№ 5.

ОСНОВАНІЯ ГРАФИЧЕСКАГО ИСЧИСЛЕНІЯ И ГРАФИЧЕСКОЙ СТАТИКИ.

КАРЛА ОТТА.

ПЕРЕВОДЪ
А. А. НЕДЗЯЛКОВСКАГО.

ЦѢНА 60 КОП.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Изданіе Колесова и Михина.
1871.

№ 5.

ОСНОВАНІЯ

ГРАФИЧЕСКАГО ИСЧИСЛЕНІЯ

И

ГРАФИЧЕСКОЙ СТАТИКИ.

КАРЛА ОТТА.

ПЕРЕВОДЪ
А. А. НЕДЗЯЛКОВСКАГО.

ИЗДАНІЕ КОЛЕСОВА И МИХИНА.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

ВЪ ТИПОГРАФІИ В. БЕЗОБРАЗОВА И КОМП.
(Вас. Остр., 8 л., № 45).

1871.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Основанія графическаго исчисленія.

Элементы графической статики.

Дѣйствіе параллельныхъ силъ на отдѣльную балку съ прямою продольною осью.

Изгибъ отдѣльной балки съ прямою осью.

ОСНОВАНІЯ
ГРАФИЧЕСКАГО ИСЧИСЛЕНІЯ И ГРАФИЧЕСКОЙ СТАТИКИ.

КАРЛА ОТТА.

Предисловіе.

Со времени изданія графической статики Кульманна (*), въ которой излагается, чисто графическимъ путемъ, опредѣленіе напряженій, образующихся въ различныхъ строительныхъ сооруженіяхъ, и измѣреній послѣднихъ, прошло уже шесть лѣтъ, однако же эта интересная и для инженера въ высшей степени важная отрасль познаній, не получила еще того распространенія и той общеизвѣстности, которыхъ бы она заслуживала по своей полезности и практической употребительности.

Причиною тому можетъ служить отчасти то обстоятельство, что все новое — какъ бы оно не было превосходно — или изъ видовъ неудобности или по незнанію, встрѣчается недоброжелательно, потому что многимъ, именно старымъ практикамъ, трудно бываетъ отказаться отъ давно извѣстнаго, хорошо изученнаго метода, въ пользу новаго направленія.

Скорому и общему распространенію упомянутаго выше сочиненія, могло впрочемъ препятствовать также и то обстоятельство, что Кульманнъ предполагаетъ извѣстною геометрію положенія, и для употребленія своего сочиненія рекомендуетъ новую геометрію Staудта (**), которая, при всѣхъ своихъ достоинствахъ — по самой геніальности изложенія Staудта — представляетъ для начинающихъ на этомъ поприщѣ большія затрудненія.

(*) K. Culmann. Die Graphische Statik, 1866, Zürich, Verlag von Meyer und Zeller.

(**) G. K. Staudt. Geometrie der Lage, 1847, Nürnberg.

Для возможности примѣненія геометрическихъ пособій въ томъ видѣ, какъ это требуется Кульманномъ, необходимо самое основательное ихъ изученіе и дѣльное упражненіе. Поэтому, прежде всего необходимо совершенно ознакомиться съ геометрическимъ построеніемъ ариѳметическихъ дѣйствій, т. е. изучить основательно графическую ариѳметику.

Какъ вскорѣ отъ техниковъ, кромѣ аналитическихъ познаній, будутъ требоваться возможно обширныя свѣдѣнія въ наукѣ геометрическихъ построеній, то въ высшей степени желательно, чтобы уже въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ преподавалось, параллельно съ ариѳметическимъ, графическое исчисленіе, тѣмъ болѣе что при этомъ, мало занимательная сама по себѣ, алгебра могла бы выиграть много въ интересѣ и полезности.

Нижеслѣдующее популярное изложеніе основаній графическаго исчисленія и его примѣненія имѣетъ цѣлью ознакомить, преимущественно моихъ слушателей, равно какъ всѣхъ инженеровъ или строительныхъ техниковъ, съ направленіемъ замѣчательнаго труда Кульманна.

Техникъ можетъ имъ воспользоваться во всѣхъ случаяхъ, въ которыхъ онъ долженъ опредѣлить неизвѣстныя величины изъ извѣстныхъ величинъ, заданныхъ по ихъ положенію и величинѣ, т. е. чертежемъ. Онъ можетъ однако избѣгнуть геометрическаго построенія, выражая данныя величины числами, и опредѣляя результатъ, при помощи этихъ послѣднихъ, ариѳметическими дѣйствіями. Но какъ вычисленіе во время построенія дѣйствуетъ очень утомительно, то во всѣхъ случаяхъ, въ которыхъ результатъ требуется въ геометрической формѣ, слѣдуетъ стремиться замѣнять исчисленіе графическими дѣйствіями.

Основанія графическаго исчисленія.

1. Графическое сложеніе и вычитаніе.

I. *Сложеніе и вычитаніе отрѣзковъ.*

Слагаемыя и вычитаемыя прямыя линіи, которыя мы назовемъ, для краткости, отрѣзками, очевидно должны относиться не только къ одной и той же погонной единицѣ, но должны также представлять величины одного рода.

Каждый ограниченный отрѣзокъ ab можно вообразить себѣ произведеннымъ движеніемъ точки отъ a къ b, или по направленію противоположному, т. е. отъ b къ a. Принимая отрѣзокъ по направленію отъ a къ b, т. е. ab за положительную величину, очевидно слѣдуетъ разсматривать отрѣзокъ отъ b къ a, т. е. ba какъ отрицательную величину.

Направленіе приращенія отрѣзка, или какъ говорится его направленіе, можно сдѣлать нагляднымъ, или обозначеніемъ стрѣлкою, или обозначеніемъ начальной точки нулемъ (0). Два отрѣзка, лежащіе на одной прямой, съ противоположными направленіями, относятся поэтому взаимно какъ плюсъ и минусъ, и потому сумма двухъ равныхъ, но противоположно направленныхъ отрѣзковъ, равна нулю.

Слагаемые отрѣзки могутъ имѣть слѣдующія положенія:

1) они могутъ имѣть одинаковое направленіе, или, какъ говорится, быть параллельными;

2) они могутъ имѣть различныя направленія, но лежать въ одной и той же плоскости, и

3) они могутъ имѣть произвольныя направленія въ пространствѣ.

1-й случай. Если слагаемые отрѣзки параллельны, то ихъ размѣщаютъ одинъ за другимъ послѣдовательно на одной и той же прямой, имѣя въ виду ихъ направленія. При этомъ всего проще обозначать начальную точку перваго отрѣзка 0-мъ, и конечныя точки взаимно слѣдующихъ отрѣзковъ ряда цифрами 1, 2, 3, 4 ..., такъ что слѣдовательно изобразятъ 01 первый, 12 второй, 23 третій, 34 четвертый отрѣзокъ, и 04 сумму этихъ четырехъ отрѣзковъ.

Поэтому, на фиг. 1, отрѣзокъ 04 изображаетъ алгебрическую сумму данныхъ по положенію и величинѣ отрѣзковъ l_1, l_2, l_3 и l_4, т. е. будетъ:

$$04 = l_1 + l_2 + l_3 + l_4.$$

2-й случай. Если слагаемые отрѣзки l_1, l_2, l_3 и l_4, фиг. 2, не параллельны, но лежатъ всѣ въ плоскости чертежа или ей параллельной, то, исходя отъ начальной точки 0, провести къ первому данному отрѣзку, т. е. къ l_1, параллельную, отложить на ней часть $01 = l_1$, потомъ чрезъ конечную точку 1 провести къ l_2 параллельную, отсѣчь на ней часть $12 = l_2$ и поступать такъ далѣе до послѣдняго отрѣзка l_4.

Замыкающая сторона 04 многоугольника, построеннаго изъ данныхъ отрѣзковъ l_1, l_2, l_3, l_4, изобразитъ тогда величину и направленіе суммы этихъ отрѣзковъ.

Поэтому, если конечная точка графической суммы совпадаетъ съ исходною, то эта сумма будетъ равна нулю.

Многоугольникъ фиг. 2 даетъ кромѣ того не только сумму четырехъ отрѣзковъ l_1 до l_4, но также и частныя суммы отдѣльныхъ отрѣзковъ; такъ будетъ, напр., 02 суммою l_1 и l_2, 03 суммою l_1, l_2 и l_3; далѣе, 13 суммою l_2 и l_3, и т. д.

Наконецъ, сумма двухъ или нѣсколькихъ отрѣзковъ остается неизмѣнною, при измѣненіи порядка послѣдовательности слагаемыхъ.

Чтобы въ томъ убѣдиться, дополняютъ на фиг. 3 треугольникъ 012, въ которомъ 02 изображаетъ сумму l_1 и l_2, до параллелограмма, и тогда будетъ:

$$02 = l_1 + l_2 = l_2 + l_1.$$

Такимъ же образомъ можно убѣдиться, что сумма произвольнаго числа отрѣзковъ не зависитъ отъ порядка, въ которомъ слагаются отдѣльные отрѣзки.

3-й случай. Если слагаемые отрѣзки имѣютъ произвольныя направленія въ пространствѣ, то для опредѣленія положенія и величины этихъ отрѣзковъ, какъ извѣстно, необходимы двѣ проекціи каждаго изъ нихъ. Поэтому, слѣдуетъ взять прямоугольныя проэкціи слагаемыхъ отрѣзковъ l_1, l_2, l_3 и l_4 на двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости, и потомъ, по фиг. 4. сложить эти проэкціи.

Обѣими проэкціями $0''4''$ и $0'4'$ замыкающей стороны 04 многоугольника совершенно опредѣлится тогда сумма данныхъ отрѣзковъ, т. е. прямая 04 въ пространствѣ.

Чтобы получить 04 въ дѣйствительной величинѣ, слѣдуетъ эту прямую въ пространствѣ совмѣстить около одной изъ ея проэкцій, напр. около горизонтальной $0'4'$, на соотвѣтствующую плоскость проэкцій. Для этого, какъ извѣстно, должно возставить изъ конечныхъ точекъ $0'$ и $4'$ къ горизонтальной проэкціи $0'4'$ перпендикуляры, и отложить на нихъ $0'0 = 0''m$ и $4'4 = 4''n$, то 04 будетъ искомою величиною.

Вычитаніе есть сложеніе въ обратномъ смыслѣ; поэтому, если должно отрѣзокъ l_2 вычесть изъ отрѣзка l_1 (фиг. 5), то достаточно только обернуть стрѣлку направленія отрѣзка l_2, и потомъ сложить. Слѣдовательно, будетъ,

$$02 = l_1 + (-l_2) = l_1 - l_2.$$

II. *Сложеніе и вычитаніе отношеній.*

До проведенія этой задачи графически, слѣдуетъ сперва показать, какимъ образомъ отношеніе или, какъ говорится, дробь $\frac{a}{b}$ приводится къ другому, произвольно взятому знаменателю N.

Если извѣстный числитель, соотвѣтствующій принятому знаменателю N, обозначить чрезъ y, то должно получиться уравненіе,

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{N}, \text{ или } a : b = y : N.$$

Въ этомъ уравненіи, y составляетъ очевидно четвертую пропорціональную къ отрѣзкамъ a, b и N, и можетъ быть построенъ различнымъ образомъ, при помощи подобныхъ треугольниковъ.

Всего проще начертить, по фиг. 6, прямоугольный крестъ осей, отложить отъ начала O на одной оси данный знаменатель, и на другой оси данный числитель, соединить a съ b, и провести чрезъ N прямую Ny параллельную къ ab; то очевидно Oy будетъ искомый числитель; потому что, вслѣдствіе параллельности ab къ Ny,

$$\text{триуг. } Oab \infty \text{ триуг. } OyN; \text{ и потому,}$$

$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{Oy}{ON}; \text{ или, какъ по отложенію,}$$

$$Oa = a, \quad Ob = b \text{ и } ON = N, \text{ то } \frac{a}{b} = \frac{y}{N}.$$

Слѣдовательно, легко найдти алгебрическую сумму нѣскольких данныхъ дробей.

Если, напр., должна быть построена сумма

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3},$$

то, вообразивъ эти дроби приведенными къ произвольному знаменателю N, и обозначивъ неизвѣстные числители ряда чрезъ y_1, y_2 и y_3, получатъ,

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}=\frac{y_1+y_2-y_3}{N}.$$

Какъ здѣсь входятъ положительные и отрицательные числители, то отложить, по фиг. 7, отъ O положительные числители a_1 и a_2 вверхъ, слѣдовательно отрицательный числитель a_3 внизъ, потомъ конечныя точки знаменателей b_1, b_2 и b_3, отложенныхъ отъ O на другой оси, соединить послѣдовательно съ a_1, a_2 и a_3, и провести къ этимъ линіямъ соединенія, чрезъ конечную точку N принятаго знаменателя ON, параллельныя, которыя, на оси числителей, отсѣкутъ для общаго знаменателя N, искомые числители y_1, y_2 и y_3, измѣряемые отъ O.

Алгебрическую сумму этихъ числителей очень легко опредѣлить по 1-му случаю § **1**; и если обозначить эту сумму чрезъ z, то будетъ,

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}=\frac{y_1+y_2-y_3}{N}=\frac{z}{N}.$$

Если при этомъ принять длину знаменателя N за единицу мѣры, положенной въ основаніе всего построенія, слѣдовательно сдѣлать $N=1$, то отрѣзокъ z, соотвѣтствующій этому знаменателю, изобразитъ тогда алгебрическую сумму данныхъ дробей.

По изложенному способу, очевидно рядъ дробей приводится очень удобно къ произвольному общему знаменателю.

2. Графическое умноженіе.

1. Если требуется сперва составить произведеніе изъ нѣскольких данныхъ отношеній, напр. изъ $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_3}{b_3}$, т. е. выразить его отношеніемъ двухъ отрѣзковъ, то отложить опять, по фиг. 8, числителей отъ вершины O на оси ординатъ, и знаменателей точно

также на оси абсциссъ, соединить конечныя точки соотвѣтствующихъ числителей и знаменателей линіями l_1, l_2 и l_3, и провести чрезъ начальную точку O, къ этимъ линіямъ соединенія, параллельныя L_1, L_2 и L_3. Потомъ отложить произвольную абсциссу Ox_1 и построить соотвѣтствующую ординату для прямой L_1; эту ординату y_1 принять для абсциссы, слѣдовательно сдѣлать $x_2 = y_1$ и провести соотвѣтствующую ординату y_2 для прямой L_2. Ординату y_2 принять опять для абсциссы x_3, слѣдовательно $x_3 = y_2$ и опредѣлить затѣмъ ординату y_3 для прямой L_3. Тогда отношеніе будетъ,

$$\frac{y_3}{x_1} = \frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3},$$

потому что изъ фиг. 8, вслѣдствіе подобія треугольниковъ, получаются слѣдующія пропорціи:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{y_1}{x_1}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_2}, \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{y_3}{x_3};$$

отъ перемноженія этихъ пропорцій получится,

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3} = \frac{y_1 \times y_2 \times y_3}{x_1 \times x_2 \times x_3},$$

или, какъ при построеніи было сдѣлано $x_2 = y_1$ и $x_3 = y_2$,

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3} = \frac{y_3}{x_1},$$

что и требовалось доказать.

Произведеніе изъ всѣхъ отношеній получается слѣдовательно какъ отношеніе послѣдней ординаты y_3 къ начальной абсциссѣ x_1.

Если при этомъ принять x_1 равнымъ строительной единицѣ, то будетъ,

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3} = y_3.$$

Подобнымъ же образомъ опредѣляется произведеніе изъ произвольнаго числа отношеній.

