобщенные силы:

$$Q_\varphi = M; \quad Q_z = F_{12} - (m_2 + m_3)g; \quad Q_\rho = F_{23}.$$

Подставляя полученные выражения в (1), имеем:

$$\frac{d}{dt} \left[(I_1 + I_2 + I_3 + m_3 \dot{\rho}^2) \dot{\varphi}^2 \right] = M;$$

$$(m_2 + m_3) \ddot{z} = F_{12} - (m_2 + m_3)g; \quad m_3 (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = F_{23}.$$

Анализ работы механизма в сферической системе координат. Положение вертикальной колонны 1, которая несет руку робота-манипулятора, определяется углом φ (рисунок 3). Угол поворота руки со схватом, которая выдвигается на расстояние r , равен θ . Момент инерции колонны 1 относительно оси Oz равен I_1 ; звенья 2 и 3 рассматриваются как однородные тонкие стержни, длины которых l_2, l_3 и массы m_2, m_3 ; размещаемый в схвате 4 переносимый груз имеет массу m . Вертикальной колонне сообщает вращение момент M_φ ; а оси поворота звена 2 – момент M_θ . Также на это звено действует движущая сила F_{23} , которая создается приводом в поступательной паре.

За обобщенные координаты механизма, имеющего три степени свободы, принимаем: $q_1 = \varphi$ – угол поворота колонны 1, $q_2 = \theta$ – угол поворота руки со схватом и $q_3 = r$ – ее относительное перемещение.

Кинетические энергии звеньев механизма 1, 2 и 3:

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\varphi}^2}{2}; \quad T_2 = \frac{J_2 \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m_2 l_2^2}{24} \dot{\varphi}^2; \quad T_3 = \frac{m_3}{6} (r^2 + r l_3 + l_3^2) (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m_3 \dot{r}^2}{2}.$$

$$\dot{A}_\varphi \dot{\varphi} A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta \\ -r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_\varphi \dot{A}_\theta \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta \\ -r\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta \\ r\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{r} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{r} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{r} \cos \varphi \cos \theta \\ \dot{r} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Отсюда проекции скорости \bar{v}_4 центра схвата на оси x, y, z :

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta + r\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta - \dot{r} \sin \varphi \cos \theta;$$

$$\dot{y} = -r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta - r\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta + \dot{r} \cos \varphi \cos \theta; \quad \dot{z} = r\dot{\theta} \cos \theta + \dot{r} \sin \theta,$$

$$\text{Соответственно, } T_4 = \frac{m}{2} v_4^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta),$$

а кинетическая энергия всего механизма с переносимым грузом

$$T = \frac{1}{2} \left[I_1 + \frac{m_2 l_2^2}{12} + \frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \cos^2 \theta \right] \dot{\varphi}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \right] \dot{\theta}^2 + \frac{m_3 + m}{2} \dot{r}^2.$$

В данном случае обобщенные силы имеют вид

$$Q_\varphi = M_\varphi; \quad Q_\theta = M_\theta - (m_3 + m) r g \cos \theta; \quad Q_r = F_{23} - (m_3 + m) g \sin \theta.$$

В результате подстановки в (1) окончательно получаем

$$\frac{d}{dt} \left[I_1 + \frac{m_2 l_2^2}{12} + \frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \cos^2 \theta \right] \dot{\varphi}^2 = M_\varphi;$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \right] \dot{\theta} + m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = M_\theta - (m_3 + m) r g \cos \theta;$$

$$(m_3 - m) \ddot{r} - \frac{m_3}{6} (2r + l_3) (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - m r (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) = F_{23} - (m_3 + m) g \sin \theta.$$

Выводы. Представлены выводы дифференциальных уравнений движения механизмов манипуляторов при их работе в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Анализ вариантов определения скорости центра схвата показал, что координатный способ позволяет быстро получать выражения скоростей при малом количестве звеньев, совершающих вращательное движение. При наличии трех ориентирующих степеней подвижности целесообразно применение матричного способа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Механика промышленных роботов. В 3 кн. / Е. И. Воробьев [и др.]. – М. : Высш. шк., 1988. – Кн. 1 : Кинематика и динамика. – 303 с.
- 2 **Воробьева, Н. С.** Динамический синтез алгоритмов управления манипулятором параллельно-последовательной структуры / Н. С. Воробьева, В. В. Жога, Л. В. Жога // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – Т. 21, № 12. – С. 706–715.
- 3 **Козырев, Ю. Г.** Промышленные роботы: основные типы и технические характеристики / Ю. Г. Козырев. – М. : КНОРУС, 2017. – 560 с.
- 4 **Karabegović, I.** Industrial Robots : Design, Applications and Technology / I. Karabegović. – Hauppauge, NY : Nova Science Publishers, 2020. – 443 p.
- 5 Силовой расчет, уравнивание, проектирование механизмов и механика манипуляторов / И. Н. Чернышева [и др.]. – М. : Изд-во МГТУ, 1990. – 78 с.
- 6 **Локтионов, А. В.** Оценка методов расчета кинематических параметров исполнительного механизма / А. В. Локтионов, А. В. Гусаков // Современные методы проектирования машин. – 2004. – Вып. 2, т. 2. – С. 132–136.
- 7 **Локтионов, А. В.** Расчет кинематических параметров двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности / А. В. Локтионов, А. В. Гусаков // Вестник Полоцкого государственного университета. – Серия С. Фундаментальные науки. – 2004. – № 4. – С. 99–102.
- 8 **Локтионов, А. В.** Матричная форма расчёта кинематических параметров исполнительного механизма в общем случае его движения / А. В. Локтионов // Механика. исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 176–184.
- 9 **Локтионов, А. В.** Кинематический и динамический расчет пространственного исполнительного механизма / А. В. Локтионов // Горная механика и машиностроение. – 2019. – № 4. – С. 35–41.
- 10 **Локтионов, А. В.** Кинематические и динамические уравнения движения пространственного исполнительного механизма в сферических координатах / А. В. Локтионов, А. А. Сидорович // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 131–140.
- 11 **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.

A. V. LOKTIONOV

Vitebsk State Technological University, Vitebsk, Belarus

ANALYSIS OF THE SPATIAL ACTUATORS MOTION AT WORKING IN VARIOUS REFERENCE SYSTEMS

Algorithms for obtaining motion dynamic equations for robotic manipulators are presented for the cases of their operation in Cartesian, cylindrical and spherical coordinate systems. On the base of the coordinate and matrix methods, the analytical expressions for the grip center velocity for a three-link robot with three degrees of mobility are derived. Using Lagrange equations of the second kind, motion differential equations for the considered spatial actuators in generalized coordinates are obtained.

Keywords: actuating mechanism, Cartesian coordinates, cylindrical coordinates, spherical coordinates, motion differential equations.

Получено 07.09.2021

УДК 621.865.8:531.8

А. В. ЛОКТИОНОВ, А. А. СИДОРОВИЧ

Витебский государственный технологический университет, Витебск, Беларусь

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЦЕНТРА СХВАТА ПРОМЫШЛЕННОГО РОБОТА IRB 1400

Рассматривается кинематический анализ многозвенного пространственного разомкнутого шарнирного механизма промышленного робота IRB 1400. Представлены математические соотношения, позволяющие осуществить матричным методом определение скорости и ускорения центра схвата робота в неподвижной и подвижных системах координат.

Ключевые слова: робот IRB 1400, матричный способ, центр схвата, подвижная система отсчета.

Значительное число технологических операций на современных промышленных предприятиях выполняется роботами-манипуляторами. Их применение позволяет исключить ручной труд и добиться высокого качества выполнения работ [1]. Чтобы оценить технические возможности существующих и проектируемых промышленных роботов, необходимо произвести кинематический анализ их движения [2].

Известны несколько методов расчетов геометрических и кинематических параметров, которые могут быть использованы для исследования механизмов роботов-манипуляторов [3–6]. Векторный метод, при котором находятся проекции звеньев механизма на неподвижные оси координат, а затем дифференцированием выражений координат вычисляются проекции скорости и ускорения, удобнее всего использовать в случае расположения звеньев в одной плоскости [5]. Матричный метод связан с рассмотрением перемещений звеньев манипулятора как движения подвижного трехмерного пространства в неподвижном [7]. В таком случае математическое описание движения осуществляется путем комбинирования операций параллельного переноса и поворота. Все виды движений в этом случае рассматриваются на основе единого алгоритма. Используя транспонированные матрицы перехода, удастся определить скорость и ускорение требуемой точки механизма в подвижной системе координат.

Ранее в работе [8] было рассмотрено определение скорости центра схвата робота IRB 1400 в неподвижной системе координат. Однако не найдены его скорость в подвижной системе отсчета, а также ускорения в различных базах. Целью представленной работы является разработка алгоритма нахождения кинематических параметров в подвижной системе отсчета, связанной с центром схвата, как это рассмотрено, например, в работах [9, 10].

Конструкция робота. Промышленный робот IRB 1400 (рисунок 1, *а*) представляет собой автоматическое устройство, которое состоит из исполнительного механизма в виде манипулятора и механизма программного управления. Он используется для сварки, нанесения различного рода покрытий и иных работах, где необходимо перемещение инструмента или груза небольшой массы. Такой робот используется и в лёгкой промышленности [6]. В частности, он установлен на обувном предприятии «Марко» и выполняет операцию нанесения разделительной смазки на прессформу, в которой изготавливается полиуретановая подошва и заготовка верха обуви, одетая на колодку.

Рассматриваемый манипулятор робота включает основание, нижнюю и верхнюю руки и обладает шестью степенями свободы (рисунок 1, *б*). Изменение каждого из соответствующих углов осуществляется с помощью отдельного электродвигателя. Ось 1 обеспечивает вращение манипулятора по отношению к основанию, ось 2 – движение вперед и назад нижней руки, которая образует вместе с параллельной штангой параллелограмм, связанный с верхней рукой. Ось 3 поднимает верхнюю руку манипулятора. Находящийся на ней двигатель оси 4 вращает верхнюю руку, на конце которой закреплен кистевой сустав, охватывающий оси 5 и 6. Они образуют крест и предназначены соответственно для качания и вращения. На конце кистевого сустава располагается монтажный фланец для различных инструментов.

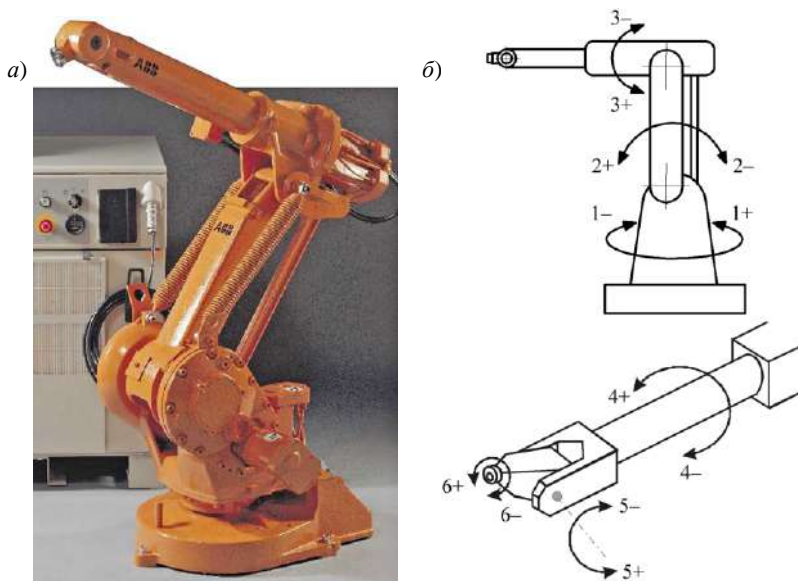


Рисунок 1 – Робот-манипулятор IRB 1400 (*а*) и схема вращения его звеньев (*б*)

Расчетная схема для кинематического анализа механизма манипулятора робота IRB 1400 представлена на рисунке 2. Рассмотрим ее особенности.

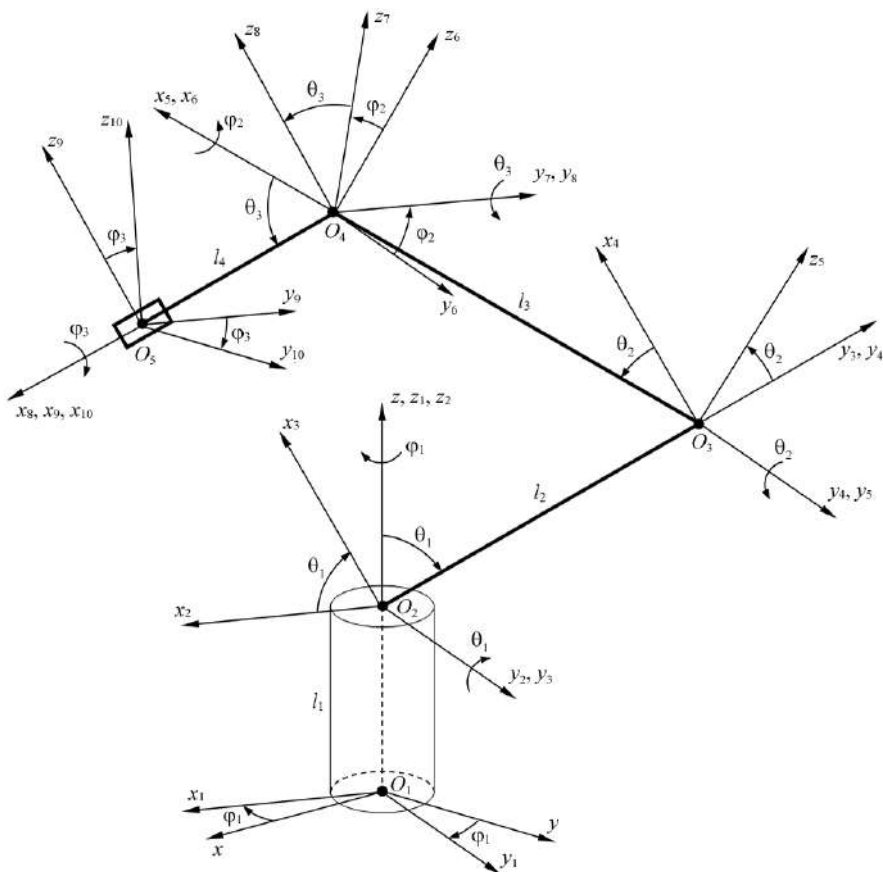


Рисунок 2 – Схема манипулятора робота IRB 1400

Подвижная система координат $x_1y_1z_1$ получается поворотом неподвижной xyz на угол φ_1 . Затем, смещая начало координат O_1 на расстояние l_1 до положения O_2 , изображаем такую систему $x_2y_2z_2$, в вертикальной плоскости которой $x_2O_2z_2$ перемещаются оси звеньев механизма. Далее поворотом системы $x_2y_2z_2$ вокруг оси O_2y_2 на угол θ_1 получаем систему $x_3y_3z_3$. Перемещая начало координат O_2 на расстояние l_2 , приходим к системе координат $x_4y_4z_4$. Ее поворотом на угол θ_2 вокруг оси O_3y_4 получаем систему осей $x_5y_5z_5$, которая затем перемещением на расстояние l_3 переводится в $x_6y_6z_6$. Следующее преобразование поворотом вокруг оси O_4x_6 на угол φ_2 переводит систему коор-

динат $x_6y_6z_6$ в $x_7y_7z_7$. В свою очередь, поворот ее на угол θ_3 вокруг оси O_4y_7 приводит к системе осей $x_8y_8z_8$, а ее перемещение на расстояние l_4 дает систему координат $x_9y_9z_9$. Завершающее преобразование поворотом на угол φ_3 вокруг оси O_5x_9 переводит данную систему в $x_{10}y_{10}z_{10}$.

Для каждого преобразования осей последовательно составляем матрицы, устанавливающие связь между рассматриваемыми системами координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} = A_{\theta_2} \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} = A_{\varphi_2} \begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \\ z_7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \\ z_7 \end{pmatrix} = A_{\theta_3} \begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \\ z_7 \end{pmatrix} = A_{\theta_3} \begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_9 \\ y_9 \\ z_9 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_9 \\ y_9 \\ z_9 \end{pmatrix} = A_{\varphi_3} \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix},$$

Выражения координат центра схвата в неподвижной системе отчета xuz получаем через координаты в системе $x_{10}y_{10}z_{10}$ последовательной подстановкой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} =$$

$$= A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} =$$

$$= A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{pmatrix} =$$

$$= A_{\varphi_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix}.$$

где

$$A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_{\theta_1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{pmatrix};$$

$$A_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}; \quad A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix};$$

$$A_{\theta_3} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 \end{pmatrix}; \quad A_{\varphi_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 \\ 0 & -\sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения скорости \bar{v} центра схвата по отношению к неподвижной системе xuz выполняем дифференцирование координат по времени, учитывая, что $l_i = \text{const}$, $x_{10} = \text{const}$, $y_{10} = \text{const}$, $z_{10} = \text{const}$):

$$\begin{aligned} \bar{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \left(\dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \left(\dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \right) \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \left(\dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_2 + \right. \\ &+ \left. A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3 \right) \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_1 + \\ &+ A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3 \left) \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \left(\dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_2 + \right. \\ &+ \left. A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_3 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_3 \right) \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\dot{A}_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ -\cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \dot{A}_{\theta_1} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 \end{pmatrix};$$

$$\dot{A}_{\theta_2} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \end{pmatrix}; \quad \dot{A}_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_2 & -\cos \varphi_2 \\ 0 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \end{pmatrix};$$

$$\dot{A}_{\theta_3} = \begin{pmatrix} -\sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_3 & 0 & -\sin \theta_3 \end{pmatrix}; \quad \dot{A}_{\varphi_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \\ 0 & -\cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \end{pmatrix}.$$

Выполняя преобразования в соответствии с приведенной формулой, можно записать выражения проекций на оси x , y , z . Например, проекция скорости на ось x при условии, что $x_{10} = 0$, $y_{10} = 0$, $z_{10} = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} = & (\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1) l_2 + (-\dot{\varphi}_1 (\sin \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \\ & + \sin \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_1 (-\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2) + \\ & + \dot{\theta}_2 (-\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2)) l_3 + \\ & + (\dot{\varphi}_1 ((-\sin \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \cos \theta_3 - \\ & - (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + (-\sin \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2) \cos \varphi_2) \sin \theta_3) + \\ & + \dot{\theta}_1 ((-\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2) \cos \theta_3 - \\ & - (-\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \cos \varphi_2 \sin \theta_3) + \\ & + \dot{\theta}_2 ((-\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2) \cos \theta_3 - \\ & - (\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \cos \varphi_2 \sin \theta_3) - \\ & - \dot{\varphi}_2 (-\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - (-\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2) \sin \varphi_2) \sin \theta_3 + \\ & + \dot{\theta}_3 (-(\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \sin \theta_3 - \\ & - (-\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + (-\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \\ & + \cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2) \cos \varphi_2) \cos \theta_3) l_4. \end{aligned}$$

Выражения остальных проекций приводить не будем из-за их громоздкости. Модуль скорости центра схвата рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \\ = \left(l_2^2 + 2 \left(\sin \theta_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) l_3 + \left(\sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1) + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \cos \theta_2 + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{\varphi}_1 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 + \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_3 \cos \theta_2 \Big) l_4 \Big) l_2 + \\
& + (\dot{\varphi}_1^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2) l_3^2 + 2 \Big((\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 - 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1) \cos \theta_3 \cos \varphi_2 + \\
& + (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\varphi}_1 \cos \theta_3 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_2 + (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2 \Big) l_3 l_4 + \\
& + \Big(2(\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3) + \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 \Big) l_4^2 \Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

В свою очередь вектор скорости \bar{v} центра схвата в системе $x_{10}y_{10}z_{10}$

$$\bar{v}_{10} = \bar{v} A^T, \quad (1)$$

где A^T – транспонированная матрица, которая равна произведению транспонированных матриц-суммножителей, взятых в обратном порядке:

$$A^T = A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T,$$

$$\text{где } A_{\varphi_1}^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_{\theta_1}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{pmatrix};$$

$$A_{\varphi_2}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ 0 & -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}; \quad A_{\theta_2}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix};$$

$$A_{\varphi_3}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix}; \quad A_{\theta_3}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & 0 & -\sin \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученное ранее выражение скорости \bar{v} в (1), получаем выражение скорости в подвижной системе координат для случая $l_i = \text{const}$

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{10} = A^T \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\
&+ \left(A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + \\
&+ \left(A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \right) \begin{pmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\varphi}_2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3 \right) \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \left(A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\varphi}_2 + A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3 + A_{\varphi_3}^T \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_3 \right) \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда проекции этого вектора на подвижные оси x_{10} , y_{10} и z_{10} :

$$\begin{aligned}
v_{10_x} &= (\sin \theta_3 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 - \cos \theta_3 \cos \theta_2) l_2 + \\
&+ (\dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_1 \sin \theta_3 \sin \varphi_2 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_3 \cos \varphi_2) l_3; \\
v_{10_y} &= (\dot{\theta}_2 \sin \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 - \varphi_1 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 + \dot{\theta}_1 \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 - \\
&- \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_3 \cos \theta_3 \sin \varphi_2 - \dot{\theta}_1 \sin \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 - \dot{\theta}_2 \cos \varphi_3 \sin \varphi_2) l_3 + \\
&+ (\dot{\theta}_2 \sin \varphi_3 + \dot{\theta}_3 \sin \varphi_3 - \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_3 - \dot{\theta}_1 \sin \varphi_3) l_4 + \\
&+ (\sin \theta_2 \sin \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_3 \sin \theta_3 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \varphi_3 \sin \varphi_2) l_2; \\
v_{10_z} &= (-\sin \theta_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_3 \sin \theta_3 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2) l_2 + \\
&+ (-\dot{\theta}_2 \cos \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_3 \cos \theta_3 \sin \varphi_2 + \\
&+ \dot{\theta}_1 \cos \varphi_3 \cos \theta_3 \cos \varphi_2 + \dot{\theta}_1 \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 - \dot{\theta}_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_2) l_3 + \\
&+ (\dot{\theta}_1 \cos \varphi_3 - \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_3 - \dot{\theta}_2 \cos \varphi_3 - \dot{\theta}_3 \cos \varphi_3) l_4.
\end{aligned}$$

Модуль этой скорости определяется по формуле

$$v_{10} = \sqrt{v_{10_x}^2 + v_{10_y}^2 + v_{10_z}^2}.$$

Ускорение центра схвата в системе $x_{10} y_{10} z_{10}$ определяем дифференцированием скорости по времени:

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \left(\dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 + \ddot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1^2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\
&+ \left(\dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + \ddot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{\varphi}_1^2 + A_{\varphi_1} \ddot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + \\
&+ \left(\dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + \ddot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\varphi}_1^2 + A_{\varphi_1} \ddot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\theta}_1^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \ddot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \Big) \begin{pmatrix} I_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \left(\dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \ddot{\theta}_2 + \right. \\
& + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \ddot{\varphi}_2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \ddot{\theta}_3 + \ddot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_1^2 + \\
& + A_{\varphi_1} \ddot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_1^2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \ddot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_2^2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \ddot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_2^2 + \\
& + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \ddot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3^2 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 + \\
& + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\
& + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_2 + \\
& \left. + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_3 \right) \begin{pmatrix} I_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \left(\dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \ddot{\theta}_2 + \right. \\
& + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \ddot{\theta}_3 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \ddot{\varphi}_3 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \ddot{\varphi}_2 + \\
& + \ddot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1^2 + A_{\varphi_1} \ddot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_1^2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \ddot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_2^2 + \\
& + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \ddot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_2^2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \ddot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_3^2 + A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \ddot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_3^2 + \\
& + 2 \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \\
& + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 + 2 \dot{A}_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + \\
& + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \\
& + 2 A_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_3 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_2 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \\
& + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} A_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_3 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} A_{\varphi_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_3 + \\
& \left. + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} A_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + 2 A_{\varphi_1} A_{\theta_1} A_{\theta_2} A_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_3 \dot{\varphi}_3 \right) \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где $\ddot{A}_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\ddot{A}_{\theta_1} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 \end{pmatrix}$;

$$\ddot{A}_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ 0 & -\sin \varphi_2 & -\cos \varphi_2 \end{pmatrix}; \quad \ddot{A}_{\theta_2} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 \end{pmatrix};$$

$$\ddot{A}_{\varphi_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & \sin \varphi_3 & -\cos \varphi_3 \end{pmatrix}; \quad \ddot{A}_{\theta_3} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_3 & 0 & -\sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & -\cos \theta_3 \end{pmatrix}.$$

Выражения проекций вектора ускорения на неподвижные оси координат x , y , z находятся из полученного выражения вектора скорости аналогично соответствующим проекциям скорости. Здесь их приводить не будем из-за громоздкости. Модуль ускорения центра схвата находится по формуле

$$a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Определение вектора ускорения центра схвата по отношению к подвижной системе $x_{10}y_{10}z_{10}$ выполняется по той же схеме, что и в случае вектора скорости. Для этого используется формула

$$\bar{a}_{10} = A^T \bar{a}.$$

В результате подстановки полученных ранее выражений имеем

$$\begin{aligned} \bar{a}_{10} = A^T \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = & \left(A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1^2 + \right. \\ & + \left(A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1^2 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\ & + \left(A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1^2 + \right. \\ & + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1^2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1^2 + \\ & + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 + \\ & \left. + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\varphi}_1 \ddot{\theta}_2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix} + \\ & + \left(A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\varphi_2} \ddot{\varphi}_2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \ddot{\theta}_3 + \right. \\ & \left. + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1^2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1^2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2^2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\varphi_2} \ddot{\varphi}_2^2 + A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \ddot{\theta}_3^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \\
& + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 + \\
& \quad + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_2 + \\
& \quad + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_3 \Big) \begin{pmatrix} l_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + \left(A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \ddot{\varphi}_1 + A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \ddot{\varphi}_2 + A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \ddot{\theta}_3 + A_{\varphi_3}^T \dot{A}_{\varphi_3} \ddot{\varphi}_3 + \right. \\
& + A_{\varphi_1}^T \ddot{A}_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1^2 + A_{\theta_1}^T \ddot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2 + A_{\theta_2}^T \ddot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2^2 + A_{\varphi_2}^T \ddot{A}_{\varphi_2} \dot{\varphi}_2^2 + A_{\theta_3}^T \ddot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_3^2 + A_{\varphi_3}^T \ddot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_3^2 + \\
& + 2A_{\theta_1}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 + 2A_{\theta_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 + 2A_{\varphi_2}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \\
& + 2A_{\theta_3}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_1}^T \dot{A}_{\varphi_1} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + 2A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\
& + 2A_{\varphi_2}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_2 + 2A_{\theta_3}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_1}^T \dot{A}_{\theta_1} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi}_3 + \\
& + 2A_{\varphi_2}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_2} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_2 + 2A_{\theta_3}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_2}^T \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_3 + \\
& \left. + 2A_{\theta_3}^T A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \dot{A}_{\theta_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\theta}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\varphi_2}^T \dot{A}_{\varphi_2} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + 2A_{\varphi_3}^T A_{\theta_3}^T \dot{A}_{\theta_3} \dot{A}_{\varphi_3} \dot{\theta}_3 \dot{\varphi}_3 \right) \begin{pmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда можно достаточно просто найти проекции вектора ускорения центра схвата на подвижные оси координат $x_{10}y_{10}z_{10}$. Например, проекция на ось x_{10} имеет вид

$$\begin{aligned}
a_{10_x} = \ddot{x}_{10} = & \left(-\ddot{\theta}_1 \cos \theta_3 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_3 \sin \theta_2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_3 \sin \varphi_2 + \right. \\
& + \ddot{\theta}_1 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 \cos \theta_2 - \\
& - 2\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos \theta_3 \cos \theta_2 + 2\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 \sin \theta_2 + \\
& \left. + 2\dot{\theta}_1^2 (\cos \theta_1)^2 \cos \theta_3 \sin \theta_2 + 2\dot{\theta}_1^2 (\cos \theta_1)^2 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 \cos \theta_2 \right) l_2 + \\
& + \left(-\dot{\varphi}_1^2 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_3 - \ddot{\theta}_1 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 + \ddot{\theta}_2 \sin \theta_3 \cos \varphi_2 - \ddot{\varphi}_1 \sin \theta_3 \sin \varphi_2 - \right. \\
& - \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_3 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \varphi_2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \varphi_2 \Big) l_3 + \\
& + \left(2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_3^2 - 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2^2 - \dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) l_4.
\end{aligned}$$

Модуль ускорения выражается через проекции формулой

$$a_{10} = \sqrt{a_{10_x}^2 + a_{10_y}^2 + a_{10_z}^2}.$$

Таким образом, в работе с применением матричного способа получены формулы скорости и ускорения центра схвата промышленного робота IRB 1400. Данные выражения могут быть использованы для оптимизации пространственных движений манипулятора, а также при оценке его динамических качеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Karabegović, I.** Industrial Robots : Design, Applications and Technology / I. Karabegović. – Hauppauge, NY : Nova Science Publishers, 2020. – 443 p.

