

539.3  
П83  
Белорусский государственный университет транспорта

УДК 539.3

**ПРОТУРО**  
**Иван Иванович**

**УПРУГОЕ И НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ  
ОРТОТРОПНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ  
ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН**

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Гомель, 2012



Работа выполнена в УО «Белорусский государственный университет транспорта»

Научный руководитель –

**Старовойтов Эдуард Иванович,**  
доктор физико-математических наук,  
профессор,  
зав. кафедрой «Строительная механика»  
УО «Белорусский государственный  
университет транспорта»,

Официальные оппоненты –

**Плескачевский Юрий Михайлович,**  
член-корреспондент НАН Беларуси,  
доктор технических наук, профессор,  
председатель президиума Гомельского  
филиала НАН Беларуси,

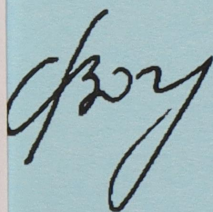
**Марьина Наталья Александровна,**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент, доцент высшего учебного заведения  
кафедры «Информационные технологии»  
УО «Белорусский государственный  
университет транспорта»

Оппонирующая организация –

УО «Белорусский государственный уни-  
верситет» г. Минск

14-00 на заседании совета по защите  
в Белорусском государственном университете  
Гомель, ул. Кирова, 34, ауд. 103.

в библиотеке Белорусского государ-



Воробьев С. А.



539.3  
083

## ВВЕДЕНИЕ

Использование композиционных армированных элементов конструкций позволяет оптимально распределить материал для удовлетворения условий прочности, жесткости и экономичности. Это достигается путем подбора соотношения механических свойств как матрицы и армирующих наполнителей, так и несущих слоев и заполнителя слоистых конструкций. Подобные элементы конструкций нашли широкое применение в авиа-, ракето-, машино-, приборостроении и строительстве в качестве корпусных и несущих деталей. Это объясняется наличием ряда положительных качеств: высокой удельной жесткостью, хорошими тепло и звукоизоляционными, демпфирующими и вибропоглощающими свойствами.

Зарождение исследований трехслойных элементов конструкций пришлось на конец первой половины XX столетия. В это время появляются первые труды по механике многослойных сред (А. В. Дятлов, С. Г. Лехницкий, Н. Г. Ченцов). Существенный вклад в развитие теории слоистых конструкций внесли Н.А. Алфутов, С. А. Амбарцумян, А.Н. Андреев, Г.А. Ванин, В.В. Васильев, К. З. Галимов, А. Г. Горшков, Э. И. Григолюк, Я. М. Григоренко, Г. М. Куликов, В. В. Можаровский, Б. Л. Пелех, Ю. М. Плескачевский, А.О. Рассказов, Э. И. Старовойтов, Ю. М. Тарнапольский, Г. А. Тетерс, С. П. Тимошенко, Р. Хилл, А. Noiser, J.N. Reddy, E. Reissner и др.

В настоящее время недостаточно изучено линейное и, в особенности, нелинейное деформирование слоистых пластин с анизотропией механических свойств и реономностью материалов слоев. Решению указанной проблемы и посвящена диссертация, поэтому ее тема представляется актуальной.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### *Связь с научно-техническими программами, темами*

Работа входила составной частью в следующие программы:

1. Проект Т04М-002 «Исследование напряженно-деформированного состояния трехслойных кольцевых пластин при термосиловых нагрузках», БРФФИ, № ГР 20043875, 2004–2006.
2. ГКПНИ «Механика 4.01». «Исследование демпфирующей способности волокнисто-пористых материалов в качестве средств индивидуальной защиты от ударных нагрузок», № ГР 20065846, 2.01.2006 – 31.12.2010.
3. Проект Ф07М-039 «Деформирование трехслойных круговых и прямоугольных пластин, связанных с упругим основанием, в температурном поле», БРФФИ, № ГР 20072442, 01.04.2007–31.03.2009.
4. ГБТ НИР № 5908 «Разработка математической модели нелинейного деформирования прямоугольной трехслойной пластины, связанной с упругим основанием», МО, № ГР 20090884, 1.01.2009 – 31.12.2010.
5. Проект Т09М-014 «Деформирование композиционных трехслойных пластин с ортотропными несущими слоями», БРФФИ, № ГР 20091505, 15.04.2009–31.03.2011.



6. Проект Т09К-012 «Ударное деформирование механическими и терморрадиационными нагрузками металлокомпозитных элементов конструкций», БРФФИ, № ГР 20091197, 15.04.2009–31.03.2011.
7. ГБТ НИР 6973 «Исследование напряженно-деформированного состояния композитных элементов технических конструкций со ступенчато-переменной границей» по заданию 1.15.4 «Моделирование напряженно-деформированного состояния транспортных и машиностроительных несущих конструкций, в т.ч. автомобильных цистерн, на основе учета физических и геометрических нелинейностей с целью снижения металлоемкости и повышения надежности, безопасности и технического ресурса» ГПНИ «Механика, техническая диагностика, металлургия» № ГР 20111888, 03.01.2011 – 31.12.2012.
8. Проект 7213 Ф11К-004 «Колебания металлополимерных и композитных оболочек при взаимодействии с упругим или жидкостным наполнителем», БРФФИ, № ГР 20113880, 15.04.2011–31.03.2013.

### ***Цель и задачи исследования***

*Объект исследования:* трехслойные прямоугольные пластины, несущие слои которых набраны из ортотропных материалов и могут содержать усиливающую накладку, наполнитель – упругий, линейно вязкоупругий, нелинейно вязкоупругий.

*Предмет исследования:* напряженно-деформированное состояние трехслойных прямоугольных ортотропных пластин при различных граничных условиях, видах нагрузки, материалах слоев.

*Цель работы:* создание механико-математических моделей физически линейного и нелинейного деформирования трехслойных прямоугольных анизотропных пластин, учитывающих направление и объемное содержание армирующих волокон, реономность материалов, температуру и нерегулярность границы; разработка методов решения соответствующих краевых задач.

*К задачам исследования* следует отнести:

- постановку краевых задач по расчету напряженно-деформированного состояния линейных и физически нелинейных, упругих и вязкоупругих трехслойных ортотропных пластин;
- разработку методов и получение точных и итерационных аналитических решений соответствующих задач при различных граничных условиях и видах нагрузки, включая термосиловую, наличия усиливающей накладки;
- численный параметрический анализ зависимости перемещений, деформаций и напряжений от принятых физических уравнений состояния, граничных условий, геометрических и механических характеристик слоев и накладки, направления и объемного содержания армирующих волокон, реономности наполнителя, температуры, величины, вида и времени действия силовой нагрузки.



### ***Основные положения диссертации, выносимые на защиту:***

- механико-математические модели квазистатического деформирования ортотропных трехслойных прямоугольных пластин, включающие уравнения равновесия, формулировки граничных условий и условий сопряжения для разрешающих функций при ступенчатой границе, отличающиеся учетом ортотропии упругих несущих слоев и физической нелинейности упругих и вязкоупругих жестких заполнителей;
- аналитические решения краевых задач, содержащие расчетные формулы для перемещений, напряжений и деформаций в упругих ортотропных трехслойных пластинах с гладкой и со ступенчатой границей при различных видах нагрузки (непрерывная, локально распределенная, сосредоточенные силы и моменты), отличающиеся учетом ортотропии несущих слоев, наличием усиливающей накладки;
- аналитические рекуррентные решения задач об изотермическом и термосиловом цилиндрических изгибах ортотропной трехслойной пластины с линейно вязкоупругим заполнителем, содержащие расчетные формулы для перемещений, учитывающие реономные свойства материала заполнителя;
- аналитические итерационные решения краевых задач о цилиндрическом изгибе ортотропных трехслойных пластин с физически нелинейными упругими и вязкоупругими заполнителями, полученные методом упругих решений Ильюшина, позволившие алгоритмизировать процесс исследования параметров напряженно-деформированного состояния;
- численный анализ напряженно-деформированного состояния исследуемых пластин в зависимости от параметров физической нелинейности и реономности материала заполнителя, направления и объемного содержания армирующих волокон, граничных условий, геометрических и упругих характеристик слоев и накладки, величины, вида и времени действия нагрузки, температуры.

### ***Личный вклад соискателя***

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Научный руководитель принимал участие в выборе направлений и разработке методик исследования, в анализе полученных результатов. Другим соавторам принадлежат результаты, не вошедшие в работу.

### ***Апробация результатов диссертации***

Основные результаты работы докладывались и получили одобрение на:

- IX, X Белорусских математических конференциях (Гродно, 2004; Минск, 2008);
- VIII и XIII Республиканские научные конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 2005, 2010);



- II Международная научно-практическая конференция «Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса». (Гомель, 2008);
- 4-ая региональная конференция молодых ученых «Новые функциональные материалы, современные технологии и методы исследования». (Гомель, 2008);
- Первая и вторая международные конференции «Математическая физика и ее приложения». (Самара, 2008, 2010);
- VI Международный симпозиум по трибофатике. (Минск, 2010);
- XLII и XLIII Республиканские научно-практические семинары «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании» (Минск, 2011, 2012);
- V Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике «Механика–2011» (Минск, 2011).