2. Если требуется составить произведеніе изъ нѣсколькихъ отрѣзковъ, напр. изъ a_1, a_2, a_3 и обозначить его чрезъ y_3, то очевидно будетъ,

$$y_3 = a_1 \times a_2 \times a_3 = \frac{a_1}{1} \times \frac{a_2}{1} \times \frac{a_3}{1}.$$

Поэтому на фиг. 9 получается построеніе, сходное съ фиг. 8.

Именно, отложимъ опять отъ O на оси ординатъ Y отрѣзки a_1, a_2 и a_3, и отложимъ $ON=1$. Точку N соединимъ съ a_1, a_2 и a_3, и проведемъ къ этимъ линіямъ соединенія чрезъ O параллельныя L_1, L_2 и L_3. Отложимъ потомъ $Ox_1=1$, и отыскать для x_1 ординату y_1, соотвѣтствующую прямой L_1. Сдѣлать затѣмъ $x_2=y_1$ и провести въ x_2 ординату y_2, соотвѣтствующую прямой L_2; наконецъ отложить $x_3=y_2$ и построить въ x_3 ординату y_3 соотвѣтствующую прямой L_3; тогда будетъ,

$$y_3=a_1\times a_2\times a_3.$$

Впрочемъ проведеніе параллельныхъ L_1, L_2, L_3 вовсе не необходимо, потому что вмѣсто нихъ можно воспользоваться непосредственно линіями соединенія l_1, l_2 и l_3.

Именно, сдѣлать, на фиг. 10, $Ox_1=1$, возставить въ x_1 къ Ox_1 перпендикуляръ, и отложить на немъ отъ x_1 отрѣзки a_1, a_2, a_3. Потомъ провести изъ O къ конечнымъ точкамъ a_1, a_2, a_3 лучи l_1, l_2, l_3, принять $Oa_1=1$ за абсциссу, отрѣзокъ a_1 за ординату для l_1, сдѣлать $x_2=y_1$ и опредѣлить въ x_2 ординату y_2, соотвѣтствующую l_2; наконецъ сдѣлать $x_3=y_2$ и провести въ x_3 ординату y_3, соотвѣтствующую l_3.

Тогда, какъ легко убѣдиться, будетъ,

$$y_3=a_1\times a_2\times a_3.$$

Подобнымъ же образомъ строится произведеніе y_n изъ произвольнаго числа отрѣзковъ или отношеній a_1, a_2, a_3 . . . . a_n.

3. Графическое дѣленіе.

1. Если требуется построить частное двухъ отношеній

$$\frac{a_1}{b_1}:\frac{a_2}{b_2},$$

т. е. выразить его отношеніемъ двухъ отрѣзковъ, то слѣдуетъ сперва привести оба отношенія, по изложенному выше способу, по фиг. 11, къ произвольному общему знаменателю N; и тогда будетъ,

$$\frac{a_1}{b_1}:\frac{a_2}{b_2}=\frac{y_1}{N}:\frac{y_2}{N}=\frac{y_1}{y_2}.$$

Такъ какъ дѣленіе можетъ быть сведено на обратное умноженіе, полагая,

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \times \frac{b_2}{a_2},$$

то можно дѣленіе тотчасъ же преобразовать въ умноженіе, и рѣшить по § 2.

2. Если требуется выразить частное двухъ отрѣзковъ a и b только однимъ отрѣзкомъ, т. е. изъ уравненія,

$$a : b = y,$$

опредѣлить y, то достаточно припомнить, что также

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{1}.$$

Чтобы эту пропорцію рѣшить графически, начертить произвольный крестъ осей, отложить потомъ, по фиг. 6, отъ вершины O, на одной оси данный знаменатель b и $ON = 1$, и на другой оси числитель a, соединить a съ b и провести къ этой линіи соединенія чрезъ N параллельную, которая отсѣчетъ на оси числителей искомый отрѣзокъ y.

4. Сложное умноженіе и дѣленіе.

1. Если требуется нѣсколько отрѣзковъ l_1, l_2, $l_3 \ldots$ умножить на одно и то же постоянное отношеніе $\frac{m}{n}$, и положить,

$$l_1 \times \frac{m}{n} = y_1, \quad l_2 \times \frac{m}{n} = y_2, \quad l_3 \times \frac{m}{n} = y_3 \ldots,$$

то опредѣленіе неизвѣстныхъ производится по фиг. 12. Именно, отложить на прямой Ox отрѣзокъ $OA = n$, сдѣлать $AB = m$, и провести чрезъ B прямую OL; потомъ отложить, всегда начиная отъ O, на Ox отрѣзки l_1, l_2, $l_3 \ldots$ и провести чрезъ конечныя точки этихъ отрѣзковъ параллельныя къ AB.

Отрѣзки этихъ параллельныхъ между Ox и OL даютъ послѣдовательно искомыя величины y_1, y_2, $y_3 \ldots$

Правильность этого построенія легко доказывается изъ подобія образовавшихся треугольниковъ.

2. Если требуется нѣсколько отрѣзковъ l_1, l_2, $l_3 \ldots$ раздѣлить на одно и то же постоянное отношеніе $\frac{m}{n}$, то можно очевидно рѣшить эту задачу по предъидущему нумеру, если данные

отрѣзки l_1, l_2, l_3... умножить на обращенное отношеніе, слѣдовательно на $\frac{n}{m}$.

5. Графическое возвышеніе въ степень и извлеченіе корня.

1. Если требуется составить n-ю степень отношенія $\frac{a}{b}$, то это отношеніе, по § 2, слѣдуетъ умножить самое на себя n разъ.

Поэтому, на фиг. 13, провести чрезъ вершину O креста осей прямую L, соотвѣтствующую отношенію $\frac{a}{b}$, потомъ опредѣлить для произвольной абсциссы x_1 ординату y_1 для прямой L, эту ординату y_1 сдѣлать $= x_2$, для x_2 отыскать соотвѣтствующую ординату y_2, принять опять y_2 для абсциссы x_3, построить для x_3 ординату y_3 и повторить такъ далѣе это построеніе n разъ; тогда будетъ,

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{a}{b}, \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{a}{b}, \ldots \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{a}{b}, \quad \frac{y_n}{x_n} = \frac{a}{b}.$$

Перемножая взаимно всѣ эти уравненія, получатъ,

$$\frac{y_1}{x_1} \times \frac{y_2}{x_2} \times \cdots \times \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} \times \frac{y_n}{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n;$$

и какъ, по построенію $x_2 = y_1$, $x_3 = y_2 \ldots$, $x_n = y_{n-1}$, то,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{y_n}{x_1}.$$

По фиг. 13 слѣдовательно будетъ, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{y_3}{x_1}$.

Если принять начальную абсциссу $x_1 = 1$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = y_3$, или вообще $\left(\frac{a}{b}\right)^n = y_n$.

Для практическаго построенія чертежа имѣютъ значеніе слѣдующія замѣчанія:

Если отношеніе $\frac{a}{b} > 1$, то ординаты будутъ всегда болѣе, нежели соотвѣтственныя абсциссы, и приращеніе ординатъ возрастаетъ тѣмъ быстрѣе, чѣмъ болѣе a въ отношеніи къ b.

Поэтому, во избѣжаніе того, чтобы построеніе не вышло изъ предѣловъ площади чертежа, при большихъ отношеніяхъ, или при высокихъ показателяхъ степени, выгодно данное отношеніе $\frac{a}{b}$ обратить, затѣмъ построить n-ю степень правильной дроби $\frac{b}{a}$, и результатъ окончательно опять обратить.

Если $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{y_n}{x_1}$, то будетъ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{x_1}{y_n}$.

Если же $\frac{a}{b} < 1$, въ такомъ случаѣ приближаются все болѣе къ начальной точкѣ O, и потому начальную абсциссу x_1 слѣдуетъ принять на столько большою, чтобы послѣдняя ордината y_n выходила еще довольно ясною и удобоизмѣримою. Если въ этомъ случаѣ, желаютъ получить $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ въ видѣ десятичной дроби, то очевидно слѣдуетъ принять $x_1 = 10$.

2. Если требуется возвысить въ степень данный отрѣзокъ a, напр. построить $y_3 = a^3$, то можно — имѣя въ виду, что $a^3 = \left(\frac{a}{1}\right)^3$ — поступать сходно съ предъидущею задачею; именно, на фиг. 13, сдѣлавъ Ob и $Ox_1 = 1$, получатъ $y_3 = a^3$.

Степени отрѣзка a впрочемъ всего проще строятся по фиг. 14.

Начертить прямоугольный крестъ осей, сдѣлать $Ox_0 = 1$ и $Ox_1 = a$, соединить x_0 съ x_1, и возставить въ x_1 къ x_0x_1 перпендикуляръ x_1x_2, въ x_2 къ x_1x_2 перпендикуляръ x_2x_3 и т. д.; тогда будетъ $Ox_2 = a^2$, $Ox_3 = a^3$, $Ox_4 = a^4$ и т. д.

Для доказательства сперва, что $Ox_2 = a^2$, имѣютъ въ виду подобіе треугольниковъ Ox_0x_1 и Ox_1x_2; и потому,

$$Ox_0 : Ox_1 = Ox_1 : Ox_2, \text{ т. е.}$$

$$1 : a = a : Ox_2, \text{ откуда } Ox_2 = a^2.$$

Подобнымъ же образомъ получится, изъ подобія треугольниковъ Ox_1x_2 и Ox_2x_3, что $Ox_3 = a^3$, далѣе изъ подобія треуг. Ox_2x_3 и Ox_3x_4, что $Ox_4 = a^4$ и т. д.

Фиг. 14 изображаетъ случай, въ которомъ $a < 1$, а потому взаимно послѣдующія степени будутъ все менѣе и построеніе приближается все болѣе и болѣе къ начальной точкѣ O.

Но если $a > 1$, то, для высокаго показателя степени, построеніе скоро выходитъ изъ предѣловъ площади чертежа; но можно въ этомъ случаѣ опредѣлить степени для $\frac{1}{a}$, и затѣмъ отъ результата взять обратную величину. Обратная же величина отрѣзка a, т. е. $\frac{1}{a} = y$, или $\frac{1}{a} = \frac{y}{1}$, легко строится по извѣстному способу, по фиг. 15, изъ приведенной пропорціи.

3. Возвышеніе въ степень при помощи логариѳмической спирали. Самое общее построеніе степеней отрѣзковъ или отношеній производится при помощи логариѳмической спирали, и построеніе которой дѣлается яснымъ изъ слѣдующаго:

Если, какъ на фиг. 16, составить взаимно около одной точки O возможно большее число подобныхъ треугольниковъ, по одному и тому же направленію и такимъ образомъ,

1) чтобы лежащіе при O ихъ углы α, α_1, α_2... были взаимно равны, и

2) чтобы каждая сторона, проходящая чрезъ общую вершину O, была общею двумъ треугольникамъ,

то, если углы α, α_1, α_2.. будутъ необыкновенно малы, изъ многоугольника $a_0\, a_1\, a_2\, a_3$... образуется кривая, которая извѣстна подъ именемъ логариѳмической спирали, и имѣющая то свойство, что ея взаимно послѣдующіе радіусы векторы $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2$... составляютъ геометрическую прогрессію, если заключающіеся между ними, взаимно послѣдующіе, углы будутъ равны.

Чтобы въ томъ убѣдиться, достаточно обратить вниманіе на то, что вслѣдствіе подобія взаимно послѣдующихъ треугольниковъ, отношенія

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\varrho_3}{\varrho_2} = \ldots = \frac{\varrho_n}{\varrho_{n-1}} = c,$$

слѣдовательно постоянны, и что потому,

$$\varrho_0 = 1 \times \varrho_0,\ \varrho_1 = c\varrho_0,\ \varrho_2 = c\varrho_1 = c^2\varrho_0,$$
$$\varrho_3 = c\varrho_2 = c^3\varrho_0 \ldots . \text{ и } \varrho_n = c^n\, \varrho_0;$$

поэтому, будутъ относиться,

$$\varrho_0 : \varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 : \ldots : \varrho_n = 1 : c : c^2 : c^3 : \ldots : c^n,$$

т. е. взаимно послѣдующіе радіусы векторы образуютъ дѣйствительно геометрическую прогрессію, которой показатель $c = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}$.

Если теперь сдѣлать, кромѣ того, $\varrho_0 = 1$, то получится,

$$\varrho_1 = c,\ \varrho_2 = c^2,\ \varrho_3 = c^3, \ldots \varrho_n = c^n .$$

Построеніе логариѳмической спирали легко можно произвести при помощи угла пропорціональности, по принятому отношенію $\frac{Oa_1}{Oa_0}$ или $\frac{\varrho_1}{\varrho_0}$.

Именно, фиг. 17, описать радіусомъ ϱ_0 изъ O круговую дугу, отложить на ней отъ a_0 радіусъ векторъ $\varrho_1 = a_0 s$ какъ хорду, и соединить s съ O; при этомъ опредѣлится уголъ пропорціональности φ. Пересѣчь затѣмъ изъ O радіусомъ ϱ_1 бокъ этого угла, и тогда линія соединенія полученной точки пересѣченія дастъ слѣдующій радіусъ векторъ ϱ_2.

Разстояніемъ ϱ_2, какъ радіусомъ, пересѣчь опять изъ O бокъ угла пропорціональности, и соотвѣтствующая хорда дастъ радіусъ векторъ ϱ_3 и такъ далѣе.

Нанося потомъ эти радіусы векторы $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots$, по фиг. 16, въ порядкѣ взаимно послѣдующихъ угловъ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$, между собою равныхъ, но возможно меньшихъ, и соединяя полученныя точки $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ непрерывною линіею, получатъ въ этой послѣдней часть искомой спирали.

Чтобы еще также получить точки этой кривой внутри $Oa_0 = \varrho_0$, если малые радіусы векторы, слѣдующіе за ϱ_0, обозначить послѣдовательно чрезъ $x_1, x_2, x_3 \ldots$, строятъ длины этихъ послѣднихъ, по фиг. 17 a, изъ отношеній,

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{\varrho_0}{x_1},\quad \frac{\varrho_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2},\quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} \text{ и т. д.}$$

Чтобы при помощи логариѳмической спирали, построенной съ наиболѣе возможною точностью и на достаточно большомъ протяженіи, возвышать въ степени, или извлекать корни, поступаютъ слѣдующимъ образомъ:

a) Если сперва требуется возвысить отрѣзокъ l въ n-ю степень, слѣдовательно построить l^n, причемъ n цѣлое положительное число, то пересѣчь изъ O спираль радіусами 1 и l, соединить полученныя точки пересѣченія 1 и l съ O, и отложить уголъ α, образованный этими линіями соединенія, на $O1$ съ той же стороны, на которой лежитъ Ol, въ кругѣ n разъ, причемъ радіусъ векторъ, соотвѣтствующій $n\alpha$, будетъ равенъ l^n.

b) Если требуется опредѣлить l^{-n} или $\frac{1}{l^n}$, то уголъ α, образуемый радіусами векторами l и 1, слѣдуетъ отложить при $O1$ со стороны противоположной отъ Ol, слѣдовательно по отрицательному направленію, n разъ и разсматривать радіусъ векторъ, соотвѣтствующій $(-n\alpha)$, какъ искомую степень.

c) Если требуется извлечь изъ отрѣзка l корень n-ой степени, т. е. построить $\sqrt[n]{l}$ или $l^{\frac{1}{n}}$, то — такъ какъ это представляется возвышеніемъ въ степень съ дробнымъ показателемъ – опять слѣдуетъ опредѣлить уголъ α между радіусами векторами $O1$ и Ol, длиною 1 и l, раздѣлить α на n равныхъ частей, и тотъ радіусъ векторъ, который соотвѣтствуетъ ближайшей къ $O1$ точкѣ дѣленія, разсматривать какъ искомый $\sqrt[n]{l}$.

d) Если требуется построить $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ или $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, то первоначально слѣдуетъ опредѣлить, по фиг. 6, для $ON = 1$, отрѣзокъ $y = \frac{a}{b}$ и затѣмъ поступать съ y^n или $\sqrt[n]{y}$, какъ и выше (*).

e) Чтобы произвести построеніе $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$ или $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$, опредѣляютъ первоначально $\left(\frac{a}{b}\right)^m = y^m = x$ и потомъ $\sqrt[n]{x}$.