2 **Лысова, О. С.** Технические возможности промышленных роботов в легкой промышленности / О. С. Лысова, А. В. Локтионов // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы междунар. науч.-техн. конф. : в 3 ч. – Могилев : Беларус.-Рос. ун-т, 2009. – Ч. 1. – С. 151–152.

3 Механика промышленных роботов : в 3 кн. / Е. И. Воробьев [и др.]. – М. : Высш. шк., 1988. – Кн. 1 : Кинематика и динамика. – 303 с.

4 **Воробьева, Н. С.** Динамический синтез алгоритмов управления манипулятором параллельно-последовательной структуры / Н. С. Воробьева, В. В. Жога, Л. В. Жога // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – Т. 21, № 12. – С. 706–715.

5 **Локтионов, А. В.** Расчет кинематических параметров исполнительного механизма / А. В. Локтионов, О. С. Лысова // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 24. – С. 293–299.

6 Positioning accuracy reliability analysis of industrial robots based on differential kinematics and saddlepoint approximation / P. Huang [et al.] // Mechanism and Machine Theory. – 2021. – Vol. 162. – Article 104367. – 18 p.

7 **Алам, М. М.** Kinematic modeling of six-axis industrial robot and its parameter identification: a tutorial / М. М. Alam, S. Ibaraki, K. Fukuda // International Journal of Automation Technology. – 2021. – Vol. 15, no. 5. – P. 599–610.

8 **Лысова, О. С.** Расчет кинематических параметров робота-манипулятора IRB 1400 предприятия «Марко» / О. С. Лысова, А. В. Локтионов // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. : в 3 ч. – Могилев : Беларус.-Рос. ун-т, 2010. – Ч. 1. – С. 119–120.

9 **Локтионов, А. В.** Расчёт кинематических параметров центра схвата промышленного робота «КОНТУР-002» / А. В. Локтионов, А. П. Прохоров // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2011. – № 3. – С. 92–101.

10 **Локтионов, А. В.** Расчёт кинематических параметров исполнительного механизма промышленного робота ТУР-10 / А. В. Локтионов, А. П. Прохоров // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2013. – № 4. – С. 47–57.

A. V. LOKTIONOV, A. A. SIDOROVICH
Vitebsk State Technological University, Vitebsk, Belarus

KINEMATIC PARAMETERS DETERMINATION FOR THE INDUSTRIAL ROBOT IRB 1400 GRIPPER CENTER

The kinematic analysis of the multi-link spatial open articulated mechanism of the industrial robot IRB 1400 is considered. Mathematical relationships are presented that allow the matrix method to determine the speed and acceleration of the robot's gripping center in fixed and moving coordinate systems.

Keywords: IRB 1400 robot, matrix method, gripper center, moving reference system.

Получено 07.09.2021

УДК 629.464.2:004.94

К. В. МАКСИМЧИК, А. О. ШИМАНОВСКИЙ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ РАМНОЙ КОНСТРУКЦИИ ВАГОНА СНЕГОУБОРОЧНОГО ПОЕЗДА СМ-2

Разработаны геометрическая и конечно-элементная модели рамной конструкции концевого вагона снегоуборочного поезда СМ-2 в среде программных комплексов Creo Parametric и ANSYS Workbench. Проведен расчет напряженно-деформированного состояния конструкции от действия сил тяжести. Выполнено сравнение результатов расчетов, полученных с применением разных программ.

Ключевые слова: снегоуборочный поезд, концевой полувагон, метод конечных элементов, статический расчет.

В настоящее время парк снегоуборочных поездов типа СМ-2 на Белорусской железной дороге составляет 21 единицу, что на два меньше, чем двумя годами ранее. Если по состоянию на 2022 год выработали свой нормативный ресурс 96 % таких поездов [1], то на данный момент этот показатель составляет 100 %. Поэтому выполнение исследований с целью установления возможности продления срока службы снегоуборочных поездов представляет собой весьма важную задачу. Для ее решения требуется выполнить комплекс работ по определению прочностных характеристик несущих конструкций подвижного состава.

Анализ публикаций, в которых рассматриваются статические и динамические расчеты средств транспорта, показывает, что в абсолютном большинстве случаев для этих целей применяются различные современные инженерные программные комплексы.

Так, в работе [2] при анализе возможности продления срока службы двухъярусных платформ для перевозки автомобилей выполнен многофакторный вычислительный эксперимент в среде программы ANSYS, который показал, что прочность конструкции удовлетворяет требованиям нормативных документов, а экспериментальные исследования подтвердили этот вывод.

При анализе прочности полувагонов в статье [3] показано, что, используя пластинчатые конечные элементы, удастся, в отличие от балочных элементов, достаточно точно оценить напряженное состояние не только в пролетах балок, но и в местах их соединения, а также в местах приложения нагрузок.

Различные инженерные комплексы для моделирования напряженно-деформированного состояния [4] и определения несущей способности рам и кузовов различных по типу и назначению вагонов [5] используются сотрудниками Белорусского государственного университета транспорта. Полученные результаты применяются для разработки схем наклейки тензометриче-

ских датчиков при проведении натуральных испытаний вагонов и, в конечном счете, для оценки их остаточного ресурса.

В статьях [6, 7] рассматриваются подходы, используемые при оценке усталостных повреждений и долговечности конструкций железнодорожного подвижного состава, которые также опираются на результаты численного моделирования его напряженно-деформированного состояния.

Выполненный анализ научных публикаций показывает, что результаты численного моделирования являются основой для принятия решения о дальнейшей эксплуатации подвижного состава и, при необходимости, о целесообразности модернизации и усиления конструкции [2, 8, 9].

Вопросы, связанные с продлением срока службы снегоуборочного поезда СМ-2, рассматривались в работах [9, 10], где представлена конечно-элементная модель головной машины и определены значения напряжений, которые возникают в ее элементах. Результаты расчетов показали, что в некоторых зонах значения напряжений превышают допускаемые и возникает необходимость усиления конструкции машины.

Целью данной работы является создание геометрической и конечно-элементной моделей рамной конструкции кузова концевой полувагона снегоуборочного поезда СМ-2.

Рассматривается сварная конструкция, состоящая из продольных и поперечных балок, связанных вертикальными стойками и раскосами, образующими каркас полувагона, которые несут всю нагрузку от рабочего оборудования и собственной массы. Геометрическое моделирование рамной конструкции концевой полувагона снегоуборочного поезда СМ-2 выполнено в среде программы Creo Parametric (рисунок 1).

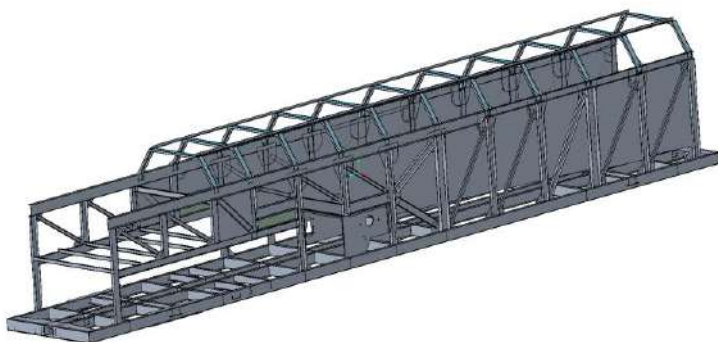


Рисунок 1 – Геометрическая модель рамы концевой полувагона снегоуборочного поезда СМ-2

Твердотельная модель построена на основе конструкторской документации [11] и представляет собой сборку, включающую 329 деталей (в том числе тонкостенных с толщиной 0,002 м) и подборок, зафиксированных в трех

плоскостях, в результате чего между ними созданы 714 контактов (рисунок 2).
Материал деталей – сталь со следующими характеристиками: модуль упругости $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; плотность $\rho = 7800$ кг/м³.

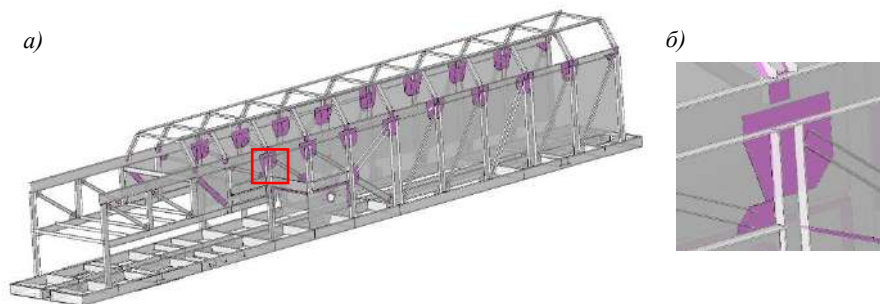


Рисунок 2 – Изображение контактирующих поверхностей:
а – изометрия; *б* – увеличенное изображение выделенной области

Конечно-элементные модели построены в средах конечно-элементных пакетов Creo Parametric и ANSYS Workbench. Элементы конструкции рамы имитировались объемными адаптивными конечными элементами с тремя степенями свободы в каждом узле (рисунок 3). Параметры сетки конечных элементов для моделей в Creo Parametric и ANSYS Workbench составили соответственно: характерный размер конечного элемента 25 и 50 мм, количество узлов – 1996816 и 1480394, число конечных элементов – 987057 и 453578.

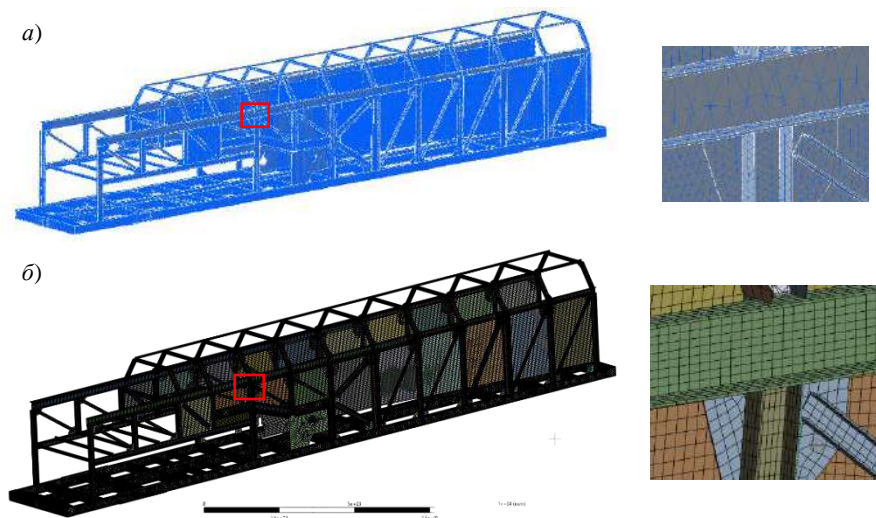


Рисунок 3 – Конечно-элементные модели в среде программы:
а – Creo Parametric; *б* – ANSYS Workbench

Кинематические граничные условия включают в себя ограничение степеней свободы в местах крепления упоров автосцепного устройства и пятников. Разработанная модель предназначена для оценки несущей способности полувагона и построена с учетом возможности приложения любого сочетания и вида эксплуатационных нагрузок.

Выполнен расчет напряженно-деформированного состояния конструкции под действием сил тяжести ее элементов. На рисунке 4 приведены схемы распределения эквивалентных по Мизесу напряжений, МПа, полученные в двух названных выше программных продуктах. Максимальные эквивалентные по Мизесу напряжения при расчете в программе ANSYS Workbench в области присоединения шкворневой балки к хребтовой составили 136,53 МПа. На противоположной стороне той же области в Creo Parametric максимальные эквивалентные напряжения достигли 298,98 МПа (при допусках для заданного материала 250 МПа). Такое расхождение результатов связано с тем, что данное место представляет собой концентратор напряжений, и поэтому в нем для получения точных результатов следует точно учитывать геометрию конструкции, а также принимать во внимание нелинейно упругие и пластические деформации. Для интерпретации результатов в таких областях целесообразно использовать инженерную оценку. В остальных местах напряжения не превышают 50 МПа, что значительно меньше допусковых значений.

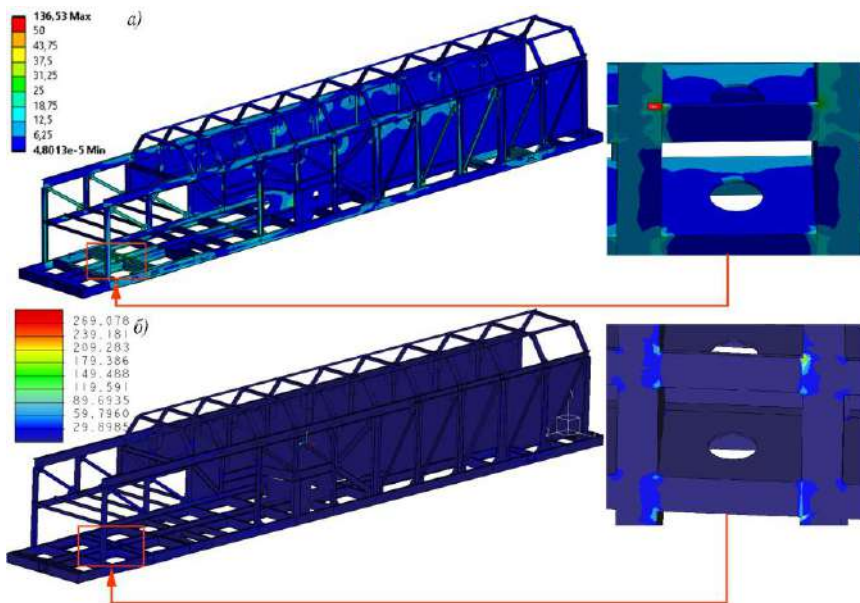


Рисунок 4 – Схема распределения эквивалентных напряжений, МПа, при расчете:
a – в ANSYS Workbench; *б* – Creo Parametric

Схема распределения перемещений под действием сил тяжести элементов приведена на рисунке 5. Максимальные прогибы в моделях возникают в месте установки электродвигателя с редуктором транспортера-накопителя и по расчету в ANSYS Workbench составляют 4,81 мм; в Creo Parametric – 4,78 мм (при допускаемых 25 мм [12]). Следовательно, расхождение результатов не превышает 1 %.

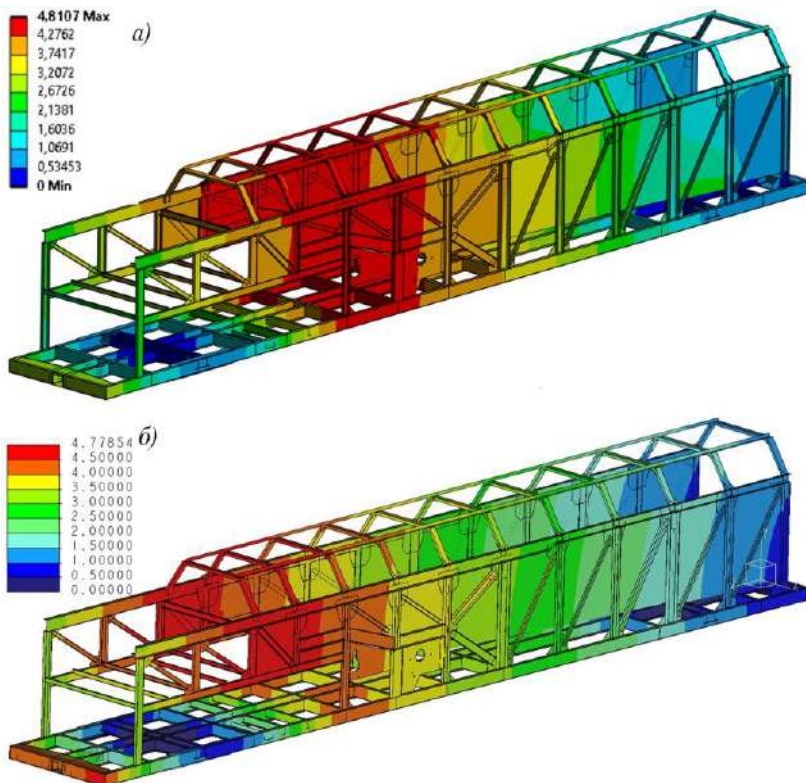


Рисунок 5 – Схема распределения перемещений при расчете:
a – в ANSYS Workbench; *б* – Creo Parametric

Полученные результаты показывают, что разработанные модели адекватно описывают напряженно-деформированное состояние концевого вагона снегоуборочного поезда СМ-2. Они могут быть использованы для расчетов конструкции под действием нормативных нагрузок и оценке ее остаточного ресурса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Максимчик, К. В. Снегоуборочный поезд СМ-2. Анализ текущего состояния парка техники в Республике Беларусь / К. В. Максимчик, В. Л. Моисеенко // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2022. – № 2 (45). – С. 52–54.

2 **Жарова, Е. А.** Прогнозирование остаточного ресурса и продление срока службы двухъярусных платформ для перевозки автомобилей / Е. А. Жарова // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2007. – № 3 (12). – С. 47–52.

3 **Афанасьев, А. Е.** Разработка методики расчетно-экспериментального обоснования продления срока службы полувагонов / А. Е. Афанасьев // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2008. – № 2 (15). – С. 36–45.

4 **Макеев, С. В.** Моделирование напряженного состояния кузова пассажирского вагона, вызванного коррозионным износом / С. В. Макеев // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. – 2011. – Вып. 5. – С. 83–90.

5 **Афанаськов, П. М.** Несущая способность кузова вагона-самосвала для перевозки сыпучих грузов после длительной эксплуатации / П. М. Афанаськов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2020. – № 4 (68). – С. 202–210.

6 **Kassner, M.** Fatigue strength analysis of a welded railway vehicle structure by different methods / M. Kassner // International Journal of Fatigue. – 2012. – Vol. 34, is. 1. – P. 103–111.

7 Evaluation of railway vehicle car body fatigue life and durability using a multi-disciplinary analysis method / B. Miao [et al.] // International Journal of Vehicle Structures and Systems. – 2009. – Vol. 1, no. 4. – P. 85–92.

8 Развитие методов анализа прочности и надежности несущих конструкций подвижного состава с использованием методов математического моделирования / В. В. Кобищанов [и др.] // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2020. – № 3 (88). – С. 29–37.

9 **Балтабаев, А. С.** Оценка остаточного срока службы снегоуборочной техники / А. С. Балтабаев // Транспорт Российской Федерации. – 2011. – № 3 (34). – С. 76–78.

10 **Балтабаев, А. С.** Оценка прочности вагонов-снегоочистителей при коррозионном утонении их базовых узлов / А. С. Балтабаев, М. В. Зимакова, А. С. Сараев // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2011. – № 3 (28). – С. 34–39.

11 Альбом чертежей снегоуборочного поезда ПТКБ ЦП. Т. III. – М. : Главное управление пути МПС, 1973. – 250 с.

12 РК.СМ-2.31.001–2022. Руководство по капитальному ремонту снегоуборочной машины СМ-2 и ее модификаций. – Гомель, 2022. – 276 с.

K. V. MAKSIMCHYK, A. O. SHIMANOVSKY
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

FINITE ELEMENT MODELING OF THE FRAME STRUCTURE DEFORMATION FOR THE SM-2 SNOW REMOVAL TRAIN CAR

Geometric and finite element models of the frame structure of the SM-2 snow removal train end car are developed in the environment of the Creo Parametric and ANSYS Workbench software systems. The stress-strain state calculation for the structure under the action of gravity is carried out. A comparison of the calculation results obtained using different programs is performed.

Keywords: snow removal train, end gondola car, finite element method, static computation.

Получено 14.10.2023

УДК 624.078.4:004.94

*Т. М. МАРТЫНЕНКО¹, О. О. СМІЛОВЕНКО¹, И. М. МАРТЫНЕНКО²,
С. А. ЛОСИК¹*

¹*Университет гражданской защиты МЧС Беларуси, Минск*

²*Белорусский государственный университет, Минск*

ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ УЗЛА КАРКАСНОЙ КОНСТРУКЦИИ СРЕДСТВАМИ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ANSYS

Исследуется надежность болтовых соединений через накладки двух одинаковых профилей в форме двутавров и тавров. Разработаны конечно-элементные модели в среде ANSYS Workbench. Выполнен анализ усталостной прочности рассматриваемых соединений в зависимости от приложенной нагрузки.

Ключевые слова: соединение двутавровых профилей, соединение тавровых профилей, напряженно-деформированное состояние, усталостная прочность.

Введение. В гражданском строительстве сборные конструкции приобретают всё большую популярность благодаря таким своим технологическим особенностям, как простота и скорость возведения. В течение своего жизненного цикла элементы таких систем подвергаются различным воздействиям, включающим как запланированные эксплуатационные нагрузки, так и незапланированные воздействия окружающей среды и внешней инфраструктуры, в том числе аварийные ситуации. Возникновение значительных деформаций и повреждений строительных объектов свидетельствует об отклонениях параметров их функционирования от заложенных на этапе проектирования.

В большинстве случаев сборные конструкции выполняются из балок открытого профиля. Части колонн объединяются в конструкцию с помощью швов, исключающих взаимное смещение сечений соединяемых элементов. Соединение балок с колоннами может быть шарнирным, упругим или жестким, выполняться сваркой или болтами с использованием накладок и фланцевых соединений [1]. Балки, колонны и их соединительные элементы, используемые в сборных конструкциях, имеют соизмеримую жесткость, поэтому места их соединения относят к упугоподатливым узлам [2–4].

Эксплуатация болтовых соединений строительных конструкций сопровождается изменением механических характеристик деталей соединений при усталостном нагружении, самоотвинчиванием болтов при циклическом нагружении, краткосрочным и долгосрочным процессом уменьшения напряжений при постоянной величине деформации накладки. Достоверные результаты поведения соединительной накладки для одного и того же диапазона номинальных нагрузок и напряжений можно получить с помощью ко-

нечно-элементного моделирования [5]. Целью данной работы стал численный анализ прочности болтового соединения двух прокатных профилей.

Конечно-элементные модели. Проведены исследования конструкций прямых стыковых узлов двух двутавровых и двух тавровых профилей, соединенных через накладку. Для создания трехмерной модели конструкции (рисунков 1) использовался программный комплекс Autodesk Inventor Professional. Затем геометрия болтового соединения экспортировалась в ANSYS [6, 7].

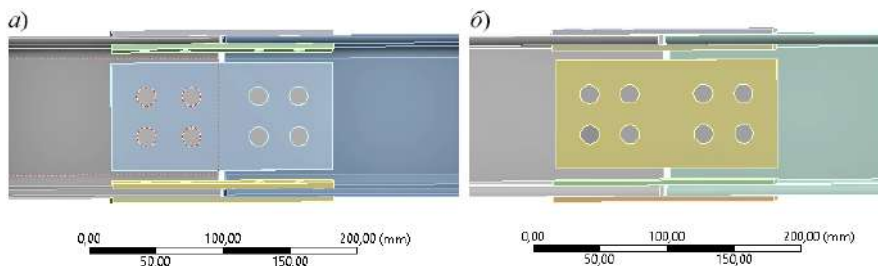


Рисунок 1 – Модели болтовых соединений балок двутаврового (а) и таврового (б) профиля

При создании конечно-элементной модели в среде ANSYS Workbench требуется назначить характерный размер элемента, его форму, способы разбиения. По умолчанию для этого используются двадцатиузловые призматические элементы SOLID186 и десятиузловые тетраэдральные SOLID187, которые могут использоваться при решении как линейных, так и нелинейных задач, в том числе для случаев больших деформаций [7].

Разработанная конечно-элементная модель включала около 54000 конечных элементов названных типов. Характерный размер сетки в области соединения составил 1 мм, для стальных областей – 5 мм (рисунок 2).

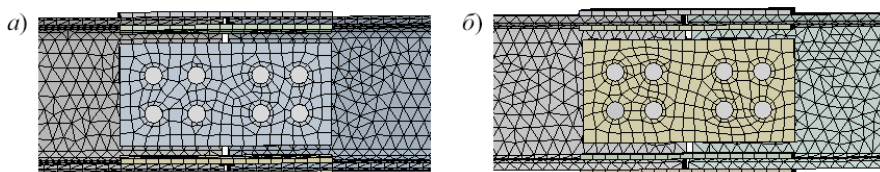


Рисунок 2 – Конечно-элементные модели соединений балок двутаврового (а) и таврового (б) профиля

Предполагалось, что концевые сечения соединяемых балок жестко закреплены. На рисунке 3 показано, что такие связи наложены на двутавры в местах с метками АВ и АС, а на тавры – в сечениях R и S. Точка с меткой А является местом приложения вертикальной силы 1000 Н. Остальные метки соответствуют местам расположения болтовых соединений.