### **Опубликованность результатов**

По теме диссертации опубликовано 22 работы, в том числе 10 статей (из них 7 соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь), 12 материалов и тезисов докладов на научных конференциях, общим объемом 6,2 а. л.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, 4 глав, заключения, библиографического списка. Объем диссертации составляет 149 страниц машинописного текста, включая 45 страниц с 63 иллюстрациями, список использованных источников из 131 наименований на 9 с., список публикаций автора из 22 наименований на 3 с.

## **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

### **Механико-математическая модель ортотропной упругой прямоугольной трехслойной пластины**

Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная ортотропная прямоугольная пластина с жестким заполнителем (рисунок 1). Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью заполнителя. Для описания кинематики пакета использована гипотеза «ломаной» линии: в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi$ , проекции которого на плоскости  $YOZ$  и  $XOZ$  –  $\psi_x(x, y)$ ,  $\psi_y(x, y)$  соответственно.

На внешний слой пластины действует распределенная силовая нагрузка  $p_x(x, y)$ ,  $p_y(x, y)$ ,  $q(x, y)$ . Через  $w(x, y)$  и  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  обозначены прогиб и продольное перемещение средней плоскости заполнителя. Через  $h_k$  обозначена толщина  $k$ -го слоя, при этом  $h_3=2c$ . Деформации считаются малыми.



По контуру пластины предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев. Уравнения равновесия следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа  $\delta A = \delta W$  и закона Гука для ортотропного тела, с учетом введенных геометрических гипотез:

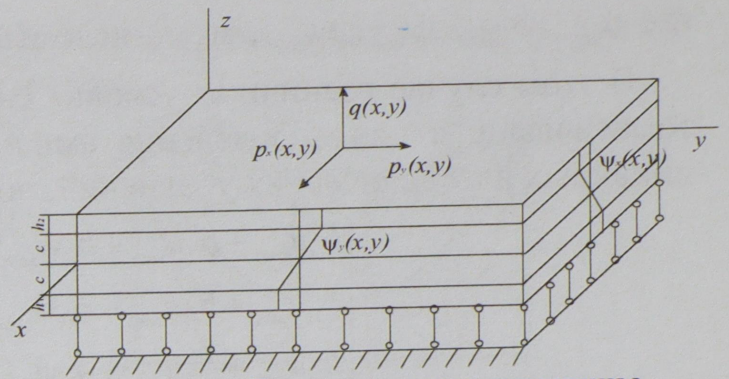


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

$$\begin{aligned}
 a_1 u_{x,yy} + a_2 u_{y,xy} + a_3 u_{x,xx} + a_4 \psi_{x,yy} + a_5 \psi_{y,xy} + a_6 \psi_{x,xx} - a_7 w_{,xxx} - a_8 w_{,xyy} + p_x &= 0, \\
 a_1 u_{y,xx} + a_9 u_{x,xy} + a_{10} u_{y,yy} + a_4 \psi_{y,xx} + a_{11} \psi_{x,xy} + a_{12} \psi_{y,yy} - a_{13} w_{,yyy} - a_{14} w_{,xyy} + p_y &= 0, \\
 a_7 u_{x,xxx} + a_{13} u_{y,yyy} + a_{15} u_{x,xyy} + a_{16} u_{y,xyx} + \\
 + a_{17} \psi_{x,xxx} + a_{18} \psi_{y,yyy} + a_{19} \psi_{x,xyy} + a_{20} \psi_{y,xyx} - a_{21} w_{,xxx} - a_{22} w_{,yyy} - a_{23} w_{,xyy} + q &= 0, \\
 a_6 u_{x,xx} + a_5 u_{y,xy} + a_4 u_{x,yy} + a_{24} \psi_{y,xy} + a_{30} \psi_{x,yy} - a_{26} w_{,xyy} - a_{27} w_{,xxx} - G_{xz}^{(3)} c \psi_x &= 0, \\
 a_{12} u_{y,yy} + a_{11} u_{x,xy} + a_4 u_{y,xx} + a_{28} \psi_{y,yy} + \\
 + a_{29} \psi_{x,xy} + a_{30} \psi_{y,xx} - a_{31} w_{,yxx} - a_{32} w_{,yyy} - G_{yz}^{(3)} c \psi_y &= 0, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, коэффициенты  $a_i$  выражаются через упругие и геометрические параметры слоев:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0,5G_{xy}^{(1)}h_1 + cG_{xy}^{(3)} + 0,5G_{xy}^{(2)}h_2, \\
 a_2 &= 0,5G_{xy}^{(1)}h_1 + cG_{xy}^{(3)} + 0,5G_{xy}^{(2)}h_2 + A_3^{(1)}h_1 + 2cA_3^{(3)} + A_3^{(2)}h_2, \dots \\
 \dots a_{32} &= 0,5c(h_1^2 + 2h_1c)A_2^{(1)} + 0,5c(h_2^2 + 2h_2c)A_2^{(2)}, \\
 A_2^{(k)} &= \frac{(v_{yx}^{(k)} + v_{yz}^{(k)}v_{zx}^{(k)})E_y^{(k)}}{A^{(k)}}, \quad A_3^{(k)} = \frac{(v_{xy}^{(k)} + v_{xz}^{(k)}v_{zy}^{(k)})E_x^{(k)}}{A^{(k)}}, \\
 A^{(k)} &= (1 - v_{yz}^{(k)}v_{zy}^{(k)})(1 - v_{xz}^{(k)}v_{zx}^{(k)}) - (v_{yx}^{(k)} + v_{yz}^{(k)}v_{zy}^{(k)})(v_{xy}^{(k)} + v_{xz}^{(k)}v_{zx}^{(k)}),
 \end{aligned}$$

$E_i^{(k)}$ ,  $\nu_{ij}^{(k)}$ ,  $G_{ij}^{(k)}$  – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига.

Если в качестве граничных принимаются условия свободного опирания на неподвижные в пространстве жесткие опоры, то решение системы (1) можно выписать в двойных тригонометрических рядах:

$$\begin{aligned}
 \psi_x &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y}, \quad \psi_y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y}, \\
 u_x &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_{xmn} \cos \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y}, \quad u_y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{ymn} \sin \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y}, \\
 w &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_x} \sin \frac{n\pi y}{l_y}, \quad (2)
 \end{aligned}$$



где  $u_{xmn}$ ,  $u_{ymn}$ ,  $\psi_{xmn}$ ,  $\psi_{ymn}$ ,  $w_{mn}$  – искомые амплитуды перемещений.

В этом случае граничные условия свободного опирания выполняются автоматически, а для определения амплитуд перемещений получим систему линейных алгебраических уравнений, подставив выражения (2) в систему (1):

$$\begin{cases} b_{11}u_{xmn} + b_{12}u_{ymn} + b_{13}\psi_{xmn} + b_{14}\psi_{ymn} - b_{15}w_{mn} = p_{xmn}, \\ b_{21}u_{xmn} + b_{22}u_{ymn} + b_{23}\psi_{xmn} + b_{24}\psi_{ymn} - b_{25}w_{mn} = p_{ymn}, \\ b_{31}u_{xmn} + b_{32}u_{ymn} + b_{33}\psi_{xmn} + b_{34}\psi_{ymn} - b_{35}w_{mn} = -q_{mn}, \\ b_{41}u_{xmn} + b_{42}u_{ymn} + b_{43}\psi_{xmn} + b_{44}\psi_{ymn} - b_{45}w_{mn} = 0, \\ b_{51}u_{xmn} + b_{52}u_{ymn} + b_{53}\psi_{xmn} + b_{54}\psi_{ymn} - b_{55}w_{mn} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где коэффициенты  $b_i$  выражаются через параметры  $a_i$ ;  $p_{xmn}$ ,  $p_{ymn}$ ,  $q_{mn}$  – коэффициенты разложения нагрузки в тригонометрические ряды.

Решение системы (3) можно получить одним из стандартных методов. В работе предложены аналитические решения конкретных краевых задач при следующих видах внешней нагрузки: равномерное распределение по внешней поверхности верхнего слоя, локальное распределение внутри прямоугольной области, сосредоточенная сила, сосредоточенный момент.

Проведен численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния пластины для всех указанных решений.

*Численные результаты* в работе получены для нескольких видов трехслойных пакетов. Характерные размеры пластины принимались единичными ( $l_x = l_y = 1$  м. Предполагалось, что *несущие ортотропные слои* выполнены из:

- высокопрочных углеродных волокон на эпоксидном связующем (УВЭС),
- борных волокон на алюминиевом связующем,
- сверхвысокомодульных углеродных волокон на эпоксидном связующем.

*Заполнитель* выполнен из:

- фторопласта-4 (ПТФЭ),
- пенополиуретана (ППУ),
- пенопласта (ПХВ-1).

