

УДК 539.62

Е. В. КОДНЯНКО^{1,2}, Д. А. ЧЕРНОУС²

¹ЗАО «Солигорский институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством», Солигорск, Беларусь

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛА КАЧЕНИЯ С ТОНКИМ ДЕФОРМИРУЕМЫМ НЕСЖИМАЕМЫМ ОБОДОМ

Предложена модификация ранее разработанной асимптотической методики решения контактных задач для жесткого тела качения, имеющего тонкий деформируемый обод, позволяющая получить решения в случае несжимаемого материала обода. Построены расчетные диаграммы «сила – смещение» для различных значений коэффициента трения. Определены эпюры контактного давления и сдвигового контактного напряжения, установлено распределение интенсивности тензора напряжений в ободе. Выполнено сравнение с результатами, полученными методом конечных элементов.

Ключевые слова: контактная задача, асимптотическое приближение, тонкий слой, несжимаемый материал, контактное давление, контактное сдвиговое напряжение, интенсивность тензора напряжений.

Введение. Одной из тенденций развития современной техники является активное использование деталей с покрытиями или поверхностными слоями из полимерных материалов. Для повышения эффективности использования полимерных покрытий требуется разработка расчетных методик, позволяющих прогнозировать значения функциональных параметров соответствующих контактных пар. Решению контактных задач для тел с покрытиями посвящено множество известных научных публикаций, например [1–3]. Точное решение данной задачи для покрытия произвольной толщины основано на интегральном преобразовании Фурье и последующем решении системы интегральных уравнений. Его непосредственное использование в практических инженерных расчетах контактных пар не всегда возможно, поэтому наряду с точным решением используются асимптотические приближения [4, 5] или различные модели основания [6]. Ранее [7] в рамках модели основания Винклера [6] была разработана методика решения контактной задачи об установленном качении жесткого цилиндра с деформируемым ободом. Получены расчетные эпюры контактного давления и сдвигового контактного напряжения в зонах сцепления и проскальзывания.

Вместе с тем большинство полимеров, используемых для антифрикционных покрытий, по своим упругим характеристикам близки к несжимаемым материалам (коэффициент Пуассона ν больше 0,45). Для покрытия, жестко связанного с поверхностью детали и образованного несжимаемым материалом, модель основания Винклера неприменима. В этом случае значение ко-

коэффициента нормальной жесткости (коэффициента постели) стремится к бесконечности. С другой стороны, деформирование тонкого несжимаемого покрытия может быть описано в рамках асимптотического приближения второго порядка для тонкого слоя [8, 9]. Так в работе [9] на основе асимптотического приближения были выведены дифференциальные уравнения для контактного давления и сдвигового контактного напряжения в осесимметричной постановке. Описано распределение напряжений в объеме покрытия. Однако при этом рассматривались только частные решения определяющих уравнений и не учитывалось наличие в области контакта зон сцепления и проскальзывания. Указанные недостатки были устранены в работе [10]. Вместе с тем предложенная математическая постановка задачи не может быть в полной мере реализована для несжимаемого материала.

Цель настоящего исследования состоит в разработке методики решения контактной задачи для жесткого колеса с упругим несжимаемым ободом при учете частичного проскальзывания в области контакта, основанной на асимптотическом приближении второго порядка.

Решение контактной задачи. Как и в работах [7, 10], в качестве исследуемой модели тела качения примем абсолютно жесткий цилиндр, окруженный тонким деформируемым ободом (рисунок 1). Обод толщины h жестко связан с поверхностью жесткого цилиндра и образован изотропным несжимаемым линейно упругим материалом. Механические свойства данного материала будем характеризовать модулем сдвига G . Принимается, что обод находится в условиях плоской деформации. Радиус составного (вместе с ободом) цилиндра R , длина образующей L . Цилиндр находится в контакте с горизонтальной недеформируемой шероховатой поверхностью. Коэффициент трения опорной поверхности с ободом f . К центру цилиндра приложена вертикальная сила P . Координатная ось x располагается в области контакта. Начало координат лежит на линии действия силы P . Символом «сц» на рисунке 1 обозначена зона сцепления, а символами «ск» – зоны проскальзывания с указанием знака сдвигового контактного напряжения в данной зоне.

