

УДК 539.374

Э. И. СТАРОВОЙТОВ<sup>1</sup>, А. В. ЯРОВАЯ<sup>1</sup>, А. АБДУСАТТАРОВ<sup>2</sup><sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь<sup>2</sup>Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

## ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ МОМЕНТНОЙ НАГРУЗКОЙ

Решена задача термоупругости об осесимметричном изгибе круговой трехслойной пластины изгибающими моментами, приложенными вдоль окружности к верхнему несущему слою. Деформирование слоев происходит в соответствии с гипотезой ломаной линии. Для аналитического решения краевой задачи использовано известное решение для подобной пластины, нагруженной осесимметричной погонной поперечной силой. Проведена численная апробация решения, выполнен анализ влияния радиуса силовой окружности и температуры на перемещения пластины.

**Ключевые слова:** трехслойная круговая пластина, моментная нагрузка, термоупругость, аналитическое решение.

**Введение.** Актуальность разработки новых математических моделей для исследования упругого и неупругого деформирования композитных стержней, пластин и оболочек при термосиловых нагрузках, определяется их повсеместным распространением в машиностроении, строительстве и при транспортировке энергоносителей. В монографиях [1–3] рассмотрены постановки значительного числа задач статики и динамики трехслойных элементов конструкций, представлены возможные пути их решения, а также результаты определения напряженно-деформированного состояния в случаях термосиловых нагружений. Решения задач о нестационарных и гармонических колебаниях неоднородных сферических и цилиндрических оболочек получены в работах [4–6]. В статьях [7, 8] исследовано влияние нейтронного облучения на демпфирование колебаний и деформирование вязкоупругих тел. Математическая модель изгиба круговых трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем построена в работах [9, 10]. В публикациях [11, 12] анализируется напряженно-деформированное состояние упругопластической трехслойной пластины при взаимодействии с основанием Пастернака. Деформирование в своей плоскости трехслойной круговой пластины, вызванное действием неосесимметричных нагрузок, рассмотрено в работах [13, 14]. Термосиловое квазистатическое нагружение аналогичной пластины погонной силой, распределенной вдоль окружности, рассматривалось в [16]. В данной работе решается подобная задача для случая, при котором к линии приложен распределенный момент.

**Постановка и решение задачи.** Объектом исследования является несимметричная по толщине трехслойная круговая пластина. Срединная

плоскость ее заполнителя принимается за координатную  $r$ ,  $\varphi$  цилиндрической системы координат, ось  $z$  направлена ей перпендикулярно вверх в сторону первого слоя. Предполагается, что для тонких внешних несущих слоев толщиной  $h_1 \neq h_2$  выполняются гипотезы Кирхгофа. Деформирование воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении толстого жесткого заполнителя ( $h_3 = 2c$ ) происходит в соответствии с гипотезой о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. В качестве искомых функций выступают прогиб пластины  $w(r)$ , радиальное перемещение координатной плоскости  $u(r)$  и относительный сдвиг в заполнителе  $\psi(r)$ . На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, которая предотвращает относительный сдвиг слоев (при  $r = r_0$  значение  $\psi = 0$ ).

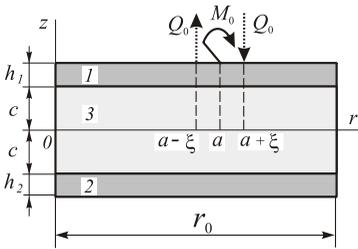


Рисунок 1 – Схема нагружения распределенным моментом

Принимаем, что поверхность  $z = -c - h_2$  и контур пластины являются теплоизолированными. Тогда неоднородное температурное поле  $T(z)$  может быть с достаточной точностью вычислено по формуле, приведенной в [1].