4. Добавленіе. Если отнести логариѳмическую спираль къ полярнымъ координатамъ, при чемъ всего проще радіусъ векторъ Oa_0, фиг. 16, котораго длина равна единицѣ мѣры, принять за постоянную полярную ось и точку O за постоянный полюсъ, то для произвольнаго радіуса вектора ϱ составляющаго съ Oa_0 полярный уголъ или уголъ вращенія w, по законамъ аналитической геометріи, получается уравненіе,

$$\varrho = b^w,$$

гдѣ b обозначаетъ основаніе принятой системы логариѳмовъ. Изъ этого уравненія слѣдуетъ,

$$w = \log \varrho.$$

Слѣдовательно логариѳмы радіусовъ векторовъ равняются полярнымъ угламъ, составляемымъ этими радіусами векторами съ постоянною полярною осью Oa_0, и можно поэтому эту спираль,

---

(*) Другое построеніе частнаго y изъ отношенія $\frac{a}{b}$, при помощи логариѳмической спирали, показано въ нижеслѣдующемъ добавленіи.

если продолжить ее до требуемыхъ предѣловъ, употреблять вмѣсто логариѳмическихъ таблицъ, и слѣдовательно, при помощи ея, кромѣ изложеннаго только что возвышенія въ степени и извлеченія корней, производить еще также графическое умноженіе и дѣленіе.

Именно, если обозначить умножаемые или дѣлимые отрѣзки чрезъ

$$\varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \varrho_3 \ldots . \varrho_n ,$$

соотвѣтствующіе этимъ отрѣзкамъ, какъ радіусамъ векторамъ, полярные углы чрезъ

$$w_1, \quad w_2, \quad w_3 \ldots . w_n ,$$

далѣе искомый результатъ чрезъ y, и соотвѣтствующій y, какъ радіусу вектору, полярный уголъ чрезъ σ, то для составленія произведенія

$$y = \varrho_1 \times \varrho_2 \times \varrho_3 \times \ldots \times \varrho_n \text{ получатъ},$$
$$\log y = \log(\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3 \ldots \varrho_n) = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots w_n = \sigma.$$

Если начертить поэтому, при O, на полярной оси Oa_0, угловую сумму σ, то радіусъ векторъ y, соотвѣтствующій углу σ, будетъ искомымъ произведеніемъ.

Если теперь требуется составить частное изъ отрѣзковъ ϱ_1 и ϱ_2, слѣдовательно построить $y = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, то имѣютъ въ виду, что

$$\log y = \log \varrho_1 - \log \varrho_2 = w_1 - w_2 = \sigma;$$

поэтому, если построить опять уголъ σ на полярной оси, при O, то радіусъ векторъ, соотвѣтствующій этому углу, дастъ искомое частное y.

При построеніи угла σ на полярной оси Oa_0, слѣдуетъ однако же постоянно имѣть въ виду, долженъ ли быть искомый результатъ, именно y, болѣе или менѣе, нежели единица чертежа Oa_0. Въ первомъ случаѣ, очевидно, уголъ σ будетъ возрастающимъ, слѣдовательно долженъ откладываться такъ, чтобы искомый радіусъ векторъ y былъ болѣе, нежели Oa_0, а въ послѣднемъ случаѣ, обратно, углу σ слѣдуетъ придавать противоположное положеніе, относительно постоянной оси Oa_0.

Если произведеніе должно быть составлено изъ нѣсколькихъ отношеній, или слѣдуетъ построить,

$$y = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \times \frac{\varrho_3}{\varrho_4} \times \frac{\varrho_5}{\varrho_6} \ldots . ,$$

то должно отыскать соотвѣтствующіе отдѣльнымъ отношеніямъ $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}, \frac{\varrho_3}{\varrho_4}, \frac{\varrho_5}{\varrho_6} \ldots$ полярные углы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$, и взять сумму этихъ угловъ; и радіусъ векторъ, построенный для этой угловой суммы, дастъ искомое произведеніе y.

Такимъ образомъ показано, что при помощи логариѳмической спирали, графическое умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степени и извлеченіе корней, производится очень простымъ способомъ, и что потому логариѳмическая спираль при графическомъ исчисленіи доставляетъ тѣ же выгоды, какія даютъ логариѳмическія таблицы при обыкновенномъ численномъ исчисленіи.

5. Въ заключеніе можно привести еще нѣкоторые частные случаи графическаго извлеченія корней, которые могутъ быть рѣшены безъ помощи логариѳмической спирали, простымъ образомъ.

a) Если требуется опредѣлить $y = \sqrt{a}$, то это легко рѣшается графически, если припомнить, что y представляетъ среднее геометрическое пропорціональное изъ a и 1; именно, отъ возвышенія въ квадратъ, предъидущее уравненіе обращается въ слѣдующее,

$$y^2 = a, \text{ или } y^2 = 1 \times a;$$

откуда получается пропорція,

$$1 : y = y : a,$$

которая можетъ быть рѣшена графически различнымъ образомъ.

Фиг. 18 даетъ самое употребительнѣйшее рѣшеніе.

Сдѣлать $OA = a$ и $AB = 1$, описать на OB полукругъ и возставить въ A перпендикуляръ къ OA, который пересѣчетъ полукругъ въ C, то получится $AC = \sqrt{a}$.

Правильность построенія очевидно слѣдуетъ изъ извѣстной геометрической теоремы, по которой,

Если въ прямоугольномъ треугольникѣ (OBC, фиг. 18), изъ вершины (C) прямаго угла опустить на гипотенузу (OB) перпендикуляръ, то этотъ перпендикуляръ (CA) будетъ среднею пропорціональною между отрѣзками (OA и AB) гипотенузы.

b) Для извлеченія кубическаго корня можно, по фиг. 19, построить особую кривую AV.

Сдѣлать $OA = 1$, описать на OA полукругъ, возставить въ A къ OA перпендикуляръ AY, провести OB произвольно, сдѣлать затѣмъ $OC = OD$, провести DE параллельно AB и сдѣлать $OB = OE$, то точка пересѣченія E будетъ точкою искомой кривой AV.

Чтобы убѣдиться въ томъ, провести EF перпендикулярно къ OE, то какъ извѣстно будетъ $\overline{OE}^2 = OD \times OF$, и какъ еще

$OC \times OB = 1$ (такъ какъ триуг. $OAB \backsim$ триуг. OAC, слѣдовательно $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OA}$, или $\frac{1}{OB} = \frac{OC}{1}$, откуда дѣйствительно $OB \times OC = 1$), то также будетъ $OD \times OE = 1$ или $OD = \frac{1}{OE}$.

Поэтому $\overline{OE}^2 = \frac{1}{OE} \times OF$, или $\overline{OE}^3 = OF$, т. е. $OE = \sqrt[3]{OF}$.

Подобно точкѣ E, для пополненія кривой AV, строится достаточное число точекъ кривой.

Чтобы теперь извлечь изъ отрѣзка l кубическій корень, слѣдуетъ отложить l отъ O на OA, такъ что напр. OF будетъ $= l$, описать на OF, какъ на діаметрѣ, полукругъ, и лучъ OE, проведенный изъ O въ точку пересѣченія E этого круга съ кривою AV, будетъ $= \sqrt[3]{OF} = \sqrt[3]{l}$.

Примѣчаніе. Если $l < 1$, то опредѣляютъ $x = \sqrt[3]{\frac{1}{l}}$, и затѣмъ $\sqrt[3]{l} = \frac{1}{x}$.

6. Графическое преобразованіе и вычисленіе площадей.

1. Треугольникъ. Такъ какъ площадь треугольника, какъ извѣстно, равняется половинѣ произведенія изъ линіи основанія b на высоту h, то очевидно, что сдвиженіемъ вершины треугольника, параллельно линіи основанія, площадь его неизмѣняется.

Чтобы площадь f треугольника ABC, фиг. 20, опредѣлить графически, т. е. построить уравненіе $f = {}^1/_2\, bh$, или пропорцію $2 : b = h : f$, возставить въ точкѣ A къ основанію $AB = b$ перпендикуляръ, отложить на немъ $AE = 2$ единицамъ, провести CF параллельно BE и опустить высоту CD, то будетъ $DF = f$. Ибо, вслѣдствіе параллельности CF къ BE, триуг. $ABE \backsim$ триуг. CDF, и потому $2 : b = h : DF$, откуда дѣйствительно $DF = \frac{b \times h}{2} = f$.

2. Четвероугольникъ. При четвероугольникахъ слѣдуетъ различать 2 случая; именно, когда площадь можетъ быть опредѣлена или, какъ при параллелограммѣ, непосредственно, или, какъ при неправильномъ четвероугольникѣ, преобразованіемъ въ равномѣрный треугольникъ.

a) Опредѣленіе площади параллелограмма. Если въ параллелограммѣ обозначить основаніе AB, фиг. 21, чрезъ b и высоту EF чрезъ h, то площадь его, именно $f = b \times h$, опредѣляется очень легко, по § 2, графически.

Именно, сдѣлать $AE = 1$, возставить въ E къ AB перпендикуляръ $EF = h$, провести AF и BG параллельно EF, и отрѣзокъ BG будетъ $= f$; потому что, вслѣдствіе параллельности BG къ EF, относятся $1 : h = b : BG$, откуда $BG = b \times h = f$.

b) Опредѣленіе площади неправильнаго четвероугольника.

1-й способъ. Преобразовать четвероугольникъ $ABCD$, фиг. 22, въ равномѣрный треугольникъ ADC_1, и опредѣлить затѣмъ извѣстнымъ образомъ площадь треугольника. Это преобразованіе площади производится всего проще исключеніемъ одного угла, напр. C. Для этого, провести чрезъ C, къ діагонали BD параллельную CC_1, и замѣнить триуг. BCD равномѣрнымъ триуг. BC_1D, то очевидно будетъ $ABCD = AC_1D$.

2-й способъ. Четвероугольникъ $ABCD$, фиг. 23, можетъ быть очень легко преобразованъ въ равномѣрный треугольникъ B_1CD_1 съ высотою $= 2$, и тогда очевидно его основаніе B_1D_1 изобразитъ площадь четвероугольника.

Для такого преобразованія площади, описать изъ вершины одного изъ угловъ, напр. изъ C, радіусомъ $CE = 2$, круговую дугу, провести къ ней изъ вершины A противолежащаго точкѣ C угла касательную, и провести затѣмъ чрезъ оба другіе угла B и D къ діагонали AC параллельныя; то эти послѣднія отсѣкаютъ на упомянутой касательной отрѣзокъ $B_1D_1 = f$, т. е. равный искомой площади.

Діагональю AC четвероугольникъ разбивается на два треугольника ABC и ACD; и будетъ,

триуг. $ABC =$ триуг. AB_1C, и триуг. $ACD =$ триуг. ACD_1; поэтому,

$$\text{тр. } AB_1C + \text{тр. } ACD_1 = \text{триуг. } B_1CD_1 = f.$$

Но какъ $f = B_1D_1 \times \dfrac{CE}{2}$ и далѣе $CE = 2$, то дѣйствительно $f = B_1D_1$.

Примѣчаніе. До перехода къ многоугольникамъ, слѣдуетъ указать еще на особенное свойство трапеціи, которое служитъ съ особенною пользою, при преобразованіи многоугольника въ треугольникъ, или при замѣненіи ломанной линейной связи прямою.

Если провести въ трапеціи $ABCD$, фиг. 24, обѣ діагонали, то треугольники ABS и CDS, лежащіе между діагоналями и не параллельными сторонами трапеціи, будутъ взаимно равны; потому что

$$\text{тр. } ABC = \text{тр. } BDC \text{ и тр. } BCS = \text{тр. } BCS,$$

а слѣдовательно также будетъ,

$$\text{тр. } ABC - \text{тр. } BCS = \text{тр. } BDC - \text{тр. } BCS, \text{ т. е.}$$

$$\text{тр. } ABS = \text{тр. } CDS,$$

что и требовалось доказать.

Поэтому, легко рѣшается слѣдующая задача:

Провести чрезъ точку C_1 на сторонѣ AB треугольника ABC, фиг. 25, прямую C_1B_1 такимъ образомъ, чтобы она со сторонами треугольника ограничивала такое же квадратное содержаніе, какъ и сторона BC.

Соединить C_1 съ C и провести BB_1 параллельно CC_1, то C_1B_1 будетъ искомою стороною, при которой тріуг. AB_1C_1 = тріуг. ABC; потому что линіей C_1B_1 съ одной стороны отъ тріуг. ABC отнимается тріуг. B_1CS, и съ другой стороны придается равный же тріуг. BC_1S. Поэтому прямую C_1B_1 можно назвать уравнительною прямою для BC.

3. Опредѣленіе площади многоугольниковъ. Для опредѣленія площади многоугольника преобразовываютъ его всего проще въ треугольникъ одинаковаго же квадратнаго содержанія.

Это можетъ быть произведено различнымъ образомъ.

a) Преобразованіе должно идти отъ вершины даннаго угла, напр. отъ точки O, фиг. 26.

Провести изъ O діагональ OB къ ближайшей вершинѣ B, провести параллельно къ ней прямую чрезъ промежуточный уголъ A, и продолжить третью сторону CB до пересѣченія въ B_1 съ упомянутою параллельною и соединить O съ B_1; при этомъ исключается уголъ A и пятиугольникъ OB_1CDE будетъ равномѣренъ съ первоначальнымъ шестиугольникомъ.

Вспомогательныя линіи при сложныхъ многоугольникахъ не проводятся, но только обозначаются ихъ точки пересѣченія.

b) Преобразованіе семиугольника фиг. 27 въ треугольникъ должно идти отъ точки O и уголъ A долженъ быть удержанъ, т. е. иными словами, линейная связь $BCDEFG$ должна быть замѣнена уравнительною прямою, исходящею изъ O.

Начинаютъ исключеніе угловъ съ G, относительно стороны AG, и для лучшей наглядности опускаютъ вспомогательныя линіи.

1) Исключая G мѣняютъ F на F_1, проводя FF_1 параллельно GE,

2) Исключая F_1 мѣняютъ E на E_1, проводя EE_1 параллельно F_1D,

3) Исключая E_1 мѣняютъ D на D_1, проводя DD_1 параллельно CC_1,

4) Исключая D_1 мѣняютъ C на C_1, проводя CC_1 параллельно BD_1, и наконецъ,

5) Исключая C_1 мѣняютъ B на B_1, проводя BB_1 параллельно OC_1; такимъ образомъ OB_1 получается какъ уравнительная прямая, которая преобразовываетъ семиугольникъ $ABCDEFG$ въ равномѣрный треугольникъ AB_1O.

Этотъ уравнительный способъ часто употребляется въ практической геометріи.