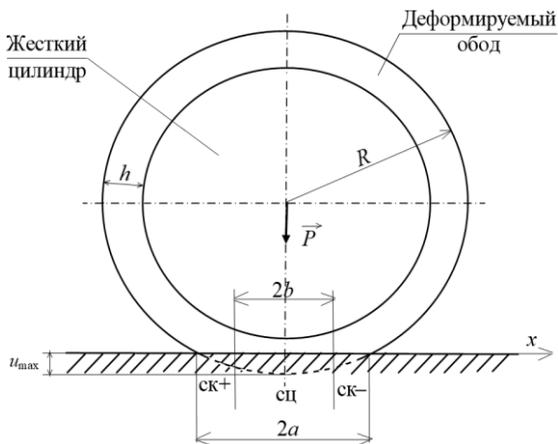


Рисунок 1 – Расчетная схема составного цилиндра, контактирующего с опорной поверхностью при действии вертикальной силы P

Под действием силы P точки внешней поверхности обода, которые находятся в области контакта, приобретают вертикальные u и горизонтальные w смещения относительно соответствующих (имеющих ту же координату x) точек внутренней поверхности (поверхности жесткого цилиндра). Полагая, что размеры области контакта малы по сравнению с радиусом R , относительные вертикальные смещения можно записать в виде

$$u = u_{\max} - \frac{x^2}{2R},$$

где u_{\max} – вертикальное смещение центра составного цилиндра.

В работе [10] выведены дифференциальные уравнения, устанавливающие связь контактного давления p и сдвигового контактного напряжения τ со смещениями u и w :

$$u = Z_{0u}p + Z_{1u} \frac{d\tau}{dx} + Z_{2u} \frac{d^2p}{dx^2}; \quad w = Z_{0w}\tau + Z_{1w} \frac{dp}{dx} + Z_{2w} \frac{d^2\tau}{dx^2}. \quad (1)$$

Коэффициенты в системе (1) определяются толщиной h , модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν материала обода:

$$Z_{0u} = \frac{h(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}; \quad Z_{0w} = 2 \frac{h(1+\nu)}{E}; \quad Z_{1u} = -Z_{1w} = -\frac{h^2(1-4\nu)(1+\nu)}{2E(1-\nu)};$$

$$Z_{2u} = \frac{h^3\nu(1-4\nu)(1+\nu)}{3E(1-\nu)^2}; \quad Z_{2w} = \frac{h^3(1+\nu)(3+4\nu)}{3E(1-\nu)}.$$

Для несжимаемого материала обода ($\nu = 0,5$) система (1) приобретает вид

$$u = \frac{h^2}{2G} \left(\frac{d\tau}{dx} - \frac{2h}{3} \frac{d^2p}{dx^2} \right), \quad w = \frac{h}{G} \left(\tau - \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} + \frac{5h^2}{3} \frac{d^2\tau}{dx^2} \right). \quad (2)$$

Приведенные в работе [10] выражения для распределения проекций упругих смещений точек обода, в случае несжимаемого материала можно записать следующим образом:

$$u_x = \frac{z}{G} \left[\tau - h \left(1 - \frac{z}{2h} \right) \frac{dp}{dx} + h^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{z}{2h} - \frac{z^2}{3h^2} \right) \frac{d^2\tau}{dx^2} \right],$$

$$u_z = -\frac{z^2}{2G} \left[\frac{d\tau}{dx} - h \left(1 - \frac{z}{3h} \right) \frac{d^2p}{dx^2} \right]. \quad (3)$$

Здесь координата z отсчитывается от внутренней поверхности обода (z изменяется от 0 до h).

Решение системы (2) различно для зон сцепления и проскальзывания.

Зона сцепления. Горизонтальные смещения w в зоне сцепления при рассматриваемом режиме нагружения составного цилиндра будут равны нулю.

Изложенная в работе [10] методика решения системы (1) в зоне сцепления для несжимаемого материала оказывается неприменима. При получении общего решения однородной ($u = w = 0$) системы (2) два из четырех корней характеристического уравнения [10] оказываются равными нулю. При этом невозможно удовлетворить всем условиям на границе раздела зон сцепления и проскальзывания (неразрывность контактного давления, сдвигового контактного напряжения, производных от данных величин по координате x и горизонтального смещения w). В связи с этим предлагается следующий порядок решения системы дифференциальных уравнений (2). Возьмем производную по x от обеих частей второго уравнения и выразим первую производную от сдвигового контактного напряжения:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{h}{2} \frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{5h^2}{3} \frac{d^3 \tau}{dx^3}. \quad (4)$$