Рисунки 2, 3 отражают влияние асимметрии пластины на прогиб и нормальные напряжения по толщине ( $q = 0,1$  МПа,  $p_x = p_y = 0$ ). На рисунке 2: 1 –  $h_1 = h_2 = 0,03$ ; 2 –  $h_1 = 0,02$ ,  $h_2 = 0,04$ ; 3 –  $h_1 = 0,04$ ,  $h_2 = 0,02$ ; 4 –  $h_1 = 0,01$ ,  $h_2 = 0,05$ ; 5 –  $h_1 = 0,05$ ,  $h_2 = 0,01$ ; 6 –  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 0,06$ ; 7 –  $h_1 = 0,06$ ,  $h_2 = 0$ . На рисунке 3: 1 –  $h_1 = h_2 = 0,03$ ; 2 –  $h_1 = 0,01$ ,  $h_2 = 0,05$ . ( $c = 0,09$ ): *a* – в плоскости  $xz$  при  $y = 0,5$ ; *b* – в плоскости  $yz$  при  $x = 0,5$ . Материалы пакета – заполнитель – ПХВ-1, несущие слои – высокопрочные углеродные волокна на эпоксидном связующем.

Из приведенных графиков следует, что с увеличением асимметрии пластины перемещения и напряжения уменьшаются, т. е. пластина становится



более жесткой на изгиб. Отличаются соответствующие кривые по форме из-за однонаправленности углеродных волокон.

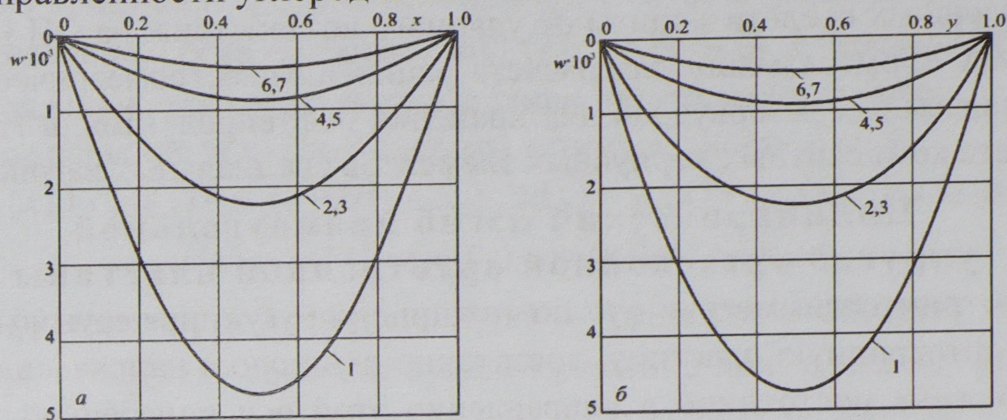


Рисунок 2 – Изменение прогиба  $w$  [м] вдоль координатных осей

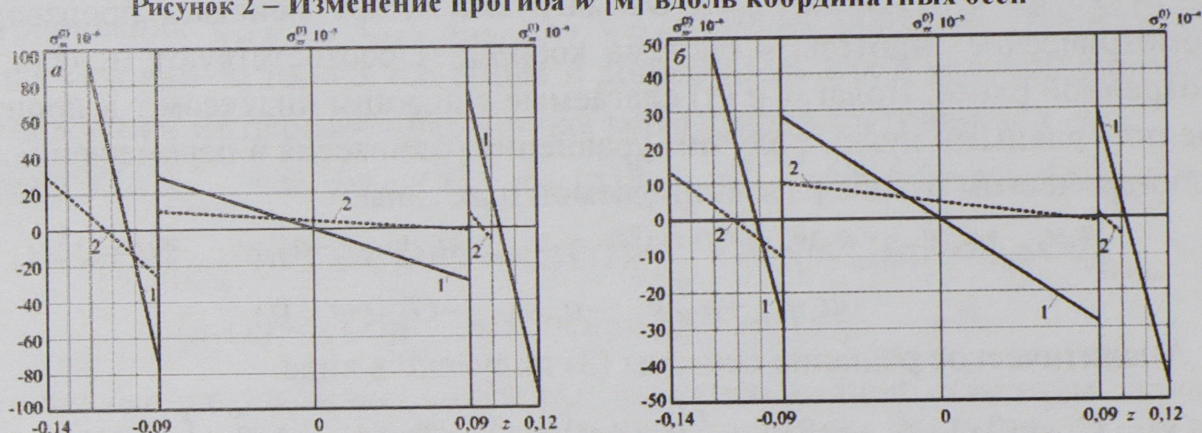


Рисунок 3 — Изменение нормальных напряжений по толщине пластины

На рисунке 4 показано изменение прогиба при различных углах ( $1 - \varphi = 0^\circ$ ;  $2 - \varphi = 45^\circ$ ;  $3 - \varphi = 90^\circ$ ) ориентации волокон в несущих слоях при действии сосредоточенной силы ( $P = 9$  кН) в центре пластины. Формы кривых ( $1, 3$ ) отличаются из-за ориентации волокон. У пластины с несущими слоями, армированными под углом  $45^\circ$  к оси  $Ox$ , прогибы больше на 34 %.

На рисунке 5 приведены графики изменения прогиба при различном наполнении материала несущих слоев волокнами ( $q = 20$  кПа):  $1 - V_a = 20\%$ ;  $2 - V_a = 40\%$ ;  $3 - V_a = 60\%$ ;  $4 - V_a = 80\%$ . Здесь наблюдается пропорциональное уменьшение экстремумов при увеличении объемного содержания волокон.

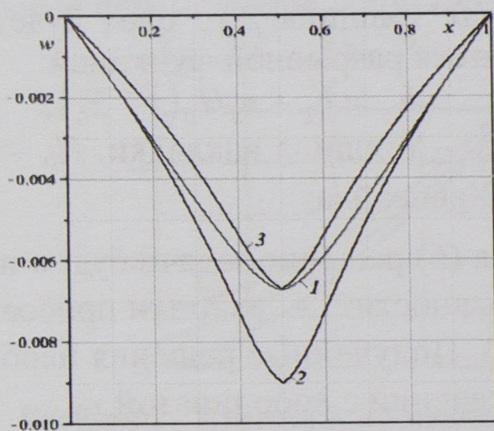


Рисунок 4 – Прогиб при действии сосредоточенной силы при различных углах  $\varphi$  ориентации волокон в несущих слоях

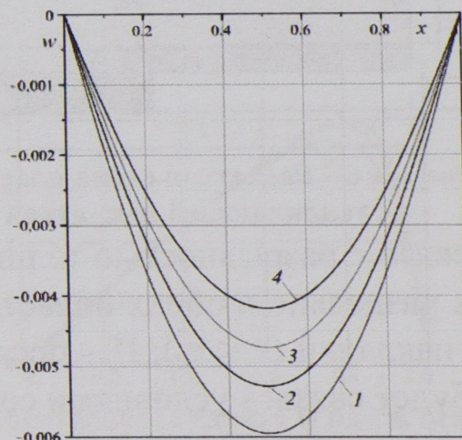


Рисунок 5 – Прогиб при различном наполнении материала несущих слоев волокнами



Соответствующие методики и программы численного счета применены в ИММС им. В. А. Белого НАНБ для оптимизации композитных элементов индивидуальных средств защиты от ударного воздействия; на ОП НПО РУП, ТУ и УМА «Гомсельмаш» для расчета рациональных геометрических параметров подземных резервуаров для хранения нефтепродуктов, в НИИЖТе – для расчета композитных корпусных элементов специальных вагонов.

### Цилиндрический изгиб прямоугольной упругой трехслойной ортотропной пластины

Рассмотрим несимметричную по толщине упругую прямоугольную трехслойную ортотропную пластину, достаточно длинную в направлении оси  $Oy$ . Она нагружена постоянной в направлении этой оси поперечной нагрузкой  $p = p(x)$ ,  $q = q(x)$ . Вдоль оси  $Ox$  нагрузка может меняться произвольно. Геометрические гипотезы и система координат соответствуют модели, рассмотренной ранее. Полагая в (1) слагаемые с нижним индексом  $y$  и производные по  $y$  равными нулю, получим уравнения равновесия в перемещениях при цилиндрическом изгибе рассматриваемой пластины:

$$\begin{aligned} a_3 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} + p &= 0; \quad a_7 u_{,xxx} + a_{17} \psi_{,xxx} - a_{21} w_{,xxx} + q = 0; \\ a_6 u_{,xx} + a_{24} \psi_{,xx} - a_{17} w_{,xxx} - G_{xz}^{(3)} c \psi &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналитическое решение системы (3) получено в виде:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta} \left[ \operatorname{sh}(\beta x) \int g(x) \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx \right]; \\ w(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_1 \int \psi dx - a_7 L_3^{-1}(p) + a_3 L_4^{-1}(q) + \frac{a_3 C_1}{6} x^3 \right] + \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 x + C_6; \\ u(x) &= \gamma_3 \psi + \frac{1}{\alpha_2} \left[ -a_{21} L_2^{-1}(p) + a_7 L_3^{-1}(q) + \frac{a_7}{2} C_1 x^2 \right] + C_7 x + C_8. \end{aligned} \quad (5)$$

Константы интегрирования  $C_1, \dots, C_8$  определяются из граничных условий.

