РАЗСЧЕТЪ ШАТУНОВЪ.

Прочные размѣры шатуновъ обусловливаются силами двухъ родовъ: однѣ дѣйствуютъ на шатунъ перпендикулярно къ его длинѣ и стремятся прогнуть его; другія направлены вдоль шатуна и, стремясь то вытянуть, то сжать шатунъ по длинѣ, могутъ при этомъ то уменьшать, то увеличивать прогибъ, производимый силами перваго рода.

Поэтому, разсматривая совокупное дѣйствіе продольныхъ и перпендикулярныхъ силъ, мы будемъ имѣть въ виду только такія продольныя силы, которыя сжимаютъ, а не растягиваютъ шатунъ по длинѣ.

I. Дѣйствующія на шатуны силы и ихъ моменты.

а) Движущіе шатуны.

1. Пусть будетъ (черт. 1).

$l=AB$ длина шатуна,

$r=CA$ длина мотыля (или кривошипа, въ случаѣ колѣнчатой оси),

A_0 внутренняя мертвая точка его,

B центръ шарнирнаго соединенія шатуна со стержнемъ поршня,

i уголъ наклоненія оси цилиндра къ горизонту (условимся отсчитывать его постоянно *вверхъ* отъ CH),

α уголъ, составляемый мотылемъ съ осью цилиндра и отсчитываемый нами *внизъ отъ внутренней* мертвой точки A_0 мотыля,

β уголъ между осью цилиндра и шатуномъ, зависящій отъ угла α.

$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ угловая скорость вращенія оси или вала, постоянная при установившемся ходѣ машины,

ξ разстояніе какой нибудь точки M шатуна отъ A.

$\frac{r}{l} = \lambda$ отношеніе, всегда меньшее единицы (обыкновенно около 0,2).

Изъ треугольника ABC слѣдуетъ, что

$$Sin\,\beta = \lambda\, Sin\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

откуда

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \lambda \frac{Cos\alpha}{Cos\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Примемъ точку C за начало координатъ, ось цилиндра Cx за ось абсциссъ, а перпендикуляръ къ ней Cy за ось ординатъ.

Тогда для какой нибудь точки M (x, y) шатуна

$$x = rCos\alpha + \xi Cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$y = rSin\alpha \mp \xi Sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Первыя производныя координатъ по времени дадутъ составляющія для скорости:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega(rSin\alpha + \xi\lambda Cos\alpha . tg\beta) \quad \ldots \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega(r - \xi\lambda) Cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

а вторыя производныя—составляющія для ускоренія въ точкѣ M:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\left[rCos\alpha + \xi\lambda\left(\lambda\frac{Cos^2\alpha}{Cos^3\beta} - tg\beta . Sin\alpha\right)\right]. \quad (7)$$

$$\frac{d^2y}{d^2t} = -\omega^2(r - \xi\lambda)Sin\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Означая посредствомъ

Ω площадь поперечнаго сѣченія въ точкѣ M,

δ вѣсъ куб. единицы матеріала шатуна,

g ускореніе силы тяжести,

находимъ, что элементъ массы шатуна будетъ

$$dm = \frac{\delta}{g}\,\Omega d\xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

а проекціи *силы инерціи* j этого элемента на координатныя оси x, y:

$$j_x = dm.\omega^2\left[rCos\alpha + \xi\lambda\left(\lambda\frac{Cos^2\alpha}{Cos^3\beta} - Sin\alpha tg\beta\right)\right]. \quad (10)$$

$$j_y = dm.\omega^2(r - \xi\lambda)Sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Принимая точку A за начало новой системы координатъ, $A\xi$ за ось абсцисъ и перпендикуляръ къ ней $A\eta$ за ось ординатъ, находимъ проекціи силъ инерціи на эти новыя координатныя оси:

$$j_\xi = j_x \, Cos\beta - j_y \, Sin\beta$$

$$j_\eta = j_x \, Sin\beta + j_y \, Cos\beta$$

или

$$j_\xi = \frac{\delta}{g} \Omega\omega^2 \left[r Cos(\alpha+\beta) + \xi\lambda^2 \frac{Cos^2\alpha}{Cos^2\beta} \right] d\xi \quad . \quad (12)$$

$$j_\eta = \frac{\delta}{g} \Omega\omega^2 \left[r Sin(\alpha+\beta) - \xi(1-\lambda^2) \frac{Sin\beta}{Cos^3\beta} \right] d\xi \quad (13)$$

2. Обращаясь къ *силѣ тяжести*, находимъ вѣсъ элемента шатуна въ какой нибудь точкѣ M:

$$\Delta = \delta\Omega d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Проекціи его на координатныя оси x, y будутъ

$$\Delta_x = \Delta Sin\, i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\Delta_y = \Delta Cos\, i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

а на оси ξ, η:

$$\Delta_\xi = -\Delta_x Cos\beta - \Delta_y . Sin\beta$$

$$\Delta_\eta = -\Delta_x Sin\beta + \Delta_y . Cos\beta$$

или

$$\Delta_\xi = -\delta\Omega Sin(\beta+i) d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$\Delta_\eta = \delta\Omega Cos(\beta+i) d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Эти силы будутъ, какъ видно изъ чертежа, увеличивать дѣйствіе силъ инерціи только для тѣхъ положеній шатуна, которыя соотвѣтствуютъ движенію мотыля между мертвыми его точками по нижней половинѣ круга.

Поэтому для постоянныхъ и не вертикальныхъ машинъ всегда слѣдуетъ имѣть въ виду, что *шатунъ подвергается гораздо меньшимъ напряженіямъ при движеніи мотыля вверхъ отъ внутренней мертвой точки.*

3. Предполагая направленіе движенія обратное, какъ самое невыгодное, получаемъ, что на элементъ шатуна въ точкѣ M дѣйствуетъ перпендикулярная къ длинѣ сила.

$$j_\eta + \Delta_\eta = \Omega\,(A\xi + B)\, d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Въ этомъ выраженіи для краткости обозначены буквами A и B величины, зависящія отъ угла α и независящія отъ ξ:

$$A = \frac{\delta}{g} \omega^2 \cdot \left[-(1-\lambda^2) \frac{Sin\beta}{Cos^3\beta} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$B = \frac{\delta}{g} \omega^2 . \, l \left[\lambda \, Sin\,(\alpha+\beta) + i_1 \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

гдѣ членъ

$$i_1 = \frac{g}{l\omega^2} Cos\,(\beta + i) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

выражаетъ вліяніе силы тяжести.

Что касается величины Ω, площади сѣченія, то она, вообще говоря, мѣняется по длинѣ шатуна и будетъ нѣкоторая функція отъ ξ.

Такъ какъ измѣненіе это постепенное, и законъ его вообще можетъ быть представленъ выпуклою кривою, то, въ виду незначительности поперечныхъ размѣровъ шатуна сравнительно съ его длиною, можно представить Ω вообще въ видѣ непрерывной функціи отъ ξ и притомъ не выше 2-й степени:

$$\Omega = a\xi^2 + b\xi + c \quad \ldots \quad (23)$$

гдѣ коэффиціенты a, b, c опредѣляются вполнѣ величиною площади сѣченія въ трехъ какихъ нибудь точкахъ оси шатуна.

Теперь выраженіе (19) приметъ видъ:

$$j_\eta + \Delta_\eta = \left(Aa\xi^3 + \left.\begin{matrix} Ab \\ + Ba \end{matrix}\right| \xi^2 + \left.\begin{matrix} Ac \\ + Bb \end{matrix}\right| \xi + Bc\right) d\xi$$

Полагая для краткости

$$\left.\begin{aligned} m &= Aa \\ n &= Ab + Ba \\ p &= Ac + Bb \\ q &= Bc \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (24)$$

получаемъ

$$j_\eta + \Delta_\eta (m\xi^3 + n\xi^2 + p\xi + q)\, d\xi \quad \ldots \quad (25)$$

4. Чтобы опредѣлить *изгибающій моментъ перпендикулярныхъ силъ* для какого нибудь сѣченія шатуна M, находимъ сперва сопротивленіе, вызываемое этими силами въ опорѣ A:

$$R_a = \frac{\sum\limits_{\xi=0}^{\xi=l} (l-\xi)(j_\eta + \Delta_\eta)}{l} = \frac{\int_0^l (l-\xi)(m\xi^3 + n\xi_2 + p\xi + q)\, d\xi}{l}$$

или

$$R_a = m\frac{l^4}{20} + n\frac{l^3}{12} + p\frac{l^2}{6} + q\frac{l}{2}\,{}^{*)} \quad \ldots \quad (26a)$$

Условимся брать моменты въ сторону движенія часовой стрѣлки и обозначимъ временно посредствомъ ξ_1 абциссу сѣченія, для котораго желаемъ опредѣлить моментъ M_1 разсматриваемыхъ силъ.

---

*) Сопротивленіе опорное въ точкѣ B будетъ

$$R_b = \int_0^l (m\xi^3 + n\xi^2 + p\xi + q)\, d\xi - R_a$$

или

$$R_b = m\frac{l^4}{5} + n\frac{l^3}{4} + p\frac{l^2}{3} + q\frac{l}{2} \quad \ldots \quad (26_b)$$

Величины R_a и R_b слѣдуетъ принимать въ разсчетъ при опредѣленіи размѣровъ цапфъ.

Тогда

$$M_1 = R_a\,\xi_1 - \sum_{\xi=0}^{\xi=\xi_1} (\xi_1 - \xi)(j_\mu + \Delta_\mu)$$

откуда, произведя необходимое интегрированіе и замѣняя ξ_1 просто ξ, получаемъ:

$$M_1 = \xi\left(m\frac{l^4-\xi^4}{20} + n\frac{l^3-\xi^3}{12} + p\frac{l^2-\xi^2}{6} + q\frac{l-\xi}{2}\right) \quad . \quad . \quad (26)$$

или

$$M_1 = -\frac{m}{20}\xi^5 - \frac{n}{12}\xi^4 - \frac{p}{6}\xi^3 - \frac{q}{2}\xi^2 + \left(\frac{m}{20}l^4 + \frac{n}{12}l^3 + \frac{p}{6}l^2 + \frac{q}{2}\,l\right)\xi \quad . \quad . \quad (27)$$

5. Обратимся теперь къ *продольнымъ силамъ.*

Въ точкѣ B на шатунъ дѣйствуютъ:

во первыхъ, сила пара

$$P = p\,\frac{\pi d^2}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

гдѣ

p давленіе пара на кв. единицу площади поршня,

d діаметръ цилиндра,

и, во вторыхъ, сила инерціи поршня и движущихся вмѣстѣ съ нимъ частей.