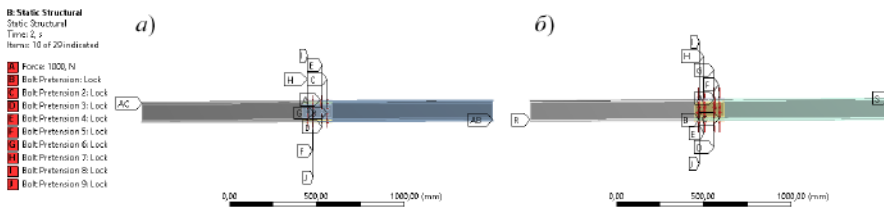


Рисунок 3 – Схемы приложения нагрузок на балки двутаврового (а) и таврового (б) профиля

Результаты расчетов. Выполнен статический расчет рассматриваемых конструкций. На рисунке 4 приведены схемы распределения перемещений в конструкциях, а на рисунке 5 – эквивалентных напряжений в накладках.

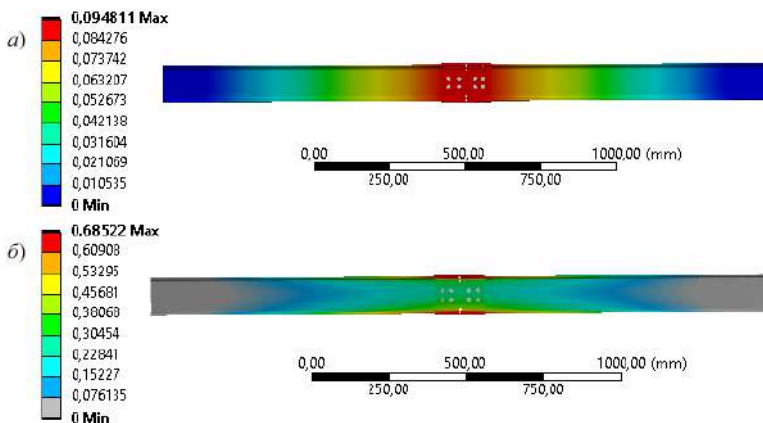


Рисунок 4 – Распределение деформаций в соединенных встык элементах двутаврового (а) и таврового (б) профиля

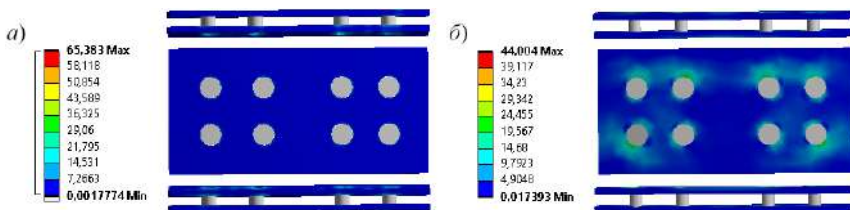


Рисунок 5 – Распределение напряжений в накладках соединений балок двутаврового (а) и таврового (б) профиля

Надежность конструкций определяется не только напряженно-деформированным состоянием под действием статических нагрузок, но и усталостной долговечностью. При моделировании в среде ANSYS Fatigue Life могут быть определены число циклов нагружения до разрушения, коэффициент

усталостного повреждения (отношение заданного и расчетного сроков службы), а также коэффициент безопасности при заданном сроке службы [8–10].

Результаты моделирования циклического нагружения двутаврового и таврового соединений при значении амплитуды приложенной силы 1000 Н показали, что необходимый срок службы полностью обеспечивается для обоих случаев. На рисунке 6 приведены схемы, демонстрирующие значения коэффициента запаса усталостной прочности для разных областей рассматриваемых соединений. Наименьший коэффициент запаса наблюдается в местах соприкосновения накладки с болтами.

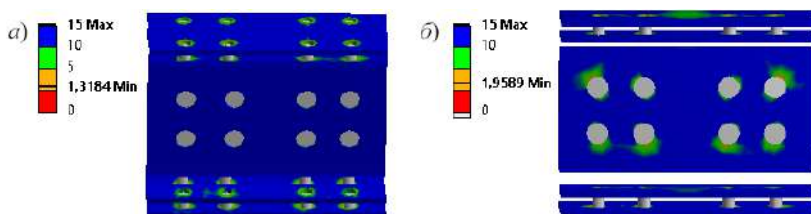


Рисунок 6 – Коэффициент запаса прочности при болтовом соединении элементов двутаврового (а) и таврового (б) профиля

По результатам вычислительного эксперимента для соединения двух двутавров построены зависимости от поперечной силы (рисунок 7) перемещений в месте приложения нагрузки (кривая 1) и коэффициента запаса усталостной прочности (кривая 2). Зависимость перемещения от поперечной силы оказалась линейной. Если при статическом нагружении в зависимости от функционального назначения болтового соединения коэффициент запаса прочности принимают от 2,5 до 3, то при циклическом нагружении и минимальной нагрузке коэффициент усталостной прочности составил около 1,4. При циклическом нагружении силой с амплитудой 6 кН значение коэффициента усталостной прочности приближается к единице, что указывает на отказ до достижения расчетного срока службы

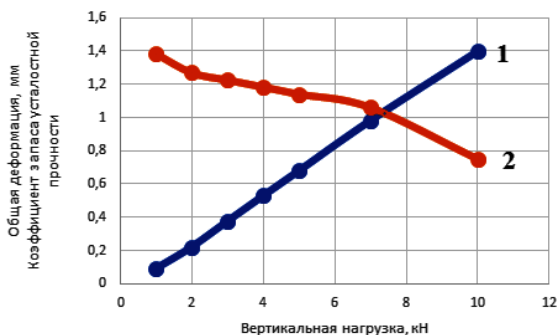


Рисунок 7 – Зависимости перемещений 1 и коэффициента запаса прочности 2 двутаврового соединения от поперечной силы

Заключение. Разработанные конечно-элементные модели позволяют моделировать поведение соединения балок открытого профиля и определять предполагаемые области разрушения, оценивать несущую способность соединений и коэффициент запаса усталостной прочности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Перельмутер, А. В.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – М. : ДМК Пресс, 2002. – 618 с.

2 Конструирование зданий и сооружений. Легкие стальные тонкостенные конструкции / Н. И. Ватин [и др.]. – СПб. : Изд-во Политехнического ун-та, 2012. – 261 с.

3 **Strømmen, E. N.** Structural mechanics: The theory of structural mechanics for civil, structural and mechanical engineers / E. N. Strømmen. – Cham : Springer, 2020. – 354 p.

4 **Лещенко, А. П.** Фундаментальная строительная механика упругих систем / А. П. Лещенко. – М. : URSS, 2008. – 976 с.

5 Анализ механических характеристик узловых соединений строительных конструкций на основе моделирования в среде ANSYS / Т. М. Мартыненко [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. – Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2023. – № 1 (33). – С. 39–44.

6 **Дьяков, И. Ф.** К расчету оболочки, укрепленной тонкостенными стержнями / И. Ф. Дьяков, С. А. Чернов // Автоматизация и современные технологии. – 2008. – № 1. – С. 16–20.

7 **Басов, К. А.** ANSYS в примерах и задачах / К. А. Басов. – М. : Компьютер-Пресс, 2002. – 223 с.

8 Validation and verification of fatigue assessment using FE analysis: A study case on the notched cantilever beam / A. Fajri [et al.] // Procedia Structural Integrity. – 2021. – Vol. 33. – P. 11–18.

9 **Икрин, В. А.** Сопrotивление материалов с элементами теории упругости и пластичности / В. А. Икрин. – М : АСВ, 2004. – 424 с.

10 ТКП EN 1993-1-9:2009 (02250) Проектирование стальных конструкций. Ч. 1–9. Усталостная прочность. – Минск : М-во архит. и стр-ва Респ. Беларусь, 2010. – 51 с.

T. M. MARTYNIENKO¹, O. O. SMILOVENKO¹, I. M. MARTYNIENKO², S. A. LOSIK¹

¹The University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of Belarus, Minsk, Belarus

²Belarusian State University, Minsk, Belarus

INVESTIGATION OF A FRAME STRUCTURE RELIABILITY BY ANSYS SOFTWARE

The reliability of bolted connections through linings of two identical profiles in the form of I-beams and T-beams is investigated. The finite element models are developed in ANSYS Workbench. An analysis of the fatigue strength of the joints under consideration depending on the applied load is carried out.

Keywords: I-profiles connection, T-profiles connection, stress-strain state, fatigue strength.

Получено 03.10.2023

УДК 620.179.141:629.4.027.5

А. Г. ОТОКА, О. В. ХОЛОДИЛОВ, П. А. ДАШУК

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ МАГНИТОПОРОШКОВЫЙ КОНТРОЛЬ КОЛЕСНЫХ ПАР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ И НЕЙРОСЕТЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Описывается технология автоматической магнитопорошковой дефектоскопии колесных пар подвижного состава железных дорог с использованием систем видеонаблюдения и машинного зрения. В качестве средства неразрушающего контроля рассматривается разработанный макет стенда СМДКП-02.

Ключевые слова: колесная пара, цельнокатаное колесо, магнитопорошковый контроль, видеосистема, нейросетевые технологии, люминесцентный метод, автоматизация.

Введение. Магнитопорошковый контроль (МПК) на железнодорожном транспорте стал одним из первых методов, с помощью которого стало возможным выявление поверхностных дефектов в стальных и чугунных изделиях [1]. Он получил широкое распространение при дефектоскопии шеек и средней части осей колесных пар, автосцепок, бандажей, колесных центров и других деталей вагонного и локомотивного хозяйства [2, 3]. Чувствительность метода позволяет выявлять трещины в начальной стадии их развития, когда увидеть дефект визуально или с применением оптических приборов сложно или невозможно. Метод основывается на свойстве магнитного поля концентрировать частицы железа в местах, где находятся дефекты. При этом контролируемую деталь намагничивают соленоидом, а затем поливают техническим вазелиновым или трансформаторным маслом, содержащим тончайший порошок чистого железа, находящийся во взвешенном состоянии. По скоплению частиц порошка определяют наличие дефекта и его контуры [4].

По мере развития метода в железный порошок стали добавлять различные присадки и вещества, препятствующие слипанию частиц, вспениваю суспензии и иные добавки, способствующие улучшению качества магнитопорошковой дефектоскопии. Добавление различных пигментов, окрашивающих частицы порошка, позволило проводить контроль деталей с различным цветом поверхности.

До недавнего времени считалось, что магнитопорошковый метод несовершенен, что обусловлено трудностью его автоматизации, связанной с необходимостью расшифровки дефектограмм, по которым можно увидеть, а не оценить параметры дефектов (т. е. по сути метод является индикаторным).

В настоящее время широкое распространение получило использование люминесцентных суспензий с добавлением антикоррозионных добавок и антикоагулянтов. Особенностью таких суспензий является свечение люминофора в ультрафиолетовой или синей областях света. При контроле деталей в

темном или затененном месте наблюдается высокая контрастность свечения индикаторного рисунка, образованного люминесцирующими частицами на фоне поверхности объекта контроля. Поэтому чувствительность люминесцентного магнитопорошкового контроля на практике считается максимальной (ширина раскрытия трещины может достигать 0,1 мкм).

Достоинством люминесцентного метода является то, что интенсивность свечения люминесцирующих частиц коррелирует с шириной раскрытия трещины [5, 6]. В то же самое время вследствие необходимости проведения осмотра в УФ-свете очень большой оказывается нагрузка на зрение человека.

Целью работы является разработка технологии автоматизированного МПК цельнокатаных колес колесной пары вагона при минимальном участии человека.

Описание работы стенда. В работах [7, 8] достаточно подробно была рассмотрена технология МПК цельнокатаных колес при ремонте колесных пар вагонов на примере макета стенда СМДКП-01.300588.121192.АА. На основе его применения нами была разработана технология автоматизированного контроля колесных пар с использованием видеокамер и встроенной УФ-подсветки (рисунок 1).

Отличительной особенностью данного стенда является применение видеокамер, направленных в зону контроля колеса и фиксирующих интенсивность свечения люминесцентного индикатора. Если интенсивность индикации, измеренная на изделии, превышает таковую на настроечном образце с допустимым дефектом, то количественное значение интенсивности свечения соответствует достижению браковочного уровня, что свидетельствует о превышении допустимого значения ширины несплошности [9].

Рассмотрим более подробно последовательность технологических операций на стенде СМДКП-02 с использованием системы видеонаблюдения.

1 Подъемно-поворотное устройство 2 стенда поднимается максимально вверх для последующей установки на нее колесной пары 1, перемещаемой при помощи кран-балки.

2 Колесная пара 1 опускается вниз к намагничивающим устройствам 7, 8, которые располагаются внутри сливных ванн 3.

3 Включается привод 12 вращения колесной пары 1 от средней части оси.

4 Включается насосная станция 14, обеспечивающая перемешивание и подачу суспензии в зону контроля цельнокатаных колес (одновременное включение двигателя «мешалки» 15 и насоса 13). Происходит равномерное нанесение суспензии за счет гибких шлангов 11 на участок поверхности колес с двух сторон.

5 Осуществляется намагничивание колес путем пропускания переменного тока по изолированному кабелю соленоида $I_{\text{сол}}$ и прилегающего проводника $I_{\text{п}}$. Намагничивание обеспечивается за счёт мощного ($I_{\text{max}} = 5 \text{ кА}$) источника тока 5.

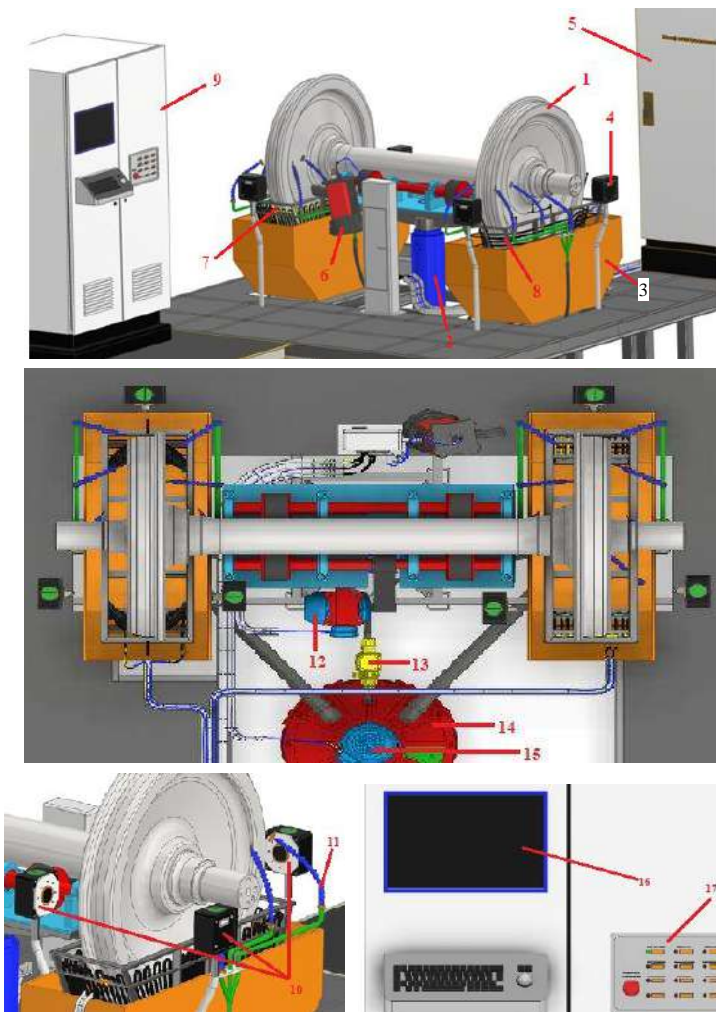


Рисунок 1 – Макет станда СМДКП-02:

1 – цельнокатаное колесо; 2 – подъемно-поворотное устройство с приводом вращения колесной пары от средней части оси; 3 – ванна для размещения намагничивающего устройства; 4 – видеокамера со встроенным УФ-источником освещения зоны контроля колеса; 5 – шкаф распределительный силовой; 6 – источник УФ-излучения; 7 – намагничивающее устройство в виде проводника, располагаемого в радиальном (поперечном) направлении цельнокатаного колеса; 8 – намагничивающее устройство в виде соленоида (катушки), образованного витками изолированного кабеля с медной жилой; 9 – рабочее место оператора (автоматизированное рабочее место); 10 – видеокамера со встроенной УФ-подсветкой; 11 – гибкий шланг; 12 – мотор-редуктор вращения колесной пары; 13 – насос подачи суспензии в зону колеса; 14 – насосная станция; 15 – электродвигатель перемешивания суспензии; 16 – компьютер; 17 – пульт управления стандом

6 Одновременно с включением режима намагничивания работает программа автоматического поиска дефектов. Изображения с видеокамер 4 со встроенной системой УФ-подсветки передаются на компьютер 16 рабочего места оператора 9. Программное обеспечение анализирует места с высокой интенсивностью свечения магнитного индикатора и выдает соответствующее сообщение оператору:

- «нет индикаций» – деталь годная и в дальнейшем контроле не нуждается;
- «есть индикации» – в этом случае оператор должен разделить обнаруженные области на относящиеся к дефектам и ложные индикации (рисунок 2).

При появлении сообщения «есть индикации» дополнительно выводится команда «подтвердить дефект» и указывается сторона колеса левой или правой ванны (№ 1л, № 2л, № 3п, № 4п)

ПОДТВЕРЖДЕНИЕ	
Есть дефект	Нет дефекта
<p>При подтверждении оператором наличия дефекта отводятся все гибкие шланги 11, колесная пара 1 подъемно-поворотным устройством 2 поднимается вверх для дальнейшего съема с позиции контроля при помощи кран-балки. Информация о забракованной колесной паре заносится в базу данных программы с обязательным указанием размера дефекта (ширина раскрытия определяется программой по интенсивности свечения, а длину принимают равной протяженности магнитопрошковой индикации)</p>	<p>Процесс подтверждения отсутствия дефекта при автоматизированном МПК продолжается до трех полных оборотов колесной пары 1.</p>
	 <p>При повторных появлениях на экране компьютера 16 сообщения «есть индикации» оператор подтверждает наличие или отсутствие дефектов до тех пор, пока не выполнится условие прокрутки колесной пары на три оборота</p>

Рисунок 2 – Алгоритм подтверждения информации о наличии дефекта

В зависимости от типа применяемого освещения подтверждение дефектов осуществляется с применением ручного переносного УФ-фонаря или источника синего света б, находящегося на позиции контроля колесной пары.

При отсутствии сигналов программы автоматического поиска дефектов, информирующих о наличии индикаций, колесная пара 1 поднимается вверх и

поворачивается на 180°, после чего выполняются указанные выше п. 2–6. При отсутствии дефектов и в этом случае колесная пара снимается с позиции контроля при помощи кран-балки, а в базу данных программы заносятся сведения о проконтролированной колесной паре с указанием ее номера, завода-изготовителя и года изготовления.

Заключение. В настоящее время автоматизацией МПК, в том числе с использованием систем видеонаблюдения и машинного зрения занимается большое количество организаций, что свидетельствует о том, что магнито-порошковая дефектоскопия превращается из индикаторного метода, только визуализирующего дефекты, в обычный инструментальный метод измерительного контроля, позволяющий получить количественную информацию о характеристиках дефекта в виде электрического сигнала.

В настоящее время использование рассмотренного в работе стенда или ему подобного дает возможность значительного повышения эффективности традиционного ручного МПК с применением передвижного электромагнита (ярма), при котором весьма велико влияние субъективного фактора. Особенно низка эффективность выявления дефектов при таком методе контроля в случае большой площади цельнокатаного колеса [10].

Для распознавания дефектов возможно применение различных вычислительных методов. Популярностью пользуются сверточные нейронные сети, основным достоинством которых является способность к обучению и самообучению, позволяющая обнаружить в случайных процессах порядок и некоторую структуру [11–14]. Таким образом, в случае ошибки при идентификации индикаторного рисунка программа самообучается и в последующем при обнаружении дефекта, имеющего аналогичные характеристики (свечение, форму и др.), он признается ею как «ложный». Изображения индикаций, наблюдаемых на цельнокатаном колесе, сохраняются в виде отдельных файлов, что позволяет вести архив и отслеживать состояние колесной пары в процессе ее эксплуатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Краткий технический железнодорожный словарь / И. Я. Аксёнов [и др.]. – М. : Трансжелдориздат, 1946. – 606 с.
- 2 Fretting crack detection of a railway axle with a mounted wheel using an induced current potential drop and electromagnetic-field distribution / S. J. Kwon [et al.] // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2023. – Vol. 37. – P. 6453–6460.
- 3 Train wheel magnetic flux leakage testing method based on local magnetization enhancement / E. Li [et al.] // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 2023. – Vol. 72. – Article 6002409. – 9 p.
- 4 **Богданов, А. Ф.** Эксплуатация и ремонт колёсных пар вагонов / А. Ф. Богданов, В. Г. Чурсин. – М. : Транспорт, 1985. – 270 с.
- 5 Феноменология автоматизации магнито-порошкового метода контроля / К. А. Багаев [и др.] // В мире неразрушающего контроля. – 2008. – № 1 (39). – С. 10–13.

6 **Заславский, С. Л.** Автоматизированный магнитопорошковый контроль свободных колёсных осей подвижного состава / С. Л. Заславский, С. Г. Ершов // В мире неразрушающего контроля. – 2005. – № 3 (29). – С. 66–68.

7 **Отока, А. Г.** Перспективы автоматизации магнитопорошкового контроля колесных пар с использованием систем видеонаблюдения и нейросетевых технологий / А. Г. Отока, О. В. Холодилов // Транспортная наука и инновации : материалы междунар. науч.-практ. конф. – Самара : СамГУПС, 2023. – С. 51–57.

8 Технология магнитопорошкового контроля цельнокатаных колес на автоматизированном стенде / А. Г. Отока [и др.] // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 160–168.

9 **Отока, А. Г.** Идея создания стенда автоматизированного магнитопорошкового контроля СМДКП-01.300588.121192.АА / А. Г. Отока, А. М. Лях // Актуальные проблемы железнодорожной науки глазами молодых исследователей : сб. материалов круглого стола, посвящ. Дню железнодорожника. – М. : ВНИИЖТ, 2022. – С. 111–119.

10 **Отока, А. Г.** Определение зоны достаточной намагниченности при традиционном магнитопорошковом контроле цельнокатаного колеса с помощью электромагнита МЭД-120 / А. Г. Отока, Р. В. Траяков, О. В. Холодилов // Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов : материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 70-летию БИИЖТа – БелГУТа. В 2 ч. Ч. 1. – Гомель : БелГУТ, 2023. – С. 64–66.

11 **Косач, А. А.** Автоматизация обработки данных неразрушающего контроля на основе искусственной нейронной сети / А. А. Косач, Е. Е. Ковшов // Cloud of Science. – 2018. – Т. 5, № 3. – С. 524–531.

12 **Поляков, А. В.** О применении сверточных нейронных сетей при решении задачи неразрушающего контроля изделий / А. В. Поляков // Успехи современной науки. – 2017. – Т. 1, № 5. – С. 204–207.

13 **Назаренко, С. Ю.** Применение искусственных нейронных сетей в радиационном неразрушающем контроле / С. Ю. Назаренко, В. А. Удод // Дефектоскопия. – 2019. – № 6. – С. 54–64

14 Automated vision system for magnetic particle inspection of crankshafts using convolutional neural networks / K. Tout [et al.] // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2021. – Vol. 112, is. 11–12. – P. 3307–3326.

*A. G. OTOKA, O. V. KHOLODILOV, P. A. DASHUK
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

THE TECHNOLOGY OF AUTOMATED MAGNETIC POWDER CONTROL OF WHEELSETS USING VIDEO SURVEILLANCE SYSTEMS AND NEURAL NETWORK TECHNOLOGIES

The technology of automatic magnetic particle flaw detection of railway rolling stock wheelsets using video surveillance and machine vision systems is described. The developed model of the SMDKP-02 stand is considered as a mean of non-destructive control.

Keywords: wheelset, solid-rolled wheel, magnetic particle control, video system, neural network technologies, luminescent method, automatization.

Получено 12.10.2023

УДК 620.179.141:629.4

А. Г. ОТОКА¹, О. В. ХОЛОДИЛОВ¹, Д. Л. ЧЕПИК²

¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

²Конструкторско-технический центр Белорусской железной дороги, Минск, Беларусь

ПЕРЕДВИЖНАЯ СУСПЕНЗИОННАЯ СИСТЕМА С РЕЦИРКУЛЯЦИЕЙ ДЛЯ МАГНИТОПОРОШКОВОЙ ДЕФЕКТΟΣКОПИИ ДЕТАЛЕЙ ВАГОНОВ И ЛОКОМОТИВОВ

Обосновывается целесообразность применения мобильной насосной станции совместно с системой рециркуляции магнитной суспензии при магнитопорошковом контроле различных деталей в вагонном и локомотивном хозяйстве. Анализируется экономическая эффективность использования насосной станции в сравнении с нанесением магнитной суспензии методом распыления и полива из ёмкости для отдельных объектов контроля.

Ключевые слова: суспензия, насосная станция, система рециркуляции, детали вагонов и локомотивов, магнитопорошковый контроль, магнитный индикатор.

Введение. Магнитопорошковый метод неразрушающего контроля (МПК) основан на обнаружении магнитных полей рассеяния над дефектами с помощью магнитного индикатора (МИ), представляющего собой порошок или суспензию ферромагнитных частиц [1, 2]. Магнитопорошковому контролю подвергается более 150 наименований деталей и составных частей грузовых и пассажирских вагонов [3–6] и более 1000 наименований элементов локомотивов в зависимости от серий тепловозов и дизель-поездов [7–9].

На контролируемую намагниченную поверхность МИ наносится, как правило, сухим (порошок) или мокрым (суспензия) способом. Мокрый способ нанесения магнитного индикатора даёт наибольшую чувствительность к поверхностным дефектам, поэтому он получил широкое применение на Белорусской железной дороге. При нём магнитная суспензия наносится на контролируемую поверхность путём распыления или полива слабой струёй, не смывающей осевший порошок над несплошностью, с обязательным стеканием её с поверхности.

Магнитные частицы должны находиться во взвешенном состоянии и равномерно наноситься на объект контроля. Поэтому распыление суспензии из распылителя должно сопровождаться постоянным встряхиванием ёмкости в целях недопущения осаждения магнитного порошка. Перед использованием суспензии путём полива из ёмкости необходимо постоянно её мешать вручную неметаллической ложкой. После того как суспензия закончилась, дефектоскопист заново готовит её согласно технологической инструкции и паспорту на МИ.