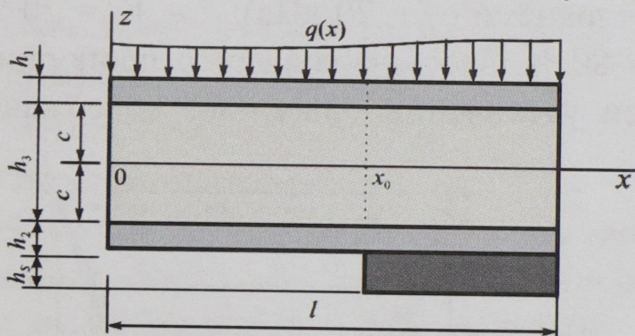


Рисунок 6 – Расчетная схема пластины с усиливающей накладкой

Пусть рассматриваемая пластина усилена по нижнему слою накладкой (рисунок 6) из более жесткого, чем несущие слои, материала. Тогда суммарная толщина 2-го слоя будет описываться разрывной функцией:

$$h_2^+ = h_2 + h_s H_0(x - x_0), \quad (6)$$

где  $h_s$  – толщина накладки,  $H_0$  – функция Хевисайда.

В связи с разрывностью толщины 2-го слоя (6) решение задачи будем проводить отдельно в обеих областях ее непрерывности: I – до точки присоединения накладки ( $x < x_0$ ); II – после нее ( $x \geq x_0$ ). Полученные решения необходимо будет связать условиями сопряжения в сечении с координатой  $x_0$ .

Для первой области функция Хевисайда обращается в ноль и  $h_2^+ = h_2$ . Система уравнений равновесия (4) сохраняет свой вид, поэтому перемещения



в первой области сохраняют вид (5). В области с накладкой функция Хевисайда равна единице ( $x \geq x_0$ ) и  $h_2^+ = h_2 + h_s$ . Соответствующая система уравнений равновесия также сохраняет вид (4), но ее коэффициенты учитывают наличие накладки, для которой справедливы гипотезы Кирхгофа.

Искомое решение исходной системы можно записать в виде:

$$\psi(x) = \psi_1(x) + (\psi_2(x) - \psi_1(x))H(x - x_0), \quad u(x) = u_1(x) + (u_2(x) - u_1(x))H(x - x_0), \\ w(x) = w_1(x) + (w_2(x) - w_1(x))H(x - x_0).$$

Здесь функции  $\psi_1(x)$ ,  $w_1(x)$ ,  $u_1(x)$  – решение в области  $0 \leq x \leq x_0$ ;  $\psi_2(x)$ ,  $w_2(x)$ ,  $u_2(x)$  – соответствующее решение при  $x_0 \leq x \leq l$ . Эти решения имеют аналитический вид типа (5), но содержат различные константы интегрирования  $C_{11}, \dots, C_{81}, C_{12}, \dots, C_{82}$ , которые определяются из 8 граничных условий на торцах пластины и дополнительных 8 условий равенства перемещений и их производных в точке нерегулярности границы  $x = x_0$ :

$$\langle \psi_2(x) - \psi_1(x) \rangle \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \langle \psi_{2,x}(x) - \psi_{1,x}(x) \rangle \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \langle \psi_{2,xx}(x) - \psi_{1,xx}(x) \rangle \Big|_{x=x_0} = 0, \\ \langle w_2(x) - w_1(x) \rangle \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \langle w_{2,x}(x) - w_{1,x}(x) \rangle \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \langle w_{2,xx}(x) - w_{1,xx}(x) \rangle \Big|_{x=x_0} = 0, \\ \langle u_2(x) - u_1(x) \rangle \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \langle u_{2,x}(x) - u_{1,x}(x) \rangle \Big|_{x=x_0} = 0.$$

Численные результаты получены для трехслойной пластины длиной  $l_x = 1$  м, несущие слои пластины – высокопрочные углеродные волокна на эпоксидном связующем, материал накладки ( $s$ ) – борные волокна на эпоксидном связующем ( $E_x^{(s)} = 2,105 \cdot 10^{11}$  МПа  $\nu_{xy}^{(s)} = 0,21$ ,  $\nu_{yx}^{(s)} = 0,02$ ), наполнитель – пенополиуретан. Геометрические характеристики:  $c = 0,09$ ,  $h_1 = 0,03$ ,  $h_2 = 0,01$ ,  $h_s = 0,01$ ; координата начала ступеньки  $x_0 = 0,5$ , если другое не указано. Интенсивности нагрузок  $p = 0$ ,  $q = -1$  МПа.

На рисунке 7 показано изменение величины и формы  $a$  – прогиба  $w$ ,  $b$  – относительного сдвига  $\psi$ , консольно закрепленной пластины, в зависимости от толщины накладки: 1 –  $h_s = 0$ ; 2 –  $h_s = 0,01$ ; 3 –  $h_s = 0,02$ . Ее наличие (3) уменьшает максимальный прогиб на 17 %, сдвиг уменьшается на 10 %, продольные перемещения – примерно в 9 раз.

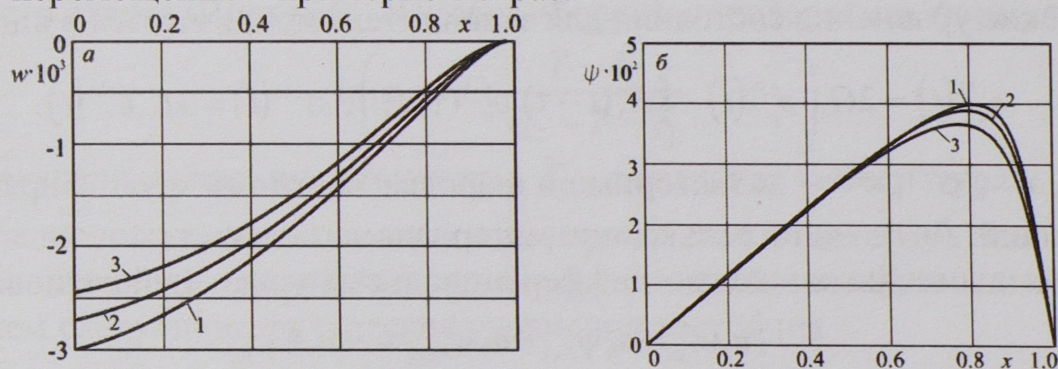


Рисунок 7 – Изменение  $a$  – прогиба  $w$  [м],  $b$  – относительного сдвига  $\psi$  вдоль оси  $x$

Рисунок 8 показывает изменение нормальных напряжений  $\sigma^{(k)}$  по толщине пластины:  $a$  – на левом торце ( $x = 0$ );  $b$  – на правом торце ( $x = l$ ) в зависимо-



сти от координаты начала ступеньки  $x_0$ : 1 –  $x_0 = 1$  (без накладки); 2 –  $x_0 = 0,5$ ; 3 –  $x_0 = 0$  (накладка по всему нижнему слою). Граничные условия соответствуют жесткой заделке обоих торцов. На торцах пластины появление накладки уменьшает напряжения примерно на 30 % в верхнем слое; в заполнителе – сдвигает напряжения к положению симметрии; в нижнем слое напряжения разрывные за счет другого материала накладки. Графики 1, 2, соответствующие отсутствию накладки на левом торце близки, также близки графики 2, 3 на правом торце, при ее наличии. Накладка на половину поверхности нижнего слоя приводит к уменьшению напряжений на правом торце, практически не изменяя их на левом.