Решение задачи построим, используя полученные в [16] формулы для подобной пластины, нагруженной вдоль окружности  $r = a$  погонной поперечной силой:

$$\begin{aligned} \psi &= C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \\ &+ \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta} H_0(a-r) \left( \frac{1}{\beta r} - K_1(\beta r) I_0(\beta a) - I_1(\beta r) K_0(\beta a) \right) + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r}; \\ w &= \frac{1}{b_3} \left( b_2 \int \psi dr + \int L_3^{-1}(Q_0) dr - \frac{C_1}{4} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4} \right) + C_6 \ln r + C_4; \\ u &= \frac{a_3}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \psi + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где запятой в нижнем индексе обозначено дифференцирование по следующей за ней координате;  $C_1, \dots, C_8$  – константы интегрирования;  $I_1(r), K_1(r)$  – функции Бесселя;  $H_0(r)$  – функция Хэвисайда.

В (1) введены следующие операторы:

$$L_3^{-1}(Q_0) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r Q_0 dr dr dr ;$$

$$\int L_3^{-1}(Q_0) dr = \frac{Q_0 a}{4} \left( r^2 - a^2 - a^2 \ln \left( \frac{r}{a} \right) - r^2 \ln \left( \frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r) ;$$

$$\int \psi dr = \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta^2} H_0(a-r) \times$$

$$\times \left( \ln \left( \frac{r}{a} \right) + I_0(\beta a) K_0(\beta r) - K_0(\beta a) I_0(\beta r) \right).$$

Возьмем разность решений (1) для двух одинаковых по интенсивности  $Q_0$  сил, действующих на близко расположенных окружностях радиусов  $r = a - \xi$  и  $r = a + \xi$ , но направленных в противоположные стороны. В этой разности произведем замену  $Q_0 = M_0 / (2\xi)$  и устремим  $\xi$  к нулю. Тогда

$$\psi = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \frac{\gamma_1 M_0 a}{2\xi \beta} H_0(a + \xi - r) \left[ \frac{1}{\beta r} - (K_0(\beta(a + \xi))) \times \right. \right.$$

$$\left. \times I_1(\beta r) + I_0(\beta(a + \xi)) K_1(\beta r) \right] - \frac{\gamma_1 M_0 a}{2\xi \beta} H_0(a - \xi - r) \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{\beta r} - \left( K_0(\beta(a - \xi)) I_1(\beta r) + I_0(\beta(a - \xi)) K_1(\beta r) \right) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r} \left. \right].$$

После вычисления предела получаем аналитическое решение поставленной задачи термоупругости об осесимметричном изгибе круговой трехслойной пластины, вызванном действием распределенных изгибающих моментов, приложенных к верхнему несущему слою вдоль окружности  $r = a$ :

$$\psi = C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \frac{\gamma_1 M_0}{\beta} H_0(a-r) \left( \frac{1}{\beta r} - K_1(\beta r) (I_0(\beta a) + \right.$$

$$\left. + I_1(\beta a) \beta a) - I_1(\beta r) (K_0(\beta a) - K_1(\beta a) \beta a) \right) + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r} ;$$

$$w = \frac{b_2}{b_3} \int \psi dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(M_0) dr - \frac{C_1}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4b_3} + C_6 \ln r + C_4 ;$$

