

УДК 531.8:621.865.8

А. В. ЛОКТИОНОВ

Витебский государственный технологический университет, Витебск, Беларусь

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПРИ РАБОТЕ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Представлены алгоритмы получения динамических уравнений движения роботов-манипуляторов для случаев их работы в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Координатным и матричным способами выведены аналитические выражения скорости центра схвата трёхзвенного робота, имеющего три степени подвижности. С использованием уравнений Лагранжа II рода получены дифференциальные уравнения движения рассмотренных пространственных исполнительных механизмов в обобщенных координатах.

Ключевые слова: исполнительный механизм, декартовы координаты, цилиндрические координаты, сферические координаты, дифференциальные уравнения движения.

Введение. Манипулятор – это пространственный механизм, в котором кинематические пары обеспечивают угловое или поступательное относительное движение звеньев, образующих кинематические цепи. Перемещения рабочего органа в рабочей зоне манипулятора обеспечиваются переносными степенями подвижности, минимально необходимое число которых равно трем. Угловая ориентация реализуется ориентирующими степенями подвижности. Их необходимое число равно трем и осуществляется кинематическими парами, которые обеспечивают поворот рабочего органа манипулятора как относительно его продольной, так и еще двух взаимно перпендикулярных осей.

Рабочая зона манипуляторов, которые работают в прямоугольной системе координат, имеет форму параллелепипеда. Перемещения всех звеньев в них только поступательные, поэтому такие манипуляторы наиболее удобны для осуществления прямолинейных движений. При работе в цилиндрической системе координат наряду с поступательными осуществляется одно угловое перемещение. В случае сферической системы координат имеют место два угловых перемещения и поступательное движение рабочего органа.

Чтобы оценить технический потенциал промышленных роботов-манипуляторов [1, 2], требуется иметь информацию об их кинематических характеристиках, которые используются при конструировании звеньев, оценке динамических свойств механизма и прочностных расчетах. Так, чтобы разместить механизм в корпусе машинного агрегата, требуется знать траектории движения его звеньев, а также те их положения, которые определяют габаритные размеры механизма. Силовой расчет предполагает определение сил сопротивления движению и инерции звеньев, для чего следует знать скорость и ускорение центра схвата робота [3–5].

Для нахождения геометрических параметров, кинематических и силовых характеристик исполнительных механизмов роботов-манипуляторов используются различные методы, из которых наиболее прост векторный [1, 6, 7]. Методика его применения предполагает нахождение координат, которые определяют положение звеньев, а по ним – проекций скорости и ускорения на неподвижные оси координат. Векторный способ удобно применять в случаях расположения звеньев в одной плоскости. Его применение к двухзвенному исполнительному механизму, имеющему три степени подвижности [6, 7], сопряжено со значительными сложностями, поэтому при пространственном расположении звеньев он применяется редко. В этих случаях удобным оказывается матричный метод, который дает возможность нахождения скорости центра схвата робота как в подвижной, так и в неподвижной системах координат [1, 7, 8]. В работах [9, 10] рассмотрены некоторые особенности составления дифференциальных уравнений движения пространственного механизма в цилиндрических и сферических координатах.

Целью представленной статьи является анализ алгоритмов получения дифференциальных уравнений движения центра схвата робота, имеющего три звена и обладающего тремя степенями подвижности, при работе в различных системах координат. Для исследования динамики механической системы манипулятора применяются уравнения Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где t – время; T – кинетическая энергия системы; \dot{q}_j, q_j – обобщенная скорость и координата; Q_j – обобщенная сила; n – число степеней свободы.

Работа робота-манипулятора в прямоугольной системе координат. Механизм (рисунок 1) включает колонну для вертикального перемещения, устройство для горизонтального перемещения, которое состоит из звеньев 1 и 2, а также выдвигающуюся горизонтальную руку со схватом 3. Звенья имеют массы m_1, m_2, m_3 . Приводами в поступательных парах создаются движущие силы F_{01}, F_{12}, F_{23} . Трением пренебрегаем.

Учитывая, что механизм обладает тремя степенями свободы, назначаем три обобщенные координаты: $q_1 = x$ – горизонтальное перемещение выдвигающейся руки со схватом 3, $q_2 = y$ – горизонтальное перемещение звена 2 и $q_3 = z$ – вертикальное перемещение звена 1.