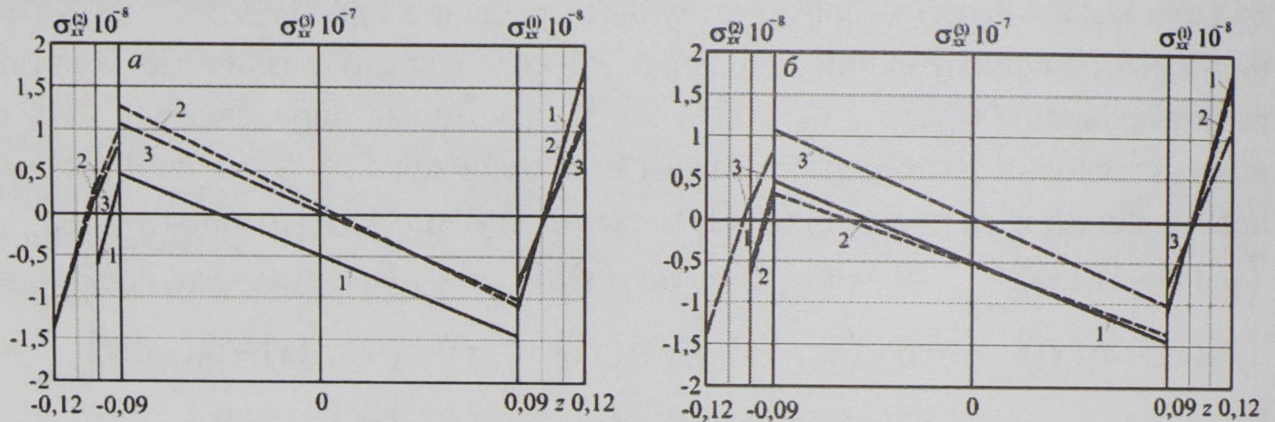


Рисунок 8 – Изменение нормальных напряжений  $\sigma^{(k)}$  [Па] по толщине пластины

Методы и программы численного счета для пластин с накладкой применялись для расчета элементов оконного металлополимерного профиля (ЧУП «МонолитСервисСтрой»); прямоугольных вставок для усиления покрытия промышленного здания (УП «Гомельское агентство по строительству и инвестициям» при Национальном Олимпийском комитете РБ); для выработки практических рекомендаций по расчету тонкостенных несущих профилей с заполнителем (ООО «Белтурпро»), для исследования деформирования теплообменника, камер горения и дожига (ОАО «Гомельский Техноприбор»).

### Механико-математическая модель ортотропной трехслойной пластины с неупругим заполнителем

1. Рассмотрим цилиндрический изгиб трехслойной пластины с ортотропными упругими несущими слоями и линейно вязкоупругим заполнителем. Физические уравнения состояния для заполнителя принимаются в виде:

$$s_{ij}^{(3)}(t) = 2G_3 \left( \varepsilon_{ij}^{(3)}(t) - \int_0^t R_3(t-\tau) \varepsilon_{ij}^{(3)}(\tau) d\tau \right), \quad \sigma^{(3)}(t) = 3K_3 \varepsilon^{(3)}(t).$$

где  $s_{ij}^{(3)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(3)}$ ,  $\sigma^{(3)}$ ,  $\varepsilon^{(3)}$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $R_3(t)$  – ядро релаксации материала заполнителя.

Система линейных интегро-дифференциальных уравнений равновесия:

$$\begin{cases} a_1 u_{,xx} + a_6 \Psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} = -p + p_v, \\ a_6 u_{,xx} + a_2 \Psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} - a_5 \Psi = h_v, \\ a_7 u_{,xxx} + a_3 \Psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} = -q + q_v. \end{cases} \quad (7)$$



Здесь коэффициенты  $a_i$  определяются соотношениями типа (1), неупругие слагаемые в правой части уравнений (7) вычисляются по формулам

$$p_v = N_{,x}^{(3)v}, \quad h_v = (M_{,x}^{(3)v} - Q^{(3)v}), \quad N^{(3)v} = \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \int_0^t R_3(t-\tau) \varepsilon_x^{(3)} d\tau dz, \\ M^{(3)v} = \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \int_0^t R_3(t-\tau) \varepsilon_x^{(3)} d\tau z dz, \quad Q^{(3)v} = 2G_3 \int_{-c}^c \int_0^t R_3(t-\tau) \psi d\tau dz.$$

Предположим, что в (7) содержится малый параметр, например, ядро релаксации  $R_3 < 1$ . Тогда возможен метод итераций, основанный на методе упругих решений Ильюшина, при котором для любого  $n$ -го приближения получаем решение задачи об изгибе трехслойной консоли с вязкоупругим наполнителем в рекуррентном виде:

$$\psi^{(n)}(x, t) = C_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \\ + \frac{1}{\beta} \left[ \operatorname{sh}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ u^{(n)}(x, t) = \gamma_3 \psi^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} \left[ -a_{21} L_2^{-1} (p - p_v^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1} (q - q_v^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)} x^2 \right] + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}, \\ w^{(n)}(x, t) = \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_1 \int \psi^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1} (p - p_v^{(n-1)}) + a_3 L_4^{-1} (q - q_v^{(n-1)}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} a_3 C_1^{(n)} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}, \quad (8)$$

где  $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$  – константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

Пусть пластина с линейно вязкоупругим наполнителем находится в стационарном температурном поле  $T$ , тогда для решения задачи воспользуемся методом температурно-временной аналогии (ТВА), в соответствии с которым, в формулах (8) реальное время заменяется модифицированным  $t'$ :

$$t' = t / \alpha_T(T),$$

где  $t$  – физическое время наблюдения;  $\alpha_T(T)$  – функция температурно-временного сдвига (Вильямса–Ландела–Ферри), определяемая формулой

$$\ln \alpha_T = C_1 \frac{T - T_0}{C_2 + T - T_0};$$

$C_1, C_2$  – экспериментальные константы,  $T_0$  – начальная температура.

2. Предположим, что в процессе деформирования материал наполнителя пластины проявляет нелинейно вязкоупругие свойства. Для их описания применяем следующие физические уравнения состояния

$$\sigma_x^{(3)} = 3K_3 \varepsilon^{(3)} - 2G_3 \left( \left( 1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}) \right) \varepsilon_x^{(3)}(t) - \int_0^t R_3(t-\tau) \left( 1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}) \right) \varepsilon_x^{(3)}(\tau) d\tau \right),$$



$$\sigma_{xz}^{(3)} = 2G_3 \left( \left( 1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}) \right) \varepsilon_{xz}^{(3)}(t) - \int_0^t R_3(t - \tau) \left( 1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}) \right) \varepsilon_{xz}^{(3)}(\tau) d\tau \right),$$

где  $\omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)})$  – функция физической нелинейности заполнителя,  $\varepsilon_i^{(3)}$  – интенсивность деформаций в заполнителе.

Соответствующая система интегро-дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемой пластины будет существенно нелинейной. Для ее решения применим метод упругих решений Ильюшина, при котором для любого  $n$ -го приближения получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 u_{,xx}^{(n)} + a_6 \psi_{,xx}^{(n)} - a_7 w_{,xxx}^{(n)} = -p + p_{\omega}^{(n-1)}, \\ a_6 u_{,xx}^{(n)} + a_2 \psi_{,xx}^{(n)} - a_3 w_{,xxx}^{(n)} - a_5 \psi^{(n)} = h_{\omega}^{(n-1)}, \\ a_7 u_{,xxx}^{(n)} + a_3 \psi_{,xxx}^{(n)} - a_4 w_{,xxx}^{(n)} = -q + q_{\omega}^{(n-1)}. \end{cases} \quad (9)$$

Величины  $p_{\omega}^{(n-1)}$ ,  $h_{\omega}^{(n-1)}$ ,  $q_{\omega}^{(n-1)}$  на первом шаге ( $n = 1$ ) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название *дополнительных «внешних» нагрузок*. Они служат поправками на физическую нелинейность и реономность материалов:

$$\begin{aligned} p_{\omega}^{(n-1)} &= N_{,x}^{(3)\omega(n-1)}, \quad h_{\omega}^{(n-1)} = (M_{,x}^{(3)\omega(n-1)} - Q^{(3)\omega(n-1)}), \quad q_{\omega}^{(n-1)} = M_{,xx}^{(3)\omega(n-1)}, \\ N^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \left[ \omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} + \int_0^t R_3(t - \tau) (1 - \omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)})) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} d\tau \right] dz, \\ M^{(3)\omega} &= \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \left[ \omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} + \int_0^t R_3(t - \tau) (1 - \omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)})) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} d\tau \right] z dz, \\ Q^{(3)\omega} &= 2G_3 \int_{-c}^c \left[ \omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \psi^{(n-1)} + \int_0^t R_3(t - \tau) (1 - \omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)})) \psi^{(n-1)} d\tau \right] dz. \quad (10) \end{aligned}$$

Процедура получения решения системы уравнений (9) не отличается от предыдущих. В результате получаем искомое решение в рекуррентном виде (8), где индекс  $v$  нужно заменить на  $\omega$ .

Таким образом, модифицированные формулы (8) дают *аналитическое решение* задачи о цилиндрическом изгибе трехслойной ортотропной пластины с *нелинейно вязкоупругим заполнителем* при различных условиях закрепления ее торцов. Если в выражениях (10) положить равным нулю ядро релаксации, то получим решение задачи для трехслойной прямоугольной пластины с *нелинейно упругим заполнителем* и ортотропными несущими слоями.

*Численные результаты* получены для шарнирно закрепленной пластины, набранной из материалов УВЭС–фторопласт–УВЭС, толщины слоев которой  $h_1 = h_2 = 0,05$ ,  $c = 0,05$ ; Ядро релаксации принималось в виде, предложенном Ржаницыным, его параметры для фторопласта известны.

Рисунок 9 а, б демонстрирует практическую сходимость метода упругих решений. За искомое решение принято 12-е приближение, которое отличается от предыдущих двух менее чем на 0,01 % – как для прогибов  $w$ , так и для



сдвигов  $\psi$ . Номер кривых на рисунках соответствует номеру  $n$  итерации,  $n = 1$  – упругому решению. Полученные значения перемещений в решении задачи нелинейной упругости превосходят идеально упругие примерно на 20 %. Форма кривых сохраняется.