$$u = \frac{a_3}{a_1} w_r - \frac{a_2}{a_1} \psi + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}
\int L_3^{-1}(M_0)dr &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ \frac{M_0}{8\xi} \left( r^2(a+\xi) - (a+\xi)^3 - (a+\xi)^3 \ln \left( \frac{r}{a+\xi} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - r^2(a+\xi) \ln \left( \frac{r}{a+\xi} \right) \right) H(a+\xi-r) - \frac{M_0}{8\xi} \left[ r^2(a-\xi) - (a-\xi)^3 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (a-\xi)^3 \ln \left( \frac{r}{a-\xi} \right) - r^2(a-\xi) \ln \left( \frac{r}{a-\xi} \right) \right] H_0(a-\xi-r) \right] = \\
&= \frac{M_0}{4} \left( 2r^2 - 2a^2 - 3a^2 \ln \left( \frac{r}{a} \right) - r^2 \ln \left( \frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r); \\
\int \psi dr &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 M_0 (a+\xi)}{2\xi \beta^2} H_0(a+\xi-r) \times \right. \\
&\quad \times \left( \ln \left( \frac{r}{a+\xi} \right) + (I_0(\beta(a+\xi)) K_0(\beta r) - K_0(\beta(a+\xi)) I_0(\beta r)) \right) - \frac{\gamma_1 M_0 (a-\xi)}{2\xi \beta^2} \times \\
&\quad \times H_0(a-\xi-r) \left( \ln \left( \frac{r}{a+\xi} \right) + (I_0(\beta(a+\xi)) K_0(\beta r) - K_0(\beta(a+\xi)) I_0(\beta r)) \right) \Big) = \\
&= \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 M_0}{\beta^2} H_0(a-r) \times \\
&\quad \times \left( \ln \left( \frac{r}{a} \right) - 1 + K_0(\beta r) (I_0(\beta a) + I_1(\beta a) \beta a) - I_0(\beta r) (K_0(\beta a) - K_1(\beta a) \beta a) \right).
\end{aligned}$$

Для нахождения постоянных интегрирования реализуются требования ограниченности решения в центре пластины и граничные условия, например,

– при заделке контура пластины  $u = \psi = w = w_r = 0$  при  $r = 1$ ;

– при шарнирном ее опирании  $u = \psi = w = M_r = 0$  при  $r = 1$ .

Здесь  $M_r$  – обобщенный внутренний момент [16].

В нашем случае при защемленном контуре пластины выражения констант интегрирования таковы:

$$\begin{aligned}
C_1 &= -M_0, \quad C_2 = \frac{\gamma_1 M_0}{\beta^2 I_1(\beta)} (1 - \beta K_1(\beta) (I_0(\beta a) + I_1(\beta a) \beta a)); \\
C_3 &= \frac{\gamma_1 M_0}{\beta} (I_0(\beta a) + I_1(\beta a) \beta a); \\
C_4 &= -\frac{b_2 \gamma_1 M_0}{b_3 \beta^3 I_1(\beta)} (I_0(\beta) - (I_0(\beta a) - I_1(\beta a) \beta a)) + \frac{3M_0 a^2}{8b_3} + \frac{M_0}{8b_3};
\end{aligned}$$

$$C_5 = \frac{M_0}{2}(1-3a^2); \quad C_6 = \frac{3M_0a^2}{4b_3}; \quad C_7 = 0; \quad C_8 = 0. \quad (3)$$

Для шарнирно опертого контура постоянные интегрирования  $C_1-C_3$ ,  $C_6$ ,  $C_8$  сохраняют вид (3), остальные –

$$C_4 = \frac{b_2}{b_3} \left( -\frac{C_2 I_0(\beta)}{\beta} + \frac{C_3 K_0(\beta)}{\beta} \right) - \frac{1}{4b_3} (C_1 + C_5);$$

$$C_5 = \frac{M_0}{2} (1-3a^2) \frac{a_3^2 - a_1 b_3 + a_7 a_1}{a_1 (a_6 + a_7)} - \frac{6b_3}{a_6 + a_7} \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz;$$

$$C_7 = \frac{2a_3}{a_1 (a_6 + a_7)} \left( 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz + \frac{M_0}{2} (1-3a^2) \right), \quad (4)$$

где  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения.

Следует отметить, что температура в явном виде содержится в последних трех константах интегрирования.