Уравнения (2) получены в приближении второго порядка по степени малого параметра $\gamma = h/a$, представляющего собой отношение толщины покрытия к полуширине области контакта [8–10]. Поэтому после подстановки выражения (4) в первое уравнение системы (2) слагаемое, содержащее третью производную от сдвигового напряжения τ , приравнивается к нулю. После математических преобразований получим дифференциальное уравнение для контактного давления:

$$u_{\max} - \frac{x^2}{2R} = -\frac{h^3}{12G} \frac{d^2 p}{dx^2}.$$

Его общее решение имеет вид

$$p^{\text{сц}} = -\frac{6}{h^3} Gu_{\max} x^2 + \frac{Gx^4}{2Rh^3} + C_1^{\text{сц}} x + C_0^{\text{сц}}. \quad (5)$$

Здесь $C_0^{\text{сц}}$, $C_1^{\text{сц}}$ – константы, определяемые из граничных условий. Верхний индекс «сц» свидетельствует о том, что соответствующая величина определена для зоны сцепления.

Подставим решение (5) в формулу (4). Ограничиваясь частным решением полученного уравнения, для сдвигового напряжения τ имеем

$$\tau^{\text{сц}} = C_1^{\text{сц}} \frac{h}{2} - \frac{6}{h^2} Gu_{\max} x - 10G \frac{x}{R} + \frac{Gx^3}{Rh^2}. \quad (6)$$

Зона проскальзывания. В данной зоне выполняется закон кулонова трения для сдвигового напряжения

$$\tau^{\text{ск}} = \pm fp^{\text{ск}}. \quad (7)$$

Верхний индекс «ск» свидетельствует о том, что соответствующая величина определена для зоны проскальзывания. Здесь и далее верхний и нижний знаки соответствуют зонам проскальзывания, в которых сдвиговое контактное напряжение соответственно положительно и отрицательно. Подставив равенство (7) в первое соотношение системы (2), получим уравнение для контактного давления в зоне проскальзывания

$$u_{\max} - \frac{x^2}{2R} = \frac{h^2}{2G} \left(\pm f \frac{dp}{dx} - \frac{2h}{3} \frac{d^2 p}{dx^2} \right).$$

Его решение имеет вид

$$p^{\text{ск}} = \pm 2G \left(\frac{u_{\max}}{fh^2} - \frac{4}{9f^3 R} \right) x - \frac{2G}{3f^2 Rh} x^2 \mp \frac{G}{3fRh^2} x^3 + C_0^{\text{ск}} + C_e^{\text{ск}} e^{kx}. \quad (8)$$

Здесь $C_0^{\text{ск}}$, $C_e^{\text{ск}}$ – константы, которые определяются из граничных условий. Коэффициент k в показателе экспоненты задается соотношением

$$k = \pm \frac{3f}{2h}.$$

Для использования полученных решений (5)–(8) требуется предварительно определить максимальное вертикальное смещение u_{\max} , константы интегрирования $C_0^{\text{сц}}$ и $C_0^{\text{ск}}$ для зоны сцепления, а также константы интегрирования $C_0^{\text{ск}}$ и $C_e^{\text{ск}}$ для зоны проскальзывания.

В рамках настоящего исследования будем рассматривать только вертикальное смещение цилиндра под действием вертикальной силы P . В этом случае область контакта включает центральную зону сцепления и две симметрично расположенные зоны проскальзывания (рисунок 1). Ширина области контакта $2a$. Зона сцепления имеет ширину $2b$. Требование симметричности распределения контактного давления при рассматриваемом режиме нагружения будет выполняться если константы интегрирования $C_0^{\text{ск}}$, $C_e^{\text{ск}}$ для обеих зон проскальзывания будут одинаковы. Данное условие также предполагает, что $C_1^{\text{сц}} = 0$. Остальные константы определяются из следующих условий:

– неразрывность контактного давления, сдвигового контактного напряжения и производной от контактного давления по координате x на границе раздела зон сцепления и проскальзывания:

$$p^{\text{сц}} \Big|_{x=b} = p^{\text{ск}} \Big|_{x=b}, \quad \tau^{\text{сц}} \Big|_{x=b} = \tau^{\text{ск}} \Big|_{x=b}, \quad \frac{dp^{\text{сц}}}{dx} \Big|_{x=b} = \frac{dp^{\text{ск}}}{dx} \Big|_{x=b}; \quad (9)$$

– контактное давление и производная от контактного давления по координате x равны нулю на границе области контакта:

$$p^{\text{ck}} \Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{dp^{\text{ck}}}{dx} \Big|_{x=a} = 0. \quad (10)$$

Для составного цилиндра выполняется условие равновесия в проекциях на вертикальную ось

$$P = L \int_{-a}^a p dx. \quad (11)$$

Выражения (9)–(11) позволяют составить систему шести нелинейных уравнений для определения констант интегрирования C_0^{ck} , C_0^{ck} , C_e^{ck} , максимального вертикального смещения u_{max} , полуширины области контакта a и полуширины зоны сцепления b . После определения названных констант можно установить явный вид распределения контактного давления и сдвигового контактного напряжения в области контакта по формулам (9)–(11). Если задана не сила P , а смещение u_{max} , то условие (11) используется для определения силы, требуемой для реализации данного смещения.