4. Опредѣленіе площади произвольной неправильной фигуры. Если опредѣляется площадь неправильной фигуры, напр. формы фиг. 28, то это всего проще сдѣлать, если главную часть $MNOP$ фигуры разбить параллельными ординатами на трапеціи постоянной ширины b, содержаніе которыхъ очевидно найдется, если сумму изъ среднихъ ординатъ $y_1, y_2, y_3 \ldots$ умножить на постоянную ширину b.

Если оконечныя площади $LMN = f_1$, и $OPR = f_2$ точно также неправильны, то ихъ содержанія опредѣляются показаннымъ на фиг. 28 разложеніемъ на трапеціи и треугольники, такъ что площадь F всей фигуры можетъ быть опредѣлена изъ уравненія,

$$F = f_1 + f_2 + (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n)\ b.$$

При этомъ разложеніи неправильныхъ площадей на трапеціи и треугольники, очевидно слѣдуетъ принимать ширину этихъ элементарныхъ площадей тѣмъ меньшею, чѣмъ точнѣе должно быть произведено опредѣленіе площади.

Элементы графической статики.

Въ нижеслѣдующемъ, при изложеніи условій равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на тѣло, мы воспользуемся изъ статики только закономъ параллелограмма силъ, по которому, извѣстнымъ образомъ, опредѣляется равнодѣйствующая двухъ однородныхъ силъ, дѣйствующихъ на одну точку, или по которому сила можетъ быть разложена на составляющія, данныя по направленію.

7. Сложеніе силъ (*).

I. Если нѣсколько однородныхъ силъ дѣйствуютъ, по одной и той же прямой, на подвижную точку, то равнодѣйствующая ихъ найдется очевидно по 1-му случаю графическаго сложенія отрѣзковъ.

Но если точка должна находиться въ равновѣсіи, то равнодѣйствующая должна быть равна нулю, и слѣдовательно, для равновѣсія, силы должны имѣть частью противоположное направленіе.

II. Если нѣсколько силъ P_1, $P_2 \ldots P_n$ дѣйствуютъ по различнымъ направленіямъ на подвижную точку O, то можно, какъ извѣстно, найдти ихъ равнодѣйствующую, если сперва опредѣлить равнодѣйствующую r_1 для первыхъ двухъ силъ P_1 и P_2, изъ параллелограмма этихъ силъ, потомъ такимъ же образомъ сложить r_1 съ третьею силою P_3 въ равнодѣйствующую r_2, далѣе r_2 совокупить такимъ же образомъ съ P_4 и поступать такъ далѣе, пока не будутъ сложены всѣ отдѣльныя силы.

Такъ какъ каждый параллелограммъ опредѣляется совершенно двумя прямыми, исходящими изъ одного и того же угла, то сложеніе силъ всего проще можетъ быть произведено по 2-му случаю графическаго сложенія отрѣзковъ; отсюда получается слѣдующее правило для построенія:

Если нѣсколько силъ дѣйствуютъ по различнымъ направленіямъ на одну точку, то ихъ равнодѣйствующая найдется, если отдѣльныя силы размѣстить по ихъ направленію и величинѣ, концомъ къ концу; и линія, соединяющая начальную точку съ конечною точкою полученной такъ линейной связи, опредѣляетъ искомую равнодѣйствующую по направленію и величинѣ.

Если, напр. требуется сложить силы P_1, P_2, P_3 и P_4, дѣйствующія на одну точку O (фиг. 29), то должно сдѣлать AB равною и параллельною P_2, точно также BC равною и параллельною P_3, наконецъ CD равною и параллельною P_4, то OD будетъ искомою равнодѣйствующею R.

(*) Кекъ. Графическій способъ опредѣленія напряженій связей фермъ, § 2 — 4.

Винклеръ. Теорія внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на прямыя балки, § 1 и 2.

Точка O должна слѣдовательно двигаться по направленію R; если же желательно имѣть равновѣсіе, то должно приложить еще силу P_3, которая R равна, но направлена противоположно.

Слѣдовательно, если нѣсколько силъ, дѣйствующихъ на одну точку O, должны находиться въ равновѣсіи, то равнодѣйствующая ихъ очевидно должна быть равна нулю; откуда слѣдуетъ положеніе:

Если произвольное число силъ, дѣйствующихъ на одну точку, находится въ равновѣсіи, то силы составляются взаимно въ сомкнутый многоугольникъ, такъ называемый многоугольникъ силъ.

Поэтому, на фиг. 30, силы P_1, P_2... P_6, дѣйствующія на точку O, будутъ въ равновѣсіи.

Порядокъ взаимнаго размѣщенія отдѣльныхъ силъ при этомъ, какъ уже было показано при графическомъ сложеніи, произволенъ.

III. Если силы P_1, P_2, P_3...., дѣйствующія на твердое тѣло и лежащія въ одной и той же плоскости, такъ называемой плоскости силъ, не пересѣкаются въ одной и той же точкѣ, то предполагаютъ что тѣло замѣнено системою прямолинейныхъ твердыхъ жердей, которыя, переходя отъ одной силы къ другой, образуютъ многоугольникъ, отдѣльныя стороны котораго должны быть въ состояніи сопротивляться растягивающимъ и сжимающимъ силамъ, образуемымъ въ нихъ внѣшними силами. Этотъ многоугольникъ, замѣняющій твердое тѣло, называется обыкновенно веревочнымъ многоугольникомъ, часто также колѣнчатымъ многоугольникомъ или линіею сопротивленія. Конечныя (угловыя) точки его называются узлами, а силы, образуемыя въ сторонахъ многоугольника внѣшними силами, называются внутренними силами или натяженіями.

Такимъ образомъ, наша задача приводится къ опредѣленію условій равновѣсія для внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на веревочный многоугольникъ.

Равновѣсіе силъ на веревочномъ многоугольникѣ. Если веревочный многоугольникъ K_1, K_2, K_3..., фиг. 31, долженъ находиться въ равновѣсіи, при дѣйствіи на него внѣшнихъ силъ P_1, P_2, P_3..., то стороны его должны быть расположены такимъ образомъ, чтобы внѣшняя сила, дѣйствующая на каждомъ узлѣ, была въ равновѣсіи съ обѣими внутренними силами тѣхъ сторонъ многоугольника, которыя сходятся на томъ же узлѣ.

Если обозначить натяженія отдѣльныхъ сторонъ многоугольника чрезъ S_1, S_2, S_3..., то поэтому, для равновѣсія, три силы P_1, S_1

и S_5, дѣйствующія на узелъ K_1, должны составляться въ треугольникъ 015. Точно также, три силы P_2, S_1 и S_2, дѣйствующія въ K_2 и находящіяся въ равновѣсіи, составляются въ треугольникъ 012, который съ предъидущимъ имѣетъ общую сторону $01 = S_1$. Подобнымъ же образомъ, для равновѣсія узла K_3, дѣйствующія на немъ три силы P_3, S_2 и S_3 должны составляться въ треугольникъ 023, который съ предшествующимъ имѣетъ общую сторону $02 = S_2$, и т. д. Отсюда можно видѣть, что для равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на веревочный многоугольникъ, взаимно послѣдующіе треугольники должны имѣть по одной общей сторонѣ, изъ чего слѣдуетъ положеніе:

Если силы P_1, P_2, P_3.... на веревочномъ многоугольникѣ находятся въ равновѣсіи, то онѣ составляются въ сомкнутый многоугольникъ 123... и линіи, проведенныя чрезъ вершины 123... этого многоугольника, параллельно сторонамъ S_1, S_2, S_3... веревочнаго многоугольника, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ 0, такъ называемомъ полюсѣ, которая располагается такимъ образомъ, что исходящіе изъ нея лучи 01, 02, 03.... совершенно опредѣляютъ натяженія S_1, S_2, S_3.... веревочнаго многоугольника, по величинѣ и направленію.

Изъ этого правила слѣдуетъ также замѣчательное свойство, что когда данныя силы на веревочномъ многоугольникѣ должны быть въ равновѣсіи, то, при заданіи направленія двухъ сторонъ многоугольника, принадлежащихъ одному узлу, немедленно же опредѣляются всѣ слѣдующія стороны веревочнаго многоугольника; и далѣе, что если будутъ даны веревочный многоугольникъ и направленіе внѣшнихъ силъ, то изъ величины одной изъ этихъ силъ немедленно же выводятся величины всѣхъ остальныхъ.

Также очевидно, что когда силы на веревочномъ многоугольникѣ не будутъ въ равновѣсіи, то замыкающая сторона для линейной связи, построенной изъ внѣшнихъ силъ, опредѣляетъ равнодѣйствующую этихъ силъ, по направленію и величинѣ.

Сложеніе силъ на веревочномъ многоугольникѣ производится слѣдовательно по тѣмъ же правиламъ, какъ для случая, когда всѣ силы дѣйствуютъ на одну точку.

Добавленіе. Если на веревочномъ многоугольникѣ, фиг. 32, разсѣчь двѣ его стороны, напр. K_1K_6 и K_4K_5, то очевидно, чтобы равновѣсіе осталось не нарушеннымъ, на точкахъ пересѣченія, съ обѣихъ сторонъ, слѣдуетъ приложить силы, которыя, по направленію и величинѣ, должны быть одинаковы съ натяженіями S_1 и S_5, дѣйствующими на пересѣченныхъ сторонахъ многоугольника. Отсюда тотчасъ же видно, что равнодѣйствующая R натяженій S_1 и S_5, сдѣлавшихся теперь внѣшними силами, удерживаетъ въ равновѣсіи внѣшнія силы, дѣйствующія на многоугольникъ слѣва и справа сѣкущей плоскости $\alpha\beta$. Направленіе и величина R опредѣляется діагональю 46 многоугольника силъ, потому что для равновѣсія, по предыдущему, равнодѣйствующая R должна образовать сомкнутый многоугольникъ или съ силами P_1, P_2, P_3, P_4, или же съ силами P_5, P_6. Кромѣ того также, точка пересѣченія D продолженій обѣихъ разсѣченныхъ сторонъ многоугольника даетъ очевидно одну точку для R. Поэтому R представляется съ одной стороны равнодѣйствующею силъ P_1, P_2, P_3 и P_4, и съ другой стороны силъ P_5 и P_6.

Отсюда вообще слѣдуетъ:

Равнодѣйствующая R всѣхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ между двумя сторонами веревочнаго многоугольника, проходитъ чрезъ точку пересѣченія D продолженій этихъ его сторонъ и опредѣляется, по направленію и величинѣ, изъ многоугольника силъ.

Это правило имѣетъ большое значеніе во всей статикѣ, и подтверждаетъ также разложеніе силъ, при помощи многоугольниковъ веревочнаго и силъ. Если напр. сила R должна быть разложена на двѣ другія силы P_5 и P_6 даннаго направленія, то должно нанести послѣднія на многоугольникѣ силъ, продолжить на веревочномъ многоугольникѣ разлагаемую силу R назадъ, и провести чрезъ точку E ея EK_5 и EK_6 параллельно сторонамъ 45 и 56 многоугольника силъ; затѣмъ провести отъ K_5 прямую P_5 равную и параллельную 45 и отъ K_6 прямую P_6 равную и параллельную 56, то очевидно силы P_5 и P_6 замѣнятъ силу R.

IV. Если внѣшнія силы, дѣйствующія на веревочный многоугольникъ, параллельны, то, для возможности равновѣсія, онѣ должны частью дѣйствовать по направленіямъ противоположнымъ, причемъ, очевидно, сумма силъ, дѣйствующихъ по одному направленію, должна быть равна суммѣ силъ, дѣйствующихъ по направленію противоположному. Многоугольникъ силъ тогда переходитъ въ одну прямую. Въ этомъ случаѣ, для равновѣсія каждаго узла веревочнаго многоугольника, составляющія натяженій, дѣйствующія перпендикулярно къ внѣшнимъ силамъ, должны быть равны, потому что внѣшнія силы могутъ уничтожить только паралельныя имъ составляющія натяженій, и слѣдовательно, эти перпендикулярныя составляющія натяженій должны уравновѣшиваться между собою, что возможно тогда только, когда онѣ имѣютъ равныя величины и противоположныя направленія.

Отсюда получается слѣдовательно общее правило:

Если на веревочномъ многоугольникѣ внѣшнія силы паралельны, то перпендикулярныя къ нимъ составляющія натяженій имѣютъ равныя величины.

Если внѣшнія силы вертикальны, то горизонтальныя составляющія натяженій веревки называются тогда вообще горизонтальнымъ натяженіемъ.

Фиг. 33 даетъ наглядное изображеніе многоугольниковъ веревочнаго и силъ, отвѣчающихъ равновѣсію между паралельными силами P_1, P_2 . . P_5. Обоюдныя соотношенія между многоугольниками веревочнымъ и силъ будутъ здѣсь тѣ же самыя, какъ на фиг. 32, такъ что разсматриваемый случай представляетъ не болѣе, какъ частную задачу случая III.

Горизонтальное натяженіе, на фиг. 33, опредѣляется очевидно нормальнымъ разстояніемъ Oh полюса отъ линіи силъ, т. е. такъ называемымъ полярнымъ разстояніемъ.

Мы перейдемъ теперь къ примѣненію полученныхъ здѣсь результатовъ, и сперва ограничимся всего чаще встрѣчающимся на практикѣ случаемъ паралельныхъ силъ.

Дѣйствіе паралельныхъ силъ на отдѣльную балку съ прямою продольною осью (*).

8. Вліяніе сосредоточенныхъ грузовъ неизмѣннаго положенія на вертикальныя силы и моменты.

I. *Опредѣленіе вертикальныхъ силъ.*

Если на балку съ прямою осью AF, фиг. 34, лежащую на двухъ опорахъ, дѣйствуетъ произвольное число грузовъ P_1, P_2, P_3 . . . и желательно опредѣлить сперва сопротивленія опоръ D_1 и

(*) Винклеръ. Теорія внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на прямыя балки, § 3—14, гдѣ вопросъ этотъ рѣшенъ аналитически и графически.

Кекъ. Графическій способъ опредѣленія напряженій связей фермъ. § 3—4.

Моръ. Графическій способъ опредѣленія моментовъ и вертикальныхъ силъ, дѣйствующихъ на балки. § 2.

D_2, и потомъ вертикальныя или перерѣзывающія силы, образующіяся на отдѣльныхъ поперечныхъ сѣченіяхъ балки, то это можетъ быть сдѣлано, какъ исчисленіемъ, такъ также и построеніемъ. Но какъ рѣшеніе этой задачи исчисленіемъ можетъ быть предположено уже извѣстнымъ, то предложенную задачу мы полагаемъ рѣшить только графическимъ путемъ, который кромѣ того есть простѣйшій.

Отложить данныя силы P_1, P_2, P_3, P_4 для образованія прямолинейнаго многоугольника силъ послѣдовательно на одной прямой $A'4$ (фиг. 34, a) и провести изъ полюса O, взятаго произвольно внѣ $A'4$, лучи OA', $O1$, $O2$, $O3$, $O4$. Потомъ построить соотвѣтствующій веревочный многоугольникъ, проводя ab параллельно $A'O$ до вертикали силы P_1, затѣмъ bc параллельно $1O$ до вертикали P_2, cd параллельно $2O$ и т. д.

Если теперь сомкнуть веревочный многоугольникъ прямою fa, и провести чрезъ полюсъ O лучъ OS параллельно fa, то — по IV-му случаю предъидущаго § — для равновѣсія должно быть очевидно $D_1 = A'S$ и $D_2 = SF'$.