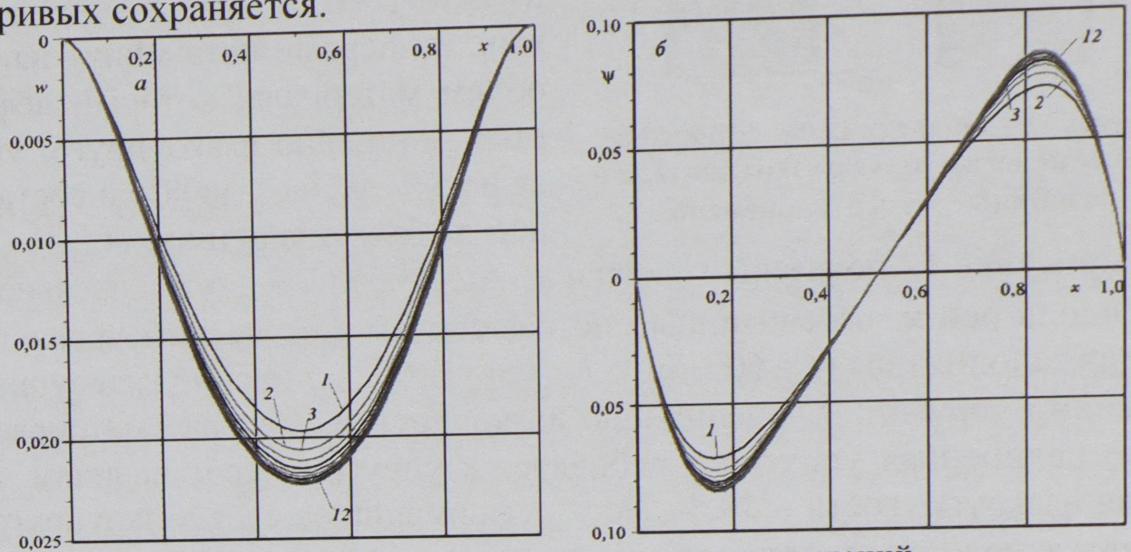


Рисунок 9 – Сходимость метода упругих решений

Рисунок 10 иллюстрирует изменение экстремальных значений:  $a$  – прогиба  $w$  [м];  $b$  – относительного сдвига  $\psi$  линейно вязкоупругой пластины с течением времени  $t$  при различных температурах  $T$ : 1 – 300 К; 2 – 320 К ( $\alpha_T = 0,233$ ); 3 – 330 К ( $\alpha_T = 0,133$ ). Как видно из графиков, вязкоупругие свойства проявляются тем больше, чем выше температура. В первые 5 минут при нагреве пластины на  $20^\circ$  перемещения возрастают на 5 %, при нагреве на  $30^\circ$  – на 7 %. При достаточно длительном времени нагружения значения перемещений при различных температурах асимптотически сближаются. ( $q = 2,5$  МПа).

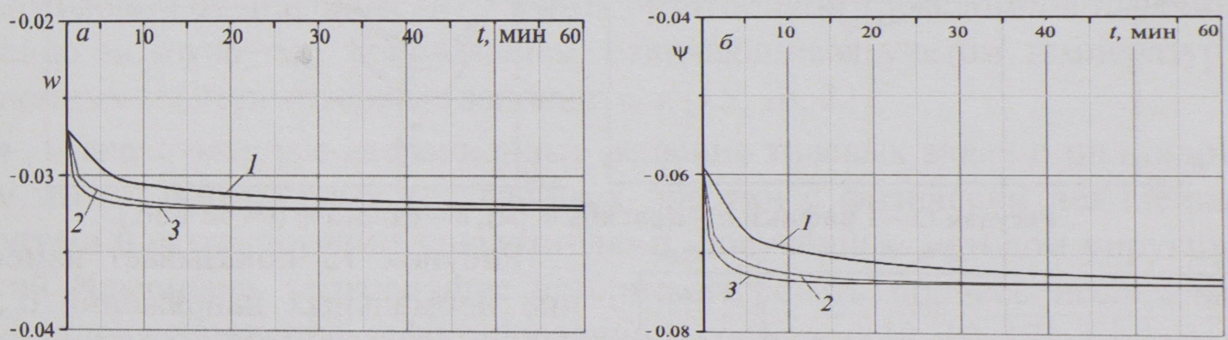


Рисунок 10 – Изменение во времени экстремумов  $a$  – прогиба  $w$  [м],  $b$  – сдвига  $\psi$   
 Аналитический вид функций  $\omega_3$  для заполнителя принимался в виде:

$$\omega^{(3)}(\epsilon_i) = \begin{cases} 0, & \epsilon_i \leq \epsilon_s, \\ A_1(1 - \epsilon_s/\epsilon_i)^{\alpha_1}, & \epsilon_i > \epsilon_s, \end{cases}$$

где экспериментальные значения параметров нелинейности для фторопласта  $A_1 = 0,905$ ,  $\alpha_1 = 1,48$ ,  $\epsilon_s = 0,033$ .

В диссертации показано выполнение достаточного условия сходимости указанного метода упругих решений. Практическая сходимость была подтверждена численно. За искомое решение принято 12-е приближение, которое отличается от предыдущих двух менее чем на 0,01 %.



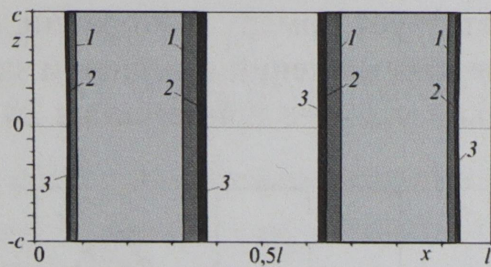


Рисунок 11 – Области нелинейности в нелинейно вязкоупругом заполнителе в различные моменты времени

На рисунке 12 показаны графики *a* – прогиба  $w$ , *б* – относительного сдвига  $\psi$  вдоль оси  $x$ , рассчитанные по различным физическим уравнениям состояния заполнителя ( $t = 60$  мин.): 1 – упругий; 2 – линейно вязкоупругий; 3 – нелинейно упругий; 4 – нелинейно вязкоупругий. При рассматриваемой нагрузке нелинейная упругость добавляет к упругим перемещениям 6 %; линейная вязкоупругость – 19 %. Рост деформаций за счет вязкоупругости материала заполнителя приводит к увеличению физической нелинейности, в связи с этим нелинейная вязкоупругость увеличивает перемещения на 42 %.

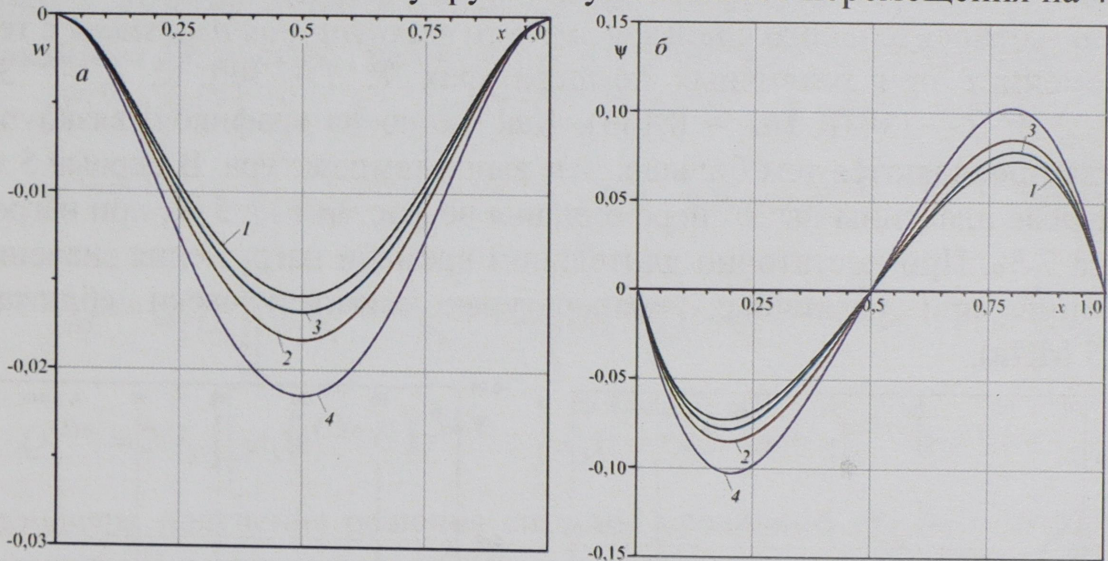


Рисунок 12 – Графики *a* – прогиба  $w$  [м], *б* – сдвига  $\psi$  ( $t = 60$  мин.)