Подставив найденные функции $p(x)$, $\tau(x)$ в уравнения (3), установим распределение компонент упругого смещения в деформируемом ободе. Затем можно определить распределения компонент тензора деформаций ε_{ij} , интенсивности тензоров деформаций ε_u и напряжений σ_u :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{z}{G} \frac{d\tau}{dx} + \frac{hz}{2G} \left(2 - \frac{z}{h} \right) \frac{d^2 p}{dx^2}; \quad \varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{zz}; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = 0; \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2G} \left[\tau - h \left(1 - \frac{z}{h} \right) \frac{dp}{dx} + \frac{h^2}{2} \left(5 - 2 \frac{z}{h} - 3 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{d^2 \tau}{dx^2} \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sigma_u = 3\varepsilon_u = \sqrt{2G} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)}.$$

Рассмотрим предельный случай весьма малого трения в области контакта ($f \rightarrow 0$). При этом зона сцепления отсутствует, а для зоны проскальзывания контактное давление удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u_{\text{max}} - \frac{x^2}{2R} = -\frac{h^3}{3G} \frac{d^2 p}{dx^2}.$$

Его общее решение –

$$p = -\frac{3G}{2h^3} x^2 \left(u_{\text{max}} - \frac{x^2}{12R} \right) + C_0 + C_1 x,$$

где C_0 , C_1 – константы интегрирования.

Условие симметрии контактного давления будет выполняться при $C_1 = 0$. Используя условия (10) на границе области контакта и условие равновесия (11), определяем константу C_0 , максимальное смещение u_{\max} и полуширину a

$$a = \left(\frac{15PRh^3}{2LG} \right)^{0,2}, \quad u_{\max} = \frac{a^2}{6R}, \quad C_0 = \frac{Ga^4}{8Rh^3}. \quad (13)$$

Распределение контактного давления при этом описывается функцией

$$p = \frac{G}{8Rh^3} (a^2 - x^2)^2. \quad (14)$$

Уравнения (13) и (14) совпадают с соответствующими соотношениями, приведенными в монографии [12] для тонкого ($h \ll a$) несжимаемого ($\nu \rightarrow 0,5$) покрытия при пренебрежении трением в области контакта.

Наряду с разработанной методикой для решения задачи о вертикальном смещении цилиндра рассмотрим два альтернативных подхода:

- конечно-элементное моделирование в программной среде ANSYS [13];
- основанное на использовании интегрального преобразования Фурье точное решение краевой задачи теории упругости для полосы произвольной толщины [2, 12].

Конечно-элементная модель составного цилиндра, опирающегося на жесткую опорную поверхность, представлена на рисунке 2. Рассматривается фрагмент составного цилиндра высотой 12 мм. Симметричность решаемой задачи позволяет рассматривать только «правую» половину этого фрагмента. Жесткий цилиндр (площадь A1 на рисунке 2, a) имеет радиус $r = R - h$. Деформируемый обод (площадь A5) имеет толщину h . Опорная поверхность моделируется прямоугольником длины 140 мм и высотой 5 мм (площадь A3). Характеристики внутреннего (жесткого) цилиндра и опоры приняты таким образом, чтобы впоследствии имелась возможность учета деформируемости основной детали и опорной поверхности. Принято, что смещение нижнего ребра элемента A3 равно нулю. Для ребер всех элементов, соответствующих оси симметрии ($x = 0$), назначены условия равенства нулю проекции смещения на ось x . Верхнему ребру элемента A1 придано вертикальное отрицательное смещение u_{\max} . Для дискретизации численной модели использованы 4-узловые плоские конечные элементы PLANE182 [13]. Общее количество элементов – 1046, количество элементов в ободе (площадь A5) – 380. В области контакта используются контактные линейные элементы CONTA172 для поверхности обода и TARGE 169 [13] для опорной поверхности. Количество контактных элементов – 120.