Кинетические энергии звеньев:

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{z}^2}{2}, \quad T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{z}^2 + \dot{y}^2), \quad T_3 = \frac{m_3}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

В таком случае кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} [m_3 \dot{x}^2 + (m_2 + m_3) \dot{y}^2 + (m_1 + m_2 + m_3) \dot{z}^2].$$

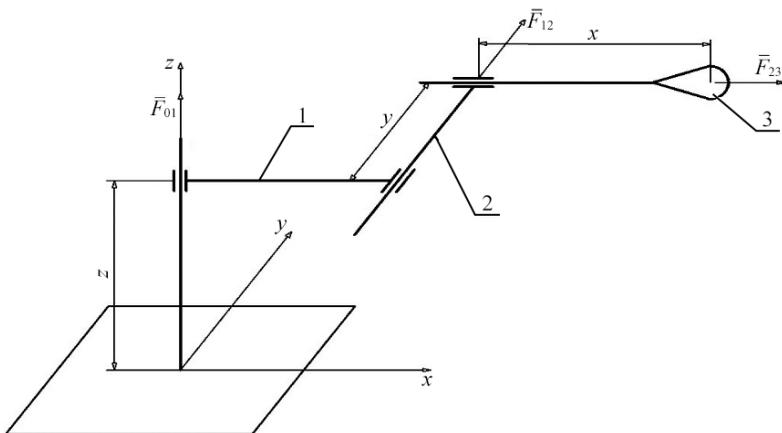


Рисунок 1 – Робот-манипулятор в прямоугольной системе координат

Последовательно сообщая механизму независимые возможные перемещения δx , δy и δz , находим обобщенные силы:

$$Q_x = F_{23}, \quad Q_y = F_{12}, \quad Q_z = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

Подстановка в (1) дает

$$m_3 \ddot{x} = F_{23}; \quad (m_2 + m_3) \ddot{y} = F_{12}; \quad (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{z} = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

Интегрируя эти уравнения дважды, получаем

$$x = \frac{F_{23}}{2m_3} t^2 + C_1 t + C_2; \quad y = \frac{F_{12}}{2(m_2 + m_3)} t^2 + C_3 t + C_4;$$

$$z = \left(\frac{F_{01}}{m_1 + m_2 + m_3} - g \right) \frac{t^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

Задаваясь начальными условиями, можно определить значения постоянных интегрирования C_1, \dots, C_6 .

Анализ работы в цилиндрической системе координат. Механизм (рисунок 2 [11, задача 48.49]) включает поворотную колонну 1, устройство для вертикального перемещения 2 и выдвигающуюся руку со схватом 3. Принимаем, что момент инерции звена 1 относительно его оси вращения I_1 ; масса звена 2 равна m_2 , его момент инерции относительно оси вращения I_2 ; масса руки 3 со схватом – m_3 , ее момент инерции относительно центральной оси I_3 , а расстояние от центра масс до оси вращения – ρ . К звену 1 приложен момент M . Приводами в поступательных парах создаются движущие силы, которые равны F_{12} и F_{23} .

В качестве обобщенных координат принимаем: $q_1 = \varphi$ – угол поворота колонны 1, $q_2 = z$ – перемещения по вертикали и $q_3 = \rho$ – перемещение руки со схватом 3.

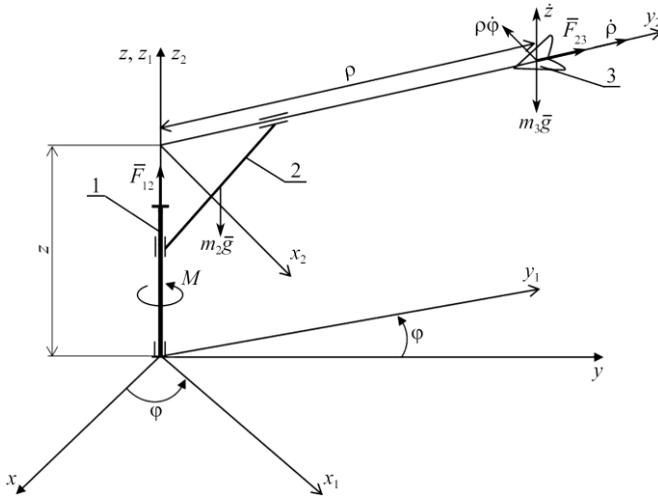


Рисунок 2 – Схема робота-манипулятора в цилиндрических координатах

Кинетическая энергия колонны 1 – $T_1 = \frac{I_1 \dot{\varphi}^2}{2}$, устройства 2, осуществляющего вертикальное перемещение, – $T_2 = \frac{m_2 \dot{z}^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\varphi}^2}{2}$.