Полагая въ формулѣ (7) $\xi = l$, находимъ ускореніе въ точкѣ B:

$$-\,\omega^2 r\left[\frac{Cos\,(\alpha+\beta)}{Cos\beta} + \lambda\,\frac{Cos^2\alpha}{Cos^3\beta}\right]$$

и если означимъ посредствомъ

G вѣсъ поршня, стержня и кулака,

то сила инерціи этихъ частей будетъ

$$j_b = \frac{G}{g}\,w^2 r\left[\frac{Cos\,(\alpha+\beta)}{Cos\beta} + \lambda\,\frac{Cos^2\alpha}{Cos^3\beta}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Равнодѣйствующая силъ P и j_b, разлагаясь въ точкѣ B, даетъ по направленію, перпендикулярному къ оси цилиндра, составляющую

$$(\pm P + j_b)\,tg\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

дѣйствующую разрушительно на параллели и уничтожаемую ихъ сопротивленіемъ, а вдоль шатуна силу

$$\frac{\pm P + j_b}{Cos\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

которая достигаетъ своего максимума при $\alpha = 2\pi$ *), одновременно съ j_b и въ томъ положеніи шатуна, когда P имѣетъ одинаковый съ j_b знакъ $+$, такъ какъ сила пара, дѣйствуя тогда вытягивающимъ образомъ, направлена въ сторону положительныхъ x-въ.

---

*) Въ дѣйствительности раньше этого предѣльнаго положенія, такъ какъ давленіе пара, даже при полномъ впускѣ, въ концѣ хода поршня падаетъ, вслѣдствіе предваренія выпуска.

Кромѣ того собственный вѣсъ шатуна и силы инерціи его массы дадутъ продольную силу

$$\sum_{\xi=0}^{\xi=l} (j_\xi + \Lambda_\xi),$$

которая, какъ видно изъ выраженій (12) и (17), съ удаленіемъ мотыля отъ мертвыхъ точекъ быстро уменьшается и можетъ оказывать только ничтожное вліяніе на дѣйствіе другихъ силъ.

Равнодѣйствующая всѣхъ продольныхъ силъ вызоветъ въ опорѣ A сопротивленіе

$$D_a = -\frac{\pm P + j_b}{Cos\beta} - \sum_{\xi=0}^{\xi=l} (j_\xi + \Lambda_\xi). \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Эта сила достигаетъ своего абсолютнаго максимума, какъ мы замѣтили выше, при $\alpha = 2\pi$:

$$max.\ D_a = -\left[P + \omega^2 r\,(1+\lambda)\,\frac{G + \delta\Omega l}{g}\right]. \quad (33)$$

и эту величину слѣдуетъ имѣть въ виду при опредѣленіи площади сѣченія шатуна у конца A.

Для конца B соотвѣтственно получаемъ

$$max.\ D_b = -\left[P + \omega^2 r\,(1+\lambda)\,\frac{G}{g}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Что касается положеній мотыля между мертвыми точками въ нижней половинѣ круга, то при значительномъ удаленіи мотыля отъ этихъ точекъ можно принимать

$$D_a = -\frac{-P + j_b}{Cos\beta} = \frac{P - j_b}{Cos\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Относительно этого выраженія слѣдуетъ замѣтить, что въ первой четверти круга мотыля отъ $\alpha = 0$ до $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ величина j_b будетъ положительная и потому будетъ ослаблять дѣйствіе силы P, величина же $Cos\beta$ будетъ уменьшаться и увеличивать значеніе D_a; затѣмъ отъ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ до $\alpha = \pi$ величина j_b будетъ отрицательная и слѣдовательно будетъ усиливать дѣйствіе P, величина же $Cos\beta$ по мѣрѣ приближенія къ $\alpha = \pi$ будетъ возрастать и вмѣстѣ съ тѣмъ ослаблять D_a; кромѣ того и сама величина P во второй четверти будетъ сравнительно менѣе, чѣмъ въ первой, особенно для машинъ съ расширеніемъ пара.

На основаніи этихъ соображеній мы для положеній мотыля, удаленныхъ отъ мертвыхъ точекъ, примемъ просто

$$D_a = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

6. Замѣтимъ, что шатунъ прилегаетъ къ цапфамъ не всею поверхностью своихъ вкладышей, и для простоты предположимъ, что сопри-

косновеніе происходитъ только по одной производящей для той и другой цилиндрической поверхности.

На чертежѣ (чер. 2) эти соприкасающіяся линіи проектируются въ точки (a, a_1) для A_0 и (b, b_1) для B_0, когда мотыль находится во внутренней мертвой точкѣ.

Съ удаленіемъ мотыля отъ этого положенія на уголъ α, упомянутыя точки a (вкладыша шатуна) и a_1 (пальца мотыля), а также b (вкладыша шатуна) и b_1 (валика кулака) уже не будутъ соотвѣтственно совпадать между собою, и соприкосновеніе будетъ имѣть мѣсто для иныхъ точекъ.

Это относительное движеніе точекъ соприкосновенія встрѣчаетъ сопротивленіе въ *треніи*, которое, такимъ образомъ, какъ-бы закрѣпляетъ концы шатуна.

Обозначая посредствомъ

f коэффиціентъ этого тренія,

ρ_a радіусъ пальца мотыля,

ρ_b радіусъ валика кулака,

$\frac{\rho b}{\rho a}=\Theta$ отношеніе, никогда не превосходящее единицы (обыкновенно 0,8 для мотылей и около 0,4 для кривошиповъ),—

получаемъ закрѣпляющій моментъ въ концѣ A шатуна

$$\mu_a=\mu=fD\rho_a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

а въ концѣ B

$$\mu_b=\Theta\mu=fD\rho_b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Эти моменты на чертежѣ представлены парами силъ $(fa, -fa)$ и $(fb, -fb)$.

Дѣйствіе закрѣпляющихъ моментовъ вызываетъ въ концѣ A шатуна срѣзывающую силу S, которую мы опредѣлимъ, приравнявъ нулю сумму моментовъ относительно точки b:

$$\mu+\Theta\mu-S.l=0$$

откуда

$$S=\mu\frac{1+\theta}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Опредѣляя теперь изгибающій моментъ M_2, производимый треніемъ въ цапфахъ, относительно какого нибудь сѣченія M шатуна, находимъ

$$M_2=\mu-S.\xi$$

или

$$M_2=\mu\left(1-\frac{1+\theta}{l}\xi\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

b. Спаривающіе шатуны.

7. Формулы, опредѣляющія величины *силъ тяжести и инерціи массъ* для спаривающихъ шатуновъ, можно было бы вывести изъ таковыхъ же для движущихъ, положивъ только

$$i=0\ ,\ \beta=0\ ,\ \lambda=0$$

Но можно и прямо написать выраженіе для упомянутыхъ силъ, замѣтивъ, что центробѣжная сила для пальца мотыля

$$\omega^2 r$$

будетъ представлять собою и величину силы инерціи единицы массы для всѣхъ другихъ точекъ оси шатуна, вслѣдствіе совершенной тождественности ихъ движенія.

Поэтому для какой нибудь точки M шатуна проекціи силы инерціи на ось шатуна и на перпендикуляръ къ ней, направленный внизъ, будутъ:

$$j_\xi = \frac{\delta}{g}\Omega\,\omega^2 r\,Cos\alpha.\,d\xi \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (41)$$

$$j_2 = \frac{\delta}{g}\Omega\,\omega^2 r\,Sin\alpha.\,d\xi \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (42)$$

а для силы тяжести:

$$\Delta_\xi = o$$

$$\Delta_2 = \delta\,\Omega\,d\xi \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (43)$$

Такимъ образомъ въ выраженіяхъ для j_μ и Δ_μ коэффиціенты при $\Omega\,d\xi$ не зависятъ отъ ξ, и потому въ выраженіяхъ (24) слѣдуетъ положить

$$A=0$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} m &= 0 \\ n &= Ba \\ p &= Bb \\ q &= Bc \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (44)$$

гдѣ

$$\beta = \delta\left(\frac{\omega^2 r}{g}Sin\alpha + 1\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (45)$$

Такимъ образомъ, если площадь сѣченія шатуна

$$\Omega = a\,\xi^2 + b\xi + c \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (46)$$

то изгибающій моментъ для какой нибудь точки оси шатуна будетъ, согласно выраженію (26):

$$M_1 = \xi\left(n\,\frac{l^3-\xi^3}{12} + p\,\frac{l^2-\xi^2}{6} + q\,\frac{l-\xi}{2}\right) \quad . \ . \ . \ . \quad (47)$$

или

$$M_1 = \beta\xi\left(a\,\frac{l^3-\xi^3}{12} + b\,\frac{l^2-\xi^2}{6} + c\,\frac{l-\xi}{2}\right) \quad . \ . \ . \ . \quad (48)$$

9

Не трудно опредѣлить наибольшее значеніе этой величины, зависящей отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ α и ξ.

Отъ α зависитъ здѣсь только коэффиціентъ B, который, какъ видно изъ выраженія (45), достигаетъ наибольшаго значенія при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Возьмемъ затѣмъ производную отъ M_1 по ξ и приравняемъ ее нулю.

Въ полученное такимъ образомъ уравненіе 3-й степени

$$a\,\frac{l^3-4\xi^3}{6} + b\,\frac{l^2-3\xi^2}{3} + c\,(l-2\xi) = 0$$

подставляя

получаемъ $\xi = \frac{l}{2}$

$$al + b = 0$$

что дѣйствительно имѣетъ мѣсто, такъ какъ площади концевыхъ сѣченій A и B спаривающаго шатуна дѣлаются всегда одинаковыми, т. е.

$$\text{при } \xi = 0\,,\ \Omega = c$$

$$\text{при } \xi = l\,,\ \Omega = al^2 + bl + c$$

и, слѣдовательно,

$$al^2 + bl = l\,(al + b) = 0.$$

Итакъ наибольшее значеніе M_1 будетъ имѣть мѣсто при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и при $\xi = \frac{l}{2}$, и величина его будетъ:

$$max.\ M_1 = \delta\Big(\frac{\omega^2 r}{g} + 1\Big)\Big(\frac{7}{24}\,al^2 + \frac{l}{2}\,l + c\Big)\frac{l^2}{8}\,. \quad . \quad (49)$$

8. Обратимся теперь къ *продольнымъ силамъ* и разсмотримъ, какъ болѣе общій случай, паровозъ съ четырьмя спаренными осями и съ наклонными цилиндрами (чер. 3).

