

УДК 539.374

Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТУПЕНЧАТОЙ КРУГОВОЙ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ

Исследуется осесимметричный изгиб круговой неупругой трехслойной сэндвич-пластины ступенчато-переменной толщины. Материалы пластины проявляют неупругие свойства. Получены выражения перемещений и деформаций конструкции методом упругих решений Ильюшина. Произведен численный анализ для конкретной пластины.

Ключевые слова: трехслойная пластина, ступенчатая толщина несущих слоев, упругопластичность.

Введение. Трехслойные конструкции широко применяются в машиностроении, строительстве и других отраслях народного хозяйства. Начиная с середины XX века начала бурно развиваться теория их расчета [1–5]. С учетом минимизации весовых параметров элементы конструкции с изменяющейся толщиной обладают рядом преимуществ по сравнению с элементами, у которых толщина постоянна. Деформирование однослойных круговых пластин с переменным изменением толщины исследовали как отечественные [6, 7], так и зарубежные [8–11] ученые. Термоупругий изгиб ступенчатой пластины рассмотрен в [12]. Дальнейшее развитие теории расчета пластин заключается в использовании более сложных моделей, учитывающих неупругое поведение материалов слоев. В данной работе рассмотрен осесимметричный поперечный изгиб неупругой круговой трехслойной пластины, имеющей ступенчато-переменную толщину.

Постановка задачи. Пластина (рисунок 1) включает три слоя. Деформирование внешних несущих слоев одинаковой толщины удовлетворяет гипотезам Кирхгофа, внутреннего слоя (заполнителя) – гипотезе Тимошенко. Заполнитель считается легким, т. е. пренебрегаем работой внутренних сил в тангенциальном направлении. Предполагается, что толщины несущих слоев ступенчато изменяются вдоль радиуса пластины, а на ее контуре расположена жесткая диафрагма. В местах склейки слоев перемещения непрерывны.

Систему координат r, φ, z связываем со срединной плоскостью заполнителя. К поверхности верхнего несущего

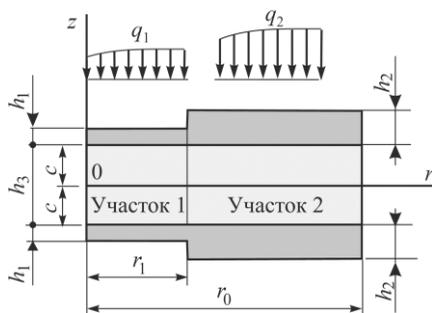


Рисунок 1 – Пластина под действием распределенных нагрузок

слоя приложены осесимметричные нагрузки интенсивности $q_1(r)$, $q_2(r)$. В качестве неизвестных на каждом участке l принимаются прогиб срединной поверхности пластины $w(r)$, а также относительный сдвиг в заполнителе $\psi(r)$, которые не зависят от окружной координаты φ .

Искомые перемещения ищем в виде

$$\begin{aligned}\psi(r) &= \psi_1(r) + (\psi_2(r) - \psi_1(r))H_0(r - r_1); \\ w(r) &= w_1(r) + (w_2(r) - w_1(r))H_0(r - r_1),\end{aligned}$$

где $H_0(r)$ – функция Хевисайда [13].

Напряжения и деформации в слоях пластины связаны в соответствии с теорией малых упругопластических деформаций Ильюшина [14]:

$$\begin{aligned}s_{\alpha}^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\varepsilon_{\alpha}^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)}; \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(3)}))\varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi),\end{aligned}\tag{1}$$

где $s_{\alpha}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиатор и шаровой тензор напряжений; G_k , K_k – модули сдвига и объемной деформации; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции, описывающие физическую нелинейность характеристик слоев; $\varepsilon_{\alpha}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиатор и шаровой тензор деформаций; $s_{rz}^{(3)}$, $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе.

Для участка l система уравнений равновесия в усилиях имеет вид

$$H_{re,r}^l + \frac{1}{r}(H_{re}^l - H_{\varphi e}^l) = h_{l\omega};\tag{2}$$

$$M_{re,rr}^l + \frac{1}{r}(2M_{re,r}^l - M_{\varphi e,r}^l) = -q_l + q_{l\omega},$$

где

$$M_{\alpha e}^l \equiv \int_c^{c+h_l} \sigma_{\alpha e}^{(1)l} dz + \int_{-c}^c \sigma_{\alpha e}^{(3)l} dz + \int_{-c-h_l}^{-c} \sigma_{\alpha e}^{(2)l} dz;$$

$$H_{\alpha e}^l = \int_{-c}^c \sigma_{\alpha e}^{(3)l} dz + c \left(\int_c^{c+h_l} \sigma_{\alpha e}^{(1)l} dz - \int_{-c-h_l}^{-c} \sigma_{\alpha e}^{(2)l} dz \right).$$

Слагаемые в правых частях уравнений, учитывающие нелинейность, таковы:

$$h_{l\omega} = H_{r\omega,r}^l + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^l - H_{\varphi\omega}^l); \quad q_{l\omega} = M_{r\omega,rr}^l + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r}^l - M_{\varphi\omega,r}^l);\tag{3}$$