При существующей технологии МПК повторно суспензия используется только при работе с наружными и внутренними кольцами в свободном со-

стоянии, которые проверяются на установке типа УМДП-01 (для локомотивных – установка типа ТПС 9706), в состав которой входит стационарная насосная станция. Нанесение магнитной суспензии и повторное ее использование возможны только при условии тщательной очистки и обезжиривания поверхности объекта контроля, что соблюдается только для деталей, прошедших очистку и мойку (в моечной машине, мойка под давлением). Например, внутренние кольца подшипника, напрессованные на шейку оси, шейка оси, ролики подшипника, цельнокатанные колёса, колёсные центры и средняя часть оси при среднем ремонте, свободные оси при капитальном ремонте, стопорные планки, венцы зубчатых колёс, шестерни, бандажи, различные валы и другие детали локомотивов и вагонов.

Отметим, что однократное использование магнитной суспензии ведёт к увеличению расходов на приобретение МИ, увеличению времени на проведение контроля, т. к. суспензию необходимо постоянно готовить в зависимости от объёма ремонта деталей. Одним из путей решения этой проблемы является внедрение системы рециркуляции магнитной суспензии.

Целью данной работы является обоснование применения мобильной насосной станции совместно с рециркуляцией магнитной суспензии для МПК различных деталей вагонов и локомотивов.

Существующие технические решения. Суспензионная система предназначена для хранения, приготовления и нанесения люминесцентной или цветной магнитной суспензии как на водной, так и на керосиново-масляной основе. Она может входить в состав стационарных магнитопорошковых установок, автоматизированных стенов (рисунок 1, а) или специализированных столов (рисунок 1, б), где контроль производится способом остаточной намагниченности, а также в виде передвижной системы для самостоятельного применения (рисунок 1, в). Показанные на рисунке 1, а, б суспензионные системы осуществляют возврат магнитной суспензии в накопительный бак (рециркуляцию), в то время как система, представленная на рисунке 1, в, используется только для нанесения индикатора.

Система рециркуляции позволяет повторно использовать магнитную суспензию при проведении магнитопорошкового контроля деталей, что дает возможность снижения финансовых затрат на её приобретение. При этом дополнительное время на приготовление и сбор магнитной суспензии не требуется. Большинство объектов в вагонном и локомотивном хозяйствах подвергается МПК с использованием одного типа суспензии, поэтому применение для различных деталей и на разных участках дефектоскопии передвижной мобильной насосной станции в составе суспензионной системы с рециркуляцией представляется экономически эффективным. Кроме того, оно позволяет повысить качество МПК за счёт снижения субъективного фактора, который напрямую связан с нанесением магнитной суспензии методом полива или распыления из пульверизатора.

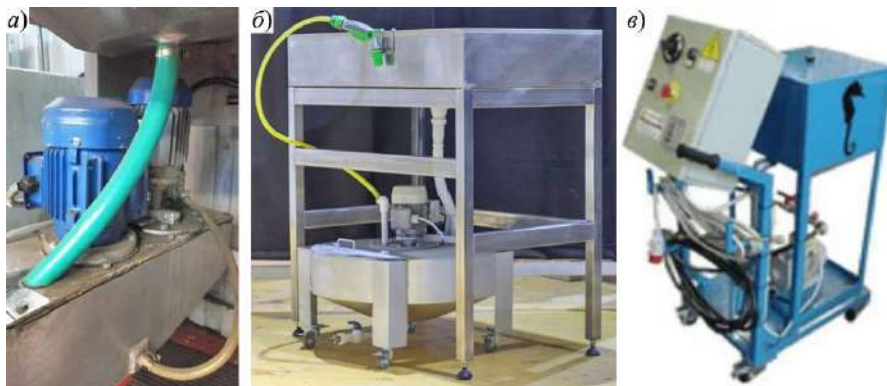


Рисунок 1 – Виды суспензионных систем:

- a* – стационарная насосная станция в составе установки УМДП-01; *б* – стационарная насосная станция в составе стола для нанесения магнитной суспензии ТАБ-900; *в* – передвижная насосная станция на колёсах CGM Cigiemme

Передвижная суспензионная система с рециркуляцией магнитной суспензии. Рассмотрим работу предлагаемой системы при проведении МПК внутренних колец подшипников, напрессованных на шейку оси (рисунок 2).

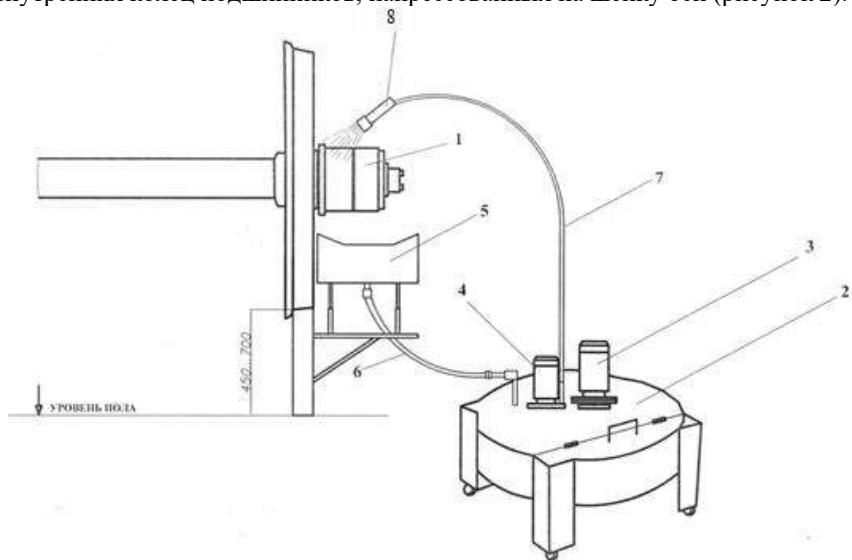


Рисунок 2 – Схема передвижной суспензионной системы

- 1* – внутренние кольца подшипников; *2* – система рециркуляции; *3* – электродвигатель перемешивания (ЭД «мешалки»); *4* – насос с электродвигателем для подачи суспензии; *5* – поддон сливной; *6* – шланг обратного слива суспензии в бак системы; *7* – шланг подачи суспензии; *8* – устройство ручного полива («пистолет»)

Данная система включает бак для сбора и перемешивания суспензии, конструкция которого обеспечивает простой доступ для визуального контроля количества суспензии; насос с электродвигателем для подачи суспензии; устройство перемешивания суспензии (мешалки с электродвигателем); шланг с устройством ручного полива; шланг слива суспензии из поддона в бак системы рециркуляции; поддон для слива суспензии; пульт управления.

Отличительная особенность системы состоит в том, что суспензия стекает в сливной поддон, а из него движется по шлангу назад в бак суспензионной системы. Следовательно, для применения данной системы в различных местах дефектоскопии требуется наличие в них только сливных поддонов с гибким шлангом.

Для нанесения магнитной суспензии при использовании рассматриваемой системы требуется установить шланг сливного поддона в бак насосной станции, после чего включить автоматический выключатель на пульте управления и двигатель мешалки для перемешивания суспензии (длительность перемешивания составляет 3–5 мин). Затем запускается электродвигатель насоса подачи суспензии, рукоятка крана подачи суспензии устанавливается в открытое положение для подачи суспензии в шланг к устройству ручного полива («пистолета»). После этого нажимается рукоятка пистолета, и суспензия равномерно распыляется на поверхность колец подшипников.

Оценка экономии средств при МПК с использованием системы рециркуляции. Выполним расчёт затрат средств, необходимых для контроля колец подшипников, напрессованных на шейку оси колёсной пары (КП), на установке типа РМ-8617 при использовании системы рециркуляции, учитывая, что средний расход магнитной суспензии при поливе из ёмкости (рисунок 3, *а*) составляет 0,25 л, а при распылении из распылителя (рисунок 3, *б*) – 0,15 л на одну КП.

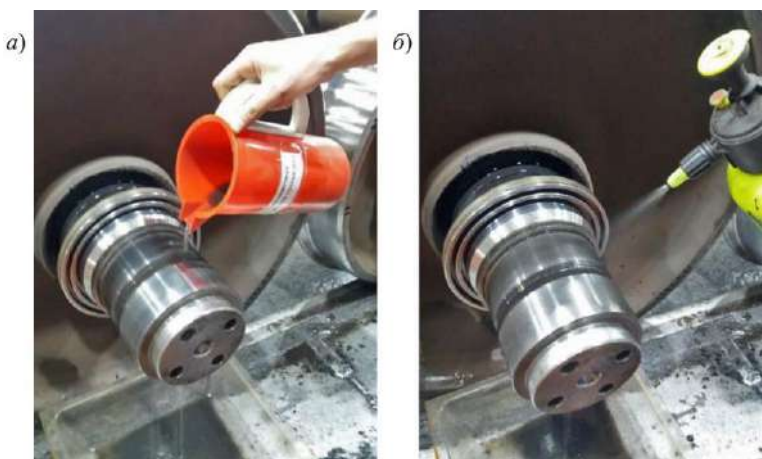


Рисунок 3 – Нанесение магнитной суспензии путём полива (*а*) и распыления (*б*) при проведении МПК внутренних колец подшипников, напрессованных на шейку оси

Для традиционного контроля одной КП путём полива требуется 8,75 г порошка, при использовании распылителя – 5,25 г. Расход магнитного порошка «Диагма-1100» в месяц составит 1050–1350 г при условии, что бак системы рециркуляции имеет ёмкость 30 л и концентрация порошка в суспензии, согласно паспорту, 40 ± 5 г/л воды. Повторное использование суспензии по рекомендациям завода-изготовителя допускается в течение месяца, так как в дальнейшем оно затруднено ввиду вспенивания и потери свойств.

В таблице 1 приведены результаты расчёта расхода МИ представленными способами при различных годовых объёмах среднего ремонта КП. Видно, что экономия магнитной суспензии при использовании системы рециркуляции уже только на проведении МПК колец подшипников, напрессованных на шейку оси (объём ремонта 4000 КП за 1 год), составляет 22,4 кг по сравнению с поливом из ёмкости и 8,4 кг – с применением распылителя, что в денежном эквиваленте составит 1008 и 378 бел. руб. соответственно.

Таблица 1 – Затраты суспензии «Диагма-1100» при МПК колец подшипников, напрессованных на ось КП

Объём ремонта N , шт.	Расход суспензии за год, г			Стоимость суспензии, бел. руб. за 1 г [10]*	Годовая стоимость суспензии, бел. руб.		
	Распыление $(5,25 \cdot N)$	Полив $(8,75 \cdot N)$	С рециркуляцией $(1050 \cdot 12)$		Распыление	Полив	С рециркуляцией
4000	21000	35000	12 600	0,045	945,00	1575,00	567,00
6000	31500	52500	12 600	0,045	1417,50	2362,50	567,00
9000	47250	78750	12 600	0,045	2126,25	3543,75	567,00

* Без учёта НДС.

Выполним аналогичный расчет затрат для МПК зубчатых колёс с использованием дефектоскопа УМДЗ (рисунок 4). В этом случае расход магнитного индикатора на большое зубчатое колесо одной КП составляет 27,5 г на «распыление» и 47,5 г на «полив». Исходя из того, что бак системы рециркуляции имеет ёмкость 30 л и концентрация порошка в суспензии, согласно паспорту, 30 ± 5 г/л воды, расход магнитного порошка «Диагма-1200» в месяц составит 750–1050 г.



Рисунок 4 – Нанесение магнитной суспензии при проведении МПК зубчатых колёс дефектоскопом УМДЗ

Из таблицы 2 следует, что экономия магнитной суспензии при использовании системы рециркуляции на проведении МПК большого зубчатого колеса при минимальном объёме 400 шт./год составляет 10 кг по сравнению с поливом из ёмкости и 2 кг по сравнению с простым распылителем, что в денежном эквиваленте составит 630 и 126 бел. руб. соответственно.

Таблица 2 – Затраты суспензии «Диагма-1200» при МПК большого зубчатого колеса

Объём ремонта N , шт.	Расход суспензии за год, г			Стоимость суспензии, бел. руб. за 1 г [11]*	Годовая стоимость суспензии, бел. руб.		
	Распыление $(27,5 \cdot N)$	Полив $(47,5 \cdot N)$	С рециркуляцией $(750 \cdot 12)$		Распыление	Полив	С рециркуляцией
400	11000	19000	9000	0,063	693,00	1197,00	567,00
800	22000	38000	9000	0,063	1386,00	2394,00	567,00
1000	27500	47500	9000	0,063	2992,50	3543,75	567,00

* Без учёта НДС.

В случае диагностики средней части оси КП дефектоскопом МД-12ПС (рисунок 5) расход магнитной суспензии составляет 12,5 г при распылении и 30 г при поливе. Затраты магнитного порошка «Диагма-1200» при использовании системы рециркуляции аналогичны предыдущему случаю.



Рисунок 5 – Нанесение МИ при проведении МПК средней части оси КП дефектоскопом МД-12ПС

В таблице 3 приведены результаты расчёта затрат суспензии для предприятий с различным годовым объёмом ремонта КП. Система рециркуляции при объёме 3000 пар за год позволяет сэкономить 81 кг МИ по сравнению с поливом из ёмкости и 28,5 кг по сравнению с простым распылением, а в денежном эквиваленте – 5103 и 1795,50 бел. руб. соответственно.

Таблица 3 – Затраты суспензии «Диагма-1200» при МПК средней части оси КП

Объём ремонта N , шт.	Расход суспензии за год, г			Стоимость суспензии, бел. руб. за 1 г [11]*	Годовая стоимость суспензии, бел. руб.		
	Распыление $(12,5 \cdot N)$	Полив $(30 \cdot N)$	С рециркуляцией $(750 \cdot 12)$		Распыление	Полив	С рециркуляцией
3000	37500	90000	9 000	0,063	2362,50	5670,00	567,00
6000	75000	180000	9 000	0,063	4725,00	11340,00	567,00
9000	112500	270000	9 000	0,063	7087,50	17010,00	567,00

* Без учёта НДС.

Заключение. Проведённый анализ показывает, что использование передвижной системы рециркуляции магнитной суспензии целесообразно только для определенных объектов контроля, имеющих в вагонных и локомотивных депо. Такая система на практике оправдывает свое существование, если количество таких объектов превышает некоторые расчетные значения.

С другой стороны, первоочередная задача мобильной станции заключается в применении её на различных участках дефектоскопии для деталей, подвергаемых МПК с использованием одного и того же типа МИ. Внедрение системы рециркуляции магнитной суспензии дает возможность сокращения времени на ее приготовление и сбор. Также снижаются затраты на закупку МИ. Они тем меньше, чем больше габариты контролируемых деталей и их количество.

Приведенный в работе расчёт затрат при применении магнитных суспензий «Диагма-1100» и «Диагма-1200», закупаемых в железнодорожной отрасли, на примере МПК внутренних колец подшипников, напрессованных на шейку оси, больших зубчатых колёс и средней части оси колёсной пары показал, что с увеличением объёма ремонта, а также номенклатуры проверяемых деталей в различных структурных подразделениях предприятий (в частности, в локомотивном хозяйстве) значительно уменьшаются финансовые затраты на приобретение МИ.

Следует учесть, что представлены расчеты затрат только для некоторых деталей, на контроль которых уходит небольшое количество МИ. Так, при проведении МПК больших деталей, таких как цельнокатаные колёса, колёсные центры, свободные оси КП, расход суспензии в зависимости от объёма ремонта при нанесении МИ путём полива и распыления может увеличиваться в десятки и сотни раз по сравнению с использованием системы рециркуляции магнитной суспензии.

Рассматриваемая система может работать с любым типом магнитной суспензии, что позволит приспособить её к любым деталям локомотивного и вагонного хозяйства, подвергающимся МПК. Для функционирования предлагаемой системы рециркуляции требуется лишь изготовление сливных поддонов под конкретные габариты проверяемых деталей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Advances in applications of Non-Destructive Testing (NDT): A review / M. Gupta [et al.] // Advances in Materials and Processing Technologies. – 2022. – Vol. 8, is. 2. – P. 2286–2307.

2 Бубела, А. И. Влияние различных факторов на чувствительность магнитопорошкового контроля / А. И. Бубела, К. Ю. Бабак // Главный механик. – 2022. – № 1. – С. 8–14.

3 ПР НК В.2. Правила неразрушающего контроля деталей и составных частей колёсных пар вагонов при ремонте. Специальные требования (утв. протоколом от 19–20 ноября 2013 г. № 59 Советом по железнодорожному транспорту государств – участников Содружества), 2013. – 88 с.

4 ПР НК В.3. Правила неразрушающего контроля литых деталей тележек грузовых вагонов при ремонте. Специальные требования (утв. протоколом от 19–20 ноября 2013 г. № 59 Советом по железнодорожному транспорту государств – участников Содружества), 2013. – 27 с.

5 ПР НК В.4. Правила неразрушающего контроля деталей автосцепного устройства и тормозной рычажной передачи вагонов при ремонте. Специальные требования (утв. протоколом от 19–20 ноября 2013 г. № 59 Советом по железнодорожному транспорту государств – участников Содружества), 2013. – 37 с.

6 ИШДЖ.25202.00017. Технологическая инструкция. Неразрушающий контроль деталей и составных частей колёсных пар грузовых вагонов при ремонте. Магнитопорошковый метод (утв. приказом гл. инженера Бел. ж. д. от 03.04.2019 № 343НЗ, 2019. – 74 с.

7 Единый перечень деталей и узлов тягового подвижного состава, подлежащих неразрушающему контролю на Белорусской железной дороге (утв. приказом Бел. ж. д. от 30.06.2021 № 581НЗ), 2021. – 93 с.

8 СТП БЧ 17.250. Неразрушающий контроль деталей локомотивов и моторвагонного подвижного состава Белорусской железной дороги. Магнитопорошковый метод. Порядок проведения контроля (утв. приказом Бел. ж. д. от 30.06.2021 № 1348НЗ), 2012. – 91 с.

9 Štarman, S. Automated system for magnetic particle inspection of railway wheels // S. Štarman, V. Matz // 10th European Conference on Non-Destructive Testing. – Moscow, 2010. – P. 7–11.

10 Концентрат магнитной суспензии КМС «Диагма-1100», 1 кг [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://ekb.prom-ob.com/product/koncentrat-magnitnoy-suspenzii-kms-diagma-1100/>. – Дата доступа : 20.10.2023).

11 Концентрат магнитной суспензии КМС «Диагма-1200», 1 кг [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://irkutsk.prom-ob.com/product/konsentrat-magnitnoj-suspenzii-kms-diagma-1200/>. – Дата доступа : 20.10.2023).

A. G. ОТОКА¹, O. V. KHOLODILOV¹, L. D. CHEPIK²

¹Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

²Design and Technical Center of the Belarusian Railway, Minsk, Belarus

MOBILE SUSPENSION SYSTEM WITH RECIRCULATION FOR MAGNETIC POWDER DEFECTOSCOPY OF WAGON AND LOCOMOTIVE PARTS

There is substantiated the feasibility of using a mobile pumping station both with a magnetic suspension recirculation system for magnetic particle testing of various parts in the car and locomotive facilities. The economic efficiency of using a pumping station is analyzed in comparison with applying a magnetic suspension by spraying and watering from a container for individual control objects.

Keywords: suspension, pumping station, recirculation system, parts of carriages and locomotives, magnetic particle testing, magnetic indicator.

Получено 14.10.2023

УДК 629.373.3

*Д. С. ПУПАЧЁВ, Д. Д. КУЛИНИЧ, Н. А. ПИНЧУК, А. Н. САВИЦКИЙ,
М. В. БОЛОТНИКОВА*

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

СОЧЛЕНЕННЫЙ СНЕГОБОЛОТОХОД НА БАЗЕ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ УЗЛОВ И АГРЕГАТОВ

Анализируется возможность разработки и внедрения в производство двухзвенного сочлененного гусеничного снегоболотохода с высоким уровнем локализации и включающего уже производимых на отечественных предприятиях узлов и агрегатов. Предложена компоновка машины, выполненная в системе трехмерного проектирования КОМПАС 3D.

Ключевые слова: снегоболотоход двухзвенный гусеничный, 3D-модель, компоновочная схема.

Введение. В настоящее время в нефтяной, газовой, лесной отраслях, а также в геологоразведке всё большее применение находят двухзвенные сочлененные снегоболотоходы [1]. Этому способствуют, во-первых, их высокая проходимость, позволяющая преодолевать топи болот, снежную целину и песчаные наносы, и, во-вторых, наличие поворотно-переломного механизма, который повышает мобильность машины, а также улучшает ее ходовые качества. К плюсам таких машин можно отнести и наличие резинометаллической ленты (гусеницы), которая оказывает малое удельное давление на грунт и снижает воздействие на поверхностный плодородный слой почвы по сравнению с обычной металлической гусеницей. При проектировании данных машин предполагается возможность работы как на Крайнем Севере, так и в жарком климате при температурах окружающей среды от -50 до $+50$ °С.

Однако рассматриваемые машины не лишены недостатков, одним из которых является высокая стоимость и сложность конструкции [2, 3]. Данная проблема связана с необходимостью создания большого числа новых узлов и агрегатов, а также инструмента и оборудования для ремонта и обслуживания вездеходов. К минусам можно отнести и невысокую функциональность базовой конструкции ввиду малого количества сменных навесных органов и оборудования. Зачастую такие машины рассматриваются исключительно как транспортная единица для перевозки персонала, реже – для выполнения грузоподъемных или специализированных работ (аварийно-спасательное или пожарное оборудование, буровые установки).

Решением данной проблемы может стать разработка новой машины модульной конструкции на базе выпускаемых отечественной машиностроительной промышленностью (ОАО «МАЗ», ОАО «МТЗ», ОАО «МЗКТ» и т. д.) узлов и агрегатов при создании небольшого количества новых узлов и агрегатов или адаптацией под требуемые технические условия уже имеющихся.

Целью представленной работы стала оценка возможности создания сочлененного снегоболотохода с использованием существующих элементов конструкций автомобилей, тракторов и транспортно-технологических машин, выпускаемых промышленными предприятиями Республики Беларусь.

Анализ существующих разработок. Первые попытки создания шарнирно-сочлененных гусеничных машин предпринимались еще в начале XX века [4]. Британский инженер Б. Д. Диплок в 1912 г. запатентовал конструкцию сочлененного трактора, состоящего из двух звеньев, при этом второе звено выступало просто прицепом и не обеспечивало передачу крутящего момента на гусеничные звенья, выполненные по системе «Педрэйл». Прицеп соединялся с основной машиной с помощью шкворневого шарнира. Механизм поворота секций состоял из червячной пары, винт которой размещался на основной ведущей машине, а червячный сектор – на заднем звене.

Значительный скачок в разработке двухзвенных вездеходов произошел уже после Второй мировой войны, когда на основании результатов эксплуатации гусеничной техники союзниками в Западной Европе была создана специальная комиссия («Mud Committee», или «Комитет по грязи»), которая установила, что значительное число машин на гусеничном ходовом оборудовании застревает в неблагоприятных условиях именно в моменты изменения направления движения. На основании изысканий с учетом полученной информации к началу 1950-х годов в США появились такие машины, как Tucker SNO-CAT, GVW Polecat, предназначенные для перевозки людей.

В 1957 году канадской фирмой Canadair Limited был представлен прототип вездехода RAT (рисунок 1), который предназначался для проведения десантно-переправочных работ в труднопроходимой местности с возможностью транспортировки прицепов с грузом общей массы до 450 кг в условиях канадского ландшафта [4, 5]. Данная машина показала хорошие результаты при эксплуатации, однако дальнейшего развития не получила.



Рисунок 1 – Гусеничный транспортер RAT

В то же время для канадской фирмы Imperial Oil, Ltd. компанией Wilson, Nuttall, Raimond, Engineers, Inc. (WNRE) был разработан шарнирный вездеход

Musk-OX, имеющий грузоподъемность 20 тонн и приводимый в движение единственной силовой установкой мощностью в 375 л. с. Тем же производителем для нужд армии США в 1959 году был представлен проект трехзвеного шарнирного вездехода COBRA с полной массой в 12 тонн для перевозки пассажиров и грузов. Все шесть гусениц данного транспортного средства приводились в движение от одного двигателя через расширенную шарнирно-сочлененную карданную передачу с пятью активными дифференциалами, два из которых могли управляться водителем для реализации необходимого тягового усилия. В последующем WNRE выпустила ряд новых моделей и модификаций сочлененных внедорожников, в том числе с возможностью преодоления водных преград за счет плавучести. В Канаде продолжили работы в данном направлении фирмы Robin Nodwell и Formost [6].

Конец 70-х – начало 80-х годов XX века ознаменовались появлением новой техники, среди которой можно выделить шведские машины семейства Bandvagn 206 (BV-206 «Лось») (рисунок 2). Они оснащаются широкой номенклатурой силовых установок, таких как дизельный двигатель Mercedes-Benz мощностью 136 л.с. с турбонаддувом объемом 3,0 л или пятилитровый Deutz мощностью в 240 л. с., а также бензиновый Ford мощностью 136 л. с. и объемом в 2,8 л. Трансмиссия данных машин – гидравлическая автоматическая коробка передач MB W4A40, выполненная в едином блоке с раздаточной коробкой.



Рисунок 2 – Машина семейства Bandvagn 206

В 2015 году была представлена очередная машина Bandvagn Skyddad 10, отличающаяся повышенной, в сравнении с предшественницей, грузоподъемностью в 8000 кг (против 2250 кг для BV-206). Она оснащается дизельным двигателем Cummins 6,7L с турбонаддувом мощностью 275 л. с. и шестиступенчатой автоматической коробкой передач Allison. Как и предыдущая модель, является амфибией с возможностью движения по воде со скоростью до 4 км/ч.

Армия Сингапура представила свое виденье шарнирного вездехода в бронированной машине Bronco All Terrain Tracked Carrier (АТТС), третье поколение которой приведено на рисунке 3. Ее масса варьируется от 10 до 11 т в зависимости от исполнения. Максимальная грузоподъемность – до 7800 кг. Силовая установка представляет собой дизельный 6-цилиндровый двигатель с турбонаддувом Caterpillar 3126В на 350 л. с. Трансмиссия машины – автоматическая с шестью передачами переднего и одной передачей заднего хода. Компания-производитель ST Kinetics рассматривает возможности поставки таких машин не только в армейские подразделения, но и в гражданские ведомства, такие как спасательные службы и лесные хозяйства.