Оставляя за α, i, β тѣ же значенія, которыя онѣ имѣли для движущаго шатуна, назовемъ посредствомъ

α_1 уголъ между спаривающимъ шатуномъ и мотылемъ,

β_1 уголъ между этимъ послѣднимъ и движущимъ шатуномъ.

Между этими величинами существуетъ зависимость.

$$\left.\begin{aligned} Sin\beta &= \lambda Sin\alpha \\ \alpha_1 &= \alpha - i \\ \beta_1 &= \alpha + \beta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50).$$

Въ точкѣ A дѣйствуетъ по направленію BA сила, равная по величинѣ опредѣленному нами опорному сопротивленію D_a.

Эта сила, которую назовемъ просто буквою D, разлагается въ точкѣ A по радіусу и по касательной къ кругу мотыля на двѣ составляющія:

$$N' = DCos\beta_1 = DCos\,(\alpha - \beta)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51).$$

$$T = DSin\beta_1 = DSin\,(\alpha - \beta)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Сила T будетъ преодолѣвать сопротивленіе, представляемое всѣмъ поѣздомъ и дѣйствующее на окружности ведущихъ колесъ паровоза.

Это сопротивленіе можно принять распредѣленнымъ поровну между всѣми ведущими колесами, а слѣдовательно и сила T, дѣйствующая въ точкѣ A, должна быть передана на всѣ спаренныя оси.

Отдѣляя поэтому $\frac{T}{4}$ на III колесо, разложимъ остальныя $\frac{3}{4}T$ по направленію спаривающихъ шатуновъ и по радіусу AC на

$$3d = \frac{3}{4}\,\frac{T}{Sin\alpha_1} = \frac{3}{4}\,D\,\frac{Sin\,(\alpha - \beta)}{Sin\,(\alpha - i)}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53).$$

$$N'' = \frac{3}{4}\,\frac{T}{tg\alpha_1} = \frac{3}{4}\,D\,\frac{Sin\,(\alpha - \beta)}{tg\,(\alpha - i)}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54).$$

Эта послѣдняя, въ соединеніи съ силою N' дастъ равнодѣйствующую

$$N = D\left[Cos\,(\alpha - \beta) + \frac{3}{4}\,\frac{Sin\,(\alpha - \beta)}{tg\,(\alpha - i)}\right]\quad . \quad . \quad . \quad (55).$$

которая будетъ дѣйствовать на мотыль по направленію его длины.

Сила $3d$ передается поровну на остальныя три оси, т. е. на каждую по

$$d = \frac{D}{4}\,\frac{Sin\,(\alpha - \beta)}{Sin\,(\alpha - i)}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56).$$

Эти силы d въ соотвѣтствующихъ точкахъ приложенія, т. е. въ пальцахъ мотылей, разложатся: по направленію радіусовъ на

$$n = a\,Cos\alpha_1 = \frac{D}{4}\,\frac{Sin\,(\alpha - \beta)}{tg\,(\alpha - i)}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

и по касательнымъ къ кругамъ мотылей на

$$t = d\,Sin\alpha_1 = \frac{D}{4}\,Sin\,(\alpha - \beta)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58).$$

Давленія N и n будутъ разрушительно дѣйствовать на мотыли и на части паровоза, которымъ оси передадутъ эти давленія.

Что же касается t, то это будутъ силы, движущія поѣздъ.

9. Представимъ себѣ теперь (чер. 4) ось C хотя на одно мгновеніе невращающеюся (или просто отъ скольженія ея колесъ, или отъ удара, который вызываетъ также скольженіе).

Тогда пара шатуновъ, передающихъ движущую силу на эту ось, будутъ какъ-бы закрѣплены въ точкахъ B и b, удаленныхъ на 90° одна отъ другой.

На концы же A и a будутъ дѣйствовать силы, величина которыхъ для разныхъ положенiй мотылей различна.

Въ томъ случаѣ, когда мотыль A оси C перпендикуляренъ къ своему шатуну, и слѣдовательно другой мотыль a расположенъ со своимъ шатуномъ на одной прямой, на этотъ послѣднiй дѣйствуетъ по касательной къ кругу мотыля сила, вращающая ось C съ ея колесами.

Эта сила будетъ стремиться опустить точку a, но встрѣтитъ сопротивленiе своему дѣйствiю въ точкѣ A, неизмѣнно соединенной съ a посредствомъ оси и мотылей.

Такимъ образомъ, силы, дѣйствующiя на ось C, будутъ передаваться на одинъ шатунъ AB и будутъ сжимать его по длинѣ.

Пусть равнодѣйствующая этихъ силъ будетъ D.

Если мы возьмемъ затѣмъ положенiе шатуновъ, когда они оба составляютъ углы въ 45^0 со своими мотылями, то касательныя силы, дѣйствующiя на ось C, распредѣлятся поровну между шатунами.

Слѣдовательно, въ точкѣ A_1 будетъ теперь дѣйствовать сила, равная $\frac{D}{2}$, которая и разложится по радiусу A_1C и по длинѣ шутуна $A_1\, B_1$ на

$$N = \frac{D}{2}\, tg\ 45^0 = \frac{D}{2}$$

и на

$$D_1 = \frac{D}{2} \frac{1}{Sin\ 45^0} = 0{,}707\, D$$

Отсюда видно, что при движенiи мотыля отъ A къ A_1 давленiе, сжимающее шатунъ, уменьшается.

При дальнѣйшемъ движенiи точки A_1 роль шатуна AB перейдетъ къ шатуну ab, для котораго будутъ имѣть мѣсто тѣ же соображенiя, которыя нами только что изложены.

Итакъ мы видимъ, что наибольшее продольное давленiе спаривающiй шатунъ испытываетъ въ положенiи, перпендикулярномъ къ мотылю, т. е. въ то же время, когда имѣетъ мѣсто и *max.* M_1 момента вѣса и силъ инерцiи, перпендикулярныхъ къ длинѣ шатуна.

10. Переходя теперь къ опредѣленiю продольной силы D, замѣтимъ, что величина эта обусловливается съ одной стороны силою, приложенною въ точкѣ A и вращающею колесо C, съ другой—сопротивленiемъ въ точкѣ B, препятствующимъ вращенiю оси C_1.

Меньшая изъ этихъ двухъ величинъ и будетъ то давленiе D, которое долженъ выдержать шатунъ AB.

Сопротивленіе въ точкѣ B зависитъ отъ тренія колесъ оси C, при скольженіи по рельсамъ.

За неимѣніемъ данныхъ для стали, изъ которой дѣлаются бандажи колесъ, примемъ, что коэффиціентъ тренія для нея такой же, какъ и для чугуна.

По Морену коэффиціентъ тренія равенъ $0{,}18$ для желѣза по чугуну во время движенія и при сухомъ состояніи поверхностей.

Затѣмъ опыты инженеровъ французской восточной желѣзной дороги *) показали, что для чугунныхъ тормазныхъ колодокъ коэффиціентъ третія мѣняется отъ 0,128 до 0,192.

Въ виду толчковъ и ударовъ, увеличивающихъ сопротивленіе движенію, мы примемъ для бандажей за наибольшую величину этого коэффиціента

0,22.

Обыкновенно нагрузка на ось паровоза 11—12 тоннъ, но на ходу можетъ для той или другой оси значительно увеличиваться, однако не болѣе какъ въ $1^1/_2$ раза.

Поэтому для одной оси можно принять, что сопротивленіе тренія, дѣйствующее на окружности колесъ, будетъ не болѣе $18{,}000 \times 0{,}22$, или

4.000 килограммовъ.

Если же ось C_1 спарена еще съ осью, лежащею влѣво отъ нея, то сопротивленіе на окружности обѣихъ осей будетъ не болѣе $(18000+12000) \times 0{,}22$, или

6.600 килограммовъ.

Эти величины всегда будутъ менѣе наибольшаго значенія движущей силы паровоза, которая разсчитывается по сцѣпленію всѣхъ колесъ паровоза и которая, при закрѣпленіи точки B, не будетъ разлагаться на составляющія d, а цѣликомъ будетъ передаваться на шатунъ AB.

Такимъ образомъ, если

R радіусъ ведущихъ колесъ,

r длина мотылей,

то наибольшее продольное давленіе, которое долженъ выдержать спаривающій шатунъ, будетъ

$$D_1 = 4.000 \frac{R}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

*) *Vuillemin, Guébhard* et *Dieudonné.* De la résistance des trains et de la puissance des machines. Paris. 1868. Стр. 86.

если шатунъ не передаетъ движущей силы другому шатуну, какъ I, II и III, IV (чер. 3), и

$$D_2 = 6.600\ \frac{R}{r}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

если спаривающій шатунъ служитъ посредникомъ для передачи движущей силы на сосѣдній спаривающій шатунъ, какъ II, III на I, II.

Отношеніе $\frac{R}{r}$ обыкновенно измѣняется въ предѣлахъ 2—3.

11. Остается еще разсмотрѣть треніе въ цапфахъ.

Полагая, что движущая сила дѣйствуетъ на колесо C_1 (чер. 5), изъ чертежа видимъ, что направленія силъ тренія будутъ такія же, какъ и для движущаго шатуна въ первой четверти круга мотыля.

Поэтому, полагая въ формулѣ (40) $\theta = 1$, получаемъ прямо

$$M_2 = \mu\left(1-2\frac{\xi}{l}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

и если

ρ радіусъ пальцевъ мотылей, то

$$\mu = fD\rho\ \ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

II. Совокупное дѣйствіе всѣхъ силъ на изгибъ шатуновъ.

12. Какъ на движущіе, такъ и на спаривающіе шатуны дѣйствуютъ, какъ мы видѣли выше, совершенно однородныя силы, и потому оба рода шатуновъ мы будемъ разсматривать теперь одновременно.

Подъ вліяніемъ всѣхъ дѣйствующихъ на шатунъ силъ, онъ будетъ укорачиваться и прогибаться, пока внѣшнія силы не придутъ въ равновѣсіе съ внутренними силами упругаго сопротивленія.

При этомъ ось шатуна выгнется по нѣкоторой кривой AMB (чер. 6), координаты которой ξ, η будутъ удовлетворять уравненію

$$\frac{M}{EJ} = -\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

гдѣ

M—моментъ всѣхъ внѣшнихъ силъ относительно сѣченія, взятаго на разстояніе ξ отъ A,

J—моментъ инерціи этого сѣченія относительно оси, перпендикулярной къ плоскости движенія,

E—модуль упругости матеріала, и гдѣ, вслѣдствіе незначителькости деформаціи шатуна, вмѣсто точнаго выраженія для кривизны въ точкѣ (ξ, η)

$$\frac{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}{\left[1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{3/2}}$$

взято приблизительное

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$$

и именно потому со знакомъ минусъ, что кривая обращена у насъ къ оси абсциссъ своею вогнутостью.

Моментъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, какъ продольныхъ, такъ и перпендикулярныхъ къ длинѣ шатуна, будетъ

$$M = D\eta + M_1 + M_2,$$

гдѣ

η представляетъ собою еще неизвѣстную для насъ функцію отъ ξ.

Обозначая для краткости

$$\frac{D}{EJ} = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

$$\frac{M_1 + M_2}{EJ} = f(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

получаемъ вмѣсто уравненія (63)

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + k^2\eta = f(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

дифференціальное уравненіе второго порядка, линейное, съ послѣднимъ членомъ.

Дифференцируя его послѣдовательно, мы можемъ привести его къ виду уравненій безъ послѣдняго члена.

Подставляя выраженія (27) и (40) для M_1 и M_2, получаемъ:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \xi^2\eta = \frac{1}{EJ}\Big[\frac{m}{20}\xi^5 + \frac{n}{12}\xi^4 + \frac{p}{6}\xi^3 + \frac{q}{2}\xi^2 -$$

$$-\left(\frac{m}{20}l^4 + \frac{n}{12}l^3 + \frac{p}{6}l^2 + \frac{q}{2}l\right)\xi + \mu\frac{1+\theta}{l}\xi - \mu\Big]$$

Полагаемъ

$$\frac{q^2\eta}{q\xi^2} = u$$

и дифференцируемъ два раза по ξ:

$$\frac{du}{d\xi} + k^2\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{EJ}\Big[\frac{m}{4}\xi^4 + \frac{n}{3}\xi^3 + \frac{p}{2}\xi^2 + 9\xi -$$

$$\left(\frac{m}{20}l^4 + \frac{n}{12}l^3 + \frac{p}{6}l^2 + \frac{q}{2}l\right) + \mu\frac{1\times\theta}{l}\Big]$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + k^2u = \frac{1}{EJ}\left[m\xi^3 + n\xi^2 + p\xi + q\right].$$

Затѣмъ, повторяя тотъ же пріемъ:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}=v$$

$$\frac{dv}{d\xi}+k^2\frac{du}{d\xi}=\frac{1}{EJ}\Big[3\,m\xi^2+2\,n\xi+p\Big]$$

$$\frac{d^2v}{d\xi^2}+k^2v=\frac{1}{EJ}\Big[6\,m\xi+2\,n\Big]$$

$$\frac{d^2v}{d\xi^2}=w$$

$$\frac{dw}{d\xi}+k^2\frac{dv}{d\xi}=\frac{1}{EJ}\;6m$$

$$\frac{d^2w}{d\xi^2}+k^2w=0$$

Интегралъ послѣдняго уравненія будетъ

$$w=C_1'''\,Cos\,k\xi+C_2'''\,Sin\,k\xi$$

а слѣдовательно

$$v=\frac{6m\xi+2n}{EJ\quad k^2}+C_1''\;Cosk\xi+C_2''\;Sink\xi$$

$$u=\frac{m\xi^3+n\xi^2+p\xi+q}{EJ\,k^2}-\frac{6m\xi+2n}{EJ\quad k^4}+C_1'\,Cos\,k\xi+C'_2\,Sin\,k\xi$$

и наконецъ

$$\eta=\frac{f\,(\xi)}{k^2}-\frac{m\xi^3+n\xi^2+p\xi+q}{FJ.k^4}+\frac{6m\xi+2n}{EJ.k^6}+C_1\;Cos.\,k\xi+C_2\,Sin.\;k\xi. \quad (68).$$

Постоянныя C_1 и C_2 опредѣляются вполнѣ условіемъ, что η равно нулю для концевъ шатуна:

при $\xi=0$, $\eta=0$ и

$$C_1=\frac{1}{D}\Big(\mu+\frac{q}{k_2}-\frac{2n}{k^4}\Big)\;\ldots\ldots\ldots\;(69).$$

а затѣмъ

при $\xi=l$, $\eta=0$ и

$$C^2=\frac{\frac{1}{D}-\theta\mu+\frac{ml^3+nl^2+pl+q}{k^2}-\frac{6m\,l+2n}{k^4}-DC_1Cos.kl}{Sin\;kl}\;.\;.\;(70).$$

Полагая для краткости

$$\varphi=\mu+\frac{q}{k^2}-\frac{2\,n}{k^4}\;\ldots\ldots\ldots\;(71).$$

$$\psi\;(\xi)=\frac{m\xi^3+n\xi^2+p\xi+q}{k^2}-\frac{6\;m\xi+2n}{k^4}\;\ldots\ldots\;(72).$$

и подставляя въ формулу (64) выраженія (68), (69), (70) для η, C_1, C_2, получаемъ выраженіе для полнаго изгибающаго момента:

$$M=\varphi\;\frac{Sin\,[k\,(l-\xi)]}{Sin\;(kl)}+\frac{\psi\;(l)-\theta\mu}{Sin\;(kl)}\;Sin\;(k\xi)-\psi\,(\xi)\quad(73).$$

гдѣ

$$\theta=\frac{\rho_b}{\rho_a}\text{ для движущихъ}$$

и

$$\theta=1\text{ для спаривающихъ шатуновъ.}$$

III. Максимумъ изгибающаго момента и мѣсто опаснаго сѣченія.

13. Такъ какъ величина M представляетъ собою функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ α и ξ, то для опредѣленія наибольшаго ея значенія возьмемъ первыя производныя:

$$\frac{dM}{d\alpha}=\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{Sin k\,(l-\xi)}{Sin kl}+\frac{d\psi(l)}{d\alpha}\frac{Sin\;k\xi}{Sin\;kl}-\frac{d\psi\,(\xi)}{d\alpha}\quad.\;.\;.\;.\;.\qquad(74)$$

$$\frac{dM}{d\xi}=-\varphi\;k\;\frac{Cos\;k\;(l-\xi)}{Sin\;kl}+k\;\frac{\psi\,(l)-\theta\mu}{Sin\;kl}\;Cos k\xi-\psi'\;(\xi)\quad.\;.\;.\qquad(75)$$

и приравняемъ ихъ нулю.

Чтобы упростить рѣшеніе вопроса, положимъ, что площадь сѣченія шатуна не мѣняется по длинѣ:

$$\Omega=const$$

Тогда въ выраженіяхъ (24) величины a и b будутъ равны нулю и слѣдовательно

$$m=0$$
$$n=0$$
$$p=Ac=A\Omega$$
$$q=Bc=B\Omega$$

а затѣмъ

$$\varphi=\mu+\Omega\frac{B}{k^2}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(76)$$

$$\psi(\xi)=\Omega\frac{A\xi+B}{k^2}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(77)$$

Теперь формулы (74) и (75) даютъ уравненія:

$$\frac{dB}{d\alpha}Sin k(l-\xi)+\left(l\frac{dA}{d\alpha}+\frac{dB}{d\alpha}\right)Sin k\xi-\left(\xi\frac{dA}{d\alpha}+\frac{dB}{d\alpha}\right)Sin\;kl=0\quad.\;.\qquad(78)$$

$$\varphi k\;Cos\;k(l-\xi)-k[\psi(l)-\theta\mu]\;Cos\,k\xi+\psi'(\xi)\;Sin\;kl=0\quad.\;.\qquad(79)$$

для опредѣленія α и ξ, соотвѣтствующихъ величинѣ max. M.

Разлагая въ ряды тригонометрическія величины этихъ уравненій, замѣтимъ, что величина kl, какъ показываютъ существующіе шатуны, если и бываетъ больше единицы, то не очень много, и вообще можно принять, что

$$kl<\frac{\pi}{2}\;{*})\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(80)$$

---

*) Если буквою m означимъ такъ называемый коэффиціентъ безопасности, то продольная сила будетъ

$$D=\frac{P}{m},$$

гдѣ

$$P=\pi^2\frac{EJ}{l^2},$$

предѣльное давленіе, ведущее за собою переломъ стержня.

Поэтому мы ограничимся первыми двумя членами соотвѣтствующихъ рядовъ и, подставляя

$$Sinkl = kl - \frac{k^3 l^3}{6}$$

$$Cos\, k\xi = 1 - \frac{k^2\xi^2}{2}$$

$$Cosk\,(l-\xi) = 1 - \frac{k^2(l-\xi)^2}{2}$$

въ уравненія (78) и (79), получимъ:

$$\frac{l+\xi}{3}\,\frac{dA}{d\alpha} + \frac{dB}{d\alpha} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

и

$$a_1\xi^2 + 2b_1\xi + c_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Слѣдовательно,

$$k^2 l^2 = \frac{\pi^2}{m},$$

и существующіе шатуны показываютъ, что m рѣдко бываетъ менѣе 6.

Reuleaux (Der Constructeur, 3-te Aufl., Braunschweig, 1872, стр. 539—541) утверждаетъ, что коэффиціентъ безопасности въ паровозныхъ шатунахъ доходитъ до 2 и даже до 1,5.

Если взять приводимые этимъ авторомъ примѣры существующихъ шатуновъ, то для плоскости движенія, въ которой шатунъ можно разсматривать лежащимъ свободно на опорахъ, при

данныхъ	$D =$	11.500 кил.	14.600 кил.	6.500 кил.	
	$l =$	165,4 сан.	170 сан.	256,3 сан.	
	$h =$	8,5 »	9.5 »	9,8 »	(высота сред. сѣченія).
	$b =$	3,3 »	3,6 »	3,9 »	(ширина этого сѣченія)

находимъ соотвѣтственно:

$k^2l^2 =$	0,9314 сан.	0,82 сан.	0,6979 сан.
$m =$	10,6 »	12,1 »	14,1 »

Но при опредѣленіи m слѣдуетъ принять во вниманіе возможность перелома шатуна и въ другихъ плоскостяхъ и для этого опредѣлить m еще для плоскости, перпендикулярной къ плоскости движенія и заключающей въ себѣ ось шатуна.

Въ этой плоскости шатунъ слѣдуетъ уже разсматривать не свободно лежащимъ на опорахъ, а какъ бы съ задѣланными концами.