где

$$M_{\alpha\omega}^l \equiv \int_c^{c+h_l} \sigma_{\alpha\omega}^{(1)l} dz + \int_{-c}^c \sigma_{\alpha\omega}^{(3)l} dz + \int_{-c-h_l}^{-c} \sigma_{\alpha\omega}^{(2)l} dz;$$

$$H_{\alpha e}^l = \int_{-c}^c \sigma_{\alpha\omega}^{(3)l} dz + c \left(\int_c^{c+h_l} \sigma_{\alpha\omega}^{(1)l} dz - \int_{-c-h_l}^{-c} \sigma_{\alpha e}^{(2)l} dz \right).$$

Напряжения, входящие в (2) и (3), следуют из соотношений (1)

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha e}^{(k)l} &= 2G_k \varepsilon_{\alpha}^{(k)l} + 3K_k \varepsilon^{(k)l}; \quad \sigma_{\alpha \omega}^{(k)l} = 2G_k \omega^{(k)l} \varepsilon_{\alpha}^{(k)l} \quad (k = 1, 2); \\ \sigma_{\alpha e}^{(3)l} &= 2G_3 \varepsilon_{\alpha}^{(3)l} + 3K_3 \varepsilon^{(3)l}; \quad \sigma_{\alpha \omega}^{(3)l} = 2G_3 \omega^{(3)l} \varepsilon_{\alpha}^{(3)l} \quad (\alpha = r, \varphi).\end{aligned}$$

Обобщенные внутренние усилия, фигурирующие в уравнениях (2), можно выразить через искомые перемещения, используя соотношения (1). Тогда система нелинейных дифференциальных уравнений (2) для определения перемещений $\psi_l(r)$ и $w_l(r)$ преобразуется к виду

$$L_2(b_{1l}\psi_l - b_{2l}w_{l,r}) = h_{l\omega}; \quad L_3(b_{2l}\psi_l - b_{3l}w_{l,r}) = -q_l + q_{l\omega}.$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы, представленные в работе [2]; выражения коэффициентов b_{jl} системы приведены в [12].

Задача отыскания функций $\psi(r)$ и $w(r)$ сопровождается учетом силовых или кинематических граничных условий.

Решение методом упругих решений Ильюшина [14]. Перепишем систему (3) в итерационном виде:

$$L_2(b_{1l}\psi_l^n - b_{2l}w_{l,r}^n) = h_{l\omega}^{n-1}; \quad L_3(b_{2l}\psi_l^n - b_{3l}w_{l,r}^n) = -q_l + q_{l\omega}^{n-1}. \quad (4)$$

Здесь n – номер приближения, величины $h_{l\omega}^{n-1}, q_{l\omega}^{n-1}$ рассматривают как дополнительные внешние нагрузки. На первом этапе они приравниваются к нулю, а затем вычисляются по результатам предыдущего приближения. Для этого используют выражения типа (2), в которых все слагаемые определяются на основании предыдущей итерации. Таким образом, на каждом шаге решается упругая задача по известным дополнительным внешним нагрузкам, которые находятся по формулам (3).

Решая систему (4), получим итерационные соотношения для перемещений:

$$\begin{aligned}\psi_l^n &= \frac{b_{2l}}{b_{1l}} w_{l,r}^n + C_{1l}^n r + \frac{C_{2l}^n}{r} + \frac{1}{b_{1l}} \frac{1}{r} \int r \int h_{l\omega}^{n-1} dr dr; \\ w_l^n &= C_{3l}^n + C_{4l}^n r^2 + C_{5l}^n \ln(r) + C_{6l}^n r^2 \ln(r) + w_l^{*n-1}; \\ w_l^{*n-1} &= \frac{b_{2l}}{S_l} \int \frac{1}{r} \int r \int h_{\omega l}^{n-1} dr dr dr + \frac{b_{1l}}{S_l} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (q_l - q_{\omega l}^{n-1}) r dr dr dr dr, \\ S_l &= b_{3l} b_{1l} - b_{2l}^2,\end{aligned} \quad (5)$$

где C_{il}^n – константы интегрирования, которые зависят от условий на границах участка l пластины ($i = 1, \dots, 6$).

При шарнирном закреплении контура выполняются следующие условия:

$$\psi_2^n = 0; \quad w_2^n = 0; \quad M_r^{2n} = 0.$$

Выразив момент через перемещения, третье выражение запишем в виде

$$\left(b_{22}\psi_{2,r}^n + b_{22}^- \frac{\psi_2^n}{r} - b_{32}w_{2,rr}^n - b_{32}^- \frac{w_{2,r}^n}{r} \right) \Big|_{r=r_0} =$$

$$= \int_c^{c+h_1} \sigma_{r\omega}^{(1)2(n-1)} z dz + \int_{-c}^c \sigma_{r\omega}^{(3)2(n-1)} z dz + \int_{-c-h_1}^{-c} \sigma_{r\omega}^{(2)2(n-1)} z dz.$$

Кроме этого, необходимо учесть условия на границе участков при $r = r_1$ и ограниченности перемещений в начале координат ($r=0$). В результате получим систему двенадцати линейно-независимых алгебраических уравнений, из которой определяются константы интегрирования $C_{11}^n, C_{21}^n, \dots, C_{62}^n$.