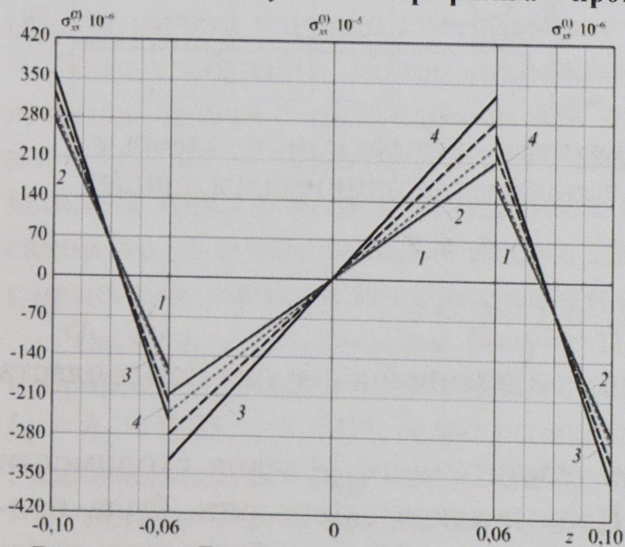


Рисунок 13 – Распределение нормальных напряжений  $\sigma_{xx}^{(k)}$  [Па] в сечении ( $x = 0,5$ )

Рисунок 11 показывает распределение областей нелинейности в заполнителе при различном времени нагружения: 1 –  $t = 0$ ; 2 –  $t = 5$  мин.; 3 –  $t = 60$  мин. За первые пять минут нагружения объем материала, который деформируется нелинейно вязкоупруго, увеличился на 5%, за час – на 8% и составил 85% всего объема заполнителя.

Рисунок 13 показывает изменение нормальных напряжений  $\sigma_{xx}$  в сечении пластины ( $x = 0,5$ ) по толщине. Кривые построены в различные моменты нагружения (мин.): 1 – линейно упругий заполнитель; 2 –  $t = 0$  (мгновенная нелинейность); 3 –  $t = 5$ , 4 –  $t = 60$  (нелинейная вязкоупругость). Учет мгновенной нелинейности увеличивает «упругие» напряжения на 14%; нелинейная вязкоупругость через 5 мин. после нагружения – на 33 %, через 60 мин. – на 57 %.



Аналитические и численные результаты исследований неупругого поведения элементов конструкций использованы при чтении курсов «Теория упругости и пластичности» и «Численные методы решения задач» для студентов специальности «Промышленное и гражданское строительство» УО БелГУТ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

*Основные научные результаты диссертации.* В работе приведены новые теоретические результаты исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных ортотропных упругих и физически нелинейных прямоугольных пластин, включающие:

- механико-математические модели квазистатического деформирования ортотропных трехслойных прямоугольных пластин, включающие уравнения равновесия, формулировки граничных условий и условий сопряжения для разрешающих функций, учитывающие нерегулярность границы в виде накладок, отличающиеся учетом ортотропии упругих несущих слоев и физической нелинейности упругих и вязкоупругих жестких заполнителей [1–22];
- аналитические решения краевых задач, содержащие расчетные формулы для перемещений, напряжений и деформаций в упругих трехслойных пластинах с гладкой и со ступенчатой границей при различных видах нагрузки (непрерывная, локально распределенная, сосредоточенные силы и моменты), отличающиеся учетом ортотропности слоев, наличием усиливающей накладки [1–8, 11–14, 18–21];
- аналитические рекуррентные решения задач об изотермическом и термосиловом цилиндрических изгибах ортотропной трехслойной пластины с линейно вязкоупругим заполнителем, отличающиеся учетом температуры и реономных свойств материала заполнителя [15, 16, 22];
- аналитические итерационные решения краевых задач о цилиндрическом изгибе ортотропных трехслойных пластин с физически нелинейными упругими и вязкоупругими заполнителями, полученные методом упругих решений Ильюшина, позволившие алгоритмизировать процесс исследования параметров напряженно-деформированного состояния [9, 10, 17];
- численный анализ напряженно-деформированного состояния ортотропных трехслойных прямоугольных пластин в зависимости от параметров физической нелинейности и реономности материала заполнителя, граничных условий, геометрических и упругих характеристик слоев и накладки, направления и объемного содержания армирующих волокон, величины, вида и времени действия нагрузки, температуры, обосновавший практическую сходимость предложенного метода последовательных приближений, установивший рост перемещений за счет физической нелинейности на 6 % (напряжений – на 14%), за счет реономности заполнителя на 19 % (при нагревании на 30° – до 27 %), при нелинейно вязкоупругом деформировании – на 42% (напряжений – на 57 %) [1–22].



*Рекомендации по практическому использованию результатов.* Полученные результаты позволяют численно моделировать квазистатические перемещения, деформации и напряжения в упругих и неупругих ортотропных трехслойных пластинах с гладкой и нерегулярной границами, давать практические рекомендации при проектировании комбинированных конструкций, что приводит к существенному снижению материальных затрат, необходимых для проведения экспериментальных исследований. Аналитические решения представляют самостоятельную ценность, как новые фундаментальные результаты, и могут служить для тестовой проверки численных решений. Разработанные методики и компьютерные программы могут применяться в практике проектных организаций строительного и машиностроительного профиля, в частности, при проектировании элементов корпусов авиационной и ракетной техники, в строительстве.

Отдельные результаты диссертации используются в курсах «Теория упругости и пластичности», «Численные методы решения задач» для студентов специальности «Промышленное и гражданское строительство» УО БелГУТ. В ИММС им. В. А. Белого НАНБ они применены для оптимизации композитных элементов индивидуальных средств защиты от ударного воздействия; на ОП НПО, ТУ и УМА РУП «Гомсельмаш» с их помощью рассчитаны рациональные геометрические параметры подземных резервуаров для хранения нефтепродуктов, исследовано НДС элементов конструкций средств технологического оснащения и механизации; в НИИЖТе на их базе проведены расчеты композитных корпусных элементов специальных вагонов.

Методики и программы численного счета, разработанные в диссертации, применялись также для расчета элементов оконного металлополимерного профиля (ЧУП «МонолитСервисСтрой»); прямоугольных вставок для усиления покрытия промышленного здания (УП «Гомельское агентство по строительству и инвестициям» при Национальном Олимпийском комитете РБ); для выработки практических рекомендаций по расчету размеров тонкостенных несущих профилей с наполнителем (ООО «Белтурпро»), для исследования деформирования теплообменника, камер горения и дожига (ОАО «Гомельский Техноприбор»).

Результаты внедрения подтверждены соответствующими актами.



## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

### Статьи в научных изданиях, рекомендованных в Перечне ВАК

1. **Протуро, И. И.** Изгиб прямоугольной трехслойной ортотропной пластины / **И. И. Протуро** // *Материалы. Технологии. Инструменты.* – 2008. – Т. 13, № 2. – С. 23–28.
2. **Старовойтов, Э. И.** Деформирование прямоугольных трехслойных ортотропных пластин под действием локальных нагрузок / **Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро** // *Вестник Самарского государственного университета – Самара, 2008.* – № 8 / 1(67). – С. 469–478.
3. **Старовойтов, Э. И.** Цилиндрический изгиб ортотропной трехслойной пластины ступенчато-переменной толщины / **Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро** // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Сборник научных работ / Днепропетровский национальный университет.* – Днепропетровск: ІМА-пресс. – 2009. – С. 221–227.
4. **Старовойтов, Э. И.** Напряженно-деформированное состояние прямоугольной трехслойной композитной пластины / **Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро** // *Вестник гражданских инженеров.* – 2009. – № 1 (18). – С. 34–38.
5. **Протуро, И. И.** Напряженно-деформированное состояние прямоугольной трехслойной композитной пластины / **И. И. Протуро** // *Материалы. Технологии. Инструменты.* – 2010. – Т. 20, № 1. – С. 5–8.
6. **Протуро, И. И.** Цилиндрический изгиб трехслойной ортотропной пластины с жесткой накладкой / **И. И. Протуро** // *Материалы. Технологии. Инструменты.* – 2011. – Т. 26, № 3. – С. 5–9.
7. **Старовойтов, Э. И.** Напряженно-деформированное состояние трехслойной ортотропной пластины с жесткой накладкой при цилиндрическом изгибе / **Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро** // *Вестник гражданских инженеров.* – 2012. – № 2 (31). – С. 107–112.

### Статьи в сборниках

8. **Лигоцкий, А. Л.** Изгиб трехслойной прямоугольной ортотропной пластины / **А. Л. Лигоцкий, И. И. Протуро** // *Сборник студенческих научных работ.* – Гомель, 2005. – Вып. 11. – С. 159–164.
9. **Протуро, И. И.** Цилиндрический изгиб ортотропной трехслойной пластины с нелинейно упругим наполнителем / **И. И. Протуро** // *Теоретическая и прикладная механика.* – Мн.: БНТУ, 2011. – № 26. – С. 189–195.
10. **Старовойтов, Э. И.** Цилиндрический изгиб ортотропной трехслойной пластины с нелинейно вязкоупругим наполнителем / **Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро, Д. В. Тарлаковский** // *Теоретическая и прикладная механика.* – Мн.: БНТУ, 2012. – № 27. – С. 64–69.