Тогда предѣльное давленіе будетъ опредѣляться формулою

$$P = 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

и для приведенныхъ выше примѣровъ получаемъ соотвѣтственно:

$$m = 6{,}38 \quad 6{,}91 \quad 7{,}28,$$

т. е. вовсе не такіе уже низкіе коэффиціенты безопасности, какіе получаетъ Рело, принимая одинаково для всѣхъ плоскостей, что концы шатуна лежатъ свободно на опорахъ.

Впрочемъ, для нашихъ соображеній имѣютъ значеніе только величины, относящіяся къ плоскости движенія.

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= A - \mu\,\frac{1+\theta}{\Omega l}\,k^2 \\ b_1 &= B + \mu\,\frac{k^2}{\Omega} \\ c_1 &= -\frac{A}{3}\,l_2 - Bl + \mu\,\frac{2(1+\theta) - k^2 l^2}{\Omega l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (83)$$

14. Исключая ξ изъ уравненій (81) и (82), получаемъ

$$(a_1 l^2 - 2b_1 l + c_1)\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 + 6(al - b_1)\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)\left(\frac{dB}{d\alpha}\right) + 9a_1\left(\frac{dB}{d\alpha}\right)^2 = 0 \quad . \quad (84)$$

уравненіе для опредѣленія угла α, соотвѣтствующаго наибольшему значенію момента M.

Такъ какъ это уравненіе однородное относительно производныхъ $\frac{dA}{d\alpha}$ и $\frac{dB}{d\alpha}$, то мы сократимъ заранѣе общіе ихъ множители, полагая

$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right) = -(1-\lambda^2)\,Cos\,\alpha\,\frac{1+2\,Sin^2\beta}{Cos^4\beta} \quad \ldots\ldots \quad (85)$$

$$\left(\frac{dB}{d\alpha}\right) = l\,[Cos(\alpha+\beta)\,(Cos\,\beta + \lambda\,Cos\,\alpha) - i_2] \quad \ldots \quad (86)$$

гдѣ

$$i_2 = \frac{g}{l\omega^2}\,Sin(\beta+i)\,Cos\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad (87)$$

Скобки, въ которыя заключены производныя, должны указывать на то, что недостаетъ множителя

$$\frac{\delta}{g}\,\omega^2\,\frac{\lambda}{Cos\,\beta}.$$

Точно также, сокращая на $\frac{\delta}{g}\,\omega^2$, полагаемъ:

$$(A) = -(1-\lambda^2)\,\frac{Sin\beta}{Cos^3\beta} \quad \ldots\ldots \quad (88)$$

$$(B) = l[\lambda\,Sin(\alpha+\beta) + i_1]. \quad \ldots\ldots \quad (89)$$

Такъ какъ у насъ ни D, ни M_1 не зависятъ отъ α, а членъ i_1 измѣняется весьма мало съ измѣненіемъ α, то мы при рѣшеніи уравненія (84) позволимъ себѣ принять въ разсчетъ только силы инерціи, т. е. положимъ

$$\mu = 0,\ k = 0,\ i_1 = 0.$$

Затѣмъ, подставляя послѣдовательно значенія

$$\lambda = 0{,}1$$

и

$$\lambda = 0{,}2$$

находимъ, по способу послѣдовательнаго приближенія, значенія для

$$Cos\,\alpha = 2\lambda \quad \ldots\ldots \quad (90)$$

Изъ приводимыхъ ниже примѣровъ мы увидимъ, что если принять во вниманіе и дѣйствіе всѣхъ силъ, то величина $Cos\,\alpha$ получается изъ уравненія (84) весьма близкою къ выраженію (90).

21

Это же выраженіе имѣетъ мѣсто и для спаривающихъ шатуновъ, когда $\lambda=0$; дѣйствительно, такъ какъ тогда $A=0$, то уравненіе (84) обращается просто въ

$$\left(\frac{dB}{d\alpha}\right)=0$$

и такъ какъ $\beta=0$, то выраженіе (86) даетъ

$$Cos\alpha=0$$

или $\alpha=\frac{\pi}{2}$

15. Переходя къ опредѣленію ξ, изъ уравненія (82) находимъ:

$$\xi=\frac{-b_1\pm\sqrt{b^2{}_1-a_1c_1}}{a_1}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(91)$$

Чтобы рѣшить, который изъ двухъ корней можетъ удовлетворять вопросу, возьмемъ вторую производную отъ M по ξ и подставимъ значенія ξ, доставляемыя формулою (91).

Обозначая посредствомъ H факторъ, не зависящій отъ ξ и притомъ отрицательный, получаемъ:

$$\frac{d^2M}{d\xi^2}=H(a_1\xi+b_1)\quad\ldots\ldots\quad(92).$$

Подставляя сюда значеніе ξ, равное

$$\frac{-b_1-\sqrt{b^2{}_1-a_1c_1}}{a_1}$$

находимъ

$$\frac{d^2M}{d\xi^2}=H(-\sqrt{b^2{}_1-a_1c_1})>0,$$

т. е. разсматриваемое значеніе ξ можетъ дать не maximum M, а minimum.

Вставляя затѣмъ

$$\xi=\frac{-b+\sqrt{b_1{}^2-a_1c_1}}{a_1}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(93).$$

получаемъ

$$\frac{d^2M}{d\xi^2}=H(+\sqrt{b^2{}_1a_1c_1}<0$$

и слѣдовательно только выраженіе (93) способно дать max. M, хотя и не всегда.

А именно формула (93) только тогда соотвѣтствуетъ дѣйствительности, когда величина ξ не болѣе l и не менѣе нуля, т. е. необходимо, чтобы были удовлетворены слѣдующія условія:

$$\frac{-b_1+\sqrt{b_1{}^2-a_1c_1}}{a_1}\ngtr l\quad\ldots\ldots\ldots\quad(94).$$

$$\frac{-b_1+\sqrt{b_1{}^2-a_1c_1}}{a_1}\nless 0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(95).$$

Такъ какъ величина a^1 у насъ всегда отрицательная, то выраженіе (94) даетъ

$$+\sqrt{b_1{}^2a_1c_1}\nless a_1l+b_1$$

Каковъ бы ни былъ знакъ второй части, условіе это будетъ всегда удовлетворено, если выполнено условіе

$$b^2_1 - a_1 c_1 \not< (a_1 l + b_1)^2$$

или

$$a_1 l^2 + 2 b_1 l + c_1 \not< 0$$

Подставляя сюда значенія a_1, b_1, c_1, находимъ

$$\mu \frac{2(+\theta)-\theta k^2 l^2}{\Omega l^2} \not> -\left(\frac{2}{3} A l + B\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96).$$

что всегда имѣетъ мѣсто; ибо

при $kl < 2$ всегда $2(1+\theta)-\theta k^2 l^2 > 0$

вторая же часть будетъ величина отрицательная, такъ какъ для значеній α, опредѣляемыхъ формулою (90),

$$Al + B > 0$$

(величина эта пропорціональна проекціи силы инерціи въ точкѣ B на ось η, съ которою j_b составляетъ острые углы при движеніи мотыля отъ A_0 до положенія, при которомъ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$; формула же (90) соотвѣтствуетъ значеніямъ α между этими предѣлами, такъ какъ при $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ будетъ $\mathrm{Cos}\ \alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$).

Итакъ условіе (94) можно считать всегда выполненнымъ.

Переходя къ условію (95), получаемъ

$$c_1 \not> 0$$

или иначе

$$\mu \frac{2(1+\theta)-k^2 l^2}{\Omega l^2} \not> \frac{A}{3} l + B$$

Такъ какъ вторая часть, какъ показываетъ выраженіе (97), величина положительная, то полагая

$$\zeta = \frac{\mu}{\Omega l^2} \cdot \frac{2(1+\theta)-k^2 l^2}{\frac{A}{3} l + B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98).$$

находимъ, что только при

$$\zeta < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99).$$

опасное сѣченіе лежитъ между опорами A и B; въ противномъ случаѣ, мѣсто его какъ у опоры A*).

---

*) *J. Bartl* (Civilingenieur, 1879, стр. 262) утверждаетъ, что опасное сѣченіе вообще лежитъ въ предѣлахъ

$$0{,}36.\ l - 0{,}43.\ l$$

и принимаетъ его затѣмъ для всѣхъ шатуновъ на разстояніи

$$0{,}4.\ l$$

отъ конца A шатуна.

Но, какъ видно изъ выраженія (98), мѣсто опаснаго сѣченія находится въ тѣсной зависимости отъ μ, момента силъ тренія въ цапфахъ, вліяніе котораго именно г. Бартль и ввелъ въ разсчетъ шатуновъ.

Выраженіе (98) для спаривающихъ шатуновъ, когда

$$\theta=1,$$

$$A=0,$$

$$B=\delta\left(\frac{\omega^2 r+1}{g}\right),$$

принимаетъ видъ:

$$\zeta=\frac{\mu}{\omega l^2}\cdot\frac{4-k^2l^2}{\delta\left(\frac{\omega^2 r}{g}+1\right)} \qquad (100).$$

Что же касается движущихъ шатуновъ, то при $\mathrm{Cos}\,\alpha=2\lambda$ можно взять приближенныя величины

$$A=\frac{\delta}{g}\omega^2.\lambda$$

$$B=\frac{\delta}{g}\,\omega^2\;l\left(\lambda+\frac{g}{l\omega^2}\,Cos\,i\right)=\delta\left(\frac{\omega^2 \lambda}{g}+Cos\,i\right)$$

и тогда получаемъ

$$\zeta=\frac{\mu}{\Omega l^2}\;\frac{2(1+\theta)-k^2l^2}{\delta\left(\frac{2}{3}\;\frac{\omega^2 r}{g}+Cos i\right)} \qquad (101).$$

16. Для *примѣра* возьмемъ станціонный паровозъ с.-петербурго-варшавской желѣзной дороги, поставки завода С. Леонаръ (близъ Ліежа).

Всѣ размѣры выражаемъ въ сантиметрахъ, вѣсъ въ килограммахъ.

Для разсматриваемаго паровоза рабочее *) давленіе пара въ котлѣ — 8-атм., діаметръ цилиндровъ

$$d = 40,$$

слѣд.

$$D = 10.340$$

Длина движущаго шатуна $l = 115$

Длина мотыля $r = 32$,

слѣд. $\lambda = 0,2$.

Радіусъ шейки кривошипа $\rho_a = 7$

Радіусъ валика $\rho_b = 3$

с $\qquad = 0,43$.

Принимая коэффиціентъ тренія въ цапфахъ

$$f = 0,08$$

находимъ

$$\mu = 5.790$$

Средняя величина площади сѣченія $\Omega = 36,75$

и соотвѣтствующій моментъ инерціи $J = 165$.

