УДК 553.9.001.57

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕСТОРОЖДЕНИЙ УГЛЕВОДОРОДОВ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

А. Б. НЕВЗОРОВА, В. А. КОЛОДКО
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Республика Беларусь

Введение. Математическая подготовка студентов специальности «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений» продолжается в течение всего периода обучения. На завершающем этапе обучения в качестве информационной поддержки широко внедряется в программу гидродинамическое моделирование месторождений, позволяющее быстро и качественно проводить вычисления и моделировать различные ситуации в зависимости от геологических условий. Всё это обусловливает актуальность владения студентами математических знаний и применения при изучении дисциплин по моделированию процессов разработки месторождений углеводородов.

Целью исследований является развитие у студентов навыков математического и технического мышления и создание в процессе обучения методам математического моделирования анализа месторождений углеводородов устойчивых связей между решаемой задачей и соответствующим ей функционалом в программном обеспечении.

При подготовке горного инженера важную роль играет формирование базы по фундаментальной подготовке и, в частности, умения студентами применять математический аппарат в исследовательской деятельности [1, 2]. Так как перед будущим инженером могут возникнуть задачи, не имеющие готового решения, необходимо повышать уровень теоретической подготовки студентов, развивать навыки построения математических моделей, описывающих различные процессы с помощью алгоритма, и способность выбирать наиболее оптимальный метод решения. Основная задача дисциплины «Компьютерное моделирование нефтяных и газовых месторождений» – дать студентам:

– представление о математическом аппарате гидродинамической модели как основы постояннодействующей геолого-технологической модели месторождения, которая является базой для создания его цифрового двойника;

– обзор сферы применения в нефтегазоразработке теории фракталов, сетевых структур, соответствие геометрии числовой асимметрии структуре пласта; анализ и использование оценки измерений в практической геологии, возможности теоретического анализа и моделирования компьютерных изображений;

– основы кластерного анализа в расчетах по разработке и эксплуатации нефтяных месторождений;

– математический инструмент для решения нефтегазопромысловых задач в будущей производственной деятельности с применением фрактальных характеристик для контроля и управления технологическими процессами;

– методологию моделирования и принятия решений в условиях неопределенности и др.

Одним из основных подходов к решению задач в математическом моделировании является применение программного пакета MathCAD.

В задачах разработки месторождений с применением математического моделирования от студентов требуется умение работать с матрицами и графиками, решать дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений, проводить корреляционный и регрессионный анализы. Эти и многие другие математические методы помогают решать ряд важнейших задач нефтегазового дела: проводить анализ показателей разработки, рассчитывать коэффициенты сжимаемости, строить депрессионные воронки, определять количество скважин, обеспечивающих максимальное извлечение запасов, обрабатывать кривые восстановления давления, уточнять распределение давления в пласте во времени и т. д.

Распознавание геологических объектов. При проведении работы по распознаванию геологически объектов применяется понятие «образа», это совокупность объектов определенного класса, характеризующаяся рядом общих признаков. Образ предполагает наличие определенных взаимосвязей между структурой поля (геофизического, геохимического и т. д.) и конкретным геологическим объектом. Выделение аномалии на фоне помех, в том числе выделение аномалии в поле лишь одного признака, можно рассматривать как задачу распознавания объектов двух классов, соответствующую задаче поисков месторождений. При разделении объектов по геофизическим полям на число классов больше двух решаются, как правило, задачи географического картирования и локального прогноза месторождений углеводородов.

Задачи распознавания:

– заданы образы, признаки – необходимо найти решающее правило;

– заданы образы, решающее правило – необходимо найти систему признаков, которая обеспечивала бы разделение объектов с минимальными затратами.

– заданы объекты, охарактеризованные m признаками, – необходимо на основе каких-либо правил разделить их на классы.

В целом задачу распознавания можно определить как выполнение качественной комплексной интерпретации геологического объекта с учетом совокупности различных признаков.

При построении объективных геологических классификаций статистические методы получили широкое распространение. С их помощью многомерные геологические объекты, описываемые большой совокупностью показателей, делятся на классы, а суть алгоритма состоит в установлении меры сходства (аналогии) изучаемых объектов с эталонными. Данный метод определяет принадлежность объекта к конкретному классу на основе теории вероятности.

Задачу распознавания можно сформулировать следующим образом: имеется некоторый объект *A*, который может находиться в состояниях $q_i, i \in \{1, 2 \ldots m\}$. Последние характеризуются параметрами-признаками $x_j, j \in \{1, 2 \ldots k\}$. Известно, что некоторые наборы значений этих признаков $\alpha = \{a_1, a_2 \ldots a_k\}$ описывают состояние q_i. Эти наборы как строки составляют матрицу T_i. Совокупность T (матрица, образованная подматрицами T_i) описывает все состояния объекта *A*. Для того чтобы понять, какое состояние описывает конкретный набор значений признаков, нужно проверить, в какую подматрицу T_i он входит. Если набор не содержится в них, то он не соответствует никакому состоянию. Если он входит в подматрицу T_i, то в предположении, что подматрицы не пересекаются, этот набор описывает состояние q_i.