Рисунок 3 – Бронированный вездеход Bronco New-Gen (АТТС)

В СНГ машины рассматриваемого типа начали получать распространение также в конце 70-х годов XX века. Основным их назначением являлась транспортировка грузов при выполнении строительных работ (в частности, строительства газопроводов) в сложных климатических условиях. На данный момент серийный выпуск двухзвенных вездеходов налажен на Ишимбайском машиностроительном заводе АО «Машиностроительная компания «Витязь»» и представлен линейкой из двух машин – ДТ10 и ДТ-30, отличающихся друг от друга массой и грузоподъемностью. Масса первой – от 21,5 до 23,5 т (в зависимости от модификации), её грузоподъемность 10 т. Вторая имеет массу от 28 до 30 т и грузоподъемность 30 т [7]. В основе конструкций данного семейства лежит корпус «лодка», в котором устанавливаются все узлы и агрегаты. Их компоновка представлена схемой на рисунке 4.

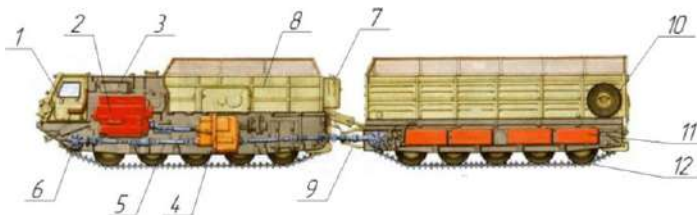


Рисунок 4 – Схема компоновки вездехода ДТ:

- 1 – кабина; 2 – силовая установка; 3 – кассета радиаторов; 4 – трансмиссия, совмещенная с раздаточной коробкой; 5 – карданная передача; 6 – редукторы ведущих звездочек; 7 – гидравлический бак; 8 – грузовая платформа; 9 – механизм поворота; 10 – опорный каток; 11 – топливный бак; 12 – резинометаллическая гусеничная лента

Выполненный анализ показал, что компоновочные решения, характерные для большинства машин данного класса, которые производятся хоть сколько-то значимыми партиями, отличаются множеством карданных передач и сложной трансмиссией.

Подбор агрегатов и разработка компоновки машины. Разработка машины производилась на основании анализа существующих конструкций, предполагаемой области применения и производимых узлов и агрегатов.

Создание модели осуществлялось в программе для двухмерного и трехмерного проектирования КОМПАС 3D. На основании проведенного анализа узлов и агрегатов была спроектирована концептуальная модель машины, представленная на рисунке 5.

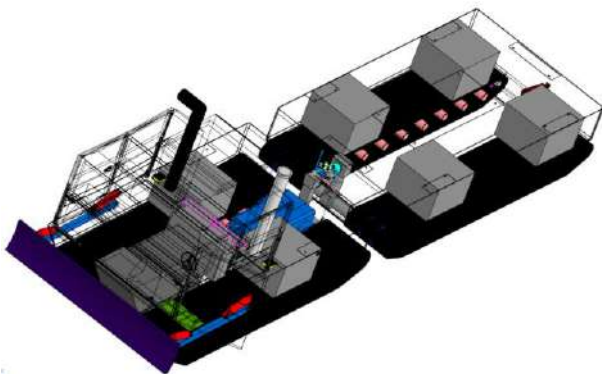


Рисунок 5 – Концептуальная 3D-модель разрабатываемой машины

С целью отказа от сложных и громоздких раздаточных коробок и уменьшения количества промежуточных (карданных) передач, а также для повышения возможности использования локализованных узлов и агрегатов была разработана упрощенная схема привода машины (рисунок 6). В соответствии с ней крутящий момент от силового агрегата 1 через карданную передачу 2 и механизм сцепления 3 подается на коробку передач 4, которая преобразует его и передает на главную передачу 5. Далее момент передается на бортовые передачи 6, связанные с ведущими звездочками 7 первого звена и распределительной конической передачей 8. От последней крутящий момент через карданную передачу 9 и приемную коническую передачу 10 направляется без его трансформации на ведущие звездочки задней секции.

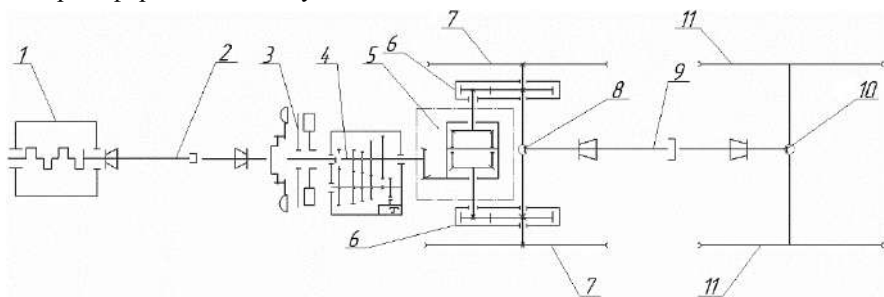


Рисунок 6 – Кинематическая схема проектируемой машины:

- 1 – силовая установка; 2, 9 – карданная передача; 3 – механизм сцепления;
- 4 – коробка переключения передач; 5 – главная передача; 6 – бортовая передача;
- 7, 11 – ведущая звездочка; 8, 10 – коническая передача

С учетом приведенной кинематической схемы было разработано компоновочное решение, представленное на рисунке 7. Предполагается, что здесь в роли трансмиссии с главной передачей выступает гидромеханическая трансмиссия от сельскохозяйственного трактора МТЗ 3022 [8]. Коробка передач – ступенчатая, диапазонная с шестернями постоянного зацепления, обеспечивает получение 24 передач переднего и 12 заднего хода и привод независимого вала отбора мощности.

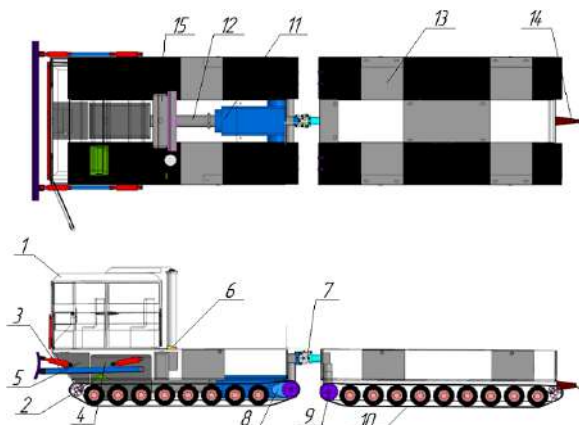


Рисунок 7 – Предлагаемое компоновочное решение:

1 – кабина; 2 – лебедка; 3 – бульдозерное оборудование; 4 – силовая установка; 5 – гидравлический бак; 6 – дефлектор; 7 – механизм поворота; 8 – бортовая передача; 9 – ведущая звездочка; 10 – резинометаллическое полотно; 11 – трансмиссия; 12 – карданная передача; 13 – топливный бак; 14 – прицепное устройство; 15 – кассета радиаторов

Основными силовыми агрегатами, предполагаемыми для установки на машину, являются двигатели, выпускаемые в СНГ. В частности – ЯМЗ 53602 или Д-262.4Е5 – шестицилиндровые дизели с рядным расположением цилиндров и турбонаддувом, мощностью в 229–265 кВт и крутящим моментом 1226–1500 Н·м [9, 10].

Для поддержания оптимальной температуры работы всех элементов машины предусмотрена установка кассет радиаторов, размещаемых за двигателем. Данное решения обусловлено конструкцией корпуса (лодки), а также позволяет понизить центр тяжести машины для улучшения ее ходовых качеств. Подача воздуха к радиаторам происходит через надстройку на кабине.

Кабина машины от тягача МЗКТ-742910 рассчитана на комфортное пребывание семи человек, включая водителя. Гусеницы – резинометаллические, элементы ходовой части (опорные и направляющие катки) безпрокольного типа с упругим полиуретановым наполнителем. Принцип и схема работы механизма регулировки натяжения гусеницы аналогичны использованным в тракторе МТЗ 1502.

Для передачи крутящего момента на заднюю секцию и выполнения поворотов путем складывания звеньев была принята представленная на рисунке 8 концептуальная схема поворотного-переломного механизма, нашедшего применение на сочлененных тракторах (Амкодор 5300, К-702 и др.). Такой механизм при помощи гидравлического привода цилиндров позволяет машине изменять свое положение в пространстве. Шарнир первой секции жестко крепится к корпусу машины. Изменение длин штоков цилиндров 3 ведет к повороту шарниров 1 и 4 относительно друг друга. Изменение длин штоков цилиндров 7 ведет к перелому звеньев по оси y . Вал шарнира крепится на втором звене в подшипниковых узлах, что позволяет совершать вращательное движение. Гидравлическая схема машины представлена двумя контурами. Первый контур ответственен за механизм поворота. Второй отвечает за управление устанавливаемым навесным рабочим оборудованием.

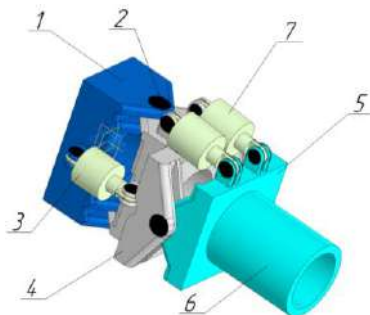


Рисунок 8 – Модель поворотного-переломного механизма:

- 1 – шарнир первого звена; 2 – палец шарнира; 3 – гидравлические цилиндры поворота; 4 – промежуточный шарнир; 5 – шарнир второго звена; 6 – вал шарнира; 7 – гидравлические цилиндры изменения угла

Определение параметров машины. Для оценки технических характеристик проектируемой конструкции определим удельное давление на грунт, выполним анализ устойчивости при опрокидывании и тяговый расчет.

С учетом предполагаемой максимальной массы машины $m = 33750$ кг удельное давление транспортного средства на грунт

$$P = \frac{mg}{4L_{\text{оп}}B} = \frac{33750 \cdot 9,8}{4 \cdot 0,88 \cdot 3,7} = 25395 \text{ Па,}$$

где g – ускорение свободного падения; $L_{\text{оп}}$ – длина опорной поверхности гусениц; B – ширина гусеницы.

В таблице 1 для сравнения представлены характеристики удельного давления существующей техники с разрабатываемой машиной (РМ). Из таблицы 1 видно, что давление рассматриваемого снегоболотохода на грунт находится в диапазоне значений, соответствующем аналогичным зарубежным машинам.

Таблица 1 – Удельное давление транспортных средств на грунт

Машина	РМ	МТЗ-80	МТЗ-2103	Шерп	ДТ-30 Витязь	Bandvagn 206
Удельное давление на грунт, кПа	25,4	140,0	46,0	9,8	29,0	12,7

Расчет устойчивости при опрокидывании выполняем в соответствии с [11].

Предельный статический угол подъема, при котором может стоять, не опрокидываясь, заторможенный гусеничный вездеход, характеризуется смещением центра давления D к задней кромке гусеницы (рисунок 10), а предельный угол спуска – смещением центра давления к ее передней кромке.

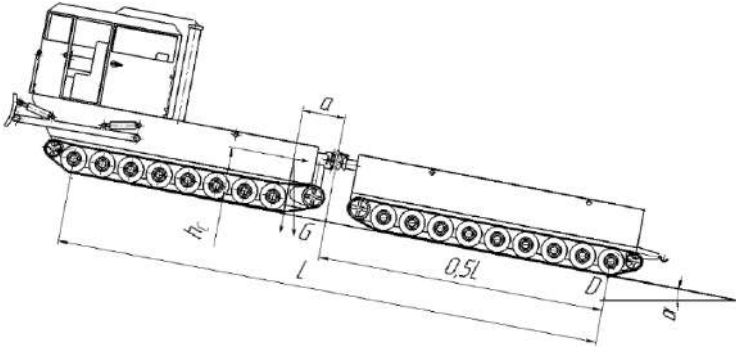


Рисунок 10 – Схема сил, действующих на гусеничный вездеход при подъеме

Уравнения моментов относительно оси, проходящей через точку D , для двух рассматриваемых случаев имеют вид

$$G(0,5L + a) \cos \alpha_{\text{lim}_1} - Gh_C \sin \alpha_{\text{lim}_1} = 0;$$

$$G(0,5L - a) \cos \alpha_{\text{lim}_2} - Gh_C \sin \alpha_{\text{lim}_2} = 0,$$

где G – сила тяжести вездехода; α_{lim_1} , α_{lim_2} – предельные значения угла подъема и спуска соответственно; h_c – расстояние от центра тяжести вездехода до опорной поверхности.

Отсюда находим

$$\text{tg } \alpha_{\text{lim}_1} = \frac{0,5L + a}{h_c} = \frac{0,5 \cdot 5,7 + 0,35}{0,93} = 0,96;$$

$$\text{tg } \alpha_{\text{lim}_2} = \frac{0,5L - a}{h_c} = \frac{0,5 \cdot 5,7 - 0,35}{0,93} = 0,94.$$

Следовательно, предельный угол подъема равен 44° , спуска – 43° .

Устойчивость вездехода на поперечном склоне, расположенном под углом α к горизонту (рисунок 11), определяют из уравнения моментов относительно оси, проходящей через центры контактов колес одного борта

$$G \frac{B}{2} \cos \beta - Gh_C \sin \beta - R_{zH} B = 0,$$

где B – ширина колеи.

В момент, при котором машина оказывается в критическом положении, реакция R_{zH} разгруженного борта становится равной нулю, поэтому

$$\operatorname{tg} \beta_{\text{lim}} = 0,5 \frac{B}{h_c} = 0,5 \frac{1,815}{1,055} = 0,860,$$

что соответствует значению $\beta_{\text{lim}} = 41^\circ$.

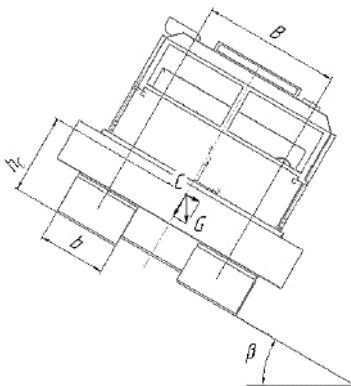


Рисунок 11 – Схема сил при расположении вездехода на поперечном уклоне

Тяговые расчеты предполагают проверку выполнения условия [12]

$$P_{\text{сц}} \geq P_{\text{к}} \geq W, \quad (1)$$

где $P_{\text{сц}}$ – сила сцепления гусениц с опорной поверхностью; $P_{\text{к}}$ – окружная сила всех движителей (приводных колес, гусениц); W – сумма сил сопротивления движению машины.

Крутящий момент на ведущем колесе зависит от момента, развиваемого двигателем на коленчатом валу $M_{\text{д}}$, передаточного числа $i_{\text{тр}}$ трансмиссии и её КПД – $\eta_{\text{тр}}$ [13]:

$$M_{\text{к}} = M_{\text{д}} i_{\text{тр}} \eta_{\text{тр}}.$$

При блокировке высоких передач удастся получить передаточное число $i_{\text{тр}} = 34,64$. Тогда окружная сила на ведущем колесе радиусом $r_{\text{к}}$

$$P_{\text{к}} = \frac{M_{\text{к}}}{r_{\text{к}}} = \frac{1226 \cdot 34,64 \cdot 0,9}{0,2} = 191109 \text{ Н.}$$

Сила сцепления определяется выражением

$$P_{\text{сц}} = \varphi_{\text{сц}} G_{\text{сц}},$$

где $\varphi_{\text{сц}}$ – коэффициент трения сцепления; $G_{\text{сц}}$ – нагрузка на ведущие колёса, принимаем равной силе тяжести G . Подстановка значений даёт

$$P_{\text{сц}} = 0,8 \cdot 330750 = 264600 \text{ Н,}$$

следовательно, первое неравенство условия (1) выполняется.

Суммарная сила сопротивления находится по формуле

$$W = W_{\text{п}} + W_{\text{и}} + W_{\text{в}} + W_{\text{y}}, \quad (2)$$

где $W_{\text{п}}$ – сила сопротивления передвижению,

$$W_{\text{п}} = fG = 0,06 \cdot 330750 = 19845 \text{ Н},$$

$f = 0,06$ – коэффициент сопротивления передвижению;

$W_{\text{и}}$ – сила инерции, возникающая при разгоне,

$$W_{\text{и}} = \frac{Gv}{gt_{\text{р}}},$$

v – скорость машины в конце разгона, м/с; $t_{\text{р}}$ – время разгона из состояния покоя до скорости v ;

$$W_{\text{и}} = \frac{330750 \cdot 6,94}{9,8 \cdot 35} = 7808 \text{ Н};$$

$W_{\text{в}}$ – сила давления ветра,

$$W_{\text{в}} = p_{\text{в}} F_{\text{в}},$$

$p_{\text{в}}$ – наибольшее допустимое давление ветра, Па; $F_{\text{в}}$ – расчетная площадь наибольшей парусности (площадь лобовой поверхности), м²;

$$W_{\text{в}} = 138 \cdot 9,58 = 1322 \text{ Н};$$

W_{y} – сила сопротивления, связанная с движением по подъему (знак «+») или спуску (знак «-») [11],

$$W_{\text{y}} = \pm G \sin \alpha. \quad (3)$$

Определим максимально возможное значение угла α исходя из необходимости выполнения второй части условия (1).

Из формул (1) и (2) следует, что

$$W_{\text{y}_{\text{max}}} = P_{\text{к}} - W_{\text{п}} - W_{\text{и}} - W_{\text{в}} = 191109 - 19845 - 7808 - 1322 = 162134 \text{ Н}.$$

Тогда из формулы (3) получаем

$$\alpha_{\text{max}} = \arcsin \frac{W_{\text{y}_{\text{max}}}}{G} = \frac{162134}{330750} = 29,4^{\circ}.$$

Заключение. В работе предложено компоновочное решение двухзвенного вездехода на основе узлов и агрегатов отечественной разработки. Выполненные расчеты показали, что удельное давление на грунт разработанной машины с полной загрузкой не превышает 25,4 кПа и является хорошим показателем для машин данного класса. На основе анализа баланса мощности установлено, что максимальный угол подъема, который может быть реализован примененным в конструкции оборудованием, составляет 29,4°.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Studies of several large-scale forestry operating vehicles at home and abroad and prospect of vehicle type design / S. Sun [et al.] // Journal of Beijing Forestry University. – 2019. – Vol. 41, no. 6. – P. 154–166.

2 Research on a Path-Tracking Control System for Articulated Tracked Vehicles / D. Cui [et al.] // Strojniški Vestnik = Journal of Mechanical Engineering. – 2020. – Vol. 66, no. 5. – P. 311–324.

3 **Hu, K.** Dynamic modelling and stability analysis of the articulated tracked vehicle considering transient track-terrain interaction / K. Hu, K. Cheng // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2021. – Vol. 35, no. 4. – P. 1343–1356.

4 **Nuttall, C. J.** Some notes on the steering of tracked vehicles by articulation / C. J. Nuttall // Journal of Terramechanics. – 1964. – Vol. 1, no. 1. – P. 38–74.

5 **Степанов, А. П.** Сочлененные гусеничные и колесные машины высокой проходимости / А. П. Степанов // Техника и вооружение: вчера, сегодня, завтра. – 2003. – № 5. – С. 37–40.

6 **Степанов, А. П.** Сочлененные гусеничные и колесные машины высокой проходимости / А. П. Степанов // Техника и вооружение: вчера, сегодня, завтра. – 2003. – № 10. – С. 42–44.

7 **Горячев, В. Т.** Двухзвенные транспортёры ДТ-10П и ДТ-10. Техническое описание и инструкция по эксплуатации / В. Т. Горячев. – М. : Военное издательство, 1988. – 272 с.

8 2822ДЦ-000010 РЭ. Руководство по эксплуатации тракторов «БЕЛАРУС-2522В/2522ДВ/2822ДЦ/3022В/3022ДВ» и их модификаций. – Минск : РУП «Минский тракторный завод», 2008. – 395 с.

9 262Е5 – 0000100 РЭ. Руководство по эксплуатации дизеля Д-262Е5. – Минск : ОАО «Управляющая компания холдинга «Минский моторный завод», 2018. – 137 с.

10 536.3902150 РЭ 2016. Руководство по эксплуатации двигателей ЯМЗ-536, ЯМЗ-5361, ЯМЗ5362, ЯМЗ-5363, ЯМЗ-5364, их модификации и комплектации. – Ярославль : Автодизель, 2016. – 285 с.

11 Многоцелевые гусеничные и колесные машины : теория / В. П. Бойков [и др.]. – Минск : Новое знание; М. : Инфра-М, 2012. – 542 с.

12 **Довгяло, В. А.** Машины для земляных работ. Практикум / В. А. Довгяло, А. М. Щемелев, Ю. А. Шебзухов. – Гомель : БелГУТ, 2016. – 391 с.

13 Трансмиссии тракторов и автомобилей : лабораторный практикум / А. И. Бобровник [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2012. – 212 с.

*D. S. PUPACHOU, D. D. KULINICH, N. A. PINCHUK, A. N. SAVITSKY, M. V. BOLOTNIKOVA
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

ARTICULATE SNOW AND SWAMPISH VEHICLE BASED ON DOMESTIC UNITS AND COMPONENTS

The possibility of developing and introducing into production a two-link articulated tracked snow and swamp-going vehicle with a high level of localization made of units and components produced at domestic enterprises is analyzed. There is proposed a model of the vehicle, created in the KOMPAS 3D three-dimensional design system.

Keywords: two-link caterpillar snow and swamp vehicle, 3D model, layout diagram.

Получено 15.10.2023

УДК 629.4.015:629.424.24:004.94

Д. П. РУСОВ, А. О. ШИМАНОВСКИЙ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

НАХОЖДЕНИЕ ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА РАМЫ ТЕЛЕЖКИ ДИЗЕЛЬ-ПОЕЗДА ДРБ1

Разработаны геометрическая модель рамы тележки прицепного вагона дизель-поезда ДРБ1 со сроком эксплуатации 43 года в среде программы Autodesk Inventor и на ее основе конечно-элементная модель в среде ANSYS Workbench. Получены распределения напряжений и деформаций в конструкции под действием статических и динамических нагрузок, аналогичных испытательным, которые достаточно хорошо соответствуют результатам экспериментов. На основе расчетно-экспериментальной оценки выявлено, что рама тележки рассматриваемого прицепного вагона обладает остаточным ресурсом не менее 19 лет.

Ключевые слова: дизель-поезд, прицепной вагон, рама тележки, конечно-элементная модель, остаточный ресурс.

Первые дизель-поезда типа ДРБ1 появились на Белорусской железной дороге в 1969 г. Их назначенный срок службы составляет 20 лет с возможностью продления до 35 лет. В ближайшее время к сроку эксплуатации 35 лет подойдут около 67 % вагонов. В то же время с учетом отсутствия отказов металлоконструкций таких вагонов можно предположить, что ресурс их несущих конструкций до конца не выработан. Поэтому имеется потребность в анализе технического состояния металлоконструкций головных и прицепных вагонов дизель-поезда типа ДРБ1 после длительной эксплуатации, а также оценки остаточного ресурса их несущих конструкций.

Оценка безопасности эксплуатации по техническому состоянию определяется процессами, проходящими в металлоконструкции вагонов, которые вызывают появление трещин и последующие разрушения [1]. Поэтому такая оценка непосредственно связана с анализом напряженно-деформированного состояния конструкций вагонов. Анализ ресурса железнодорожного подвижного состава различного назначения посвящено значительное число публикаций, однако они главным образом связаны с исследованиями грузовых вагонов и локомотивов [2–5]. Лишь относительно недавно появились публикации, в которых рассматривается подвижной состав для пассажирских перевозок.

Так, выполненная в статье [6] оценка напряженно-деформированного состояния длительно эксплуатировавшихся вагонов метрополитена типа E и E_M показала, что срок их службы может быть продлен до 50 лет. Аналогичный анализ кузовов вагона метрополитена серии 81 показал, что в этом случае срок службы можно увеличить на 15 лет [7].

Результаты экспериментально-теоретической оценки прочности балок центрального подвешивания дизель-поездов ДР1А, а также варианты модернизации с целью увеличения прочности конструкции приведены в статье [8]. Анализ возможности продления срока службы рессорного подвешивания электропоезда *Afrosiyob* представлен в работе [9].

В статье [10] проведен анализ неисправностей дизель-поездов серии ДР1 и рассмотрены особенности построения моделей для оценки напряженно-деформированного состояния кузова. Экспериментальный анализ напряжений в элементах несущих конструкций и узлах передачи тяги головных вагонов дизель-поездов ДР1А, позволивший разработать модели для численных расчетов уровней напряжений и сил, рассмотрен в публикации [11].

В работе [12] выполнена оценка усталостной прочности опытного варианта рамы тележки дизель-поезда ДПКр-2 и сделан вывод о необходимости усиления её конструкции.

Техническое состояние дизель-поездов серии ДДБ1 после длительной эксплуатации рассмотрено в статье [13]. Установлено, что прочность при всех расчетных режимах удовлетворяет всем необходимым требованиям. На основе расчетов определены зоны, в которых необходимо выполнять контроль толщины основного металла при осуществлении плановых видов ремонта. Аналогичные исследования для вагонов дизель-поездов серии ДРБ1 представлены в работе [14], причем в ней установлены значения толщин конструктивных элементов, которые следует использовать при анализе их прочности с учетом длительной эксплуатации.

Таким образом, выполненный анализ показывает, что на данный момент решены некоторые частные вопросы, связанные с техническим состоянием вагонов дизель-поездов серии ДРБ1, обусловленным их длительной эксплуатацией, но определение остаточного ресурса не осуществлялось. Целями представленной работы стали разработка конечно-элементной модели рамы тележки прицепного вагона данного дизель-поезда и оценка на ее основе остаточного ресурса конструкции.

В ходе предварительного обследования установлено, что коррозионный износ несущих конструкций выбранной рамы тележки, функционировавшей в вагоне модели 63-367 со сроком эксплуатации 43 года, незначителен, в ней отсутствуют изломы и трещины. От нее был отрезан образец, который представлял собой левую часть рамы.

Испытания (рисунок 1) производились с целью оценки напряжений, возникающих в несущей конструкции под действием статических и периодических динамических нагрузок, и дальнейшего обоснования остаточного срока службы. На основе выполненного анализа определены места возникновения наибольших напряжений, где затем располагались тензометрические датчики. Схема их наклейки при ресурсных испытаниях рамы тележки дизель-поезда ДРБ1 представлена на рисунке 2.