Модуль упругости для желѣза и стали $E = 2.000.000$.

Слѣдовательно

$$k^2 l^2 = 0,4144.$$

Что касается угловой скорости то мы примемъ

$$\omega^2 = 80,$$

---

*) Абсолютное, за вычетомъ одной атмосферы.

что, при радіусѣ ведущихъ колесъ $K = 53$, соотвѣтствуетъ почти 17 километрамъ въ часъ—предѣлъ, который можно считать вполнѣ достаточнымъ для станціонной службы.

Наконецъ вѣсъ куб. сантиметра желѣза или стали $\delta = 0{,}0078$ и ускореніе силы тяжести $g = 981$.

Величины эти даютъ

$$\zeta = 1{,}65$$

откуда заключаемъ, что для момента M не существуетъ аналитическаго максимума, и опасное сѣченіе приходится какъ разъ у A.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$Cos\,\alpha = 2\lambda = 0{,}4$$
$$i = 0$$

находимъ при возможно точномъ вычисленіи:

$$i_1 = 0{,}02362$$
$$i_2 = 0{,}00176$$
$$(A) = -0{,}1852$$
$$(B) = 0{,}2185.l$$
$$(a_1) = -0{,}2819$$
$$(b_1) = 0{,}2861.l$$
$$(c_1) = 0{,}2413.l^2$$

и слѣд.

$$\frac{\xi}{l} = \frac{-0{,}2861 \pm 0{,}3871}{-0{,}2819}$$

откуда

$$\xi_1 < 0,\ \xi_2 > l$$

т. е. ни тотъ, ни другой корень не соотвѣтствуютъ вопросу.

17. Понятно, что при выполненіи условія (99) опасное сѣченіе тѣмъ ближе будетъ къ опорѣ A, чѣмъ ζ менѣе разнится отъ единицы

Вычисляя ζ для различныхъ шатуновъ, можно опредѣлить зависимость между этими двумя величинами.

1) Возьмемъ только-что разсмотрѣнный паровозъ и для нашей цѣли предположимъ, что онъ долженъ нести обыкновенную службу, а не только станціонную.

При обыкновенной службѣ вообще число оборотовъ колесъ для паровозовъ не болѣе 3, слѣд. $\omega = 2 \times 3{,}14 \times 3$ и $\omega^2 = 355$.

Всѣ же другія величины, необходимыя для вычисленій, сохраняютъ приведенныя выше значенія, и мы находимъ

$$\zeta = 0{,}5675.$$

Переходя къ вычисленію ξ и полагая

$$Cos\alpha = 2\lambda = 0{,}4$$

находимъ:

$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right) = -1{,}097 Cos\alpha\ ^{*}),$$
$$\left(\frac{dB}{d\alpha}\right) = 0{,}2376 \,.\, l$$
$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 = 0{,}1925$$
$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)\left(\frac{dB}{d\alpha}\right) = -0{,}2606 \,.\, l \,.\, Cos\alpha$$
$$\left(\frac{dB}{d\alpha}\right)^2 = 0{,}05645 \,.\, l^2$$
$$(a_1) = -0{,}2070$$
$$(b_1) = 0{,}2337 \,.\, l$$
$$(c_1) = -0{,}0674 \,.\, l^2$$

Подставляя эти величины въ уравненіе (84), получаемъ

$$Cos\alpha = 0{,}3598, -$$

величину, настолько близкую къ предположенной нами по формулѣ (90), что истинное значеніе $Cos\alpha$ хотя и будетъ разниться отъ 0,4, но эта разница не окажетъ никакого вліянія на только-что вычисленныя нами величины.

Подставляя поэтому ихъ въ формулу (93), находимъ

$$\frac{\xi}{l} = 0{,}155.$$

2) Если положимъ $\mu = 0$ и, слѣдовательно,

$$\zeta = 0,$$

то для разсматриваемаго примѣра получимъ

$$(a_1) = -0{,}1852$$
$$(b_1) = 0{,}2185 \,.\, l$$
$$(c_1) = -0{,}1571 \,.\, l^2$$

и затѣмъ

$$Cos\alpha = 0{,}3867$$
$$\frac{\xi}{l} = 0{,}4427.$$

Здѣсь величина для $Cos\alpha$ получилась еще ближе къ предположенной.

3) Возьмемъ еще для примѣра пассажирскій паровозъ московско-брестской желѣзной дороги, поставки завода Шнейдера (въ Крезо).

Для этого паровоза

$$l = 160$$
$$r = 28$$
$$\lambda = 0{,}175$$

Рабочее давленіе пара 8 атмосф.

$$d = 44;$$

---

*) Здѣсь мы оставляемъ $Cos\alpha$, съ тѣмъ чтобы, получивъ уравненіе первой степени отъ этой величины, опредѣлить ея значеніе и повѣрить такимъ образомъ формулу (90).

слѣдовательно

$$D = 12.570$$

Принимая сѣченіе постояннымъ $4,2 \times 8$, получаемъ

$$\Omega = 33,6$$
$$J = 185,2$$
$$k^2 l^2 = 0,86877$$

Далѣе имѣемъ

$$\rho a = 5,5$$
$$\rho b = 4,3$$
$$\theta = 0,772$$
$$\mu = 5,530$$

и затѣмъ находимъ

$$\zeta = 0,2843$$

Для опредѣленія ξ полагаемъ

$$i = 0$$
$$Cos^\alpha = 2\lambda = 0,35$$

и затѣмъ вычисленіями находимъ:

$$i_1 = 0,0237$$
$$i_2 = 0,00138$$
$$(A) = -0,1655$$
$$(B) = 0,19544 . l$$
$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right) = -1,0786 . Cos^\alpha$$
$$\left(\frac{dB}{d\alpha}\right) = 0,1994 . l$$
$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 = 0,1425$$
$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)\left(\frac{dB}{d\alpha}\right) = -0,215 . l . Cos^\alpha$$
$$\left(\frac{dB}{d\alpha}\right)^2 = 0,03976 . l^2$$
$$(a_1) = -0,2134$$
$$(b_1) = 0,2224 . l$$
$$(c_1) = -0,11028 . l^2.$$

Уравненіе (84), по подстановкѣ приведенныхъ величинъ, даетъ

$$Cos\alpha = 0,3325;$$

слѣдовательно, можно дѣйствительно принять $Cos\alpha = 0,35$.

Теперь формула (93) доставляетъ

$$\frac{\xi}{l} = 0,2877$$

4) Полагая въ этомъ примѣрѣ $\mu = 0$, слѣдовательно

$$\zeta = 0,$$

находимъ

$$(a_1) = -0{,}1655$$
$$(b_1) = 0{,}1954.l$$
$$(c_1) = -0{,}1402.l^2$$
$$Cos\alpha = 0{,}3404$$

и

$$\frac{\xi}{l} = 0{,}4401$$

5) Если еще пренебречь и вліяніемъ силы тяжести на изгибъ (какъ это имѣетъ мѣсто для машинъ вертикальныхъ, когда $i = 90^0$ или 270^0), то получимъ

$$(A) = -0{,}1655$$
$$(B) = 0{,}17174.l$$
$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right) = -1{,}0786.Cos\alpha$$
$$\left(\frac{dB}{d\alpha}\right) = 0{,}2008.l$$
$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)^2 = 0{,}1425$$
$$\left(\frac{dA}{d\alpha}\right)\left(\frac{dB}{d\alpha}\right) = -0{,}2166.l.Cos\alpha$$
$$\left(\frac{dB}{d\alpha}\right)^2 = 0{,}04032.l^2$$
$$(a_1) = -0{,}1655$$
$$(b_1) = 0{,}17174.l$$
$$(c_1) = -0{,}11654.l^2$$
$$Cos\alpha = 0{,}3404$$

и

$$\frac{\xi}{l} = 0{,}42179 \text{ *)}$$

Отсюда мы видимъ, что подъ вліяніемъ собственнаго вѣса шатуна опасное сѣченіе перемѣщается къ срединѣ, но очень незначительно.

Изъ этихъ примѣровъ позволительно заключить, что maximum M имѣетъ мѣсто при углѣ α, весьма мало разнящемся отъ того угла, для котораго

$$Cos\alpha = 2\lambda \text{ **)}$$

---

*) Если принять во вниманіе только дѣйствіе силъ инерціи на изгибъ шатуна, т. е. положить $\mu = 0$, $k = 0$, $i_1 = 0$, то при $Cos\alpha = 2\lambda$ формула (93) даетъ

$$\frac{\xi}{l} = 0{,}423 + 134\lambda^2.$$

**) *Grashof* (Theorie der Elasticität und Festigkeit, Berlin, 1878, стр. 183) принимаетъ для max. изгибающаго момента

$$\alpha = 90^0,$$

а г. *Бартль* (l. c., стр. 259) то положеніе шатуна, когда

$$\alpha + \beta = 90^0.$$

31

Опредѣлимъ еще соотвѣтствующія величины ζ и ξ для спаривающихъ шатуновъ, когда ζ выражается формулою (100).

Прежде всего имѣемъ

$$\frac{\xi}{l} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 1$$

и затѣмъ изъ формулы (82), полагая $\mu = 0$,

$$\frac{\xi}{l} = 0{,}5 \quad \text{при} \quad \zeta = 0.$$

Затѣмъ для опредѣленія промежуточныхъ величинъ нѣтъ надобности брать спеціальныя данныя для спаривающихъ шатуновъ, а можно просто воспользоваться приведенными выше численными данностями для движущихъ.

1) При данныхъ станціоннаго паровоза, завода С. Леонаръ, и именно при $\omega^2 = 355$, находимъ по формулѣ (100)

$$\zeta = 0{,}3348.$$

Затѣмъ, такъ какъ $\theta = 1$, $A = 0$ и $B = \delta\left(\frac{\omega^2 r}{g} + 1\right)$, находимъ:

$$a_1 = -0{,}00004893$$
$$b_1 = 0{,}075533$$
$$c_1 = -5{,}5629$$

и

$$\frac{\xi}{l} = 0{,}32432.$$

2) Для другого примѣра возьмемъ тотъ же паровозъ, увеличивъ только D вдвое.

Тогда

$$k^2 l^2 = 0{,}82877$$
$$\mu = 6{,}602$$
$$a_1 = 0{,}00019579$$
$$b_1 = 0{,}08398$$
$$c_1 = -3{,}4088$$

и вычисленія даютъ:

$$\zeta = 0{,}59237$$
$$\frac{\xi}{l} = 0{,}1809.$$

18. Принимая найденныя нами величины для ζ и $\frac{\xi}{l}$ за координаты, находимъ (черт. 7), что зависимость между этими величинами выражается кривыми, которыя весьма мало отличаются отъ прямыхъ.