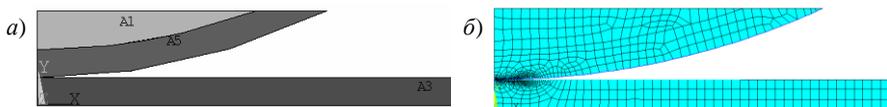


Рисунок 2 – Геометрическая (а) и конечно-элементная (б) модели области контакта

При описании контакта с использованием точного решения краевой задачи теории упругости для полосы [12] приходится производить численное интегрирование с контролем сходимости при бесконечном верхнем пределе интегрирования, после чего осуществляется численное решение системы интегральных уравнений [1, 2]. В связи с очевидной трудоемкостью реализации точного решения сопоставление с результатами данного подхода будем проводить только для случая отсутствия трения в области контакта. При этом распределение контактного давления определяется из интегрального уравнения

$$u_{\max} - \frac{x^2}{2R} = \frac{\chi + 1}{4G\pi} \int_{-a}^a p(y) K\left(\frac{x-y}{h}\right) dy. \quad (15)$$

Здесь $\chi = 3 - 4\nu = 1$. Функция влияния $K(x)$ задается выражением

$$K(x) = \int_0^{\infty} \frac{4\beta - 2\chi \operatorname{sh}(2\beta)}{(\chi + 1)^2 + 4\beta^2 + 4\chi \operatorname{sh}^2\beta} \frac{\cos(x\beta)}{\beta} d\beta.$$

Пример использования методики. В качестве расчетного примера использования разработанной методики рассмотрим стальной цилиндр радиусом $r = R - h = 0,12$ м и длиной образующей $L = 0,08$ м. С боковой поверхностью цилиндра жестко сцеплена обкладка толщиной $h = 5$ мм ($R = 0,125$ м), образованная полиуретаном с твердостью по Шору 85 ед. На составной цилиндр действует вертикальная сила P , прижимающая его к стальной горизонтальной поверхности. Размеры и материалы рассматриваемого объекта соответствуют ролику, который двигается по проводникам скипо-клетевого ствола № 2 ИРУ ОАО «Беларуськалий» [14]. Модуль сдвига материала обкладки аналогично работе [15] принят равным $G = 7$ МПа.

На рисунке 3 представлены расчетные диаграммы «сила – смещение», полученные на основе разработанной методики, в ходе конечно-элементного моделирования и численного решения интегрального уравнения (15).

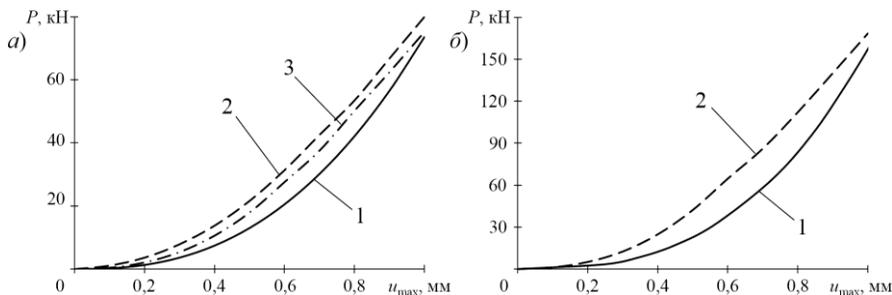


Рисунок 3 – Расчетные диаграммы «сила – смещение» при отсутствии трения (а)

и при значении коэффициента трения $f = 0,3$ (б):

1 – по разработанной методике; 2 – конечно-элементная модель;

3 – решение интегрального уравнения (15)

Учитывая, что решение интегрального уравнения (15) обеспечивает наиболее точный прогноз значений параметров контакта, получено, что использование разработанной методики приводит к несколько заниженным, а использование метода конечных элементов – завышенным оценкам силы P при заданном смещении u_{\max} составного цилиндра (рисунок 3, а).

В рассматриваемом примере для диапазона значений u_{\max} от нуля до 1 мм среднее относительное отклонение значений силы, определенных в рамках конечно-элементной модели, от соответствующих результатов использования интегрального уравнения (15) составило 7 %. Аналогичное отклонение для разработанной методики – 11 %. Увеличение максимальной осадки составного цилиндра u_{\max} сопровождается ростом ширины области контакта и, соответственно, уменьшением малого параметра γ . Поэтому при больших значениях смещения u_{\max} погрешность результатов использования предлагаемого асимптотического подхода будет ниже.

Учет наличия трения в области контакта приводит к увеличению расчетных значений вертикальной силы P (рисунок 3, б). Номинальное [14] значение силы прижатия ролика для толщины обкладки в 5 мм составляет 33 кН. При таком значении силы относительное отклонение расчетного значения смещения u_{\max} , определенного по разработанной методике, от соответствующей оценки, которая получена методом конечных элементов, составило 12 % при $f = 0$ и 10 % при $f = 0,3$.