Если далѣе, вертикальныя силы, образующіяся на поперечныхъ сѣченіяхъ отрѣзковъ AB, BC, CD . . . ., обозначить послѣдовательно чрезъ V_1, V_2, V_3 . . . ., то будетъ,

$$V_1 = D_1 = SA',$$
$$V_2 = D_1 - P_1 = A'S - A'1 = S1,$$
$$V_3 = D_1 - P_1 - P_2 = A'S - A'1 - 12 = S2,$$

и т. д., т. е. **вертикальныя силы изображаются разстояніями точекъ многоугольника силъ отъ** S.

Такимъ образомъ, на фиг. 34, b, вертикальныя силы взяты изъ многоугольника силъ и отложены, какъ ординаты на соотвѣтственныхъ поперечныхъ сѣченіяхъ.

Изъ веревочнаго многоугольника можно кромѣ того, по предъидущему, очень легко опредѣлить равнодѣйствующую двухъ отдѣльныхъ или нѣсколькихъ взаимно послѣдующихъ силъ. Такъ точка пересѣченія g продолженій cd и fe даетъ точку приложенія равнодѣйствующей P_3 и P_4; далѣе, точка пересѣченія r продолженій ab и fe даетъ одну изъ точекъ равнодѣйствующей всѣхъ силъ, лежащихъ между a и f, слѣдовательно грузовъ P_1, P_2, P_3 и P_4, и такъ далѣе.

II. *Опредѣленіе дѣйствующихъ или статическихъ моментовъ внѣшнихъ силъ.*

Такъ какъ измѣренія поперечныхъ сѣченій балки зависятъ въ особенности отъ статическихъ моментовъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на эти поперечныя сѣченія, то опредѣленіе этихъ моментовъ имѣетъ большую важность для строительной практики.

Подъ статическимъ или дѣйствующимъ моментомъ M внѣшнихъ силъ, относительно произвольнаго поперечнаго сѣченія $\alpha\beta$ балки (фиг. 34), подразумѣвается, какъ извѣстно, произведеніе равнодѣйствующей R всѣхъ силъ, дѣйствующихъ по одну или по другую сторону поперечнаго сѣченія $\alpha\beta$, на перпендикулярное разстояніе l силы R отъ $\alpha\beta$. Въ разсматриваемомъ случаѣ, напр. для плоскости сѣченія $\alpha\beta$, сила $R = D_1 - P_1 = S1$ и ея точка приложенія лежитъ въ точкѣ i, въ которой пересѣкаются стороны многоугольника, разсѣченныя $\alpha\beta$.

Слѣдовательно, если опустить изъ i на $\alpha\beta$ перпендикуляръ ik, длина котораго равна l, то моментъ силы для $\alpha\beta$ будетъ,

$$M = Rl = S1 \times ik.$$

Это произведеніе однако же очень легко опредѣляется графически. Именно, если опредѣлить въ многоугольникѣ силъ постоянное горизонтальное натяженіе H и имѣть въ виду, что треугольники $OS1$ и imn подобны, и что H и l изображаютъ соотвѣтственныя высоты этихъ треугольниковъ, то получится отношеніе,

$$S1 : H = mn : l,$$

или, если mn обозначить чрезъ y и для $S1$ подставить его величину,

$$R : H = y : l, \text{ откуда } M = Rl = Hy.$$

Моментъ силы M для произвольнаго поперечнаго сѣченія поэтому прямо пропорціоналенъ вертикальной ординатѣ y веревочнаго многоугольника на разсматриваемомъ поперечномъ сѣченіи.

Если притомъ принять горизонтальное натяженіе или полярное разстояніе H за единицу силъ, то будетъ,

$$M = y;$$

слѣдовательно въ этомъ случаѣ, моменты силъ изображаются непосредственно вертикальными ординатами веревочнаго многоугольника.

Одинъ взглядъ на веревочный многоугольникъ показываетъ намъ также, что наибольшіе моменты дѣйствуютъ на тѣхъ поперечныхъ сѣченіяхъ, которыя проходятъ чрезъ внѣшнія силы.

Эти, въ высшей степени замѣчательныя, свойства веревочнаго многоугольника всего лучше указываютъ примѣненіе его къ рѣшенію предложенной задачи, и приводятъ очевидно гораздо скорѣе и нагляднѣе къ цѣли, нежели какъ это возможно при исчисленіи. Само собою понятно, что выведенныя здѣсь правила для вертикальныхъ силъ и ихъ моментовъ, въ той же мѣрѣ относятся вообще къ параллельнымъ силамъ, замѣняя только обозначенія „вертикальное направленіе“ вездѣ словами „направленіе силы“ или взамѣнъ „вертикальныхъ ординатъ“ употребляя выраженіе „ординаты параллельныя направленію силъ“.

9. Вліяніе подвижныхъ сосредоточенныхъ грузовъ на вертикальныя силы и моменты.

Такъ какъ дѣйствія параллельныхъ силъ просто складываются, то можно для каждой силы P, присовокупляющейся къ 4-мъ силамъ P_1, P_2, P_3 и P_4, фиг. 34, внутри предѣловъ AF, изслѣдовать ея дѣйствіе на разсматриваемое поперечное сѣченіе $\alpha\beta$, и полученный при этомъ результатъ сложить съ прежде найденнымъ.

Если поэтому произвести построеніе на фиг. 35 для груза P, дѣйствующаго на AF, совершенно такимъ же образомъ, какъ на фиг. 34, то отъ вступленія P увеличатся, напр. дѣйствующія въ A и F на фиг. 34 сопротивленія опоръ D_1 и D_2 соотвѣтственно до $D_1 = A'S$ и $D_2 = F'S$, фиг. 35, и соотвѣтствующая поперечному сѣченію $\alpha\beta$, фиг. 34, моментная ордината y до y', фиг. 35.

Чтобы изучить сперва вліяніе подвижнаго сосредоточеннаго груза P на вертикальную силу V въ поперечномъ сѣченіи $\alpha\beta$, фиг. 35, отстоящемъ отъ A на x, разсмотримъ слѣдующіе два случая:

а) Если P лежитъ справа поперечнаго сѣченія $\alpha\beta$, то дѣйствующая въ $\alpha\beta$ вертикальная сила $V = D_1 = P \times \frac{NF}{AF}$ (*).

(*) Для равновѣсія, если принять N за точку вращенія, необходимо должно существовать уравненіе $D_1 \times AN = D_2 \times FN$, и кромѣ того $P = D_1 + D_2$. Изъ перваго уравненія слѣдуетъ, $D_1 : D_2 = FN : AN$, или $D_1 : (D_1 + D_2) = FN : (FN + AN)$; т. е. $D_1 : P = FM : AF$, откуда, какъ и выше, $D_1 = P \times \frac{FN}{AF}$.

Если принять направленныя вверхъ силы за положительныя, то слѣдовательно въ этомъ случаѣ V положительно и очевидно будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе будетъ BC, т. е. чѣмъ ближе лежитъ подвижной грузъ P къ поперечному сѣченію $\alpha\beta$.

b) Если же P, какъ на фиг. 36, лежитъ слѣва $\alpha\beta$, то дѣйствующая въ $\alpha\beta$ вертикальная сила $V = D_1 - P$, или какъ

$D_1 = P \times \frac{NF}{AF}$, то будетъ,

$$V = P\left(\frac{NF}{AF} - 1\right) = -P\left(\frac{AF - FN}{AF}\right), \text{ т. е. } V = -P \times \frac{AN}{AF}.$$

Въ этомъ случаѣ слѣдовательно, вертикальная сила отрицательна, и опять численно будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ ближе P лежитъ къ поперечному сѣченію $\alpha\beta$.

Изъ обоихъ выводовъ слѣдуетъ:

Каждый сосредоточенный грузъ образуетъ положительную или отрицательную вертикальную силу, смотря потому, лежитъ ли онъ съ правой или съ лѣвой стороны разсматриваемаго поперечнаго сѣченія, и эта вертикальная сила будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ ближе лежитъ грузъ къ поперечному сѣченію.

Если вообразить теперь балку нагруженною системою сосредоточенныхъ грузовъ, какъ напр. на желѣзно-дорожныхъ мостахъ поѣздомъ, то давленіе каждой оси, находящейся справа разсматриваемаго поперечнаго сѣченія $\alpha\beta$ образуетъ въ $\alpha\beta$ положительную, и обратно, каждая ось, находящаяся слѣва $\alpha\beta$ образуетъ въ $\alpha\beta$ отрицательную вертикальную силу; поэтому, если на поперечномъ сѣченіи $\alpha\beta$ поѣздъ долженъ образовать только положительныя вертикальныя силы, то онъ долженъ очевидно идти справа и надвигаться только до $\alpha\beta$. Если же обратно, поѣздъ идетъ слѣва и не переходитъ за поперечное сѣченіе $\alpha\beta$, то отъ давленія отдѣльныхъ осей образуются въ $\alpha\beta$ только отрицательныя вертикальныя силы.

Отсюда очевидно, что вертикальная сила, на произвольномъ поперечномъ сѣченіи мостовой балки, достигаетъ наибольшей численной величины тогда, когда поѣздъ, идущій отъ болѣе удаленной опоры, надвинется до поперечнаго сѣченія на столько, что первое паровозное колесо будетъ лежать на поперечномъ сѣченіи.

Изъ разсмотрѣнія фиг. 35 и 36, относительно момента силы на поперечномъ сѣченіи $\alpha\beta$ слѣдуетъ, что каждый грузъ, приложенный справа или слѣва $\alpha\beta$, между опорами A и F, увеличиваетъ ординату y веревочнаго многоугольника и тѣмъ болѣе, чѣмъ ближе грузъ лежитъ къ разсматриваемому поперечному сѣченію. Какъ моментъ M на произвольномъ поперечномъ сѣченіи $\alpha\beta$ возрастаетъ вмѣстѣ съ соотвѣтствующею ординатою y веревочнаго многоугольника, то отсюда слѣдуетъ:

Моментъ M внѣшнихъ силъ P_1, P_2, $P_3 \dots$, дѣйствующихъ внѣ произвольнаго поперечнаго сѣченія $\alpha\beta$ (фиг. 34), увеличивается каждою силою P, приложенною между опорами A и F, и притомъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе эта сила P приближается къ поперечному сѣченію.

Для мостовъ отсюда слѣдуетъ, что на произвольномъ поперечномъ сѣченіи, моментъ внѣшнихъ силъ будетъ наибольшимъ тогда, когда нагруженъ весь мостъ и наибольшіе сосредоточенные грузы сконцентрированы возможно ближе къ разсматриваемому поперечному сѣченію.

Какъ кромѣ того, наибольшая ордината веревочнаго многоугольника проходитъ всегда чрезъ одинъ изъ его узловъ, то слѣдовательно, чтобы моментъ для поперечнаго сѣченія былъ наибольшимъ, одинъ изъ наибольшихъ грузовъ долженъ стоять на поперечномъ сѣченіи.

Который изъ грузовъ долженъ стоять надъ разсматриваемымъ поперечнымъ сѣченіемъ, то это, при помощи веревочнаго многоугольника, легко опредѣляется въ каждомъ частномъ случаѣ.

Для ближайшаго поясненія можетъ служить слѣдующій примѣръ.

Примѣръ. Пролетъ въ свѣту $l = AB$, фиг. 37, моста пусть 10 метр., слѣдовательно какъ разъ такой, чтобы можно было помѣстить на мостѣ паровозъ съ его тендеромъ.

Давленія I, II, III отъ паровозныхъ осей пусть послѣдовательно 12, 13, 12 тон., и отъ 3-хъ тендерныхъ осей IV, V, VI каждое въ 9 тон.

Разстояніе между смежными паровозными осями пусть 1,3 метр., между смежными тендерными осями 1,5 метр., и между заднею паровозною и переднею тендерною осью 4 метр.

a) Опредѣленіе наибольшихъ вертикальныхъ силъ. Прежде всего, слѣдуетъ построить для данныхъ давленій осей многоугольникъ силъ съ произвольнымъ полюсомъ O, и вычертить по немъ веревочный многоугольникъ.

Если теперь, для поперечнаго сѣченія C, фиг. 38, отстоящаго отъ опоры A на x, должна быть опредѣлена наибольшая вертикальная сила V, то поѣздъ, идущій отъ болѣе удаленной опоры B, долженъ надвинуться до C такимъ образомъ, чтобы давленіе I пришлось на C.

Слѣдовательно, отложить отрѣзокъ x отъ перваго узла I веревочнаго многоугольника, который соотвѣтствуетъ давленію I, по горизонтальному направленію влѣво, провести въ конечной точкѣ вертикаль, которая опредѣлитъ на первой сторонѣ веревочнаго многоугольника точку i, найдти затѣмъ на веревочномъ многоугольникѣ точку k, находящуюся отъ i на горизонтальномъ разстояніи равномъ пролету моста l, соединить i съ k, и провести параллельно къ ik, чрезъ полюсъ O многоугольника силъ, лучь OS, то, по предъидущему, будетъ $V = A'S$.

Такимъ же образомъ, можно совершенно просто опредѣлить наибольшія вертикальныя силы, образующіяся на различныхъ поперечныхъ сѣченіяхъ.

Но какъ положительныя и отрицательныя вертикальныя силы, равноотстоящія отъ средины моста, получаются численно одинаковыми, то достаточно только опредѣлить положительныя вертикальныя силы, которыя соотвѣтствуютъ поѣзду, вступающему на мостъ справа, и преобразовать ихъ, по способу показанному на фиг. 38, для опредѣленія отрицательныхъ вертикальныхъ силъ, которыя очевидно соотвѣтствуютъ поѣзду, вступающему на мостъ слѣва.

b) Опредѣленіе наибольшихъ моментовъ. Требуется опредѣлить моментъ для поперечнаго сѣченія C, фиг. 39, для котораго $AC = 3$ метр. Какъ по предъидущему, на произвольномъ поперечномъ сѣченіи, наибольшій моментъ M образуется тогда, когда нагружена вся балка и одинъ изъ наибольшихъ грузовъ лежитъ на поперечномъ сѣченіи, то мы предположимъ въ настоящемъ случаѣ сперва, что поѣздъ надвинулся на мостъ справа на лѣво и такимъ образомъ, что обѣ переднія паровозныя оси I, II приходятся влѣво отъ C, а третья паровозная ось III стоитъ какъ разъ надъ C, и опредѣлимъ M для этого случая.

Для этой цѣли, отложить отъ узла веревочнаго многоугольника, соотвѣтствующаго грузу III, лежащему на поперечномъ сѣченіи, по горизонтальному направленію отрѣзки $AC = \text{III}\,l$ и $BC = \text{III}\,f$, опредѣлить соотвѣтствующія точки m и n веревочнаго многоугольника и соединить m съ n. Тогда очевидно mn будетъ замыкающею линіею веревочнаго многоугольника, соотвѣтствующаго этой нагрузкѣ, и потому, по § 8, искомый моментъ M будетъ равенъ произведенію изъ вертикальной ординаты y узла III на полярное разстояніе H; слѣдовательно $M = Hy$, и при этомъ, такъ какъ по предъидущему H обозначаетъ постоянное горизонтальное натяженіе, измѣряются H по масштабу силъ, а y очевидно по принятому линейному масштабу.