Считаем, что температурное поле усреднено по толщине  $k$ -го слоя пластины. Тогда внутри этого слоя значения упругих параметров постоянны:

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}), \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k}), \quad T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T_k(z, t) dz.$$

Их вычисление производится в зависимости от температуры по известной формуле Белла [1]. Коэффициенты в (2)–(4) в таком случае

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+);$$

$$a_3 = h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+; \quad a_4 = c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right);$$

$$a_5 = c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right];$$

$$a_6 = h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+;$$

$$\beta^2 = \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}; \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}; \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1};$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+; \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-.$$

**Численные результаты** получены для круговой трехслойной пластины с шарнирно опертым контуром, материалы которой Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т (их механические характеристики представлены в [1]. Толщины слоев и прогиб, отнесенные к радиусу пластины  $r_0$ , составляют:  $h_3 = 0,4$ ;  $h_1 = h_2 = 0,04$ .

На рисунке 2 приведены графики зависимостей сдвига в заполнителе и прогиба круговой трехслойной пластины от радиуса  $r$ . Они построены для различных радиусов моментной окружности: 1 –  $a = 0,5$ ; 2 –  $a = 0,75$  в соответствии с формулами (2), (4); без штриха –  $T = 293$  К, со штрихом –  $T = 323$  К. Интенсивность погонных моментов  $M_0 = 0,3$  МН. По мере перемещения моментной окружности от центра к контуру пластины прогиб уменьшается по величине и становится одного знака. Максимумы сдвигов в виде пиков наблюдаются в сечениях приложения погонных моментов. При нагревании прогибы и сдвиги в обоих случаях изменяются пропорционально.

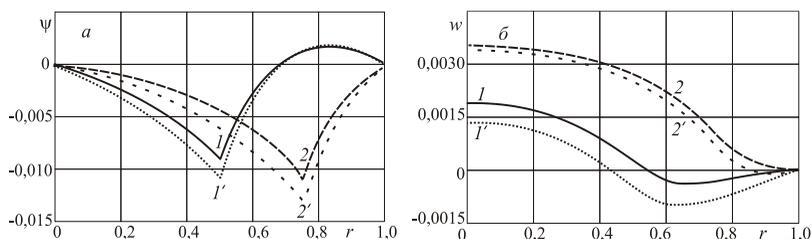


Рисунок 2.21 – Перемещения: сдвиг в заполнителе (а) и прогиб (б) при различных радиусах моментной окружности (без штриха –  $T = 293$  К, со штрихом –  $T = 323$  К)

**Заключение.** Полученное в работе решение краевой задачи позволило оценить деформации упругих трехслойных круговых пластин, подверженных действию осесимметричных нагрузок погонными моментами в температурном поле. Результаты расчетов подтвердили существенное влияние температуры и места приложения распределенного момента на перемещения пластины.

*Работа выполнена в рамках задания ГПНИ «Конвергенция 25».*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
- 2 Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 3 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.
- 4 Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.
- 5 Tarlakovskii, D. V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

6 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – № 1. – С. 59–63.

7 **Vakhneev, S.** Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, is. 4. – P. 699–704.

8 **Pronina, P. F.** Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // Periódico Tchê Química. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.

9 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

10 **Захарчук, Ю. В.** Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.

11 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

12 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.

13 **Нестерович, А. В.** Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.

14 **Нестерович, А. В.** Напряжённое состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

15 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб трехслойной пластины в температурном поле нагрузки, приложенной к линии / Э. И. Старовойтов // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 221–226.

*E. I. STAROVOITOV<sup>1</sup>, A. V. YAROVAYA<sup>1</sup>, A. ABDUSATTAROV<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

<sup>2</sup>*Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan*

## **BENDING OF A THREE-LAYER PLATE BY A TORQUE LOAD IN THE TEMPERATURE FIELD**

The thermoelasticity problem of a circular three-layer plate axisymmetric bending by bending moments applied along the circumference to the upper load-bearing layer is solved. Deformation of layers occurs in accordance with the broken line hypothesis. For an analytical solution of the boundary value problem, a well-known solution for a similar plate loaded with an axisymmetric linear transverse force is used. The solution is numerically tested and the influence of the force circle radius and temperature on the plate displacement is analyzed.

**Keywords:** three-layer circular plate, moment load, thermo-elasticity, analytical solution.

Получено 08.09.2023