При использовании разработанной методики максимальное значение контактного давления оказалось ниже, а максимальное по модулю значение сдвигового контактного напряжения – выше соответствующих расчетных оценок, полученных на основе конечно-элементной модели (рисунок 4).

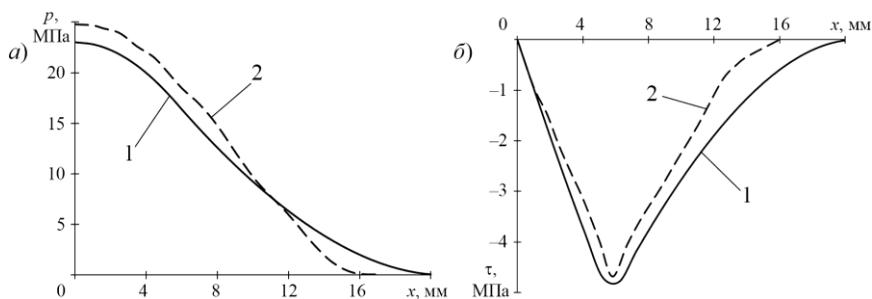


Рисунок 4 – Эпюры контактного давления (а) и сдвигового контактного напряжения (б) при $P = 33$ кН и $f = 0,3$:

1 – в соответствии с разработанной методикой; 2 – конечно-элементное моделирование

Применение соотношений (5)–(8) приводит к несколько завышенным, по сравнению с результатами конечно-элементного моделирования, оценкам ширины области контакта.

Как было отмечено выше, разработанная методика позволяет не только определить распределение контактных напряжений, но и полностью описать напряженно-деформированное состояние обода в рассматриваемом составном цилиндре. Так, на рисунке 5 представлены расчетные распределения интенсивности тензора напряжений по координате x при трех различных значениях координаты. При этом $z = 0$ соответствует внутренней поверхности обода (сцепление с жестким цилиндром), а $z = h$ – внешней поверхности (область контакта). Можно отметить, что максимальное значение интенсивности σ_{rr} реализуется на внутренней поверхности обода на некотором расстоянии от оси симметрии (линии действия силы P). При малых ($f < 0,1$) значениях коэффициента трения положение максимума σ_{rr} практически соответствует середине зоны проскальзывания. При больших f максимальное значение интенсивности тензора напряжений реализуется на границе зон сцепления и проскальзывания.

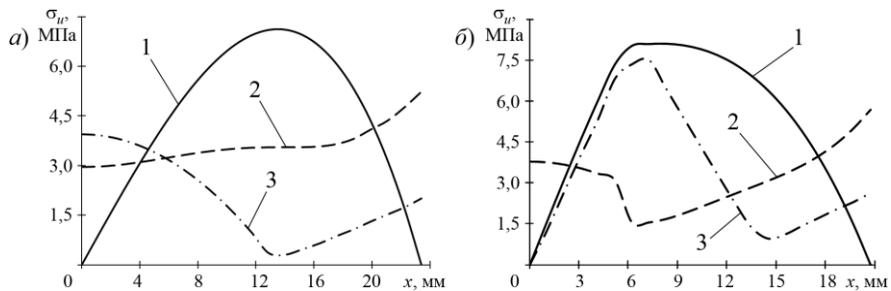


Рисунок 5 – Расчетные зависимости интенсивности тензора напряжений при $P = 33$ кН для $f = 0$ (а) и $f = 0,3$ (б):
 $1 - z = 0$; $2 - z = h/2$; $3 - z = h$

Отмеченные особенности распределения интенсивности тензора напряжений согласуются с результатами конечно-элементного моделирования, представленными на рисунке 6.

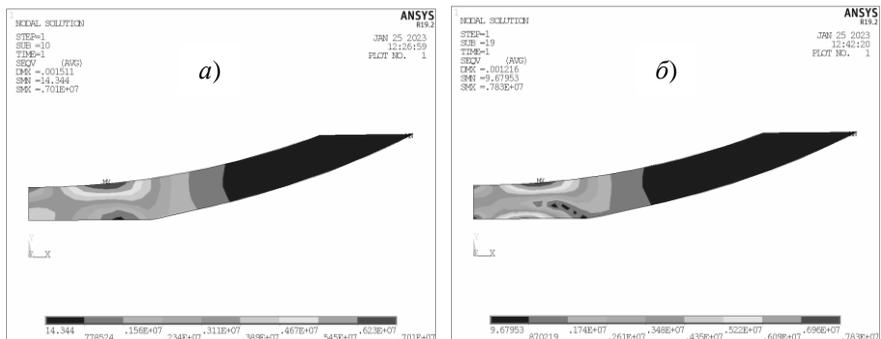


Рисунок 6 – Распределение интенсивности тензора напряжений в деформируемом обode, полученное методом конечных элементов при $P = 33$ кН для $f = 0$ (а) и $f = 0,3$ (б)