Подобнымъ же образомъ изслѣдуется, не будетъ ли M болѣе, когда грузъ II приходится надъ разсматриваемымъ поперечнымъ сѣченіемъ C, и слѣдовательно, провести чрезъ узелъ II веревочнаго многоугольника, соотвѣтствующій грузу II, горизонтальную, отложить на ней отъ II отрѣзки $AC = \mathrm{II}\,g$ и $BC = \mathrm{II}h$, опредѣлить соотвѣтствующія точки p и q веревочнаго многоугольника и построить для узла II, относительно замыкающей линіи pq, соотвѣтствующую ординату y'. Какъ моментная ордината y', найденная при этомъ способѣ нагрузки, болѣе нежели прежде опредѣленная y, то изъ этого слѣдуетъ, что для опредѣленія момента соотвѣтствующаго поперечному сѣченію C, слѣдуетъ удержать уравненіе $M = Hy'$ и это еще тѣмъ болѣе, что при каждой оси, вступающей на поперечное сѣченіе C, соотвѣтствующая моментная ордината будетъ еще менѣе, нежели какъ y.

По этому способу, легко найдти, нѣсколькими пробами, очень просто наибольшій моментъ, образующійся на каждомъ поперечномъ сѣченіи.

На фиг. 39 опредѣлены наибольшіе моменты, образующіеся на отдѣльныхъ поперечныхъ сѣченіяхъ, взятыхъ послѣдовательно на разстояніи 1 метра, причемъ очевидно соотвѣтственное изслѣдованіе достаточно произвести только для одной половины моста.

Добавленіе. Хотя изложенный способъ опредѣленія наибольшаго момента, образующагося на произвольномъ поперечномъ сѣченіи, нисколько не затруднителенъ, однако же можно, для скорѣйшаго достиженія цѣли, воспользоваться слѣдующимъ приближеннымъ способомъ, предложеннымъ профессоромъ Винклеромъ (*).

Чтобы моментъ на произвольномъ поперечномъ сѣченіи былъ наибольшимъ, поѣздъ долженъ имѣть такое положеніе, чтобы грузы по обѣимъ сторонамъ поперечнаго сѣченія относились между собою почти точно также, какъ части, на которыя подраздѣляется пролетъ поперечнымъ сѣченіемъ, или

(*) Винклеръ. Теорія внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на прямыя балки, стр. 11 и 12.

чтобы приходящаяся на погонную единицу нагрузка, съ каждой стороны поперечнаго сѣченія, была почти одинакова.

Примѣняя это правило къ повѣркѣ разобраннаго выше примѣра, и опредѣляя наибольшій моментъ, соотвѣтствующій поперечному сѣченію C, фиг. 39, найдемъ, что оно, какъ уже было опредѣлено, дѣйствительно удовлетворяется, когда грузъ II приходится надъ C; потому что тогда на отрѣзокъ AC, длиною 3 метр., дѣйствуетъ только грузъ I въ 12 тон., слѣдовательно на погонную единицу въ 4 тон., а на отрѣзокъ BC, длиною 7 метр., грузы III, IV и V въ 30 тон., слѣдовательно на погонную единицу также почти въ 4 тон.

Какъ для каждаго другаго положенія поѣзда, нагрузки на погонную единицу, приходящіяся по обѣимъ сторонамъ поперечнаго сѣченія C, разнятся значительно болѣе, нежели какъ для разсмотрѣннаго, то поэтому предъидущій способъ опредѣленія будетъ правиленъ.

Въ заключеніе слѣдуетъ еще замѣтить, что за наибольшую нагрузку, при длинныхъ желѣзно-дорожныхъ мостахъ, обыкновенно принимается два самыхъ тяжелыхъ, совершенно снаряженныхъ паровоза съ расположенными за ними тяжелыми товарными вагонами, нагруженными наибольшею допускаемою для нихъ кладью и прицѣпленными въ такомъ числѣ, что полный поѣздъ покрываетъ всю длину моста.

Чтобы, при такихъ длинныхъ мостахъ, не составлять каждый разъ снова чертежа для различныхъ положеній поѣзда, относительно разсматриваемыхъ отдѣльныхъ поперечныхъ сѣченій моста, всего проще нанести на бумажной лентѣ, въ принятомъ для чертежа масштабѣ, размѣщеніе осей всего поѣзда, соотвѣтственно ихъ занумеровать и приписать къ отдѣльнымъ осямъ отвѣчающія имъ давленія.

Простымъ сдвиженіемъ этой ленты вдоль длины моста, легко получить различныя положенія поѣзда на мостѣ, и затѣмъ опредѣлить, по изложенному способу, наибольшія вертикальныя силы и моменты, образующіеся на отдѣльныхъ поперечныхъ сѣченіяхъ.

10. Дѣйствіе непрерывно распредѣленной нагрузки.

Можно очевидно грузъ, непрерывно распредѣленный на всей длинѣ балки, предположить разбитымъ на безконечное число сосредоточенныхъ грузовъ, слѣдующихъ непосредственно одинъ за другимъ, и тогда веревочный многоугольникъ переходитъ въ веревочную кривую, къ которой очевидно относятся тѣ же положенія, какъ и для веревочнаго многоугольника. Если кромѣ того предположить, что частная нагрузка, соотвѣтствующая каждой погонной единицѣ балки, отложена какъ ордината надъ продольною осью AB балки, фиг. 40, то получившаяся такимъ образомъ площадь $AA'C'D'B'B$ изобразитъ такъ называемую грузовую площадь балки, которая даетъ наглядное изображеніе распредѣленія нагрузки.

Предположимъ, что $acdb$, фиг. 40, будетъ веревочною кривою, соотвѣтствующею этой нагрузкѣ.

Проводя къ этой кривой, въ произвольныхъ точкахъ c и d, соотвѣтствующихъ точкамъ C и D, касательныя, которыя пересѣкаются въ σ_2, то, по предъидущему, чрезъ σ_2 пройдетъ равнодѣйствующая нагрузки, покрывающей отрѣзокъ CD, или иными словами, точка пересѣченія σ_2 лежитъ вертикально подъ центромъ тяжести S_2 грузовой площади $CC'D'D$, приходящейся надъ CD.

Слѣдовательно, если всю грузовую площадь разбить на тонкіе вертикальные слои, то центры тяжести всѣхъ ихъ будутъ лежать вертикально надъ точками пересѣченія тѣхъ касательныхъ, которыя будутъ проходить чрезъ точки веревочной кривой, соотвѣтствующія отдѣльнымъ слоямъ. Такъ, напр. центръ тяжести S_1 грузовой площади $AA'C'C$ лежитъ надъ точкою пересѣченія σ_1 касательныхъ, проведенныхъ въ a и c къ веревочной кривой; далѣе, центръ тяжести S_3 нагрузки, покрывающей BD, лежитъ надъ точкою пересѣченія σ_3 касательныхъ, построенныхъ въ b и d, къ веревочной кривой.

Какъ лучи OA_1, $O1$, $O2$, $O3$, OB_1 многоугольника силъ параллельны къ касательнымъ точекъ a, c, d, b, соотвѣтствующихъ линіямъ раздѣла отдѣльныхъ слоевъ, то эти касательныя образуютъ очевидно веревочный многоугольникъ для сосредоточенныхъ грузовъ P_1, P_2, P_3.

Отсюда слѣдуетъ правило:

Если непрерывную нагрузку разбить на вертикальные слои, и разсматривать вѣса послѣднихъ, какъ сосредоточенные грузы P_1, P_2, P_3.., то стороны соотвѣтствующаго веревочнаго многоугольника будутъ касательны къ веревочной кривой, отвѣчающей непрерывной нагрузкѣ, и точки касанія будутъ лежать вертикально подъ линіями раздѣла отдѣльныхъ слоевъ.

Поэтому легко построить произвольное число касательныхъ къ веревочной кривой, и затѣмъ вычертить самую кривую.

При помощи веревочной кривой и многоугольника силъ опредѣляются потомъ вертикальныя силы и моменты для отдѣльныхъ поперечныхъ сѣченій, очевидно точно такимъ же образомъ, какъ въ § 8.

11 Дѣйствіе равномѣрно распредѣленной непрерывной нагрузки.

Если обозначить величину груза, распредѣленнаго равномѣрно на всей длинѣ $AB = l$, фиг. 41, балки, чрезъ P, то на единицу длины балки приходится количество $p = \frac{P}{l}$.

Откладывая p на AB какъ постоянную ординату, получатъ для грузовой площади прямоугольникъ $AA'B'B$.

Какъ здѣсь весь грузъ равномѣрно распредѣленъ по балкѣ, то очевидно, что на каждую изъ обѣихъ опоръ A и B приходится одно и то же давленіе $D = {}^1/_2\ P = {}^1/_2 pl$.

Вертикальная сила V, дѣйствующая на произвольномъ поперечномъ сѣченіи C, для котораго $AC = x$, опредѣляется очевидно выраженіемъ,

$$\alpha) \qquad V = D - px = {}^1/_2 p\ (l - 2x).$$

Для $x = {}^1/_2 l$, поэтому $V = 0$.

Наибольшею V будетъ для $x = 0$, именно $V = + {}^1/_2 pl$, и для $x = l$, именно $V = - {}^1/_2 pl$.

Какъ по уравн. α), сила V уменьшается съ увеличеніемъ x, и для $x = {}^1/_2 l$ приравнивается нулю, то въ разсматриваемомъ случаѣ, вертикальныя силы будутъ ограничены прямою LL', которая пересѣкаетъ ось AB на срединѣ M и отсѣкаетъ на опорныхъ точкахъ ординаты $AL = - BL' = {}^1/_2 pl$.

Моментъ, дѣйствующій на поперечное сѣченіе C, фиг. 42, будетъ,

$$\beta) \qquad M = Dx - {}^1/_2 p x^2 = {}^1/_2 px\,(l - x).$$

Для $x = 0$ и для $x = l$, будетъ $M = 0$, и обратно, для $x = {}^1/_2 l$, принимаетъ свою наибольшую величину, именно $M = {}^1/_8 pl^2$.

Моменты, построенные по уравн. β), для различныхъ величинъ x, даютъ параболу asb, вершина которой s лежитъ ниже средины ab на разстояніе $ms = {}^1/_8 pl^2$. Эти моменты впрочемъ легко опредѣляются изъ веревочной кривой, соотвѣтствующей разсматриваемому случаю, которая совершенно просто опредѣляется ея касательными.

Если, въ соотвѣтствующемъ многоугольникѣ силъ, фиг. 42, сдѣлать $A'B' = pl = P$ и $OA' = OB'$, то, если ai и bi изображаютъ крайнія касательныя къ веревочной кривой, параллельныя лучамъ OA' и OB', будетъ,

$$\text{триуг. } aim \infty \text{ триуг. } OA'h, \text{ слѣдовательно,}$$

$$im : A'h = am : Oh, \text{ или } im : {}^1/_2\, pl = {}^1/_2\, l : H; \text{ откуда,}$$

$$im = \frac{pl^2}{4H} \cdot$$

Если кромѣ того, сдѣлать полярное разстояніе H равнымъ единицѣ силы, то $im = {}^1/_4\, pl^2$, и слѣдовательно средняя точка im, т. е. точка s, будетъ вершиною параболы, такъ какъ для этой точки $ms = {}^1/_2\; mi = {}^1/_8\, pl^2$, какъ и выше.

Чтобы теперь построить касательную къ веревочной кривой въ точкѣ, лежащей подъ произвольнымъ поперечнымъ сѣченіемъ, не имѣя самой кривой, имѣютъ въ виду, что, по предъидущему параграфу, точки пересѣченія σ_1 и σ_2 искомыхъ касательныхъ съ ai и bi, должны лежать вертикально подъ центрами тяжести S_1 и S_2 частей AC и BC.

Какъ здѣсь, вслѣдствіе равномѣрнаго распредѣленія нагрузки, центры тяжести лежатъ на срединѣ отдѣльныхъ отрѣзковъ, то для цѣлаго ряда касательныхъ получается слѣдующее простое построеніе.

Раздѣлить ai и bi на одинаковое число равныхъ частей и соединить точки дѣленія, показаннымъ на фиг. 43 способомъ; то эти линіи соединенія опредѣляютъ систему касательныхъ къ веревочной кривой, по которой послѣдняя вычерчивается тѣмъ легче, что точки касанія, обозначенныя здѣсь кружками, лежатъ на срединѣ между точками пересѣченія взаимно послѣдующихъ касательныхъ.

Сдѣлавъ, какъ замѣчено уже было, полярное разстояніе или горизонтальное натяженіе H равнымъ единицѣ силы, то, по § 8, вертикальныя ординаты веревочной кривой дадутъ для соотвѣтствующихъ поперечныхъ сѣченій образующіеся моменты.

Поэтому слѣдовательно, если $H = 1$, то ордината y, проведенная въ точкѣ c, фиг. 42, равняется моменту M, образующемуся на поперечномъ сѣченіи C. Если же H не равно 1, то тогда $M = Hy$.

12. Дѣйствіе собственнаго вѣса и временной нагрузки балки.

Одновременное дѣйствіе собственнаго вѣса и временной нагрузки балки, какъ оно происходитъ при длинныхъ мостахъ, производится очевидно при помощи комбинацій опредѣленій, изложенныхъ въ послѣднихъ трехъ параграфахъ, для вертикальныхъ силъ и моментовъ. Но такъ какъ, для перваго приближеннаго исчисленія вертикальныхъ силъ и моментовъ, дѣйствующихъ на отдѣльныя поперечныя сѣченія проэктируемой балки, собственный вѣсъ предполагается равномѣрно распредѣленнымъ на всей длинѣ балки, то ранѣе всего приходится комбинировать правила § **9** и § **11**. При этомъ, для опредѣленія собственнаго вѣса, можно пользоваться эмпирическими формулами, выведенными изъ сравненія большаго числа мостовыхъ сооруженій.

Если собственный вѣсъ моста, съ пролетомъ въ l метр. (l' фут.), на метръ обозначить чрезъ p (на футъ чрезъ p'), то для желѣзнодорожныхъ мостовъ въ одинъ путь, средн. числ.,

$$p = 800 + 30l \text{ килограм.}, \quad p' = 14{,}9 + 0{,}17l' \text{ пуд.}$$

Опредѣливъ, по собственному вѣсу и по наибольшей временной нагрузкѣ, наибольшія вертикальныя силы и моменты, образующіеся на отдѣльныхъ поперечныхъ сѣченіяхъ, исчисляютъ затѣмъ величины поперечныхъ сѣченій, и отсюда опредѣляютъ дѣйствительный вѣсъ балки; затѣмъ, по этому вывѣренному собственному вѣсу и по наибольшей временной нагрузкѣ, опредѣляютъ наибольшія вертикальныя силы и моменты для отдѣльныхъ поперечныхъ сѣченій, и наконецъ, окончательныя измѣренія этихъ послѣднихъ.

Изложивъ, въ предъидущихъ параграфахъ, надѣюсь съ достаточною ясностью, опредѣленіе вертикальныхъ силъ и моментовъ, образуемыхъ внѣшними силами на отдѣльныхъ поперечныхъ сѣченіяхъ, я полагаю перейдти еще къ объясненію в н у т р е н н и х ъ с и л ъ или с о п р о т и в л е н і й, вызываемыхъ внѣшними силами на поперечныхъ сѣченіяхъ, и къ выводу условій равновѣсія между внѣшними и внутренними силами.

Изгибъ отдѣльной балки съ прямою осью.

13. Предположенія и объясненія.

Тѣло подвергается одному изгибу только тогда, когда дѣйствующія или внѣшнія силы перпендикулярны къ оси тѣла (т. е. къ линіи соединяющей центры тяжести всѣхъ его поперечныхъ сѣченій), и лежатъ всѣ въ одной плоскости, такъ называемой плоскости силъ, которая должна проходить чрезъ ось тѣла.