Рисунок 1 – Проведение натуральных испытаний рамы тележки

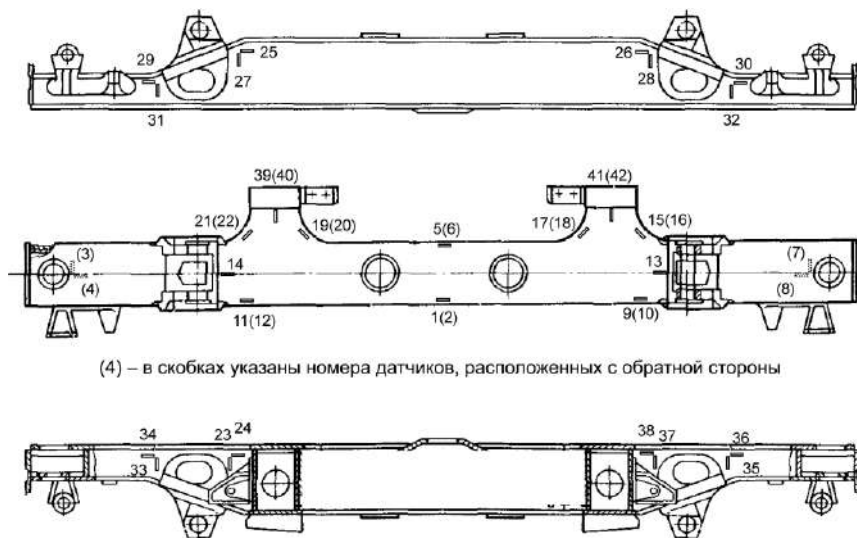


Рисунок 2 – Схема наклейки тензометрических датчиков при ресурсных испытаниях рамы тележки дизель-поезда ДРБ1

Режим испытаний устанавливался исходя из того, что амплитуды динамических напряжений должны в 1,2–2,0 раза превышать расчетный предел выносливости при базовом числе циклов. При этом расчетное число циклов испытаний должно составлять от $5 \cdot 10^5$ до 10^7 циклов. По результатам натурных испытаний построены два графика: статических (рисунок 3) и амплитудных (рисунок 4) напряжений, сумма которых дает максимальные значения напряжений в конструкции при движении по перегону.

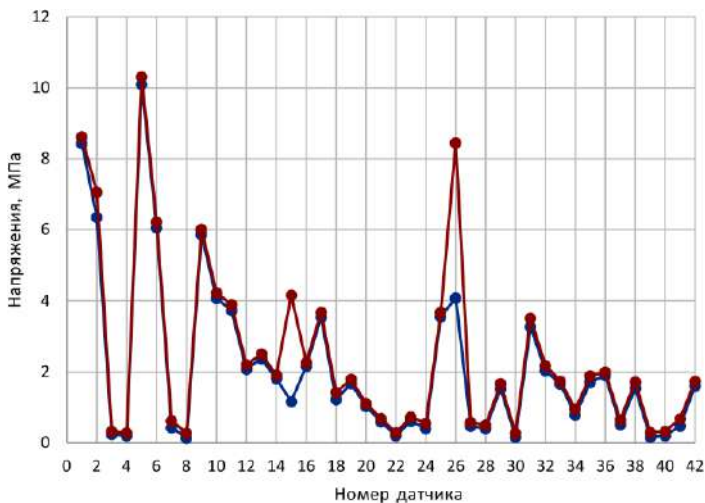


Рисунок 3 – Статические напряжения

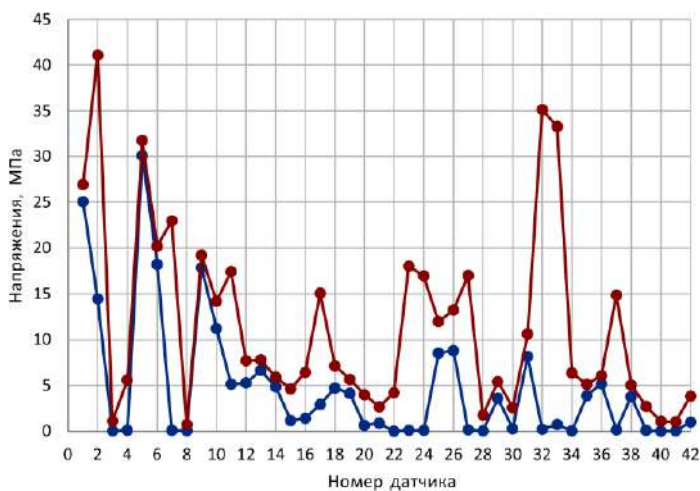


Рисунок 4 – Амплитудные напряжения

Из приведенных графиков следует, что наибольшие напряжения возникают вблизи мест приложения нагрузки и расположения опор. В дальнейшем полученные значения использованы для сравнения с напряжениями, найденными расчетом.

В среде программного комплекса Autodesk Inventor на основе имеющейся конструкторской документации и измерений конструкции в испытательном центре БелГУТа была создана 3D-модель рамы тележки прицепного вагона дизель-поезда ДРБ1 (рисунок 5). Она соответствовала образцу, с которым проводился натурный эксперимент.

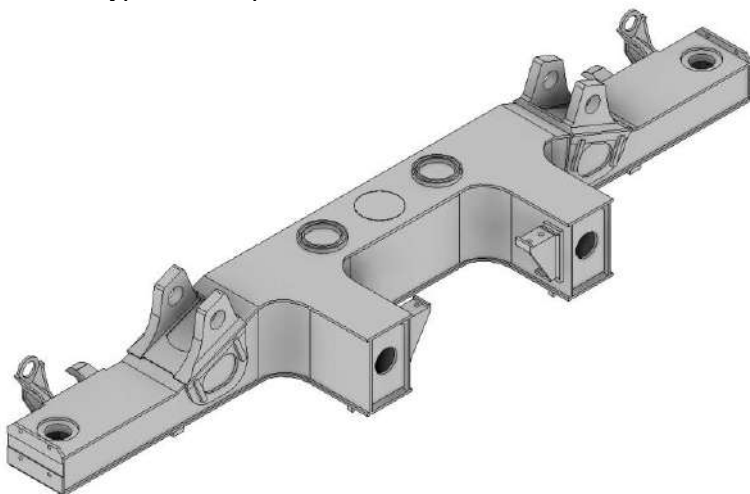


Рисунок 5 – 3D-модель фрагмента рамы тележки

В среде программного комплекса ANSYS Workbench на основе созданной геометрической модели была разработана конечно-элементная модель. При ее разработке учитывалось, что материал конструкции – сталь с модулем Юнга $2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициентом Пуассона 0,3. С учетом степени сложности геометрии и требуемой точности решения использован десятиузловой элемент SOLID187, который рекомендуется применять для моделирования объемов с большим количеством поверхностей [15]. Характерный размер сетки принят равным 7 мм. Созданная модель включала 256354 конечных элемента и 501398 узлов. На рисунке 6 показан ее фрагмент.

В ходе испытаний рама опиралась на горизонтальную поверхность в четырех местах [16], как это показано на рисунке 7. При задании граничных условий было принято, что все опоры гладкие. Также введены дополнительные связи для обеспечения неподвижности конструкции в горизонтальной плоскости. К скользунам боковой балки прикладывалась периодическая вертикальная сила с амплитудой 55 кН.

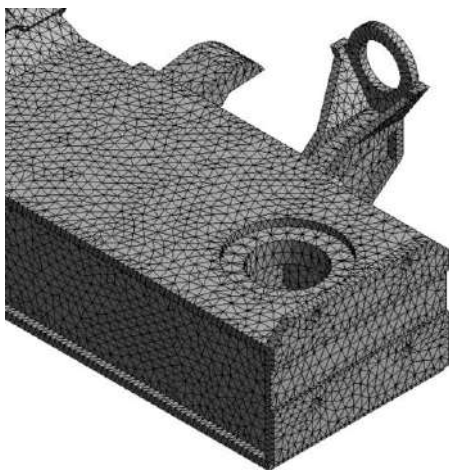


Рисунок 6 – Фрагмент конечно-элементной сетки

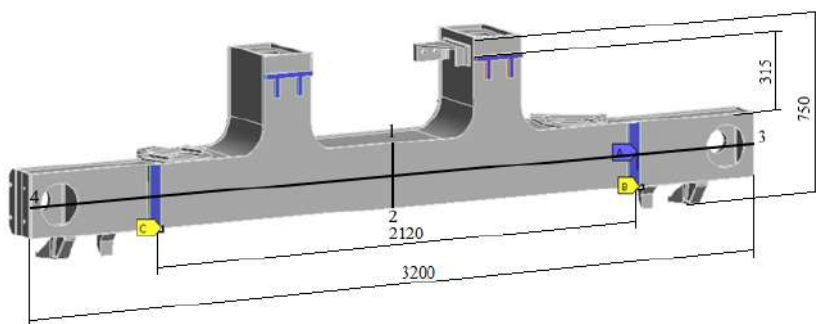


Рисунок 7 – Места крепления рамы при испытаниях

В результате расчетов получены картины распределения напряжений, Па, и деформаций, м, в конструкции (рисунок 8, 9). Как и при эксперименте, наиболее нагруженными оказались области вблизи места приложения нагрузки и креплений опор (см. рисунок 8). Результаты для случаев статического и динамического нагружений отличались незначительно. Отличие полученных значений от результатов испытаний при динамическом воздействии было связано, возможно, с отрывом рамы от основания при испытаниях и соответствующими изменениями граничных условий, которые не учитывались при расчетах.

Также были получены зависимости напряжений вдоль линий на поверхностях листов рамы тележки. На рисунке 10 представлены графики, соответствующие линиям 1–2 и 3–4 (см. рисунок 7) для внешних и внутренних сторон листа.

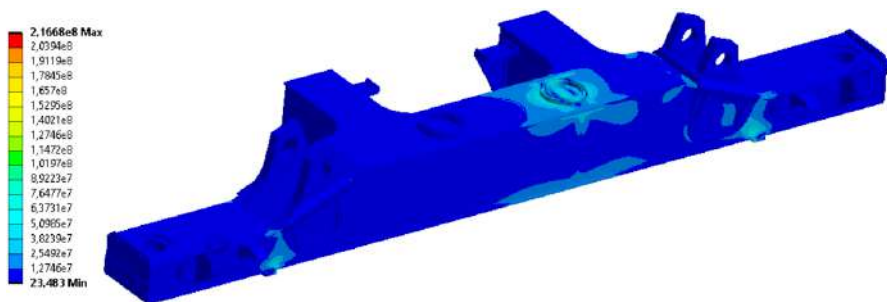


Рисунок 8 – Эквивалентные по Мизесу напряжения, Па, в раме

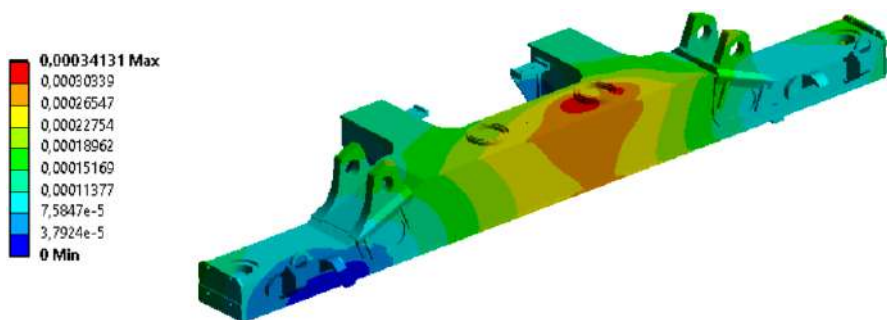


Рисунок 9 – Полная деформация, м

Из рисунка 10, *a* видно, что наибольшие напряжения возникают вблизи сварного соединения, причем на внешней поверхности листа они на 10 % больше, чем на внутренней. Рисунок 10, *б* показывает, что максимальные напряжения возникают вблизи места приложения нагрузки. Они также достаточно велики в местах крепления опор. Если в центральной части листа напряжения на внутренней его поверхности больше, чем на внешней, то в местах расположения опор и на концах балки ситуация меняется на противоположную.

Диаграмма, приведенная рисунке 11, показывает, что значения напряжений, которые получены при проведении натурного эксперимента и в ходе компьютерного моделирования, отличаются незначительно. Погрешность результатов составляет в среднем менее 8 %, и только в некоторых точках достигает 15 %, что говорит об адекватности созданной модели. Таким образом, появляется возможность с помощью созданной модели в дальнейшем проводить численные эксперименты для любых параметров конструкции, не затрачивая на это значительные материальные ресурсы. Следовательно, с помощью расчетов по созданной модели можно принимать решение о дальнейшей эксплуатации конструкции либо необходимости ее модернизации.

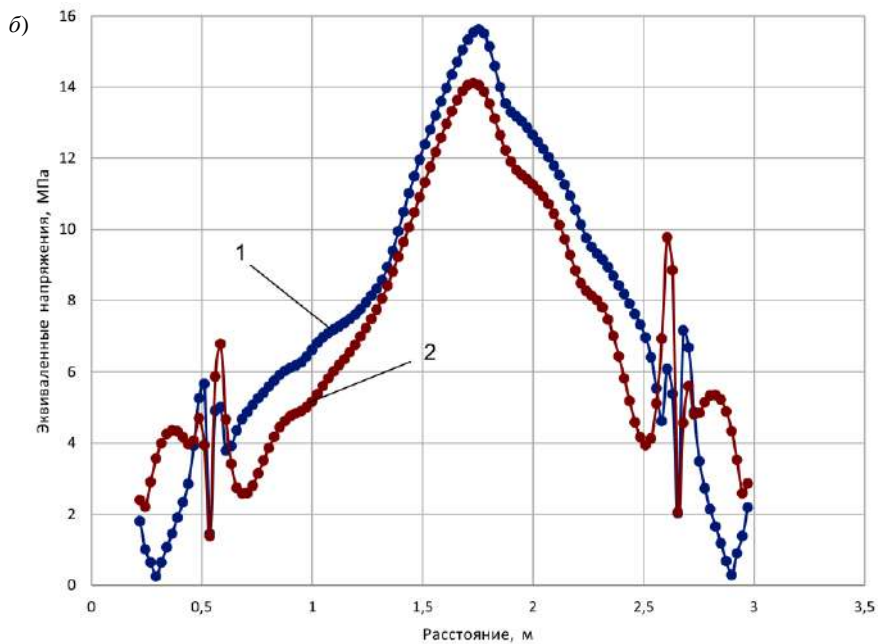
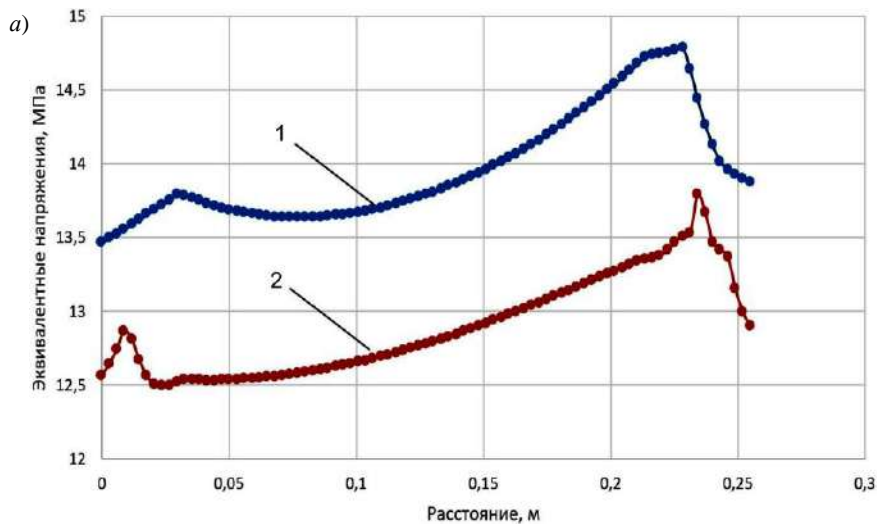


Рисунок 10 – Результаты расчета эквивалентных напряжений для точек, расположенных на линии 1–2 (а) и линии 3–4 (б) (см. рисунок 7):
 1 – внешняя; 2 – внутренняя сторона листа

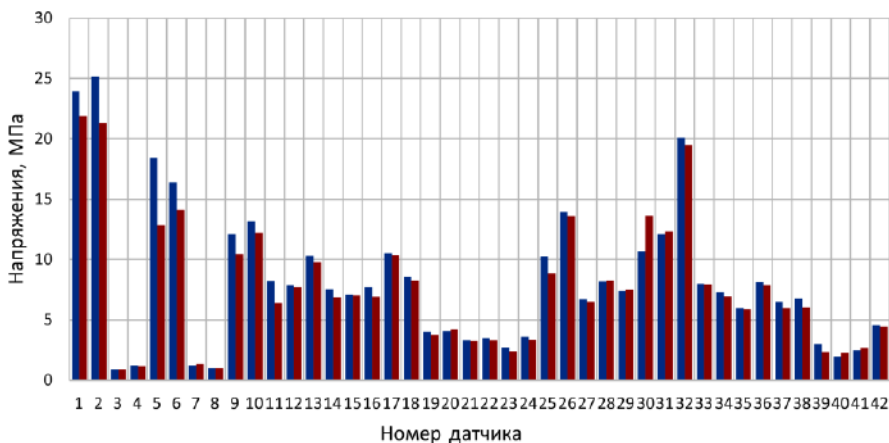


Рисунок 11 – Сравнение результатов эксперимента (левый столбец) и расчета

На основе результатов определения напряжений выполнен расчет остаточного ресурса рамы тележки по критерию многоциклового усталости в соответствии с методикой, представленной в [17, 18].

Нормативное количество циклов динамических напряжений от продольных сил, которые действуют на вагон через автосцепку, за 1 год эксплуатации $N_{c1} = 20200$. Полученные в результате расчета долговечности в контрольных зонах – местах расположения тензорезисторов (см. рисунок 2) – представлены в таблице 1, из которой следует, что усталостная прочность конструкции рамы тележки определяется центральной зоной балки, где прикладывается нагрузка от кузова вагона. При этом остаточный ресурс составляет не менее 19,2 года.

Таблица 1 – Долговечность исследуемых зон

Номер тензорезистора	Остаточный ресурс, лет
1	30,9
2	32,9
5	19,2
6	58,3
32	50,5
3, 4, 7–31, 33–42	>100,0

Таким образом, в ходе выполнения работы получены следующие основные результаты.

1 Проведенные стендовые испытания образца отслужившей нормативный срок службы рамы тележки дизель-поезда ДРБ1 показали, что наибольшие статические напряжения составляют от 8 до 10 МПа, а динамические – от 35 до 40 МПа и наблюдаются в местах приложения нагрузки и закрепления на опорах.

2 Разработана геометрическая 3D-модель рамы тележки в программном комплексе Autodesk Inventor. На ее основе создана конечно-элементная модель в среде программного комплекса ANSYS Workbench. Проведены расчеты напряженно-деформированного состояния рамы тележки при действии статических и динамических нагрузок, использованных при проведении натуральных испытаний. Результаты расчетов показали достаточное хорошее совпадение с результатами натуральных экспериментов. Наибольшее отклонение не превысило 15 %.

3 По результатам расчетно-экспериментальной оценки долговечности по критерию многоциклового усталости, сделано заключение о том, что несущая металлоконструкция опытного образца обладает остаточным ресурсом не менее 19,2 года эксплуатации, который определяется прочностью в центральной части рамы тележки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Сычев, П. В.** Применение метода влияния рассеянных микрповреждений на сопротивление росту трещин при оценке остаточного ресурса подвижного состава железных дорог / П. В. Сычев // Наука и техника транспорта. – 2015. – № 1. – С. 53–58.

2 **Сенько, В. И.** Итоги комплексной оценки остаточного ресурса литых деталей тележек грузовых вагонов / В. И. Сенько, И. Ф. Пастухов, М. И. Пастухов // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2006. – № 1–2 (12–13). – С. 5–10.

3 **Сычев, П. В.** Выбор моделей оценки остаточного ресурса подвижного состава при продлении срока его службы / П. В. Сычев // Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство. – 2015. – Т. 8, № 8. – С. 156–160.

4 Evaluation of railway vehicle car body fatigue life and durability using a multidisciplinary analysis method / В. Miao [et al.] // International Journal of Vehicle Structures and Systems. – 2009. – Vol. 1, is. 4. – P. 85–92.

5 Investigation of the stress-strain state of a wheel flange of the locomotive by the method of finite element modeling / К. Zhussupov [et al.] // Mechanika. – 2018. – Vol. 24, no. 2. – P. 174–181.

6 **Борисов, С. В.** Прогнозирование остаточного ресурса и продление срока службы вагонов метрополитена / С. В. Борисов // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2006. – № 4 (9). – С. 39–44.

7 **Закс, М. Н.** Продление срока службы вагонов метрополитена / М. Н. Закс, И. А. Рюмин // Тяжелое машиностроение. – 2021. – № 1–2. – С. 44–50.

8 **Бондарев, А. М.** Экспериментально-теоретическая оценка показателей прочности балок центрального подвешивания дизель-поездов ДР1А / А. М. Бондарев, Д. А. Ягода, В. М. Скобленко // Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. – 2011. – № 37. – С. 7–19.

9 **Хромова, Г. А.** Разработка методики продления срока службы рессорного подвешивания высокоскоростного электропоезда Afrosiyob / Г. А. Хромова, М. А. Махамдалиева // Universum: технические науки. – 2022. – № 2–3 (95). – С. 66–70.

10 **Огородников, Л. В.** Анализ неисправностей дизель-поездов серии ДР1 и подготовка для оценки напряженно-деформированного состояния несущих металлоконструкций / Л. В. Огородников, Г. Е. Брильков, С. М. Пытлев // Проблемы безопасно-

сти на транспорте : материалы XI Междунар. науч.-практ. конф. В 2 ч. Ч. 1. – Гомель : БелГУТ, 2021. – С. 125–127.

11 Разработка мероприятий по улучшению показателей прочности несущих конструкций головных вагонов дизель-поездов ДР1А на основании выполненных экспериментально-теоретических работ / А. М. Бондарев [и др.] // Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. – 2014. – № 1 (49). – С. 132–141.

12 Оценка напряжённно-деформированного состояния рамы тележки дизель-поезда ДПКр-2 при действии расчётных и эксплуатационных нагрузок / С. А. Костица [и др.] // Наука и прогресс транспорта. – 2019. – № 1 (79). – С. 128–138.

13 **Афанаськов, П. М.** Техническое состояние дизель-поездов ДДБ1 после длительной эксплуатации / П. М. Афанаськов, Р. И. Чернин, И. А. Титович // Проблемы безопасности на транспорте : материалы IX Междунар. науч.-практ. конф. В 2 ч. Ч. 1. – Гомель : БелГУТ, 2019. – С. 102–104.

14 **Пуцято, А. В.** Анализ технического состояния парка вагонов дизель-поездов серии ДРБ-1 Белорусской железной дороги / А. В. Пуцято, Л. В. Огородников, С. М. Пытлев // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 190–194.

15 Инженерный анализ в ANSYS Workbench : учеб. пособ. / В. А. Бруяка [и др.]. Самара : Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 271 с.

16 **Русов, Д. П.** Конечно-элементное моделирование деформирования рамы тележки дизель-поезда / Д. П. Русов // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XXVI Респ. науч. конф. студентов и аспирантов. В 2 ч. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2023. – Ч. 1. – С. 70–71.

17 **Гасюк, А. С.** Расчётно-экспериментальные методы оценки ресурса базовых частей подвижного состава / А. С. Гасюк, Э. С. Оганьян // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2019. – Т. 16, № 2. – С. 285–291.

18 Оценка остаточного ресурса несущей конструкции вагона пассажирского после длительной эксплуатации / А. В. Пуцято [и др.] // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2020. – № 2 (41). – С. 42–45.

D. P. RUSOV, A. O. SHIMANOVSKY

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

DETERMINATION OF THE DIESEL TRAIN DRB1 BOARD FRAME REMAINING RESOURCE

A bogie frame geometric model for a diesel train DRB1 trailed car with a service life of 43 years is developed in the Autodesk Inventor environment and a finite element model in the ANSYS Workbench environment is created on its base. The distributions of stresses and deformations in the structure under the influence of static and dynamic loads, similar to the test ones, are obtained and correspond quite well to the experimental results. Based on a computational and experimental assessment, it is revealed that the considered trailed car bogie frame has a residual resource of at least 19 years.

Keywords: diesel train, trailer car, bogie frame, finite element model, residual life.

Получено 05.10.2023

УДК 725.4:69.07

В. В. ТАЛЕЦКИЙ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ПОСЛЕДСТВИЯ ОШИБОК ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПОКРЫТИЯ ОДНОЭТАЖНОГО ПРОМЫШЛЕННОГО ЗДАНИЯ В ПОЛНОМ КАРКАСЕ

В результате детального обследования установлена причина образования сквозных наклонных трещин в опорной части стропильных решетчатых балок, предназначенных для покрытия одноэтажного промышленного здания в полном каркасе. Предложены рекомендации для их устранения.

Ключевые слова: стропильная решетчатая балка, узел сопряжения балок с колонной, трещины в балках.

Аварии строительных конструкций приводят к значительному экономическому ущербу и нередко сопровождаются ранением и гибелью людей. В работе [1] отмечается, что основной причиной аварий зданий и сооружений являются ошибки, которые допущены при проектировании и строительстве, причем не менее 90 % аварий зданий являются следствием неправильного проектирования.

Аналізу ошибок проектирования строительных конструкций посвящено значительное количество публикаций, например [2–5]. В них рассматриваются не только причины, приведшие к различным авариям, но и технические решения, реализуя которые можно было предотвратить разрушение элементов конструкций. Обоснование таких технических решений основывается на соблюдении рекомендаций по проектированию конструкций из бетона и железобетона, изложенных в литературе [6, 7].

Целью представленной работы является установление причин появления трещин в конструкции строящегося одноэтажного производственного здания.

На основании письма директора Иностранного производственного унитарного предприятия «Веза-Г» (г. Гомель) было выполнено обследование стропильных решетчатых балок для покрытия цеха металлообработки. Обследование вызвано появлением сквозных наклонных трещин в опорной части балок, которые не характерны для работы под нагрузкой. На момент проведения обследования строительство здания заканчивалось.

Проект здания [8] выполнен ООО «Проектно-строительная компания «Фрэнде»» (г. Гомель).

Здание рассматриваемого цеха одноэтажное прямоугольное в плане, с размерами 97,0×72,0 м. Высота до низа стропильных балок покрытия 7,70 м. Здание разделено на два деформационных температурных блока длиной по 48,0 м.

Каркас здания представляет собой сборную железобетонную конструкцию. Сетка колонн $B \times L = 12,0 \times 18,0$ м. Колонны одно и двух консольные для крайних и средних рядов соответственно. Консоли выполнены для установки подкрановых балок под опорные мостовые краны, имеющие грузоподъемность 3,2 т. Подкрановые балки стальные. Колонны выполнены в соответствии с серией 1.424.1 [9] и листами проекта здания. Стропильные балки для покрытия пролетом 18,0 м соответствуют серии 1.462.1-3/89, вып. 1 [10] и листам проекта. Балки установлены на колонны по серийным узлам 1.424.1-5.0-07 и 1.424.1-5.0-09 для крайних и средних колонн. После соединения сваркой закладных деталей в местах опирания балок на колонны согласно серийным узлам, стропильные балки в соответствии с разработанным проектом объединены в жесткие узлы с помощью горизонтальных накладок и пластин, соединяющих балки и колонну.