Суммируя кинетические энергии штанги во вращательном движении и центра схвата в сложном движении и учитывая составляющие абсолютной скорости центра схвата: $\dot{\rho}$ – в перемещении вдоль штанги; $\rho \dot{\varphi}$ – во вращении вместе со штангой вокруг оси z ; \dot{z} – в вертикальном перемещении вдоль оси z , имеем

$$T_3 = \frac{I_3 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_3}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{(m_3 \rho^2 + I_3) \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_3}{2} \dot{z}^2 + \frac{m_3}{2} \dot{\rho}^2. \quad (2)$$

Скорость центра схвата 3 также может быть определена матричным методом. Координаты центра схвата в этом случае свяжем соотношением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ z \end{pmatrix}; \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор скорости центра схвата в системе $x y z$ определяется равенством

$$\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_\varphi * \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ z \end{pmatrix} + A_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\rho} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \dot{A}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из него получим

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\rho\dot{\varphi} & \cos\varphi \\ -\rho\dot{\varphi} & \sin\varphi \\ 0 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\rho} & \sin\varphi \\ \dot{\rho} & \cos\varphi \\ \dot{z} & \end{pmatrix}.$$

Проекция центра схвата на оси x, y, z

$$\dot{x} = -\rho\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\rho}\sin\varphi; \quad \dot{y} = -\rho\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\rho}\cos\varphi; \quad \dot{z} = \dot{z}.$$

Тогда кинетическая энергия центра схвата

$$T_3' = \frac{m_3}{2} v^2 = \frac{m_3}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m_3}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2),$$

что полностью соответствует второму слагаемому формулы (2).

Соответственно кинетическая энергия механизма в целом (см. рисунок 2)

$$T = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + m_3 \dot{\rho}^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2 + m_3}{2} \dot{z}^2 + \frac{m_3 \dot{\rho}^2}{2}.$$

Сообщая механизму три независимых обобщенных перемещения $\delta\varphi, \delta z, \delta\rho$, находим обобщенные силы:

$$Q_\varphi = M; \quad Q_z = F_{12} - (m_2 + m_3)g; \quad Q_\rho = F_{23}.$$

Подставляя полученные выражения в (1), имеем:

$$\frac{d}{dt} \left[(I_1 + I_2 + I_3 + m_3 \dot{\rho}^2) \dot{\varphi}^2 \right] = M;$$

$$(m_2 + m_3) \ddot{z} = F_{12} - (m_2 + m_3)g; \quad m_3 (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = F_{23}.$$

Анализ работы механизма в сферической системе координат. Положение вертикальной колонны 1, которая несет руку робота-манипулятора, определяется углом φ (рисунок 3). Угол поворота руки со схватом, которая выдвигается на расстояние r , равен θ . Момент инерции колонны 1 относительно оси Oz равен I_1 ; звенья 2 и 3 рассматриваются как однородные тонкие стержни, длины которых l_2, l_3 и массы m_2, m_3 ; размещаемый в схвате 4 переносимый груз имеет массу m . Вертикальной колонне сообщает вращение момент M_φ ; а оси поворота звена 2 – момент M_θ . Также на это звено действует движущая сила F_{23} , которая создается приводом в поступательной паре.

За обобщенные координаты механизма, имеющего три степени свободы, принимаем: $q_1 = \varphi$ – угол поворота колонны 1, $q_2 = \theta$ – угол поворота руки со схватом и $q_3 = r$ – ее относительное перемещение.

Кинетические энергии звеньев механизма 1, 2 и 3:

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\varphi}^2}{2}; \quad T_2 = \frac{J_2 \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m_2 l_2^2}{24} \dot{\varphi}^2; \quad T_3 = \frac{m_3}{6} (r^2 + r l_3 + l_3^2) (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m_3 \dot{r}^2}{2}.$$

$$\dot{A}_\varphi \dot{\varphi} A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta \\ -r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_\varphi \dot{A}_\theta \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta \\ -r\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta \\ r\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$A_\varphi A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{r} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{r} \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{r} \cos \varphi \cos \theta \\ \dot{r} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Отсюда проекции скорости \bar{v}_4 центра схвата на оси x, y, z :

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta + r\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta - \dot{r} \sin \varphi \cos \theta;$$

$$\dot{y} = -r\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta - r\dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta + \dot{r} \cos \varphi \cos \theta; \quad \dot{z} = r\dot{\theta} \cos \theta + \dot{r} \sin \theta,$$

$$\text{Соответственно, } T_4 = \frac{m}{2} v_4^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta),$$