Эти силы могутъ быть частью сосредоточенными грузами, частью распредѣляться на всей длинѣ, или же только на отдѣльныхъ частяхъ балки. Къ внѣшнимъ силамъ принадлежатъ также противодѣйствія опоръ или давленія на опоры.

Отъ дѣйствія всѣхъ внѣшнихъ силъ, которыя мы назовемъ, для краткости, полною нагрузкою балки, балка, которую можно разсматривать какъ совокупность волоконъ, параллельныхъ ея оси и прочно связанныхъ между собою, получаетъ изгибъ, который однако же слѣдуетъ предположить столь незначительнымъ, чтобы при немъ не были перейдены предѣлы упругости. Если разсматривать какой либо произвольный отрѣзокъ AC балки, фиг. 44, находящейся въ равновѣсіи, то поперечныя сѣченія C и C_1, весьма близкія одинъ къ другому и первоначально параллельныя, послѣ изгиба болѣе не будутъ уже параллельны, но будутъ почти перпендикулярны къ изогнутымъ волокнамъ, и потому, по надлежащемъ продолженіи, пересѣкутся въ прямой O (фиг. 44, a).

Изъ обстоятельства, что оба поперечныя сѣченія C и C_1, послѣ изгиба, принимаютъ сходящееся положеніе, слѣдуетъ непосредственно, что находящіяся между ними волокна, въ различныхъ плоскостяхъ волоконъ, должны имѣть различную длину. Поэтому, по фиг. 44, a, волокна, лежащія на нижней или на выпуклой сторонѣ будутъ удлинены, слѣдовательно растянуты, и обратно, лежащія на верхней или на вогнутой сторонѣ будутъ укорочены, слѣдовательно сжаты.

Поэтому очевидно, при переходѣ отъ растягиваемыхъ волоконъ къ сжимаемымъ, долженъ находиться слой, котораго волокна не будутъ ни растянуты, ни сжаты, и который слѣдовательно, несмотря на кривизну, сохраняетъ первоначальную свою длину, и потому, этотъ слой волоконъ называется нейтральнымъ или неизмѣняемымъ слоемъ; далѣе, линія пересѣченія его съ произвольною поперечною плоскостью называется нейтральною осью поперечнаго сѣченія, и наконецъ, кривая пересѣченія нейтральнаго слоя волоконъ съ плоскостью силъ—упругою линіею.

Отъ нейтральнаго слоя удлиненіе, соотвѣтственно укороченіе, возрастаетъ постепенно къ крайнимъ волокнамъ, и слѣдовательно въ этихъ послѣднихъ достигаетъ наибольшей величины.

Мѣра для удлиненія, или укороченія волоконъ получается изъ сдѣланнаго выше предположенія, что поперечныя сѣченія, которыя до изгиба были перпендикулярны къ продольной оси, остаются таковыми же и послѣ изгиба. Какъ результаты, выводимые при помощи этого предположенія, согласуются съ дѣйствительностью, то можно принять сдѣланное предположеніе за допускаемое.

14. Опредѣленіе напряженій въ произвольномъ поперечномъ сѣченіи.

Подъ напряженіемъ подразумѣвается противодѣйствіе элемента поперечнаго сѣченія, отнесенное къ единицѣ площади.

Для опредѣленія его служитъ слѣдующее соображеніе. Пусть балка AB, фиг. 44, находящаяся въ равновѣсіи, при дѣйствіи на нее произвольныхъ внѣшнихъ силъ D_1, P_1, P_2. ., раздѣлена произвольною поперечною плоскостью $\alpha\beta$ на два отрѣзка AC и CB; внѣшнія силы, соотвѣтствующія каждому отрѣзку, тогда вообще не могутъ быть въ равновѣсіи; каждый отрѣзокъ долженъ бы былъ поэтому придти въ движеніе, если бы вмѣсто отсѣченной части не были приложены къ поперечному сѣченію внѣшнія силы, равныя тѣмъ внутреннимъ силамъ, которыя до разсѣченія были вызваны на соотвѣтствующемъ поперечномъ сѣченіи внѣшними силами.

Если разсматривать напр. отрѣзокъ AC и, взамѣнъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на этотъ отрѣзокъ, ввести въ исчисленіе ихъ равнодѣйствующую, т. е. вертикальную силу V, фиг. 44, a, соотвѣтствующую поперечному сѣченію C, и опредѣляемую по § 8. то найдется, что, для дальнѣйшаго состоянія равновѣсія, къ плоскости разрѣза каждаго отдѣльнаго продольнаго волокна, должна быть приложена внѣшняя сила, совпадающая съ продольнымъ его направленіемъ, и одинаковой же величины съ напряженіемъ, которое существовало прежде въ этомъ волокнѣ. Эти сопротивляющіяся напряженія отдѣльныхъ волоконъ, когда изгибъ — какъ предположено — находится въ предѣлахъ упругости, слѣдовательно очень незначителенъ, могутъ быть разсматриваемы какъ горизонтальныя силы.

Но кромѣ этихъ горизонтальныхъ силъ, замѣняющихъ напряженія волоконъ, очевидно должна быть приложена на поперечномъ сѣченіи еще вертикальная сила, направленная внизъ, и уравновѣшивающаяся съ перерѣзывающею (вертикальною) силою V, слѣдовательно имѣющая величину $(-V)$.

На площади поперечнаго сѣченія C слѣдовательно, кромѣ сопротивляющихся напряженій продольныхъ волоконъ, образуется еще сопротивленіе перерѣзыванію (скользенію) вдоль этой площади, которое имѣетъ одинаковую съ вертикальною силою V величину и противоположное направленіе.

Чтобы изучить теперь напряженія волоконъ, дѣйствующія на поперечномъ сѣченіи C, замѣчаютъ, что послѣ изгиба всѣ элементы волоконъ, лежащіе между двумя безконечно близкими нормальными сѣченіями C и C_1, первоначально прямые и одинаковой длины, будутъ изогнуты такимъ образомъ, что они представятъ уже малыя круговыя дуги различной длины, и имѣющія общій центръ O, фиг. 44, a.

Если, для возможности опредѣленія удлиненій или укороченій этихъ элементарныхъ волоконъ, провести чрезъ C къ плоскости m_1 n_1 параллельную ik, то части дугъ лежащія между Cm и Ci дадутъ удлиненія, и обратно, лежащія между Cn и Ck дадутъ укороченія, которыя получаютъ отдѣльныя элементарныя волокна, сравнительно съ первоначальною ихъ длиною CC_1, на различныхъ разстояніяхъ отъ нейтральнаго слоя, при изгибѣ.

Эти удлиненія и укороченія — какъ видно изъ фигуры — пропорціональны разстояніямъ отъ нейтральнаго слоя CC_1, и какъ, по закону упругости, удлиненія опять пропорціональны напряженіямъ, то слѣдовательно также *напряженія отдѣльныхъ волоконъ относятся какъ ихъ разстоянія отъ нейтральнаго слоя.*

Если обозначить поэтому, чрезъ s напряженіе волокна на единицу площади поперечнаго сѣченія на разстояніи $= 1$ отъ нейтральной оси NN_1, фиг. 44, a, то напряженіе на разстояніи y отъ нейтральной оси опредѣляется выраженіемъ sy.

Чтобы теперь опредѣлить напряженія волоконъ на различныхъ мѣстахъ поперечнаго сѣченія, вообразимъ площадь поперечнаго сѣченія разбитою на безконечно тонкіе слои, параллельные нейтральной оси NN_1; обозначимъ площадь одного изъ этихъ элементарныхъ слоевъ, лежащаго на разстояніи y отъ нейтральной оси, чрезъ f, то для напряженія его получится выраженіе syf.

Это напряженіе разсматривается какъ *растяженіе* или *положительное* напряженіе, когда разсматриваемая элементарная площадь лежитъ ниже нейтральной оси, и обратно, какъ сжатіе или отрицательное напряженіе, когда элементарная площадь f лежитъ выше этой оси.

Если отрѣзокъ AC, при дѣйствіи всѣхъ горизонтальныхъ напряженій, образующихся на площади поперечнаго сѣченія C, долженъ находиться въ равновѣсіи, то — какъ эти напряженія не могутъ быть уничтожены перерѣзывающею (вертикальною) силою V — алгебрическая сумма ихъ должна быть равна нулю; слѣдовательно, вводя знакъ суммованія Σ, получатъ,

$$\Sigma(syf) = 0;$$

или такъ какъ величина s, входящая общимъ множителемъ всѣхъ членовъ, соединенныхъ подъ знакомъ суммы, можетъ быть вынесена за знакъ суммы и не можетъ быть равна нулю, то уравненіе будетъ,

$$\Sigma(yf) = 0.$$

Такъ какъ fy обозначаетъ статическій моментъ элементарной площади, относительно нейтральной оси NN_1, то изъ послѣдняго уравненія слѣдуетъ, что сумма моментовъ всѣхъ элементарныхъ площадей всего поперечнаго сѣченія, относительно нейтральной оси, равна нулю. Но по теоріи центра тяжести, какъ извѣстно, вмѣсто этой суммы моментовъ отдѣльныхъ элементарныхъ площадей, можно взять произведеніе изъ всей площади поперечнаго сѣченія на разстояніе ея центра тяжести до той же оси, и какъ это произведеніе должно быть равно нулю, то отсюда слѣдуетъ, что центръ тяжести площади поперечнаго сѣченія лежитъ самъ на нейтральной оси.

Уравненіе $\Sigma(syf) = 0$ показываетъ слѣдовательно, что нейтральная ось проходитъ чрезъ центръ тяжести площади поперечнаго сѣченія.

Но чтобы также отрѣзокъ AC оставался въ равновѣсіи относительно вращенія, какъ извѣстно, алгебрическая сумма статическихъ моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на отрѣзокъ AC, относительно какой либо произвольной оси, напр. относительно нейтральной оси поперечнаго сѣченія C, должна быть равна нулю. Слѣдовательно, статическій моментъ M вертикальной силы V, стремящейся вращать отрѣзокъ C слѣва на право, долженъ быть равенъ суммѣ статическихъ моментовъ всѣхъ напряженій отдѣльныхъ элементарныхъ волоконъ, изъ которыхъ каждый, взятый отдѣльно, произвелъ бы вращеніе, направленное справа на лѣво.

Статическій моментъ напряженія элементарнаго волокна, находящагося на разстояніи y отъ нейтральнаго слоя, равняется

$$syfy \text{ или } sfy^2;$$

поэтому для равновѣсія должно существовать уравненіе,

$$M = \Sigma(sfy^2),$$

или какъ опять s, входящее общимъ множителемъ всѣхъ членовъ, соединенныхъ подъ знакомъ суммы, можетъ быть вынесено за знакъ суммы, то

$$M = s\Sigma(fy^2).$$

Въ этомъ уравненіи, $\Sigma(fy^2)$ обозначаетъ сумму всѣхъ произведеній изъ отдѣльныхъ элементарныхъ площадей площади поперечнаго сѣченія на квадратъ ихъ разстояній отъ нейтральной оси, или такъ называемый моментъ инерціи площади поперечнаго сѣченія, относительно нейтральной оси. Если обозначить его чрезъ I, то для обезпеченія отъ вращенія будетъ,

$$M = sI.$$

Чтобы вмѣсто s, т. е. вмѣсто напряженія волоконъ на единицу площади на разстояніи $= 1$ отъ нейтральной оси, ввести практически употребительное значеніе, замѣчаютъ, что на крайнихъ волокнахъ, находящихся въ наибольшемъ разстояніи отъ нейтральной оси, образуется наибольшее напряженіе, и что слѣдовательно это наибольшее напряженіе, когда балка не должна быть напряжена свыше предѣловъ упругости, не должно превосходить нѣкоторой величины, зависящей отъ прочности и упругости матеріала, и которая можетъ быть разсматриваема, какъ допускаемая для s.

Обозначая поэтому разстоянія крайнихъ растягиваемыхъ и сжимаемыхъ волоконъ отъ нейтральной оси, соотвѣтственно чрезъ v_1 и v_2, и наибольшее допускаемое растягивающее и сжимающее напряженіе этихъ волоконъ (на единицу площади), соотвѣтственно чрезъ K_1 и K_2, то — какъ напряженія волоконъ возрастаютъ съ разстояніемъ отъ нейтральнаго слоя въ прямомъ отношеніи — получатъ уравненія,

$$\frac{s}{K_1} = \frac{1}{v_1} \text{ и } \frac{s}{K_2} = \frac{1}{v_2}, \text{ откуда,}$$

$$s = \frac{K_1}{v_1} \text{ или } s = \frac{K_2}{v_2}.$$

Вводя эти величины въ предъидущее уравненіе, получатъ,

$$M = \frac{K_1}{v_1} I \text{ или } M = \frac{K_2}{v_2} I.$$

Выраженія $\frac{K_1}{v_1} I$ или $\frac{K_2}{v_2} I$ называются моментомъ прочнаго сопротивленія разсматриваемаго поперечнаго сѣченія, относительно растяженія или сжатія, и потому можно сказать:

Для обезпеченія отъ вращенія, моментъ прочнаго сопротивленія разсматриваемаго поперечнаго сѣченія долженъ быть равенъ изгибающему моменту M вертикальной силы V, соотвѣтствующей этому поперечному сѣченію.

Изъ обоихъ послѣднихъ уравненій слѣдуетъ,

$$\frac{K_1}{v_1} = \frac{K_2}{v_2};$$

т. е. что въ каждой раціонально построенной балкѣ, форма поперечнаго сѣченія располагается такимъ образомъ, чтобы наибольшее допускаемое растяженіе и сжатіе въ крайнихъ растянутыхъ, соотвѣтственно сжатыхъ, волокнахъ достигалось одновременно.

Какъ для стали, желѣза и дерева почти $K_1 = K_2$, то въ балкѣ, построенной изъ этихъ матеріаловъ, площадь поперечнаго сѣченія должна раздѣляться нейтральною осью на двѣ симметрическія части.

Для чугуна, напротивъ, сопротивленіе сжатію по крайней мѣрѣ въ два раза болѣе, нежели растяженію, и потому для чугунныхъ балокъ, поперечное сѣченіе слѣдуетъ располагать такимъ образомъ, чтобы крайнія сжатыя волокна отстояли отъ нейтральной оси по крайней мѣрѣ въ два раза болѣе, нежели какъ крайнія растягиваемыя.

Какъ кромѣ того матеріалъ близь нейтральнаго слоя напряженъ наименѣе, и обратно въ наиболѣе удаленныхъ волокнахъ напряженъ наиболѣе, то изъ этого слѣдуетъ, что въ балкахъ, построенныхъ раціонально, матеріалъ (при условіи прочнаго соединенія всѣхъ частей поперечнаго сѣченія) долженъ быть возможно болѣе удаленъ отъ нейтральнаго слоя.

Если на практикѣ уравненіе $\frac{K_1}{v_1} = \frac{K_2}{v_2}$ удовлетворяется, то очевидно будетъ все равно, удержать ли уравненіе $M = \frac{K_1}{v_1} I$, или

Опредѣлимъ теперь моментъ сопротивленія и инерціи для поперечнаго сѣченія, изображеннаго на фиг. 45.

Если b ширина нижняго слоя волоконъ $m_1 n_1$ и K_1 существующее въ немъ напряженіе на единицу площади, то сопротивленіе нижняго слоя волоконъ равняется bK_1; если при этомъ, принять K_1 за единицу мѣры для сопротивленій, то b изобразитъ тогда сопротивленіе, существующее въ нижнемъ слоѣ волоконъ.