Обследованием установлено образование наклонных трещин в опорных местах балок. Трещины не характерны для работы балок под нагрузкой, так как распространяются сверху (на расстоянии 700 мм от торца) вниз к опорной закладной детали (на расстоянии 200–300 мм от торца). В некоторых балках трещины не доходят до низа балок на расстояние до 300 мм. Максимальная ширина раскрытия трещин в верхней части балок составила 3,0 мм, как это показано на рисунке 1.

На опорные части отдельных балок в местах расположения трещин были установлены маяки. Маяки не нарушены, так как были установлены после образования трещин, а для действия на балки длительной нагрузки, от которой ширина раскрытия трещин увеличится, прошло мало времени.

Причиной образования трещин явилось наложение по разработанному проекту в опорной части балок дополнительных связей, то есть объединение соседних балок, опирающихся на колонну, в жесткие узлы с помощью накладок. Чем вызвано принятие такого ошибочного решения, не ясно. Стропильные решетчатые балки покрытия по серии [10] и в соответствии с литературой [11, 12] должны свободно опираться на колонны, потому что в качестве расчетной схемы следует рассматривать однопролетную шарнирно опертую балку, загруженную равномерно распределенной нагрузкой. Равномерно распределение связано с тем, что в пролете располагаются 11 точек приложения сосредоточенных сил (мест опирания ребер плит покрытия шириной 1,5 м).

Введение по проекту дополнительных связей препятствовало свободному повороту вертикальных сечений торцов при прогибе балки от действующей нагрузки. Из-за этого в верхней части опорного сечения возникли растягивающие напряжения величиной, большей предела прочности бетона на растяжение и образовались наклонные трещины.

Отсутствие трещин в верхней части опорного сечения в отдельных балках объясняется тем, что установка дополнительных связей была произведена после монтажа плит покрытия.

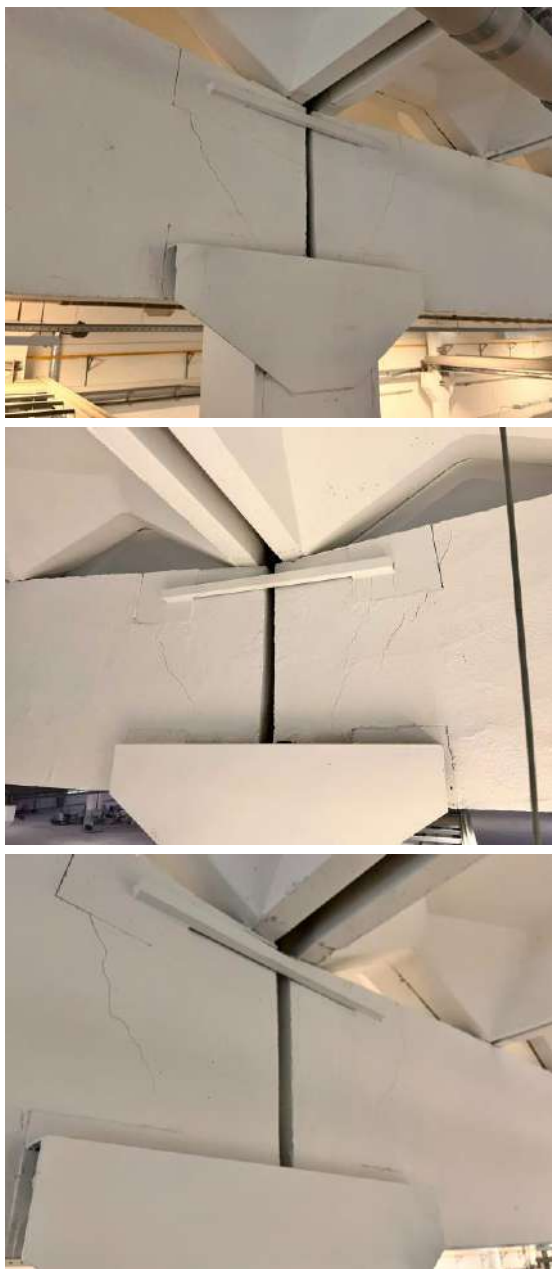


Рисунок 1 – Сквозные трещины в верхней части опор стропильных балок

Принятое в типовых сериях шарнирное соединение балок с колоннами (свободное опирание и сварка закладных деталей балки и колонны) обеспечивает простоту монтажа, независимую типизацию колонн и балок и, что самое главное, не вызывает в стойках изгибающих моментов. Кроме этого, нагрузки, действующие на колонну, и неравномерная осадка колонн не вызывают дополнительных усилий в стропильных балках.

Следовательно, принятое в проекте решение – наложение в опорной части балок дополнительных связей, объединяющих соседние балки, опирающиеся на колонну, в жесткие узлы с помощью накладок – является неверным.

Следует также отметить, что в разработанном проекте для строительства одноэтажного здания, где устанавливаются мостовые краны, не предусмотрены вертикальные стальные связи между колоннами по продольным (цифровым) осям. Такие связи, установленные в середине температурных блоков, при торможении кранов обеспечивают жесткость здания в продольном направлении. Тем более в серии 1.424.1-5.0-05, на листе 2 приведена схема б, где показано, что для обеспечения жесткости в продольном направлении следует в середине температурного блока по направлениям всех продольных осей установить стальную вертикальную связь между колоннами.

Авторы проекта обосновывают необходимость обеспечения жесткости в продольном направлении тем, что восприятие горизонтальных усилий от торможения кранов осуществляется подкрановыми балками и изгибной жесткостью колонн. При этом они предоставляют неверную расчетную схему продольной рамы, считая, что соединение подкрановых балок с колоннами жесткое, а не шарнирное. На самом деле соединение подкрановых балок с колоннами шарнирное, так как подкрановые балки соединены с закладными деталями консолей колонн на сварке через короткие вертикальные опоры.

Жесткость здания в поперечном направлении обеспечена изгибной жесткостью колонн, защемленных в фундаментах и шарнирно соединенных со стропильными балками.

Выводы. Причиной образования трещин стало неверное проектное решение узлов опирания стропильных балок на колонны. Наложение в опорной части балок дополнительных связей (объединение опирающихся на колонну соседних балок в жесткие узлы с помощью накладок) препятствовало свободному повороту вертикальных сечений торцов при прогибе балки от действующей нагрузки, вызывало появление в верхней части опорных сечений растягивающих напряжений, превышающих прочность бетона на растяжение, и образование трещин.

Для дальнейшей нормальной эксплуатации стропильных балок необходимо жесткие узлы опирания таких балок на колонны переделать в шарнирные, то есть демонтировать накладки, препятствующие свободному повороту вертикальных сечений торцов при прогибе балки от действующей нагрузки, предварительно проинъецировав трещины (заполнив под давлением) полимерцементным раствором марки не ниже М10.

Для обеспечения жесткости здания в продольном направлении требуется установить стальные порталные связи между колоннами в серединах температурных блоков по всем продольным (цифровым) осям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Живенко, А. В.** Проектные ошибки как один из факторов аварий зданий и сооружений / А. В. Живенко, Б. В. Пожидаев, В. А. Живенко // Безопасность труда в промышленности. – 2015. – № 12. – С. 86–88.

2 **Добромыслов, А. Н.** Ошибки проектирования строительных конструкций / А. Н. Добромыслов. – М. : Издательство Ассоциации строительных вузов, 2008. – 208 с.

3 **Whittle, R.** Failures in Concrete Structures: Case Studies in Reinforced and Prestressed Concrete / R. Whittle. – Boca Raton : CRC Press, 2012. – 127 p.

4 **Lutmirska, M.** Design and construction errors resulting in lack of tightness of reinforced concrete structures / M. Lutmirska, S. Lutmirski // Zeszyty Naukowe Uczelni Warszawskiej im. Marii Skłodowskiej-Curie. – 2016. – Nr. 4 (54). – S. 39–62.

5 **Shpakova, H.** Errors in design, construction and reinforcement of reinforced concrete structures // H. Shpakova, I. Hlushchenko // Trends and prospects development of science and practice in modern environment : the X International Science Conference. – Geneva, Switzerland, 2021. – P. 308–311.

6 **Fanella, D. A.** Reinforced Concrete Structures: Analysis and Design / D. A. Fanella. – New York : McGraw-Hill Education, 2016. – 976 p.

7 Reinforced concrete structural design optimization: A critical review / M. Afzal [et al.] // Journal of Cleaner Production. – 2020. – Vol. 260. – Article 120623. – 22 p.

8 Проект «Строительство и обслуживание цеха металлообработки по ул. Объездной, 9», 75/П-19, ООО «Проектно-строительная компания “Фрэндс”», г. Гомель.

9 Серия 1.424.1-5, вып.0. Колонны железобетонные прямоугольного сечения для одноэтажных производственных зданий высотой 8,4...14,4 м, оборудованных мостовыми опорными кранами грузоподъемностью до 32 тонн.

10 Серия 1.462.1-3/89, вып.0 и 1. Железобетонные стропильные решетчатые балки для покрытий одноэтажных зданий. Материалы для проектирования. Балки пролетом 12,0 и 18,0. Рабочие чертежи.

11 **Байков, В. Н.** Железобетонные конструкции : общий курс / В. Н. Байков, Э. Е. Сигалов. – М. : Стройиздат, 1991. – 767 с.

12 **Дрозд, Я. И.** Предварительно напряженные железобетонные конструкции / Я. И. Дрозд, Г. П. Пастушков. – Минск : Выш. шк., 1984. – 208 с.

V. V. **TALETSKI**

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

CONSEQUENCES OF ERRORS IN DESIGNING THE FULL FRAME COVERING OF A SINGLE-STOUREY INDUSTRIAL BUILDING

A detailed examination established the cause of the formation of through inclined cracks in the supporting part of the rafter lattice beams for covering a one-storey industrial building in a full frame. There are proposed the recommendations for their repairing.

Keywords: rafter lattice beam, joint between beams and column, cracks in beams.

Получено 15.10.2023

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ (EDUCATIONAL AND METHODOLOGICAL PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 16. Гомель, 2023

УДК 531.1:534

Д. В. КОМНАТНЫЙ

*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
Гомель, Беларусь*

ИЗУЧЕНИЕ ПРИНЦИПОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ В КУРСЕ «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ» НА БАЗЕ МЕХАНИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

Рассматривается изучение основ теории автоматического регулирования для специальности «Системы обеспечения движения поездов». Предлагается при изучении начального раздела теории автоматического управления рассматривать классические механические регуляторы Ползунова – Уатта и Чиколева – Понселе. Приведен доступный для студентов вывод уравнений их движения, которые позволяют установить особенности динамики, оказывающие влияние на процесс регулирования. Показано, что предлагаемый материал не противоречит имеющемуся ныне подходу на базе изучения простых систем управления двигателями постоянного тока.

Ключевые слова: подготовка специалистов, теория автоматического управления, принципы регулирования, механические регуляторы, динамические уравнения.

Программа дисциплины «Теоретические основы автоматики и телемеханики» для студентов специальности «Системы обеспечения движения поездов» предусматривает изучение основ теории автоматического управления [1]. Будущие специалисты должны быть подготовлены для эксплуатации систем автоматики, от которых зависит безопасность движения поездов, что обеспечивается, помимо прочего, основательным изучением теоретических дисциплин. При этом содержание учебных курсов должно иметь высокий научный уровень, включать целесообразно выбранные для изложения вопросы, использовать строгий, но доступный математический аппарат.

В основе теории автоматического регулирования лежит ряд принципов. Их полное изложение в учебном курсе требует рассмотрения конструкций устройств – регуляторов, реализующих эти принципы, и доказательного

установления их свойств. Наиболее просто и доступно это можно сделать, рассматривая классические механические регуляторы Ползунова – Уатта и Чиколева – Понселе. Первые реализуют принцип управления по отклонению, вторые – по возмущениям. Как показано в [2], первоначальный анализ можно осуществить достаточно простыми средствами, не прибегая к известным критериям устойчивости.

Также отметим, что именно разработка механических регуляторов паровых машин дала толчок к развитию рассматриваемой теории [3]. Построение учебного курса в порядке исторических этапов развития теории методически оправданно, повышает уровень подготовки и интерес к изучаемым темам.

В данной статье рассматриваются методы классической механики, знания которых достаточно для установления особенностей динамики изучаемых технических устройств [2]. В рамках изучения начал теории автоматического управления допустимо ограничиться таким подходом, не стремясь получить формулы для кинематических параметров регуляторов, как это сделано в [4, 5].

Рассмотрение принципов регулирования начнем с изучения регулятора Ползунова – Уатта [2], схема которого показана на рисунке 1. Составим уравнение движения муфты 1, обусловленное действием сил инерции шаров 2, которые заставляют муфту смещаться вверх [2, 6].

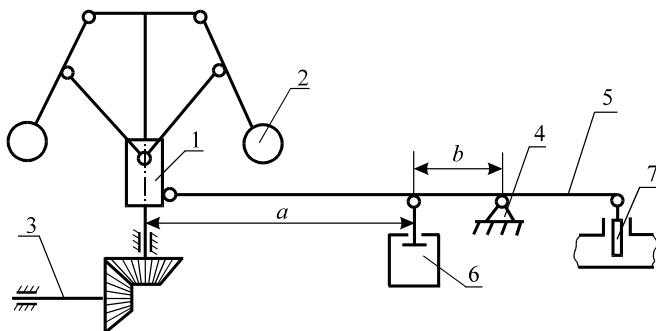


Рисунок 1 – Регулятор Ползунова – Уатта

В соответствии с рисунком 2 сила инерции шара [4, 5]

$$F_D(\omega, s) = x n^2 \omega^2 m_2 = \sqrt{d^2 - (s_0 + s)^2} n^2 \omega^2 m_2,$$

где x – расстояние от оси регулятора до шара 2; n – передаточное число редуктора; ω – угловая скорость вала 3; m_2 – масса шара 2; $d = AD$; s_0 – вертикальная координата шара 2 при положении муфты 1 регулятора, соответствующем номинальному режиму работы; s – текущая координата шара 2.

Учитывая неизменность расстояний AB и BC , получаем, что координаты s шара 2 и z муфты 1 взаимосвязаны, а вертикальная составляющая действующей на муфту реакции стержня BC (обозначим эту составляющую через F_{BC})

является функцией координаты муфты и угловой скорости вала. Для дальнейшего изложения интересен сам факт такой зависимости.

Также на муфту действует уравнивающая сила [6], в качестве которой может выступать, например, сила упругости пружины. Эта сила, очевидно, зависит от координаты муфты $F_y = F_y(z)$. Для дальнейшего анализа достаточно такой общей зависимости [2]. Необходимо также учесть силу сопротивления демпфера 6.

На основании второго закона Ньютона динамическое уравнение движения муфты

$$m_1 \frac{d^2 z}{dt^2} = -F_y(z) + F_{BC}(\omega, z) - \frac{a}{b} k \frac{dz}{dt}, \quad (1)$$

где m_1 – масса муфты; t – время; a, b – размеры коромысла 5 регулятора; k – коэффициент вязкости.

Осуществим линеаризацию уравнения (1) [2, 3]:

$$m_1 \frac{d^2 z}{dt^2} + \left. \frac{\partial F_y}{\partial z} \right|_{z_0} \Delta z + \frac{a}{b} k \frac{dz}{dt} - \left. \frac{\partial F_{BC}}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \Delta \omega - \left. \frac{\partial F_{BC}}{\partial z} \right|_{z_0} \Delta z = 0, \quad (2)$$

где Δz – отклонение координаты муфты от равновесного значения; $\Delta \omega$ – отклонение угловой скорости вала от номинального значения ω_0 .

Переходим к рассмотрению возмущений $z = z_0 + \Delta z$, $\omega = \omega_0 + \Delta \omega$. Тогда уравнение (2) преобразуется к виду

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} \Delta z + \left(\left. \frac{\partial F_y}{\partial z} \right|_{z_0} - \left. \frac{\partial F_{BC}}{\partial z} \right|_{z_0} \right) \Delta z + \frac{a}{b} k \frac{d}{dt} \Delta z - \left. \frac{\partial F_{BC}}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \Delta \omega = 0.$$

В результате деления получившегося уравнения на коэффициент при $\Delta \omega$ и дополняя получившееся выражение уравнением движения объекта регулирования, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} T_p^2 \frac{d^2}{dt^2} \Delta z + T_k \frac{d}{dt} \Delta z + f \Delta z - \Delta \omega = 0; \\ T_a \frac{d}{dt} \Delta \omega = \Delta z, \end{cases} \quad (3)$$

где T_p, T_k, f, T_a – постоянные коэффициенты.

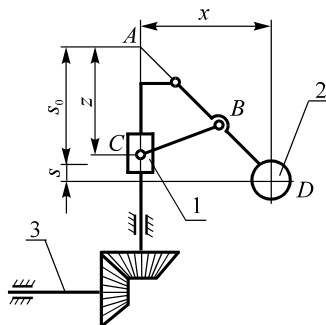


Рисунок 2 – Схема для определения сил

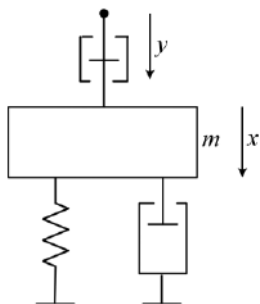


Рисунок 3 – Колебательная система – аналог регулятора Ползунова – Уатта

Получившиеся уравнения имеют вид, аналогичный системе уравнений движения колебательной системы, которая показана на рисунке 3:

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} + k_1 \frac{dx}{dt} + cx - y = 0; \\ k_2 \frac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad (4)$$

где m – масса колеблющегося тела; x, y – координаты; k_1, k_2 – коэффициенты вязкости; c – коэффициент жесткости.

Анализ систем (3) и (4) показывает, что при некоторых параметрах регулятора Ползунова – Уатта в нем могут возникнуть нежелательные колебания. Также из (3) следует, что регулятор реагирует на отклонения, вызванные различными причинами.

Конструкция регулятора Чиколева – Понселе показана на рисунке 4 [2]. Предполагается, что рассматриваемая система инертна и не реагирует на переходные процессы при изменении момента на валу. Тогда на подвижную шестерню 4 действует момент M [5].

Подвижная шестерня является косозубой, поэтому имеет осевую составляющую силы в зацеплении [7]

$$F_a = \frac{2M}{d} \operatorname{tg} \beta = C_2 M,$$

где M – момент на валу; d – диаметр шестерни; β – угол наклона линии зуба.

Из условия уравнивания осевой составляющей сдвигающего усилия и сил упругости пружин следует

$$\begin{aligned} F_a - c_{22}z &= 0, \\ c_{22}z &= C_2 M, \end{aligned} \quad (5)$$

где z – координата подвижной шестерни; c_{22} – коэффициент жесткости пружин, Н/м.

К уравнению (5) присоединяется уравнение движения объекта управления с самовыравниванием. Тогда получается система уравнений [2]

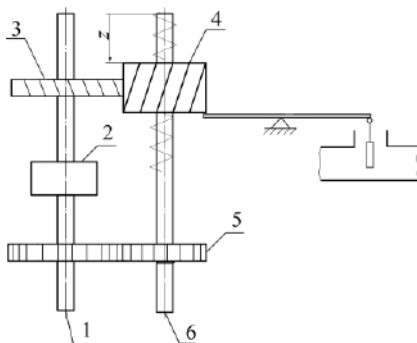


Рисунок 4 – Регулятор Чиколева – Понселе: 1, 6 – валы; 2 – муфта; 3, 5 – шестерни; 4 – подвижная шестерня с пружинами

$$\begin{cases} l_{11} \frac{d\varphi}{dt} + c_{11}\varphi - c_{12}z = M; \\ c_{22}z = C_2M, \end{cases}$$

где l_{11} , c_{11} , c_{12} – коэффициенты, описывающие динамику объекта управления.

Выражая из второго уравнения координату шестерни и подставляя в первое уравнение, получаем дифференциальное уравнение динамики объекта управления

$$l_{11} \frac{d\varphi}{dt} + c_{11}\varphi = M \left(\frac{c_{12}C_2}{c_{22}} + 1 \right).$$

Отсюда следует, что регулятор реагирует только на одно возмущение, а именно изменение момента нагрузки на валу. Также следует, что регулятор успешно осуществляет свои функции только для объектов управления с самовывравниванием, поэтому является неуниверсальным.

Приведенные в статье уравнения динамики классических механических регуляторов позволяют выявить главные свойства принципов регулирования, которые реализуют эти механизмы. Таким путем на начальном этапе изучения формируется понятие о качестве управления в системах автоматического регулирования. Вывод уравнений не потребовал применения достаточно сложных методов теоретической механики и теории механизмов и машин: уравнений Лагранжа второго рода [5] и рычага Жуковского [4]. Следовательно, предложенный учебный материал может быть освоен студентами специальности «Системы обеспечения движения поездов» и поэтому может быть использован при изучении ими основ теории автоматического регулирования.

Следует отметить, что предлагаемый в статье подход не противоречит традиционно принятому для специальности «Системы обеспечения движения поездов» изучению простых систем управления двигателями постоянного тока, как примера систем, основанных на различных принципах управления [1, 8]. При рассмотрении указанных систем показывается зависимость статической ошибки регулирования от применяемого в системе принципа регулирования и от параметров элементов системы.

Следовательно, при предлагаемом в статье рассмотрении механических регуляторов и уже имеющемся рассмотрении систем управления двигателями постоянного тока осуществляется введение учащихся в проблематику теории автоматического управления, которая изучается в дальнейшем. Это введение производится наиболее простым и понятным способом на основе уже изученных физических основ механики и теории электрических машин. Поэтому рассмотрение систем управления двигателями постоянного тока в разделе основ теории автоматического управления курса «Теоретиче-

ские основы автоматики и телемеханики» остается оправданным и целесообразным, что подтверждается практикой преподавания. Более того, при этом курс сохраняет практическую направленность, так как двигатели постоянного тока широко используются в станционных системах автоматики и телемеханики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Сапожников, В. В. Теоретические основы железнодорожной автоматики и телемеханики / В. В. Сапожников, Ю. А. Кравцов, Вл. В. Сапожников. – М. : ГОУ УМЦ по образов. на ж.-д. трансп., 2008. – 394 с.

2 Кухтенко, А. И. Проблема инвариантности в автоматике / А. И. Кухтенко. – Киев : Гостехиздат УССР, 1963. – 376 с.

3 Понтрягин, Л. С. Знакомство с высшей математикой. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1988. – 206 с.

4 Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1988. – 640 с.

5 Левитский, Н. И. Колебания в механизмах / Н. И. Левитский. – М. : Наука, 1988. – 336 с.

6 Кожевников, С. Н. Теория механизмов и машин / С. Н. Кожевников. – М. : Машиностроение, 1973. – 592 с.

7 Иоселевич, Г. Б. Прикладная механика / Г. Б. Иоселевич, Т. Б. Строганов, Г. С. Маслов. – М. : Высш. шк., 1989. – 354 с.

8 Беседы по автоматике / Н. И. Голубничий [и др.] ; под ред. П. И. Киселева. – Киев : Техника, 1973. – 236 с.

D. V. KOMNATNY

Gomel State Technical University named by P. O. Sukhoi, Gomel, Belarus

STUDYING THE PRINCIPLES OF REGULATION IN THE "THEORETICAL FOUNDATIONS OF AUTOMATION AND TELEMCHANICS" COURSE BASED ON MECHANICAL REGULATORS

The study of the fundamentals of the theory of automatic control for the specialty "Train traffic support systems" is considered. It is proposed that when studying the initial section of the theory of automatic control, we consider the classical mechanical regulators of Polzunov – Watt and Chikolev – Poncelet. A derivation of the equations of their motion, accessible to students, is presented, which makes it possible to establish the features of the dynamics that influence the regulation process. It is shown that the proposed material does not contradict the currently available approach based on the study of simple control systems for DC motors.

Keywords: training of specialists, automatic control theory, principles of regulation, mechanical regulators, dynamic equations.

Получено 07.04.2023

УДК 531.3:530.1

С. А. ФОМЕНКО

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АНАЛОГИЙ

При решении многих задач в различных областях техники в нелинейной постановке возникает необходимость составления уравнений движения. Существуют различные способы составления этих нелинейных уравнений. Цель данной статьи – представить методику составления нелинейных уравнений движения механических систем, основанную на методе аналогий.

Ключевые слова: нелинейная механика, метод аналогий, нелинейные уравнения движения.

Введение. При выполнении научных исследований приходится сталкиваться с задачами, решение которых в линейной постановке [1–4] приводит к большим погрешностям или, более того, полученные результаты могут вообще не отражать реальное поведение рассматриваемого технического объекта или отдельных его звеньев. Например, отдельные звенья различных стационарных и нестационарных установок (в частности, клетки и скипы рудничных подъёмных установок) при работе в реальных условиях подвергаются в основном движению воздействиям нелинейных активных сил и реакций связей и могут совершать дополнительные конечные самовозбуждающиеся периодические или почти периодические перемещения. Для расчёта кинематических и динамических параметров периодических процессов, решения вопросов устойчивости и прочности линейная теория колебаний в этих случаях может оказаться неприменимой.

При экспериментальном исследовании движения газожидкостных сред в эрлифтах были зарегистрированы автоколебательные режимы, описываемые нелинейным уравнением Релея [5]. Неучёт нелинейностей в точных станках может привести к значительному искажению обрабатываемой поверхности, а в станках с адаптивным управлением – к невозможности управлять процессом обработки деталей. Таких примеров можно привести очень много из различных областей техники.

Динамические процессы в упомянутых задачах описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, для решения которых необходимо знание методов нелинейной механики.

Целью данной статьи является ознакомление с методами составления нелинейных математических моделей технических устройств и освоение способов решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Методы решения задач. Первым этапом изучения влияния нелинейных характеристик на поведение технических объектов является составление математической модели, т. е. описание рассматриваемого объекта нелинейными дифференциальными уравнениями. Второй этап – решение этих уравнений (аналитический или численно с помощью компьютерных программ). Третий этап – анализ полученных результатов и составление технических рекомендаций.

Многие методы решения нелинейных уравнений ориентированы на специальную форму записи этих уравнений. Поэтому необходимо уравнения движения выбранного механического объекта записать в различных возможных формах. Объект следует выбрать такой, чтобы нелинейные уравнения, его описывающие, допускали аналитическое точное решение. Многие методы решения нелинейных уравнений приближенные, а знание точного решения даёт возможность оценить точность метода. К тому же модель простейшего объекта можно использовать в качестве контрольного примера при расчёте более сложных технических объектов. Полезно подбирать задачи, допускаемые аналогии. Здесь имеется в виду, что уравнения, описывающие движение выбранного механического объекта, в точности совпадают с уравнениями, описывающими поведение немеханических объектов или других механических устройств (примером здесь могут служить электромеханические аналогии, которые достаточно подробно отражены в литературе [6]).