Таким образом, решение (5) дает перемещения при нелинейном деформировании круговой ступенчатой трехслойной пластины.

Численное исследование. Для проверки полученных итерационных решений была рассмотрена сэндвич-пластина со слоями Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т ($h_1 = 0,01$ м, $h_2 = 0,02$ м, $c = 0,15$ м, $r_0 = 1$ м), константы для материалов которой взяты из [2]. Интенсивность поперечной нагрузки $q_1 = q_2 = 300$ кПа.

Рисунок 2 демонстрирует сходимость метода упругих решений при исследовании неупругого изгиба трехслойной пластины. Номер кривой соответствует шагу итерации. Первое приближение соответствует упругой пластине, 2-е приближение (как прогибы w , так и углы ψ) отличается от него в среднем на 16 %. При дальнейшем итерационном процессе разница между решениями уменьшается, и 4-е приближение принято за искомое (разница с третьим – порядка 0,5 %). Дальнейшие вычисления показали устойчивую тенденцию к сближению решений при увеличении номера итерации.

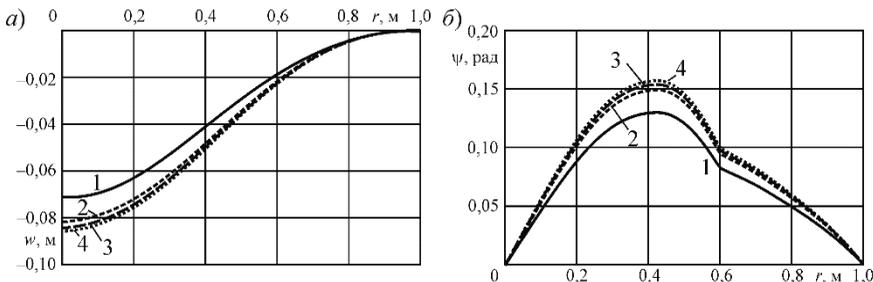


Рисунок 2 – Сходимость метода упругих решений при определении:
 а – прогибов $w(r)$; б – углов $\psi(r)$

Заключение. В работе представлена модель и итерационным методом получены числовые решения краевой задачи о неупругом деформировании круговых ступенчатых пластин. Установлено, что учет неупругих свойств материалов пластины ведет к увеличению ее перемещений до 20 %.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т22УЗБ-015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Григолюк, Э. И. Современное состояние теории многослойных оболочек / Э. И. Григолюк, Ф. А. Коган // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8, № 6. – С. 5–17.
- 2 Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.
- 3 Леоненко, Д. В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
- 4 Старовойтов, Э. И. Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.
- 5 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.
- 6 Коваленко, А. Д. Круглые пластины переменной толщины / А. Д. Коваленко. – М. : Физматгиз, 1959. – 294 с.
- 7 Долгополов, В. М. Изгиб круглой ортотропной пластинки переменной толщины / В. М. Долгополов // Некоторые задачи прикладной теории упругости : сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Саратовского политех. ин-та, 1971. – С. 44–50.
- 8 Vivio, F. Closed form solutions of axisymmetric bending of circular plates having nonlinear variable thickness / F. Vivio, V. Vullo // International Journal of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol. 52, is. 9. – P. 1234–1252.
- 9 Kang, J. H. Three-dimensional vibration analysis of thick, circular and annular plates with nonlinear thickness variation / J. H. Kang // Computers & Structures. – 2003. – Vol. 81, is. 16. – P. 1663–1675.
- 10 Liang, B. Natural frequencies of circular annular plates with variable thickness by a new method / B. Liang, S. F. Zhang, D. Y. Chen // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2007. – Vol. 84, is. 5. – P. 293–297.
- 11 Javanshir, J. Free flexural vibration response of integrally-stiffened and/or stepped-thickness composite plates or panels / J. Javanshir, T. Farsadi, U. Yuceoglu // International Journal of Acoustics and Vibration. – 2014. – Vol. 19, no. 2. – P. 114–126.
- 12 Леоненко, Д. В. Изгиб ступенчатой круговой сэндвич-пластины при тепловом нагружении / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 123–127.
- 13 Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.
- 14 Ильюшин, А. А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

D. V. LEONENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

INELASTIC DEFORMATION OF A STEP CIRCULAR SANDWICH PLATE

The axisymmetric bending of a circular inelastic three-layer sandwich plate of stepwise variable thickness is investigated. The plate materials have inelastic properties. Expressions for the displacements and deformations of the structure are obtained using Ilyushin's method of elastic solutions. A numerical analysis for a specific plate is carried out.

Keywords: three-layer plate, stepped thickness of load-bearing layers, elastoplasticity.

Получено 25.10.2023