а кинетическая энергия всего механизма с переносимым грузом

$$T = \frac{1}{2} \left[I_1 + \frac{m_2 l_2^2}{12} + \frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \cos^2 \theta \right] \dot{\varphi}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \right] \dot{\theta}^2 + \frac{m_3 + m}{2} \dot{r}^2.$$

В данном случае обобщенные силы имеют вид

$$Q_\varphi = M_\varphi; \quad Q_\theta = M_\theta - (m_3 + m) r g \cos \theta; \quad Q_r = F_{23} - (m_3 + m) g \sin \theta.$$

В результате подстановки в (1) окончательно получаем

$$\frac{d}{dt} \left[I_1 + \frac{m_2 l_2^2}{12} + \frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \cos^2 \theta \right] \dot{\varphi}^2 = M_\varphi;$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m_3}{3} (r^2 + r l_3 + l_3^2) + m r^2 \right] \dot{\theta} + m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = M_\theta - (m_3 + m) r g \cos \theta;$$

$$(m_3 - m) \ddot{r} - \frac{m_3}{6} (2r + l_3) (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - m r (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) = F_{23} - (m_3 + m) g \sin \theta.$$

Выводы. Представлены выводы дифференциальных уравнений движения механизмов манипуляторов при их работе в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Анализ вариантов определения скорости центра схвата показал, что координатный способ позволяет быстро получать выражения скоростей при малом количестве звеньев, совершающих вращательное движение. При наличии трех ориентирующих степеней подвижности целесообразно применение матричного способа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Механика промышленных роботов. В 3 кн. / Е. И. Воробьев [и др.]. – М. : Высш. шк., 1988. – Кн. 1 : Кинематика и динамика. – 303 с.
- 2 **Воробьева, Н. С.** Динамический синтез алгоритмов управления манипулятором параллельно-последовательной структуры / Н. С. Воробьева, В. В. Жога, Л. В. Жога // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – Т. 21, № 12. – С. 706–715.
- 3 **Козырев, Ю. Г.** Промышленные роботы: основные типы и технические характеристики / Ю. Г. Козырев. – М. : КНОРУС, 2017. – 560 с.
- 4 **Karabegović, I.** Industrial Robots : Design, Applications and Technology / I. Karabegović. – Hauppauge, NY : Nova Science Publishers, 2020. – 443 p.
- 5 Силовой расчет, уравнивание, проектирование механизмов и механика манипуляторов / И. Н. Чернышева [и др.]. – М. : Изд-во МГТУ, 1990. – 78 с.
- 6 **Локтионов, А. В.** Оценка методов расчета кинематических параметров исполнительного механизма / А. В. Локтионов, А. В. Гусаков // Современные методы проектирования машин. – 2004. – Вып. 2, т. 2. – С. 132–136.
- 7 **Локтионов, А. В.** Расчет кинематических параметров двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности / А. В. Локтионов, А. В. Гусаков // Вестник Полоцкого государственного университета. – Серия С. Фундаментальные науки. – 2004. – № 4. – С. 99–102.
- 8 **Локтионов, А. В.** Матричная форма расчёта кинематических параметров исполнительного механизма в общем случае его движения / А. В. Локтионов // Механика. исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 176–184.
- 9 **Локтионов, А. В.** Кинематический и динамический расчет пространственного исполнительного механизма / А. В. Локтионов // Горная механика и машиностроение. – 2019. – № 4. – С. 35–41.
- 10 **Локтионов, А. В.** Кинематические и динамические уравнения движения пространственного исполнительного механизма в сферических координатах / А. В. Локтионов, А. А. Сидорович // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 131–140.
- 11 **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.

A. V. LOKTIONOV

Vitebsk State Technological University, Vitebsk, Belarus

ANALYSIS OF THE SPATIAL ACTUATORS MOTION AT WORKING IN VARIOUS REFERENCE SYSTEMS

Algorithms for obtaining motion dynamic equations for robotic manipulators are presented for the cases of their operation in Cartesian, cylindrical and spherical coordinate systems. On the base of the coordinate and matrix methods, the analytical expressions for the grip center velocity for a three-link robot with three degrees of mobility are derived. Using Lagrange equations of the second kind, motion differential equations for the considered spatial actuators in generalized coordinates are obtained.

Keywords: actuating mechanism, Cartesian coordinates, cylindrical coordinates, spherical coordinates, motion differential equations.

Получено 07.09.2021