Кромѣ того, вообще значенія функцій вблизи максимума измѣняются весьма мало.

Но въ послѣднемъ случаѣ будетъ

$$Cos\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

что, напр., для $\lambda = 0{,}2$ даетъ $Cos\alpha = 0{,}196$; дѣйствительная же величина $Cos\alpha$, Поэтому для движущихъ шатуновъ примемъ

$$\frac{\xi}{l} = 0{,}44\ (1 - \zeta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (102)$$

а для спаривающихъ

$$\frac{\xi}{l} = 0{,}5\ (1 - \zeta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (103)$$

Значенія эти опредѣляютъ *мѣсто опаснаго сѣченія* и должны быть вставлены въ формулу:

$$max.\ M = \varphi \frac{Sin\,[k\,(l-\xi)]}{Sin\,(k\,l)} + \frac{\psi(l) - \psi(0)}{Sin\,(k\,l)}\, Sin\,(k\,\xi) - \psi(\xi) \quad \ldots \quad (104)$$

гдѣ

$$Cos\,a = 2\lambda \text{ для движущихъ}$$

и

$$a = 0 \text{ для спаривающихъ шатуновъ.}$$

Съ помощью этихъ величинъ можно опредѣлить всѣ входящіе сюда коэффиціенты, если только измѣримъ площадь сѣченія шатуна въ трехъ какихъ нибудь точкахъ оси его.

Если для спаривающаго шатуна ζ по формулѣ (100) получается очень малымъ сравнительно съ единицею, то можно просто принять

$$\xi = \frac{l}{2},$$

и тогда формула (104) при $\Omega = const$ принимаетъ видъ:

$$max.\ M = \lambda\left(\frac{\omega^2 r}{g} + 1\right)\frac{\Omega}{k^2}\left(\frac{1}{Cos\,\frac{kl}{2}} - 1\right) \text{*)} \quad \ldots \ldots \quad (105)$$

Сдѣлаемъ теперь приложеніе выведенныхъ формулъ къ опредѣленію наибольшаго напряженія въ существующихъ шатунахъ.

13. *Примѣръ 1.* Движущій шатунъ товарнаго восьмиколеснаго паровоза, постройки завода мальцовскаго промышленнаго товарищества (въ Людиновѣ).

$$l = 269{,}5$$
$$r = 31{,}2$$
$$\lambda = 0{,}115$$
$$\rho a = 5{,}8$$
$$\rho b = 4{,}3$$
$$\theta = 0{,}74$$

Рабочее движеніе пара 9 атм.

$$d = 50$$
$$D = 18.000$$
$$\mu = 8.350$$

---

*) Сравн. *Winkler*, Die Lehre von der Elarticität und Fertigxeit, Prag. 186.., стр. 180.

$$\theta\mu = 6.180$$
$$\omega^2 = 355$$

По формулѣ (101) при $i = 0$

$$\zeta = 0{,}0857,$$

и слѣдовательно

$$\xi = 0{,}39.l,$$

Шатунъ двутавроваго сѣченія, размѣры въ ширину постоянные по всей длинѣ, очертаніе въ фасадѣ прямолинейное.

Площадь сѣченія въ A равна 48 кв. с., въ B — 39, поэтому для опаснаго примемъ 44, и тогда

$$J = 504,$$

а формула $\Omega = a\xi^2 + b\xi + c$ дастъ

$$a = 0$$
$$c = 48$$
$$b = -0{,}0334$$

При $Cos\alpha = 2\lambda = 0{,}23$ будетъ

$$A = -\frac{\delta}{g}\omega^2.\ 0{,}1098$$
$$B = \frac{\delta}{g}\omega^2.\ 33{,}5527$$

и слѣдовательно

$$m = 0$$
$$n = \frac{\delta}{g}\omega^2.\ 0{,}00357$$
$$p = -\frac{\delta}{g}\omega^2.\ 6{,}3906$$
$$q = \frac{\delta}{g}\omega^2.\ 1610{,}53$$

Затѣмъ

$$kl = 1{,}14$$
$$k\xi = 0{,}4455$$
$$k(l-\xi) = 0{,}6945$$
$$Sin\ kl = 0{,}9088$$
$$Sin\ k\xi = 0{,}4308$$
$$Sin\ k(l-\xi) = 0{,}6387$$
$$\varphi = \frac{\delta}{g}\omega^2.\ 69{,}780{,}000$$
$$\psi(l) = -\frac{\delta}{g}\omega^2.\ 14{,}728{,}336$$
$$\psi(\xi) = \frac{\delta}{g}\omega^3.\ 31{,}776{,}000$$

и наконецъ

$$max.\ M = 26{,}054 \text{ кил. сант.}$$

Вычисляя же эту величину въ предположеніи, что площадь сѣченія постоянна и равна 44 кв. с., получаемъ значеніе, которое больше дѣйствительнаго почти на 3,5%.

Означая посредствомъ

W моментъ сопротивленія опаснаго сѣченія, находимъ max. полнаго напряженія въ крайнихъ волокнахъ

$$\sigma = \frac{D}{\Omega} + \frac{M}{W} = 409 + 269 = 678 \text{ килогр.}$$

20. *Примѣръ 2.* Спарникающій шатунъ пассажирскаго паровоза московско-брестской желѣзной дороги, поставки завода Шнейдера (въ Крезо), 1871 года.

$$l = 274$$
$$r = 28$$
$$R = 83,8$$

По формулѣ (59)

$$D_n = 11850$$

Затѣмъ

$$p = 14$$
$$n = 3,792$$

Сѣченіе шатуна измѣняется по длинѣ, причемъ площадь концевыхъ будетъ $3,4 \times 6,5 = 22$ кв. с., а средняго $4 \times 9 = 36$ кв. с.; причемъ

$$J = 243.$$

Вычисляя ζ, находимъ

$$\zeta = 0,0335,$$

а потому примемъ просто

$$\zeta = \frac{1}{22}$$

Тогда

$$\frac{kl}{2} = 0,6565$$

$$\cos\frac{kl}{2} = 0,78$$

и формула (60) даетъ при $\omega = 31$

$$\max. M = 35530$$

Если же принять во вниманіе измѣненіе площади сѣченія, то получаемъ:

$$\text{при } \xi = 0,\ c = 22$$

$$\xi = l,\ al^2 + bl + c = 22, \text{ откуда } b = -al$$

$$\xi = \frac{1}{2}l,\ \frac{al^2}{4} + \frac{bl}{2} + c = 36 = \frac{al^2}{4} - \frac{al^2}{2} + 22, \text{ откуда } a = -\frac{56}{l^2},\ b = \frac{56}{l}.$$

Вычисляя, съ помощью этихъ величинъ, выраженія φ и ψ, находимъ дѣйствительный

$$\max. M = 34,200,$$

гдѣ

31,18 приходится на силы инерціи,

3,022 на собственный вѣсъ шатуна;

треніе же въ шарнирахъ даетъ для середины моментъ, равный нулю.

Слѣдовательно, дѣйствительная величина max. M будетъ на

$$\frac{36,630-34,200}{34,200}=0,07$$

меньше вычисленной нами въ предположенiи, что сѣченiе постоянно.

Если бы не приняли во вниманiе влiянiя продольныхъ силъ на изгибъ, то по формулѣ (49)

$$max.\ M_1 = 27,354,$$

гдѣ

24,890 вслѣдствiе силъ инерцiи, т. е. на 6,228, меньше дѣйствительной величины,

2,464 отъ влiянiя собственнаго вѣса на 618 меньше дѣйствительной величины,

а вообще на 6,845 кил. сант. или на

$$\frac{6.846}{34,200}=0,20$$

менѣе дѣйствительнаго max. M.

Наибольшее напряженiе въ крайнихъ волокнахъ будетъ достигать величины

$$\sigma=\frac{D}{\Omega}+\frac{M}{W}=\frac{11,850}{36}+\frac{34,200\times 9}{2\times 243}$$

$$=329+633$$

$$=962 \text{ килогр.},$$

которая едва ли имѣлась въ виду при проектированiи шатуна.

IV. Проектированiе шатуновъ.

21. При данной длинѣ всѣ размѣры шатуна опредѣляются вполнѣ величиною и видомъ опаснаго и концевыхъ его сѣченiй.

Такъ какъ длина шатуна всегда очень значительна сравнительно съ поперечными его размѣрами, то прежде всего необходимо обезпечить шатунъ отъ перелома (Zerknickung, écrasement) одинаково какъ въ плоскости движенiя, такъ и въ плоскости, перпендикулярной къ ней и заключающей въ себѣ ось шатуна.

Какъ мы видѣли выше, тренiе въ цапфахъ можетъ какъ-бы закрѣплять концы шатуна, но влiянiе этого обстоятельства можетъ измѣняться весьма значительно, въ зависимости отъ большей или меньшей гладкости соприкасающихся поверхностей, а также и отъ качества смазывающаго матерiала; поэтому есть основанiе принимать, что шатунъ въ плоскости движенiя лежитъ свободно на опорахъ, вслѣдствiе шарнирнаго соединенiя въ его концахъ.

Въ такомъ случаѣ предѣльное давленiе будетъ

$$P=\pi^2\frac{EJ_1}{l^2},$$

гдѣ J_1 моментъ инерцiи сѣченiя относительно горизонтальной оси.

Въ плоскости же, перпендикулярной къ плоскости движенія, концы шатуна задѣланы неподвижно, и потому

$$P = 4\pi^2 \frac{EJ_2}{l^2},$$

гдѣ J_2 моментъ инерціи относительно оси сѣченія, лежащей въ плоскости движенія.

Слѣдовательно сѣченіе шатуна должно удовлетворять условію

$$J_1 = 4J_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (I)$$

что для прямоугольнаго сѣченія приметъ видъ

$$b = \frac{h}{2}$$

если b ширина,

h высота сѣченія *).

Что же касается двутавроваго сѣченія, то, очевидно, ширина поясовъ его должна быть болѣе половины высоты, потому что распредѣленіе матеріала не такъ выгодно для J_2, какъ для J_1.

На основаніи условія (I) слѣдуетъ *круглое*, *квадратное* и *крестовое* сѣченіе для шатуновъ признать нераціональными.

Овальное сѣченіе, сравнительно съ *прямоугольнымъ* и еще болѣе съ *двутавровымъ*, представляетъ тотъ недостатокъ, что матеріалъ безполезно сосредоточивается къ нейтральной оси.