### Материалы конференций

11. *Протуро, И. И.* Деформирование трехслойной ортотропной пластины / *И. И. Протуро, А. Л. Лигоцкий* // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы VIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 14–16 марта 2005 г. – Гомель, 2005. – С. 100–101.
12. *Протуро, И. И.* Влияние свойств несущих слоев трехслойной композиционной прямоугольной пластины на изменение деформаций при локализации поверхностных нагрузок / *И. И. Протуро* // Проблемы и перспективы развития трансп. систем и строит. комплекса: материалы II Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 02–03 октября 2008 г. – Гомель: БелГУТ, 2008. – С. 250–251.
13. *Протуро, И. И.* Прямоугольная трехслойная ортотропная пластина под действием локальных нагрузок / *И. И. Протуро* // Новые функциональные материалы, современные технологии и методы исследования: материалы 4-ой региональной конференции молодых ученых, Гомель, 23–24 сентября 2008 г. – Гомель, 2008. – С. 175–177.
14. *Старовойтов, Э. И.* Изгиб трехслойных ортотропных пластин локальными нагрузками / *Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро* // Первая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: материалы Межд. конф., Самара, 8–13 сентября 2008 г. – Самара, 2008. – С. 272–273.
15. *Старовойтов, Э. И.* Неупругое деформирование трехслойной ортотропной пластины / *Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро* // Вторая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: материалы Межд. конф., Самара, 29 августа–4 сентября 2010 г. – Самара, 2010. – С. 318–320.
16. *Старовойтов, Э. И.* Цилиндрический изгиб ортотропной трехслойной пластины с линейно вязкоупругим наполнителем / *Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро* // Трибофатика: труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010, Минск, 25 окт.–1 нояб. 2010 г. В 2 ч. – Мн.: БГУ, 2010. – Ч. 2. – С. 415–420.
17. *Старовойтов, Э. И.* Цилиндрический изгиб трехслойной ортотропной пластины с нелинейно упругим наполнителем / *Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро, Ю. В. Громыко* // Механика–2011: сб. науч. тр. V Белорусского конгресса по теорет. и прикладной механике, Минск 26–28 октября 2011 г. / Объедин. ин-т машиностроения НАН Беларуси; редкол.: М.С. Высоцкий [и др.]. – Мн., 2011. – Т. 2. – С. 308–313.

### Тезисы докладов

18. *Протуро, И. И.* Изгиб ортотропной трехслойной прямоугольной пластины / *А. Л. Лигоцкий, И. И. Протуро* // IX Белорусская математическая



- конференция: тезисы докладов, Гродно, 3–6 ноября 2004 г. – Гродно, 2004. – С. 190–191.
19. *Старовойтов, Э. И.* Изгиб трехслойных ортотропных пластин локальными нагрузками / *Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро* // Международная конференция по математической физике и ее приложениям: тезисы докладов, Самара, 8–13 сентября 2008 г. – Самара, 2008. – С. 199–200.
  20. *Старовойтов, Э. И.* Деформирование трехслойных ортотропных пластин под действием локальных нагрузок / *Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро* // X Белорусская математическая конференция: тезисы докладов, Минск, 3–7 ноября 2008 г. – Мн., 2008. – Ч. 2. – С. 145–146.
  21. *Протуро, И. И.* Моделирование изгиба прямоугольной трехслойной ортотропной пластины под действием локальных нагрузок / *И. И. Протуро* // XIII Республиканская научная конференция студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях»: тезисы докладов, Гомель, 15–17 марта 2010 г. – Гомель, 2010. – С. 213–214.
  22. *Протуро, И. И.* Цилиндрический изгиб трехслойной ортотропной пластины с неупругими несущими слоями / *И. И. Протуро* // Республиканская научно-техническая конференция молодых ученых «Новые функциональные материалы, современные технологии и методы исследования»: тезисы докладов, Гомель, 5–7 октября 2010 г. – Гомель, 2010. – С. 128–130.



## РЭЗЮМЭ

Пратура Іван Іванавіч

### **Пругкае і няпругкае дэфармаванне артатропных прамавугольных трохслаёвых пласцін**

*Ключавыя словы:* трохслаёвыя артатропныя пласціны, дэфармаванне, пругкасць, вязкапругкасць, фізічная нелінейнасць, лакальныя нагрузкі.

*Аб'ект даследавання:* трохслаёвыя прамавугольныя артатропныя пласціны; *прадмет даследавання:* напружана-дэфармаваны стан аб'екта.

*Мэта работы:* распрацоўка механіка-матэматычных мадэляў фізічна лінейнага і нелінейнага дэфармавання трохслаёвых прамавугольных артатропных пласцін, якія ўлічваюць вязкапругкасць матэрыялу запаўняльніка, тэмпературу, наяўнасць дадатковай накладкі; распрацоўка метадаў рашэння адпаведных краявых задач.

Прыведзены пастаноўкі новых краявых задач аб квазістатычным дэфармаванні прамавугольных трохслаёвых пласцін з артатропнымі нясучымі сляямі пры розных нагрузках і мадэлях дэфармавання запаўняльніка, прапанаваны метады іх рашэння. Атрыманы шэраг дакладных і ітэрацыйных рашэнняў для фізічна лінейных і нелінейных трохслаёвых пласцін. Праведзена лікавая апрабаваная прапанаваных рашэнняў. Дадзены параметрычны аналіз напружана-дэфармаванага стану ў залежнасці ад гранічных умоў, геаметрычных і механічных характарыстык слаёў, велічыні і віду нагрузкі.

Вынікі даследаванняў з'яўляюцца новымі і могуць быць выкарыстаны праектнымі арганізацыямі ў аэракасмічным, транспартным, энергетычным і электронным машынабудаванні, будаўніцтве.

## РЕЗЮМЕ

Протуро Иван Иванович

### **Упругое и неупругое деформирование ортотропных прямоугольных трехслойных пластин**

*Ключевые слова:* трехслойные ортотропные пластины, деформирование, упругость, вязкоупругость, физическая нелинейность, локальные нагрузки.

*Объект исследования:* трехслойные прямоугольные ортотропные пластины; *предмет исследования:* напряженно-деформированное состояние объекта.

*Цель работы:* создание механико-математических моделей физически линейного и нелинейного деформирования трехслойных прямоугольных анизотропных пластин, учитывающих направление и объемное содержание армирующих волокон, реономность материала заполнителя, температуру и нерегулярность границы; разработка методов решения соответствующих краевых задач.



Приведены постановки новых краевых задач о квазистатическом деформировании прямоугольных трехслойных пластин с ортотропными несущими слоями при различных нагрузках и моделях деформирования заполнителя, предложены методы их решения. Получен ряд точных и итерационных решений для физически линейных и нелинейных трехслойных пластин. Проведена численная апробация предложенных решений. Дан параметрический анализ напряженно-деформированного состояния в зависимости от граничных условий, геометрических и механических характеристик слоев, направления и объемного содержания армирующих волокон в несущих слоях, величины и вида нагрузки.

Результаты исследований являются новыми и могут быть использованы проектными организациями в аэрокосмическом, транспортном, энергетическом и электронном машиностроении, строительстве.

## ABSTRACT

Proturo Ivan Ivanovich

### **Elastic and not elastic deformation orthotropic rectangular three-layer plates**

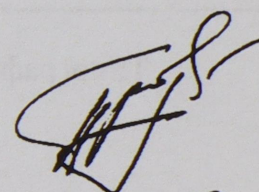
*Keywords:* three-layer orthotropic plates, deformation, elasticity, viscoelasticity, physical nonlinearity, local loadings.

*Object of research:* three-layer rectangular orthotropic plates. *Subject of research:* the stress-strain condition of the object.

*The work purpose:* mathematical models of physically linear and nonlinear deformation of three-layer rectangular orthotropic plates considering viscoelasticity of a material of a filler, temperature, presence of an additional overlay, conclusion equations of balance and the decision of corresponding regional problems.

Statements of new regional problems of quasistatic deformation of rectangular three-layer plates with orthotropic bearing layers are resulted at various loadings and models of deformation of filler, methods of their decision are offered. A number of exact and iterative decisions for physically linear and nonlinear three-layer plates are received. Numerical approbation of the offered decisions is spent. The parametrical analysis of the intense-deformed condition depending on boundary conditions, geometrical and mechanical characteristics of layers, size and a loading kind is given.

Results of researches are new and can be used by the design organizations in space, transport, power and electronic mechanical engineering, building.



7.06.12



Научное издание

*ПРОТУРО Иван Иванович*

**УПРУГОЕ И НЕУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ  
ОРТОТРОПНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ  
ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 07.06.2012 г. Формат бумаги 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>  
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать на ризографе  
Печ. листов 1,5. Тираж 80 экз. Зак. № 1806.

---

Типография УО «БелГУТ», 246022, г. Гомель, ул. Кирова, 34

ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.