Чтобы опредѣлить сопротивленіе z произвольнаго слоя волоконъ pq, отстоящаго отъ нейтральной оси NN_1 на разстояніе α и имѣющаго ширину β, то, имѣя въ виду что, по § **14**, напряженіе s (на единицу площади) на разстояніи $= 1$ отъ NN_1 равняется $\frac{K_1}{v_1}$, или для $K_1 = 1$, $s = \frac{1}{v_1}$, сопротивленіе въ разсматриваемомъ слоѣ опредѣлится поэтому чрезъ $z = s\,\alpha\beta = \frac{\alpha\beta}{v_1}$.

Слѣдовательно z будетъ четвертою пропорціональною къ тремъ величинамъ α, β, v_1 и опредѣляется легко графически.

Именно, проэктировать pq на основаніе $m_1 n_1$ вертикально внизъ и соединить конечныя точки p' и q' проэкцій съ центромъ тяжести C поперечнаго сѣченія, то эти соединительныя линіи отсѣкаютъ на pq сопротивленіе $z = rs$; потому что триуг. $Cp'q' \infty$ триуг. Crs, и какъ въ подобныхъ триугольникахъ, линіи основанія относятся какъ соотвѣтственныя высоты, то $\beta : z = v_1 : \alpha$, откуда дѣйствительно $z = \frac{\alpha\beta}{v_1}$.

Подобнымъ же образомъ опредѣляютъ полное сопротивленіе другихъ слоевъ волоконъ на всей нижней половинѣ поперечнаго сѣченія, соединяютъ ихъ конечныя точки непрерывною линіею и заштриховываютъ лежащую внутри ея площадь.

Если предположить, что площадь заштрихованной фигуры Crm_1n_1sC, съ напряженіемъ K_1 на нижнемъ слоѣ, которое принято за единицу мѣры, будетъ напряжена равномѣрно, или иными словами, если умножить площадь F заштрихованной фигуры Crm_1n_1sC на K_1, то получится очевидно полное сопротивленіе растяженію $R_1 = FK_1$ нижней половины поперечнаго сѣченія, и точка приложенія котораго лежитъ въ центрѣ тяжести O_1 этой заштрихованной фигуры, которую можно назвать, „площадью сопротивленія съ постояннымъ растяженіемъ“.

Подобнымъ же образомъ опредѣляется полное сопротивленіе сжатію $R_2 = R_1$, для части поперечнаго сѣченія, лежащей надъ нейтральною осью NN_1, причемъ однако, если верхній слой волоконъ tu не находится отъ NN_1, на такомъ же разстояніи, какъ нижній $m_1 n_1$, слѣдуетъ отнести сопротивленія отдѣльныхъ слоевъ къ такому слою $m_2 n_2$, который находится отъ NN_1 на такомъ же разстояніи, какъ и нисшій $m_1 n_1$, и сопротивленіе K_1 котораго на единицу площади принято за единицу мѣры.

Если же все поперечное сѣченіе раздѣляется нейтральною осью на двѣ симметрическія половины, то достаточно только опредѣлить R_1, и точку приложенія O_1 перенести, симметрически относительно N, въ O_2.

Если опредѣлено R_1, равно какъ и разстояніе $O_1 O_2 = d$, то, по предъидущему, сопротивленіе всего поперечнаго сѣченія $M = R_1 d$ и моментъ инерціи $I = \frac{v_1}{K_1} R_1 d$; но какъ $R_1 = FK_1$, то будетъ $I = v_1 F d$, гдѣ какъ уже было замѣчено — F обозначаетъ содержаніе площади сопротивленія съ постояннымъ напряженіемъ K_1, лежащей ниже нейтральной оси NN_1.

При этомъ графическомъ опредѣленіи момента инерціи и прочнаго сопротивленія приходится, какъ показано, всегда имѣть дѣло съ опредѣленіемъ центра тяжести неправильной площади.

Мы покажемъ теперь, въ короткихъ чертахъ, какъ производится это опредѣленіе.

16. Опредѣленіе центра тяжести площади.

Это опредѣленіе можетъ быть произведено или опытомъ, или построеніемъ.

Въ первомъ случаѣ, вырѣзаютъ неправильную площадь изъ твердой чертежной бумаги или изъ картона,и привѣшиваютъ ее къ нити, то эта нить, при покойномъ положеніи, даетъ направленіе одной линіи тяжести площади. Привѣшивая площадь еще разъ, но укрѣпляя нить въ другой какой либо точкѣ площади, получатъ, при состояніи равновѣсія, на направленіи нити опять линію тяжести. Точка пересѣченія обѣихъ линій тяжести будетъ поэтому искомымъ центромъ тяжести.

Чтобы опредѣлить центръ тяжести графическимъ путемъ, должно разбить площадь параллельными линіями на узкіе слои, всего лучше одинаковой ширины, и содержаніе которыхъ тогда можетъ быть принято пропорціональнымъ средней ихъ длинѣ, образоват изъ нихъ многоугольникъ силъ, и построить изъ послѣдняго веревочный многоугольникъ, узлы котораго лежатъ на линіяхъ тяжести взаимно слѣдующихъ параллельныхъ слоевъ. Тогда, чрезъ точку пересѣченія крайнихъ сторонъ многоугольника пройдетъ какъ извѣстно, равнодѣйствующая отдѣльныхъ элементовъ, т. е. въ настоящемъ случаѣ, линія тяжести всей площади.

Если фигура не симметрическая, то слѣдуетъ повторить этотъ же способъ, при другомъ направленіи параллельныхъ слоевъ, найдти для нихъ вторую линію тяжести, и на пересѣченіи обѣихъ этихъ линій будетъ лежать искомый центръ тяжести.

Такимъ образомъ, на фиг. 46, опредѣленъ центръ тяжести s симметрической площади, и наблюдаемый при этомъ ходъ работы очень наглядно виденъ изъ фигуры.

17. Скалывающія или разслаивающія напряженія по плоскости нейтральныхъ волоконъ.

Было уже показано, что волокна изогнутой балки, по обѣимъ сторонамъ нейтральной плоскости волоконъ, подвергаются противоположному напряженію; такъ, напр. на части Cm поперечнаго сѣченія, фиг. 44, a, подъ нейтральною осью дѣйствуютъ только растяженія, и обратно на части Cn его, надъ этою осью, только сжатія.

Вслѣдствіе этого, растягивающія и сжимающія силы R_1 и R_2, дѣйствующія по противоположному направленію и параллельно нейтральному слою, стремятся сколоть балку вдоль по нейтральному слою, и потому площадь продольнаго сѣченія по нейтральной оси должна имѣть извѣстную ширину b_0, чтобы такъ называемое сопротивленіе матеріала скалыванію или разслаиванію не было нарушено по нейтральному слою.

Намъ бы пришлось зайдти очень далеко, и прейдти предѣлы элементарной математики и программу статьи, если бы мы пожелали вывести разслаивающія силы, дѣйствующія по нейтральному слою, и по другимъ горизонтальнымъ сѣченіямъ изогнутой балки; и потому мы ограничимся здѣсь только выводомъ формулы для b_0.

Если обозначить (по фиг. 44, a) вертикальную силу, дѣйствующую на произвольное поперечное сѣченіе балки, чрезъ V, разстояніе между точками приложенія O_1 и O_2 растягивающихъ и сжимающихъ силъ R_1 и R_2, дѣйствующихъ на поперечномъ сѣченіи, чрезъ d, и наибольшее допускаемое скалывающее напряженіе матеріала (на единицу площади) чрезъ K_3, то ширина b_0 поперечнаго сѣченія по нейтральному слою опредѣлится выраженіемъ,

$$b_0 = \frac{V}{K_3 d}.$$

Поэтому b_0 возрастаетъ вмѣстѣ съ V, и слѣдовательно b_0 должно быть опредѣляемо по наибольшей величинѣ V, которая обыкновенно получается надъ опорами балки.

Если резюмировать еще разъ условія, необходимыя на практикѣ для равновѣсія между внѣшними и внутренними силами изогнутой балки, то, при обозначеніяхъ фиг. 44, a, будетъ,

$$Va = M = R_1 d \text{ и } V = b_0 K_3 d,$$

гдѣ R_1 и d имѣютъ значенія показанныя въ § 15.

Наибольшее прочное сопротивленіе скалыванію K_3 металловъ, сравнительно съ наибольшимъ прочнымъ сопротивленіемъ растяженію K_1 того же матеріала, опредѣляется изъ уравненія $K_3 = 0{,}6 K_1$.

Въ заключеніе можно еще привести здѣсь прочное сопротивленіе растяженію K_1 и сжатію K_2, отнесенное къ квадр. дюйму въ пудахъ, для обыкновеннѣйшихъ матеріаловъ, при которомъ обезпечивается для дерева 10-ая, и для металловъ 5 до 6-ая степень прочности:

Дерево	$K_1 = K_2 = 24$ до 32.
Чугунъ	$K_1 = 100,\ K_2 = 600$.
Желѣзо	$K_1 = K_2 = 240$ до 320.
Сталь литая.	$K_1 = K_2 = 600$.
Сталь бессемеровская . . .	$K_1 = K_2 = 480$.

Для отнесенія этихъ напряженій къ килограммамъ на квадр. центиметръ, слѣдуетъ умножить ихъ на $2^1/_2$.

Примѣчаніе. По предметамъ графическаго исчисленія и графической статики, нѣмецкая литература представляетъ только немногія работы. Кромѣ упомянутаго выше превосходнаго сочиненія Кульманна — основателя графической статики — имѣются еще: (*)

Dr. **H.Eggers** Grundzüge der graphischen Arithmetik, Schaffhausen. 1865.

Dr. **E. Jägers** graphisches Rechnen, Speyer. 1867.

Schlesingers Potenzkurven въ Zeitschrift des österr. Jngenieur — und Architekten — Vereins за 1866 г., тетр. 6 и 7-я.

Hilfslehren aus der Graphostatik въ Reuleaux's Construkteur, Braunschweig, 1869, и наконецъ

Dr. **E. Winklers** Theorie der äusseren Kräfte gerader Träger въ Zeitschrift des österr. Jngen. — und Archit. — Vereins за 1870 г., тетр. 2-я.

(*) Русская переводная литература представляетъ слѣдующія статьи:

Моръ. Графическій способъ расчета изгибаемыхъ балокъ. 1871.

Кекъ. Графическій способъ опредѣленія напряженій связей мостовыхъ фермъ балочной системы. 1871 г.

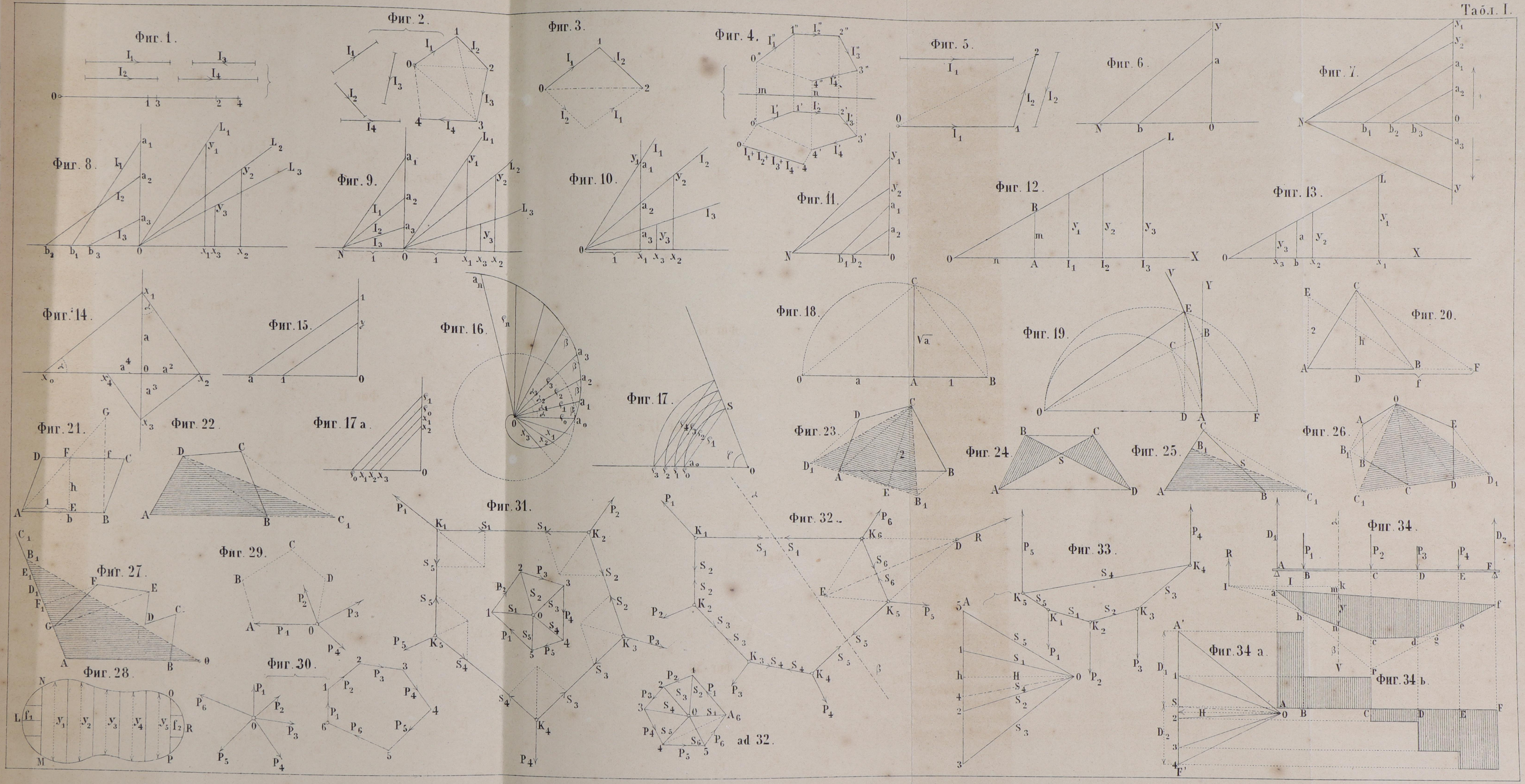
Винклеръ. Теорія внѣшвихъ силъ, дѣйствующихъ на прямыя балки (Аналитическое и графическое рѣшеніе). 1871.

Французская литература представляетъ слѣдующіе труды:

Cousinery. Le calcul par le trait, ses éléments et ses applications à la mesure des lignes, des surfaces et des cubes, et des murs de soutenement et des culées des voûtes. Paris. 1839, et appendix 1840.

Статьи Poncelet въ Mémorial de l'officier du génie № 12 — о повѣркѣ устойчивости и прочности сводовъ, и № 13 — о повѣркѣ устойчивости подпорныхъ стѣнъ и ихъ фундаментовъ.

Табл. I.


Фиг. 1.
Фиг. 2.
Фиг. 3.
Фиг. 4.
Фиг. 5.
Фиг. 6.
Фиг. 7.
Фиг. 8.
Фиг. 9.
Фиг. 10.
Фиг. 11.
Фиг. 12.
Фиг. 13.
Фиг. 14.
Фиг. 15.
Фиг. 16.
Фиг. 17.
Фиг. 17 a.
Фиг. 18.
Фиг. 19.
Фиг. 20.
Фиг. 21.
Фиг. 22.
Фиг. 23.
Фиг. 24.
Фиг. 25.
Фиг. 26.
Фиг. 27.
Фиг. 28.
Фиг. 29.
Фиг. 30.
Фиг. 31.
Фиг. 32.
ad 32.
Фиг. 33.
Фиг. 34.
Фиг. 34 a.
Фиг. 34 b.