При опредѣленіи поперечныхъ размѣровъ для шатуновъ, какъ для частей, находящихся въ движеніи и подверженныхъ (особенно въ паровозныхъ машинахъ) ударамъ и толчкамъ, слѣдовало бы не превосходить слѣдующихъ величинъ безопаснаго напряженія S (въ килограммахъ на 1 кв. сант.):

Названіе матеріала	Движущіе шатуны.	Спаривающіе шатуны.
Сталь	500	400
Желѣзо	400	300

Для спаривающихъ шатуновъ слѣдуетъ брать S потому меньше, что они находятся въ болѣе невыгодныхъ условіяхъ относительно ударовъ и толчковъ, въ особенности при несовершенно математической параллельности осей.

22. Размѣры *концевыхъ сѣченій* опредѣляются величиною напряженія въ крайнихъ волокнахъ

$$\frac{D}{\Omega} + \frac{M}{W} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (II)$$

гдѣ:

1) для *спаривающихъ* шатуновъ продольное давленіе

$$D = 4000 \frac{R}{r} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (III)$$

*) Ср. *Reiche*: Die Maschinenfabrication, 2-te Aufl. 1876. Стр. 362.

37

если шатунъ не передаетъ движущей силы на сосѣдній, и

$$D = 6.600 \frac{R}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(IV)}$$

въ противномъ случаѣ; затѣмъ изгибающій моментъ

$$M = \mu = fD\rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(V)}$$

2) для *движущихъ* же шатуновъ

$$D = p\frac{\pi d^2}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(VI)}$$

$$M = \mu = fD\rho_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(VII)}$$

для сѣченія у пальца мотыля, и

$$M = \theta\mu = fD\rho_b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(VIII)}$$

для сѣченія у валика кулака.

Впрочемъ, для движущихъ шатуновъ выраженіе (II) имѣетъ силу только въ томъ случаѣ, если оно даетъ величину, большую

$$\frac{D_a}{\Omega}, \text{ соотвѣтственно } \frac{D_b}{\Omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(IX)}$$

гдѣ

$$D_a = p\frac{\pi d^2}{4} + \omega^2 r(1+\lambda)\frac{G+\Omega\delta l}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(X)}$$

для сеч A

$$D_b = p\frac{\pi d^2}{4} + \omega^2 r(1+\lambda)\frac{G}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(XI)}$$

для сеч B

Во всѣхъ этихъ выраженіяхъ

g ускореніе силы тяжести (981 сант.),

δ вѣсъ куб. единицы матеріала (0,0078 килогр. для 1 куб. сант. желѣза или стали),

f коэффиціентъ тренія въ цапфахъ (можно принять=0,08),

l длина шатуна,

r длина мотыля,

$\lambda = \frac{r}{l}$,

ρ, ρ_a, ρ_b радіусъ соотвѣтствующей цапфы,

$\theta = \frac{\rho_b}{\rho_a}$,

μ моментъ тренія въ цапфахъ,

R радіусъ ведущихъ колесъ,

p рабочее давленіе пара въ котлѣ (въ килограммахъ на кв. единицу),

d діаметръ цилиндра,

Ω площадь разсматриваемаго сѣченія,

W моментъ сопротивленія его,

G вѣсъ поршня, стержня и кулака,

ω угловая скорость вращенія.

При этомъ для паровозовъ вообще

$G = 150 - 170$ килограммовъ,

$\omega^2 = 355$;

если же паровозъ назначенъ только для станціонной службы, то

$\omega^2 = 80$.

23. Размѣры *опаснаго сѣченія* ~~опредѣляются исключительно ве-
личиною~~

$$\frac{D}{\Omega} + \frac{max.\ M}{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(XII)}$$

~~если~~ гдѣ

$$max.\ M = \varphi \frac{Sin[k(l-\xi)]}{Sin(kl)} + \frac{\psi(l) - \theta\mu}{Sin(kl)} Sin(k\xi) - \psi(\xi) \quad . \quad . \qquad \text{(XIII)}$$

и для движущихъ шатуновъ

$$\frac{\xi}{l} = 0{,}44(1-\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(XIV)}$$

$$\zeta = \frac{\mu}{\Omega l^2} \cdot \frac{2(1+\theta) - k^2 l^2}{\delta\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\omega^2 r}{g} + Cos i\right)} \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(XV)}$$

~~а для спаривающихъ~~

$$\frac{\xi}{l} = 0{,}5(1-\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(XVI)}$$

$$\zeta = \frac{\mu}{\Omega l^2} \cdot \frac{4 - k^2 l^2}{\delta\left(\frac{\omega^2 r}{g} + 1\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(XVII)}$$

Если бы ξ получилось отрицательнымъ, то это показало бы, что опасное сѣченіе лежитъ какъ разъ у пальца мотыля.

Въ приведенныхъ формулахъ

i уголъ наклоненія оси цилиндра къ горизонту,

$$k = \sqrt{\frac{D}{EJ}}$$

гдѣ

J моментъ инерціи опаснаго сѣченія,

E модуль упругости матеріала (для желѣза и стали можно принимать равнымъ 2.000.000 килограм. на кв. сантиметръ).

Затѣмъ

$$\varphi = \mu + \frac{q}{k^2} - \frac{2n}{k^4} \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(XVIII)}$$

$$\psi\xi = \frac{m\xi^3 n\xi^2 + p\xi + q}{k^2} - \frac{6m\xi + 2n}{k^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(XIX)}$$

гдѣ величины

$$\left.\begin{aligned} m &= Aa \\ n &= Ab + Ba \\ p &= Ac + Bb \\ q &= Bc \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(XX)}$$

опредѣляются выраженіями:

$$A = \frac{\delta}{g}\omega^2 \left[-(1-\lambda^2)\frac{Sin}{Cos^3\beta}\right] = -\frac{\delta}{g}\omega^2 . \lambda\left(1 - \frac{3}{2}\lambda^2\right). \qquad \text{(XXI)}$$

$$B = \frac{\delta}{g}\omega^2\ l\,[\lambda\,Sin(\alpha+\beta) + i_1] = \frac{\delta}{g}\omega^2 . l . \left[\lambda\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2\right) + i_1\right] \qquad \text{(XXII)}$$

$$i_1 = \frac{g}{l\omega^2} \cdot Cos i \quad \ldots\ldots \quad (XXIII)$$

въ которомъ

$$Cos\alpha = 2\lambda \quad \ldots\ldots \quad (XXIV)$$

$$Sin\beta = \lambda Sin\alpha \quad \ldots\ldots \quad (XXV)$$

Что же касается коэффиціентовъ a, b, c, то они опредѣляются тремя уравненіями вида

$$\Omega = a\xi^2 + b\xi + c \quad \ldots\ldots \quad (XXVI)$$

если вмѣсто Ω и ξ подставить сюда значенія этихъ величинъ для опаснаго и концевыхъ сѣченій.

24. Только-что изложенный ходъ опредѣленія величины опаснаго сѣченія требуетъ довольно продолжительныхъ вычисленій, зато даетъ результаты, которые можно считать очень мало уклоняющимися отъ дѣйствительности.

Рискуя удалиться отъ истины (впрочемъ, въ пользу прочности шатуна), можно принять просто

$$\Omega = const.$$

Тогда величины

$$a, b, m, n$$

обращаются въ нули, а

$$p = A\Omega \quad \ldots\ldots \quad (XXVII)$$

$$q = B\Omega \quad \ldots\ldots \quad (XXVIII)$$

причемъ можно также принять съ достаточною точностію

$$A = -\frac{\delta}{g}\,\omega^2.\lambda \quad \ldots\ldots \quad (XXIX)$$

$$B = \frac{\delta}{g}\,\omega^2.\,l[\lambda + i_1] \quad \ldots\ldots \quad (XXX)$$

и если ξ очень близко къ $\frac{l}{2}$, то для спаривающихъ шатуновъ

$$max.\ M = \delta\left(\frac{\omega^2 r}{g} + 1\right)\frac{\omega}{k^2}\left(\frac{1}{Cos\,\frac{kl}{2}} - 1\right) \quad \ldots \quad (XXXI)$$

Если бы пожелали быстрѣе достигнуть цѣли, то можно воспользоваться слѣдующимъ свойствомъ величины kl.

Вычисленія, произведенныя нами для различныхъ шатуновъ, показали, что при одной и той же угловой скорости ω отношеніе величины kl къ полному напряженію σ крайнихъ волоконъ опаснаго сѣченія представляетъ величину почти постоянную.

А потому *для паровозовъ*, при $\omega^2 = 455$, можно опредѣлять приблизительно размѣры опаснаго сѣченія шатуна по формулѣ

$$\frac{\varsigma}{l\sqrt{\frac{D}{EJ}}} = \frac{678}{1{,}14} \quad \ldots\ldots \quad (XXXII)$$

для движущихъ, и по формулѣ

$$\frac{\varsigma}{l\sqrt{\frac{D}{EJ}}} = \frac{962}{1{,}353} \quad \ldots \quad \text{(XXXIII)}$$

для спаривающихъ шатуновъ, согласно съ результатами вычисленій, приведенными въ параграфахъ 19 и 20 *).

Такъ какъ для проектируемаго шатуна величины l, D, ς должны быть извѣстны, то при $E = 2.000.000$ размѣры опаснаго сѣченія опредѣлимъ, вычисляя моментъ инерціи:

$$J = 0{,}18 \frac{D.l^2}{\varsigma^2} \quad \ldots \quad \text{(XXXIV)}$$

для движущихъ шатуновъ паровозовъ, и

$$J = 0{,}25 \frac{D.l^2}{\varsigma^2} \quad \ldots \quad \text{(XXXV)}$$

для спаривающихъ, при чемъ ς должно быть выражено въ килограммахъ на 1 кв. сантиметръ.

Но результаты такого опредѣленія нельзя уже считать вполнѣ надежными, и дѣйствительное напраженіе крайнихъ волоконъ въ опасномъ сѣченіи можетъ довольно значительно разниться отъ допускаемой нами величины безопаснаго напраженія.

Инж. А. Романовъ.

*) Изъ формулъ (XXXII) и (XXXIII) слѣдуетъ, что такъ называемый коэффиціентъ безопасности (см. примѣчаніе въ параграфѣ 13) измѣняется обратно пропорціонально квадрату наибольшаго полнаго напряженія.

Разумѣется, зависимость эта только приблизительная, такъ какъ и сами формулы, изъ которыхъ она вытекаетъ, имѣютъ только приблизительное значеніе.