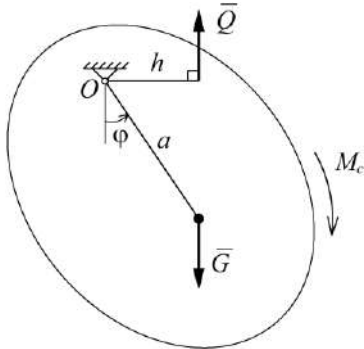


Рисунок 1 – Физический маятник

Одним из примеров механического объекта, удовлетворяющего всем перечисленным ранее требованиям, является физический маятник (рисунок 1). Получим нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее движение маятника. Пусть m – масса маятника; a – расстояние от центра масс до его точки подвеса; I – момент инерции относительно оси вращения; M_c – момент пары сил сопротивления движению; \bar{Q} – равнодействующая вынуждающих сил; h – расстояние от точки O до линии действия силы \bar{Q} .

Положение маятника определим углом φ , отсчитываемым от вертикали. Уравнение движения маятника составим с помощью теоремы об изменении кинетического момента системы [6]:

$$\frac{dL}{dt} = \sum M_O(\bar{F}).$$

Момент количества движения маятника $L = I\dot{\varphi}$, а сумма моментов внешних сил

$$\sum M_O(\bar{F}) = -mga \sin \varphi - M_c + Qh.$$

Тогда уравнение движения маятника примет вид

$$I\ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi - M_c + Qh.$$

В общем случае момент пары сил сопротивления движению – функция угла поворота маятника φ и его угловой скорости $\omega = \dot{\varphi}$, т. е. $M_c = M_c(\varphi, \dot{\varphi})$. Если маятник движется в некоторой среде (жидкости, воздухе), то M_c – функция только угловой скорости $M_c = M_c(\dot{\varphi})$.

На практике, как правило, при расчётах пользуются либо линейной зависимостью ($M_c = \alpha\dot{\varphi}$), либо квадратичной ($M_c = \alpha\dot{\varphi} + \beta\dot{\varphi}^2$); квадратичный закон сопротивления среды применяют при рассмотрении движения механических объектов под действием аэродинамических и гидравлических сил.

Часто в технике для демпфирования движения вращающихся тел ставят спиральные упругие пружины. В этом случае M_c зависит только от угла $M_c = M_c(\varphi)$. В простейшем виде такая зависимость – аналог закона Гука:

$$M_c = c\varphi,$$

где c – коэффициент жёсткости спиральной пружины. Однако этим линейным законом можно пользоваться лишь в определённых пределах. У ряда материалов момент упругости растёт быстрее, чем по линейному закону (кривая 1 на рисунке 2). Соответствующая характеристика изменения момента упругости называется «жёсткой». Этой характеристике соответствует момент, определяемый соотношением

$$M_c = -c\varphi - c_3\varphi^3 - c_5\varphi^5 - \dots$$

В некоторых системах момент упругости растёт медленнее, чем по линейному закону (кривая 2 на рисунке 2). В этом случае характеристика называется «мягкой», а выражение M_c имеет вид

$$M_c = c\varphi - c_3\varphi^3 - c_5\varphi^5 - \dots$$

Вынуждающая сила \bar{Q} может иметь различную природу. Обычно это функция времени: $\bar{Q} = \bar{Q}(t)$. Наиболее простой пример силы \bar{Q} – возбуждающая колебания сила, которая изменяется по гармоническому закону

$$Q = Q' \sin pt.$$

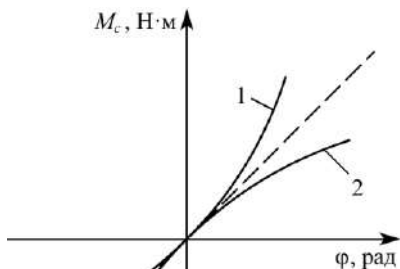


Рисунок 2 – Зависимость упругого момента упругости M_c от угла поворота φ : 1 – жёсткая; 2 – мягкая характеристика

Запишем уравнения движения маятника в виде

$$\ddot{\varphi} = f(t, \varphi, \dot{\varphi}), \quad (1)$$

где
$$f(t, \varphi, \dot{\varphi}) = -k^2 \sin \varphi - \frac{1}{I} M_c(\dot{\varphi}, \varphi) + \frac{h}{I} Q(t); \quad k^2 = \frac{mg\alpha}{I}.$$

Так как в общем виде функция f нелинейная, то дифференциальное уравнение (1) описывает нелинейное поведение выбранного механического объекта – физического маятника. Известно, что источником нелинейности могут быть, в частности, большие угловые перемещения φ маятника (в этом случае имеют место нелинейные его колебания), нелинейные законы сопротивления среды, в которой движется маятник, и нелинейные законы демпфирования.

В случае если маятник движется в сопротивляющейся среде и присутствует демпфирующая движение нелинейная спиральная пружина, момент сопротивления движению имеет вид

$$M_c = \alpha \dot{\varphi} + \beta \dot{\varphi}^2 \pm c\varphi \pm c_3\varphi^3 \pm c_5\varphi^5 \pm c_7\varphi^7 \dots,$$

следовательно,

$$f(t, \varphi, \dot{\varphi}) = -k^2 \sin \varphi - 2n_1\dot{\varphi} - n_2\dot{\varphi}^2 - k_1\varphi - c'_3\varphi^3 - c'_5\varphi^5 + \frac{h}{I} Q(t),$$

где
$$n_1 = \frac{\alpha}{2I}; \quad n_2 = \frac{\beta}{I}; \quad k_1 = \frac{c}{I}; \quad c'_3 = \frac{\mp c_3}{I}; \quad c'_5 = \frac{\mp c_5}{I}.$$

Таким образом, нелинейное дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi + 2n_1\dot{\varphi} + n_2\dot{\varphi}^2 + k_1\varphi + c'_3\varphi^3 + c'_5\varphi^5 + \dots = q(t),$$

где
$$q(t) = \frac{h}{I} Q(t).$$

Рассмотрим теперь частные случаи движения маятника.

1 Вынужденные нелинейные колебания без учёта сопротивления среды ($n_1 = 0, n_2 = 0$):

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi + k_1\varphi + c'_3\varphi^3 + c'_5\varphi^5 + \dots = q(t).$$

2 Вынужденные колебания при отсутствии демпфирующей пружины и сопротивления среды ($n_1 = 0, n_2 = 0, c = 0, c'_3 = 0, c'_5 = 0$):

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = q(t).$$

3 Свободные колебания с учётом сопротивления среды ($q = 0$):

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi + 2n_1\dot{\varphi} + n_2\dot{\varphi}^2 + k_1\varphi + c'_3\varphi^3 + c'_5\varphi^5 + \dots = 0.$$

4 Свободные колебания без учёта сопротивления среды ($q = 0, n_1 = 0, n_2 = 0$)

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi + k_1 \varphi + c'_3 \varphi^3 - c'_5 \varphi^5 + \dots = 0.$$

5 Свободные движения маятника без учёта сопротивления среды и при отсутствии демпфирующей пружины ($q = 0, n_1 = 0, n_2 = 0, k_1 = 0, c'_3 = 0, c'_5 = 0$)

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0.$$

Рассмотрим теперь некоторые уравнения нелинейных колебаний маятника. Для этого функцию $\sin \varphi$ в окрестности $\varphi = 0$ разложим в ряд Тейлора:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots$$

Для примера ограничимся только членами, содержащими φ и φ^3 :

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6}.$$

1 Вынужденные нелинейные колебания маятника с учётом сопротивления среды

$$\ddot{\varphi} + k_0^2 \varphi + 2n_1 \dot{\varphi} + n_2 \dot{\varphi} + k_1 \varphi + c''_3 \varphi^3 + c'_5 \varphi^5 + \dots = q(t), \quad (2)$$

где

$$k_0^2 = k^2 + k_1, \quad c''_3 = c'_3 - \frac{k^2}{6}.$$

2 Вынужденные нелинейные колебания маятника без учёта сопротивления среды ($n_1 = 0, n_2 = 0$)

$$\ddot{\varphi} + k_0^2 \varphi + c''_3 \varphi^3 + c'_5 \varphi^5 + \dots = q(t). \quad (3)$$

3 Вынужденные нелинейные колебания маятника без учёта сопротивления среды и при отсутствии демпфирующей пружины

$$\ddot{\varphi} + k_0^2 \varphi - \frac{\varphi^3}{6} = q(t). \quad (4)$$

Соответствующие уравнения, описывающие свободные нелинейные колебания маятника, получаются из уравнений (2)–(4) при $q(t) = 0$.

Рассмотрим теперь случаи линейных колебаний маятника.

1 Вынужденные колебания с учётом сопротивления движению

$$\ddot{\varphi} + 2n_1 \dot{\varphi} + k_0^2 \varphi = A \sin pt.$$

(здесь вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону $q(t) = A \sin pt$).

2 Вынужденные колебания без учёта сопротивления движению ($n_1 = 0$)

$$\ddot{\varphi} + k_0^2 \varphi = A \sin pt.$$

3 Свободные колебания с учётом сопротивления движению

$$\ddot{\varphi} + 2n_1\dot{\varphi} + k_0^2\varphi = 0.$$

4 Свободные колебания без учёта сопротивления движению

$$\ddot{\varphi} + k_0^2\varphi = 0.$$

Согласно принятой в теории нелинейных колебаний классификации [7] нелинейные колебания подразделяются на свободные, вынужденные, параметрические и автоколебания (в отличие от линейных, где колебания могут быть только свободными и вынужденными). В уравнениях (2)–(4) параметры k_0 , n_1 , n_2 , c'_3 , c'_5 могут быть функциями времени. Наличие переменных коэффициентов даёт возможность описания этими уравнениями параметрических колебаний физического маятника.

Приведём ещё пример ситуации, при которой возникают установившиеся автоколебания. Пусть физический маятник 1 посажен на вал 2, который вращается с постоянной угловой скоростью ω . При этом между маятником 1 и валом 2 возникает момент сил трения M_c (рисунок 3, а).

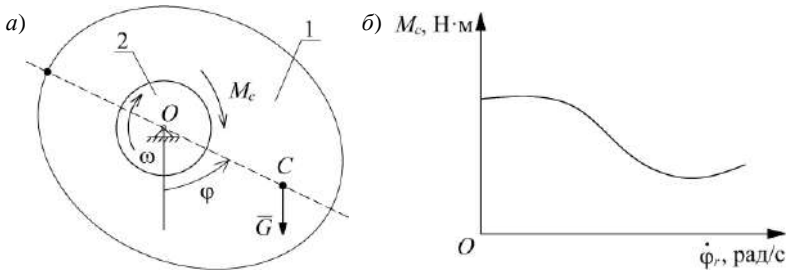


Рисунок 3 – Схема физического маятника при установившихся автоколебаниях (а) и зависимость момента силы трения от относительной угловой скорости вращения маятника по отношению к валу (б)

Зависимость момента силы трения M_c от относительной угловой скорости вращения $\dot{\varphi}_r$ маятника по отношению к валу $M_c = f(\dot{\varphi}_r)$ представлена на рисунке 3, б. Записав дифференциальное уравнение вращательного движения маятника, получим

$$\ddot{\theta} + k^2\theta = -2n_1\dot{\theta} - n_3\dot{\theta}^3, \quad (5)$$

где
$$2n_1 = \frac{f'(\omega)}{I}, \quad n_3 = \frac{f'''(\omega)}{6I}, \quad k^2 = \frac{mga}{I}, \quad \theta = \varphi - \gamma,$$

γ – значение угла φ в положении статического равновесия маятника.

Так как в уравнении (5) $n_1 < 0$, $n_3 > 0$, то маятник совершает автоколебания.

Рассмотрим ещё одну нелинейную задачу механики – задачу об изгибе и кручении концевыми нагрузками упругого тонкого стержня при больших перемещениях его оси. Под большими перемещениями оси стержня будем понимать перемещения, соизмеримые с радиусом кривизны оси.

Пусть тонкий прямолинейный упругий стержень деформируется в плоскости только нагрузками, приложенными на его концах. Под действием концевых нагрузок ось стержня принимает некоторую форму равновесия, достаточно сильно отличающуюся от прямолинейной (стержень подвержен конечным деформациям (рисунок 4)). Пусть материал, из которого изготовлен стержень, изотропный, E – его модуль Юнга. Полагаем, что поперечное сечение стержня постоянно по его длине. I – момент инерции поперечного сечения. Запишем уравнения равновесия стержня [8]:

$$\frac{d\bar{M}}{ds} + \bar{\tau} \times \bar{F} = 0, \quad (6)$$

где \bar{F} , \bar{M} – главный вектор и главный момент внутренних усилий в поперечном сечении стержня; $\bar{\tau}$ – единичный вектор касательной к деформированной оси стержня; s – длина дуги оси.

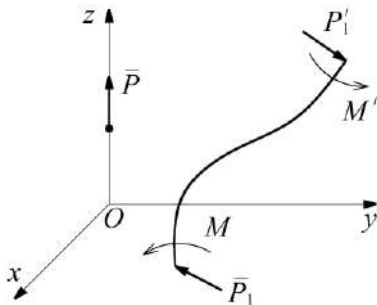


Рисунок 4 – Стержень, подверженный конечным деформациям

Приведём концевые нагрузки к центральной оси и обозначим через \bar{P} равнодействующую этих нагрузок. Выберем неподвижную систему координат xuz , ось z направим по центральной оси. Угол между касательной к оси стержня в любой точке и центральной осью концевых сил обозначим φ . Как

известно из математики, $\frac{d\varphi}{ds} = \aleph$ – кривизна оси стержня. Главный момент внутренних усилий M в поперечном сечении стержня связан с кривизной его оси \aleph известным соотношением Бернулли – Эйлера [8]:

$$M = EI\aleph = EI \frac{d\varphi}{ds}, \quad (7)$$

Так как на стержень действуют только концевые нагрузки, то соотношение (6) можно записать в виде

$$\frac{d\bar{M}}{ds} + \bar{\tau} \times \bar{P} = 0.$$

Записав это уравнение в проекциях на плоскость xz , получим

$$\frac{dM}{ds} + P \sin \varphi = 0.$$

Используя выражение для M , данное соотношением (7), последнее уравнение представим в виде

$$EI \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + P \sin \varphi = 0,$$

или
$$\varphi'' + k^2 \sin \varphi = 0, \quad k^2 = \frac{P}{EI} \quad (8)$$

(штрихами обозначено дифференцирование по s).

Как видим, уравнение, описывающее конечные деформации тонкого упругого стержня в плоскости (8), по форме совпадает с уравнением свободного движения физического маятника без учёта сил сопротивления. Этот эффект носит название кинетической аналогии Кирхгофа [5, 8, 9].

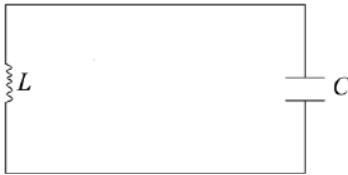


Рисунок 5 – Нелинейный колебательный контур

Приведём также один пример из радиотехники – нелинейный колебательный контур, имеющий аналогию с задачей о движении маятника. Рассмотрим колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью L , железного сердечника и конденсатора ёмкостью C (рисунок 6).

Пусть Φ – магнитный поток, i – сила тока. Тогда уравнение, описывающее протекание тока в этом контуре

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0. \quad (9)$$

Зависимость между силой тока и индуктивным потоком в катушке при наличии железного сердечника описывается экспериментальным соотношением

$$i = a\Phi - b\Phi^3.$$

Тогда уравнение (9) имеет вид

$$\ddot{\Phi} + \frac{a\Phi}{C} - \frac{b}{C} \Phi^3 = 0.$$

Полученное нелинейное уравнение, описывающее протекание тока в рассматриваемом колебательном контуре, по форме совпадает с уравнением нелинейных свободных колебаний физического маятника без учёта сопротивления движению. Таким образом, имеем пример одной из электромеханических аналогий [6].

Многие методы решения нелинейных уравнений физики (в частности, механики) ориентированы на их специальную запись. В настоящее время очень хорошо развиты методы решения гамильтоновых систем уравнений, в частности, методы теории возмущений [10]. С этой целью запишем нелинейные уравнения свободного движения физического маятника без учёта сил сопротивления движению в гамильтоновой форме. Вычислим для этого кинетическую и потенциальную энергии маятника:

$$T = 0,5I\dot{\varphi}^2; \quad \Pi = Qa(1 - \cos\varphi).$$

Введём обобщённый импульс [10]

$$p_{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi},$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{I}.$$

Вычислим теперь функцию Гамильтона физического маятника

$$H = \frac{p_{\varphi}^2}{2I}.$$

Уравнения движения маятника в гамильтоновой форме

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}}; \quad \frac{dp_{\varphi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}.$$

Заметим, что все полученные соотношения справедливы и для математического маятника (в уравнении для физического маятника необходимо положить $k^2 = \frac{g}{l}$, l – длина нити маятника).

Заключение. В работе представлены уравнения движения физического маятника при наличии нелинейностей различного вида. Рассмотрена методика составления нелинейных уравнений движения механических систем, основанная на методе аналогий. Приведены нелинейные уравнения движения физического маятника, тонкого прямолинейного упругого стержня, нелинейного колебательного контура. Представлены примеры, демонстрирующие одинаковый вид уравнений, описывающих различные физические процессы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Вульфсон, И. И. Краткий курс теории механических колебаний / И. И. Вульфсон. – М. : ВНТР, 2017. – 241 с.
- 2 Яковенко, Г. Н. Краткий курс теоретической механики : учеб. пособие / Г. Н. Яковенко. – М. : Лаборатория знаний, 2015. – 117 с.
- 3 Денисов, Ю. В. Теоретическая механика : учеб. / Ю. В. Денисов, Н. А. Клиньских ; науч. ред. С. А. Берестова. – Екатеринбург : УрФУ, 2013. – 474 с.
- 4 Фоменко, С. А. Рациональные способы демпфирования изгибных колебаний балочных конструкций (на примере жесткой ошиновки открытых распределительных устройств) : дис. канд. техн. наук : 05.23.01 / С. А. Фоменко. – Макеевка : ДонНАСА, 2017. – 163 с.
- 5 Логвинов, Н. Г. Самовозбуждающиеся колебания в воздушных подъемниках / Н. Г. Логвинов // Разработка месторождений полезных ископаемых : респ. межвед. науч.-техн. сб. – Киев : Техника, 1973. – Вып. 31. – С. 88–98.
- 6 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. Ч. II. Динамика / А. А. Яблонский. – М. : Высш. шк., 1984. – 430 с.
- 7 Вибрации в технике : справ. : в 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем / В. В. Болотин [и др.] ; под ред. В. В. Болотина. – М. : Машиностроение, 1999. – 504 с.
- 8 Попов, Е. П. Нелинейные задачи статики стержней / Е. П. Попов. – Л.–М. : ОГИЗ, 1948. – 178 с.
- 9 Кирхгоф, Г. Механика. Лекции по математической физике / Г. Кирхгоф ; пер. с нем. под ред. А. Т. Григорьяна и Л. С. Полака. – М. : Изд. АН СССР, 1962. – 443 с.
- 10 Тер Хаар, Д. Основы гамильтоновой механики : пер. с англ. / Д. тер Хаар. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 224 с.

S. A. FOMENKO

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka

MOTION EQUATIONS FORMULATION FOR SOME PROBLEMS OF NONLINEAR MECHANICS AND APPLICATION OF ANALOGIES METHOD

The need to compile motion equations appears at solving many problems in various fields of technology in a nonlinear formulation. There are various ways to write these nonlinear equations. The purpose of this paper is to present a methodology for composing nonlinear motion equations for the mechanical systems, based on the method of analogies.

Keywords: nonlinear mechanics, method of analogies, nonlinear motion equations.

Получено 12.11.2022

УДК 378.14:004.94

О. С. ЧАГАНОВА

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ABAQUS ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Представлены основные характеристики, состав и алгоритм моделирования в программном комплексе SIMULIA/Abaqus. Рассмотрены возможные пути использования программного комплекса Abaqus при изучении общетехнических дисциплин.

Ключевые слова: преподавание, конечно-элементное моделирование, Abaqus.

Подготовка инженерных кадров высокого уровня в современных условиях требует использования в образовательном процессе современных технологий, используемых на производстве. В настоящее время существует большое количество специальных компьютерных программ и пакетов для решения технических и инженерных задач. Одним из них является программный конечно-элементный комплекс SIMULIA/Abaqus – универсальная система для моделирования многоцелевых инженерных задач, проведения научно-исследовательской и учебной работы. Комплекс используется в автомобилестроении, авиастроении, при производстве электроники, в металлургии, в нефтедобыче и нефтепереработке и многих других областях [1].

При разработке рассматриваемого программного продукта основной акцент делался на возможности осуществления расчетов при значительных геометрических и физических нелинейностях. Поэтому в отличие от иных программных средств Abaqus рекомендуется для решения сложных задач, в которых рассматриваются несколько контактных взаимодействий, для анализа быстропротекающих процессов, при геометрических нелинейностях, связанных с появлением значительных относительных деформаций, а также при необходимости проведения мультифизического анализа.

В основу программного комплекса SIMULIA/Abaqus положен модульный принцип. Он включает пре-постпроцессор, решатели Standard и Explicit, а также дополнительные модули, предназначенные для решения специфических задач. Например, для анализа нагрузок на трубопроводы, кабели и другие конструкции, которые погружены в воду, используется модуль Aqua. Расчеты усталостной прочности и долговечности конструкций осуществляются с помощью модуля FE/SAFE. Экспортировать результаты расчета из Abaqus в программный комплекс ADAMS/Flex позволяет Abaqus/ADAMS. Для подбора оптимальных параметров конструкций предназначен модуль Abaqus/Design [2, 3].

Работа программного комплекса Abaqus основана на методе конечных элементов, который является одним из эффективных численных методов, применяемых для решения задач механики деформируемых тел. Он включает

большую библиотеку конечных элементов, позволяющую учесть физические и геометрические нелинейности, предусматривает возможность применения широкого круга различных моделей материалов.

Графическая оболочка пре-постпроцессора Abaqus/CAE предназначена для моделирования, управления, анализа и визуализации полученных результатов. Разработка модели осуществляется с использованием команд, которые отражают этапы моделирования. На первом из них осуществляются создание или импорт геометрии деталей, задание опорных точек и систем координат; определение свойств материалов и геометрических характеристик сечений элементов конструкции, а также ориентации деталей модели в пространстве. Кроме того, здесь определяются типы конечных элементов и осуществляется генерация сетки. На втором этапе задаются параметры анализа и определяется набор выходных данных. Также здесь описывается взаимодействие деталей модели, определяются контактные поверхности и их свойства, производится задание нагрузок и определение параметров закрепления и граничных условий. Далее осуществляется проверка модели, запуск вычислений, который сопровождается мониторингом процесса расчета. На заключительном этапе выводятся результаты расчета в виде графиков, схем и чертежей [4, 5].

Рассматриваемый программный комплекс может быть эффективно применен при преподавании ряда общетехнических дисциплин. Наиболее простой вариант такого использования связан с демонстрацией студентам процессов, проходящих с деформируемыми телами под действием приложенных нагрузок.

Например, на одномерной модели можно продемонстрировать принцип действия механической связи. На рисунке 1 приведена созданная в среде программы Abaqus модель длинного стального стержня прямоугольного поперечного сечения, концы которого шарнирно закреплены. Под действием приложенной к стержню поперечной нагрузки он прогибается, причем места расположения связей остаются неподвижными. С другой стороны, углы поворота крайних поперечных сечений отличны от нуля, как это было бы в случае заделки.

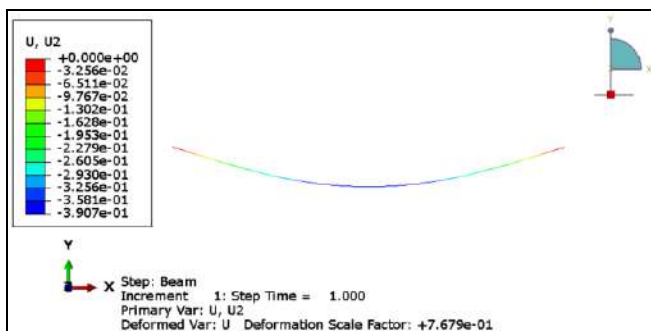


Рисунок 1 – Результаты расчета прогиба стальной балки на двух опорах под действием распределенной нагрузки в Abaqus

Также приведенная схема (см. рисунок 1) может быть использована для оценки правильности аналитического решения задачи о нахождении наибольшего прогиба, которая решается студентами при изучении механики материалов и прикладной механики.

Используя пространственные модели, можно продемонстрировать распределение касательных и нормальных напряжений как по длине стержней, так и по площади их поперечного сечения. Здесь также может быть продемонстрирована связь между напряжениями и относительными деформациями. Особенно полезной может оказаться демонстрация напряженно-деформированного состояния в областях расположения концентраторов напряжений, которая может быть осуществлена только при использовании численного моделирования работы конструкции под нагрузкой. Помимо прочего, в этом случае может быть продемонстрировано перераспределение напряжений, обусловленное пластическими деформациями.

Интересующимся студентам предлагается самостоятельно осуществить моделирование деформирования конструкций, что способствует активизации их познавательной деятельности.

Таким образом, использование программного комплекса Abaqus позволяет обеспечить более глубокие знания материала, которые в дальнейшем могут быть использованы студентами при изучении специальных дисциплин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Boulbes, R. J.** Troubleshooting Finite-Element Modeling with Abaqus: With Application in Structural Engineering Analysis / R. J. Boulbes. – Cham : Springer, 2019. – 439 p.

2 Abaqus. Применение комплекса в инженерных задачах. – М. : ТЕСИС, 2010. – 104 с.

3 SIMULIA Abaqus. Начало работы / С. А. Рыжов [и др.]. – М. : ТЕСИС, 2021. – 286 с.

4 **Золочевский, А. А.** Введение в ABAQUS : метод. пособие / А. А. Золочевский, А. А. Беккер. – Харьков, 2011. – 47 с.

5 **Нуштаев, Д. В.** Abaqus. Пособие для начинающих. Пошаговая инструкция / Д. В. Нуштаев. – М. : ТЕСИС, 2021. – 43 с.

O. S. CHAGANOVA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

APPLICATION OF THE ABAQUS SOFTWARE AT GENERAL TECHNICAL DISCIPLINES STUDYING

The main characteristics, composition and modeling algorithm of the SIMULIA/Abaqus software package are presented. Possible ways of using the Abaqus software package in the study of general technical disciplines are considered.

Keywords: teaching, finite element modeling, Abaqus.

Получено 31.10.2023