Положение максимума интенсивности $\sigma_{ii \max}$ смещено относительно оси симметрии $x = 0$ только если материал деформируемого обода по своим упругим характеристикам близок к несжимаемому ($\nu = 0,5$). При $\nu < 0,45$ максимум интенсивности $\sigma_{ii \max}$ локализован на оси симметрии на некотором расстоянии от поверхности контакта (рисунок 7).

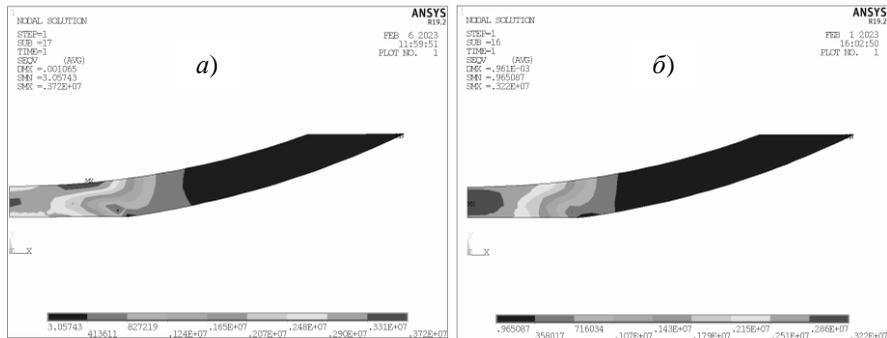


Рисунок 7 – Распределение интенсивности тензора напряжений в деформируемом обode, полученное методом конечных элементов при $P = 33 \text{ кН}$ и $f = 0,3$ для $\nu = 0,45$ (а) и $\nu = 0,4$ (б)

При фиксированном значении силы P максимальное контактное давление p_{\max} и максимальная интенсивность $\sigma_{ii \max}$ будут изменяться в зависимости от коэффициента трения (рисунок 8). Давление p_{\max} с увеличением коэффициента f возрастает. Влияние коэффициента трения на максимальное контактное давление более существенно при малых $f < 0,15$. Максимум интенсивности тензора напряжений в диапазоне $f < 0,07$ с увеличением коэффициента трения несколько снижается. При дальнейшем увеличении f максимальная интенсивность $\sigma_{ii \max}$ практически линейно возрастает.

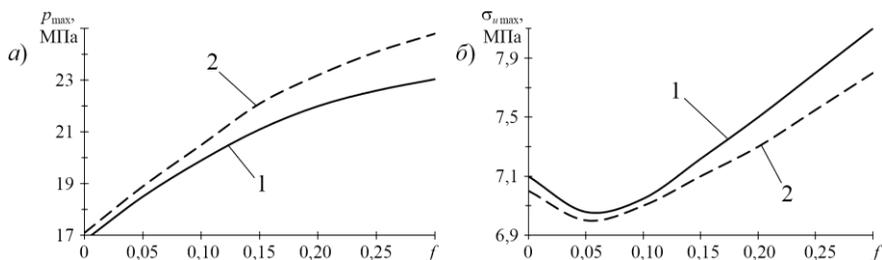


Рисунок 8 – Зависимость максимального контактного давления (а) и максимального значения интенсивности тензора напряжений (б) от коэффициента трения:

1 – в соответствии с разработанной методикой; 2 – конечно-элементная модель

Относительное отклонение расчетных оценок максимального контактного давления, полученных на основе разработанной методики, от соответствующих результатов использования конечно-элементной модели составило 5 % при $f = 0$ и 11 % при $f = 0,3$. Для максимального значения интенсивности тензора напряжений – 6 и 9 % соответственно.

Заключение. Выполненные исследования показали, что расчетные значения параметров контактного взаимодействия, полученные на основе предложенной методики, хорошо согласуются с результатами использования метода конечных элементов. В рассмотренном примере при фиксированном значении вертикальной нагрузки на составной цилиндр и изменении коэффициента трения от 0 до 0,3 относительное отклонение полученных значений вертикального смещения центра цилиндра от соответствующих оценок, полученных в рамках конечно-элементной модели, не превышает 12 %. Для максимального контактного давления такое отклонение составляет не более 11 %, а для максимального значения интенсивности тензора напряжений в деформируемом ободе – не более 9 %. Кроме того, установлено, что при действии на составной цилиндр вертикальной (прижимающей) силы максимум интенсивности тензора напряжений в несжимаемом ободе локализуется на «внутренней» поверхности (поверхности сцепления обода с жестким цилиндром) на некотором расстоянии от вертикальной оси, проходящей через центр области контакта.

Основное преимущество разработанной методики оценки напряженно-деформированного состояния деформируемой накладки перед альтернативными подходами заключается в возможности использования для расчетов относительно несложных аналитических соотношений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 320 с.
- 2 **Александров, В. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, 1983. – 183 с.
- 3 **Fabrikant, V. I.** Solution of contact problems for a transversely isotropic elastic layer bonded to an elastic half-space / V. I. Fabricant // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2009. – Vol. 223, is. 11. – P. 2487–2499.
- 4 **Argatov, I. I.** Depth-sensing indentation of a transversely isotropic elastic layer: Second-order asymptotic models for canonical indenters / I. I. Argatov // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – Vol. 15. – P. 3444–3452.
- 5 **Aleksandrov, V. M.** Asymptotic solution of the contact problem for a thin elastic layer / V. M. Aleksandrov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1969. – Vol. 33, is. 1. – P. 49–63.
- 6 **Кравчук, А. С.** Прикладные контактные задачи для обобщенной стержневой модели покрытия / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук. – СПб. : Научное издание, 2019. – 221 с.

7 **Коднянко, Е. В.** Расчет контактного сдвигового напряжения для колеса с деформируемой периферией / Е. В. Коднянко, Д. А. Черноус // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 83–89.

8 **Wu, J.** An analytical solution to the adhesive cylindrical indentation of a compressible elastic thin layer / J. Wu, C. Q. Ru // The Journal of Adhesion. – 2021. – Vol. 97, is. 14. – P. 1291–1309.

9 **Jaffar, M. J.** Asymptotic behaviour of thin elastic layer bonded and unbonded to a rigid foundation / M. J. Jaffar // International Journal of Mechanical Sciences. – 1989. – Vol. 31, is. 3. – P. 229–235.

10 **Черноус, Д. А.** Асимптотический подход к решению контактной задачи для тела качения с тонким деформируемым ободом / Д. А. Черноус, Е. В. Коднянко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2023. – № 1 (62). – С. 79–87.

11 **Попов, В. Л.** Механика контактного взаимодействия и физика трения / В. Л. Попов. – М. : Физматлит, 2013. – 350 с.

12 **Можаровский, В. В.** Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 270 с.

13 **Bahrami, M. R.** ANSYS Tutorial: An Introduction to Elasticity and Contact Problems in Mechanical APDL 15.0 / M. R. Bahrami. – St. Petersburg : Peter the Great St. Petersburg Polytechnic university. – 2018. – 69 p.

14 Скин шахтный : пат. 11460 Респ. Беларусь : МПК (2006.01) В 66В 17/32 / В. Я. Прушак, В. Я. Щерба, Д. А. Морев. – u 20170053; заявл. 22.02.2017 ; опубл. 30.08.2017. – 6 с.

15 **Яковлев, С. Н.** Расчет полиуретановых деталей, работающих на сжатие при статической нагрузке / С. Н. Яковлев // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Машиностроение. – 2014. – № 1 (190). – С. 137–142.

E. V. KADNIANKA^{1,2}, D. A. CHERNOUS²

¹*JSC "Soligorsk Institute of Resources Saving Problems with Pilot Production", Soligorsk, Belarus*

²*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

SOLUTION OF THE CONTACT PROBLEM FOR A ROLLING BODY WITH A THIN DEFORMABLE INCOMPRESSIBLE RIM

A modification of a previously developed asymptotic method for the contact problems solving for a rigid rolling body with a thin deformable rim is proposed, it allows to obtain solutions for the case of an incompressible rim material. Calculated "force – displacement" diagrams are obtained for various friction coefficient values. Diagrams of contact pressure and shear contact stress are determined, and the stress tensor intensity distribution in the rim is established. There is carried out the comparison with the results obtained by the finite element method.

Keywords: contact problem, asymptotic approximation, thin layer, incompressible material, contact pressure, contact shear stress, stress tensor intensity.

Получено 02.10.2023