Рассмотрим решение данной задачи при помощи одного из распространенных статистических методов – дискриминантного анализа. Математическая модель дискриминантного анализа основана на процедуре подбора дискриминантной функции, которая будет производить оптимальное разделение объектов на классы. В наиболее общем случае интерпретация дискриминантной функции представляет собой гиперплоскость в k-мерном признаковом пространстве, а каждый объект есть точка этого же пространства. Необходимо провести в этом пространстве такую гиперплоскость, которая обеспечивала бы максимальное различие между множествами объектов, принадлежащих разным классам, и сводила бы к минимуму рассеяние внутри каждого множества.

Аналитически гиперплоскость в k-мерном пространстве имеет вид $D = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_k X_k$. Задача, следовательно, заключается в отыскании коэффициентов $a_1, a_2 \ldots a_k$, которые обеспечивали бы требуемые условия разделения.

Представим, что исходные геологические данные позволяют выделить в многомерной совокупности два класса: *A* и *B*, каждый из i-объектов которых охарактеризован j-значениями признаков. Представим эти данные в матричной форме:

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N_1 1} & A_{N_1 2} & \dots & A_{Nk} \end{Vmatrix} \quad B = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{N_1 1} & B_{N_1 2} & \dots & B_{Nk} \end{Vmatrix},$$

где N_1 – число объектов, входящих в класс A; N_2 – число объектов, входящих в класс B; k – число признаков, характеризующих каждый объект.

Следующих этап построения дискриминантной функции заключается в составлении матриц центрированных сумм квадратов и смешанных произведений.

$$S_A = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{k}\left(A_{1i}-\overline{A_1}\right)^2 & \sum_{j=1}^{k}\left(A_{1j}-\overline{A_1}\right)\left(A_{2j}-\overline{A_2}\right) & \dots & \sum_{j=1}^{k}\left(A_{1j}-\overline{A_1}\right)\left(A_{N_1 j}-\overline{A_{N_1}}\right) \\ \sum_{j=1}^{k}\left(A_{2j}-\overline{A_2}\right)\left(A_{1i}-\overline{A_1}\right) & \sum_{j=1}^{k}\left(A_{2i}-\overline{A_2}\right)^2 & \dots & \sum_{j=1}^{k}\left(A_{2j}-\overline{A_2}\right)\left(A_{N_1 j}-\overline{A_{N_1}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{k}\left(A_{N_1 1}-\overline{A_{N_1}}\right)\left(A_{1j}-\overline{A_1}\right) & \sum_{j=1}^{k}\left(A_{N_1 j}-\overline{A_{N_1}}\right)\left(A_{2j}-\overline{A_2}\right) & \dots & \sum_{j=1}^{k}\left(A_{N_{1i}}-\overline{A_{N_1}}\right)^2 \end{Vmatrix}$$

$$S_B = \begin{Vmatrix} \sum_{j=1}^{k}\left(B_{1i}-\overline{B_1}\right)^2 & \sum_{j=1}^{k}\left(B_{1j}-\overline{B_1}\right)\left(B_{2j}-\overline{B_2}\right) & \dots & \sum_{j=1}^{k}\left(B_{1j}-\overline{B_1}\right)\left(B_{N_2 j}-\overline{B_{N_2}}\right) \\ \sum_{j=1}^{k}\left(B_{2j}-\overline{B_2}\right)\left(B_{1i}-\overline{B_1}\right) & \sum_{j=1}^{k}\left(B_{2i}-\overline{B_2}\right)^2 & \dots & \sum_{j=1}^{k}\left(B_{2j}-\overline{B_2}\right)\left(B_{N_2 j}-\overline{B_{N_2}}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{k}\left(B_{N_2 1}-\overline{B_{N_2}}\right)\left(B_{1j}-\overline{B_1}\right) & \sum_{j=1}^{k}\left(B_{N_2 j}-\overline{B_{N_2}}\right)\left(B_{2j}-\overline{B_2}\right) & \dots & \sum_{j=1}^{k}\left(B_{N_{2i}}-\overline{B_{N_2}}\right)^2 \end{Vmatrix}$$

С помощью этих матриц вычисляют выборочную матрицу

$$T = \frac{1}{N_1 + N_2 - 2}\left(S_A - S_B\right).$$

Обращение матрицы T позволяет вычислить коэффициенты дискриминантной функции, для этого необходимо найти её детерминант и убедиться, что он не равен нулю.

После обращения матрицы (получаем новую матрицу C) коэффициенты функции определяются по формуле

$$a_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} C\left(X\,'^{A}_{j} - X\,'^{B}_{j}\right).$$

Введя в уравнение текущие значения k-го признака, получим дискриминантную функцию, вида

$$D = \sum_{j=1}^{k} a_k X_k \,.$$

Граничное же значение, при котором произойдет разделение на классы может быть получено с помощью функции

$$D_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k} a_k \left(X\,'^{A}_{k} - X\,'^{B}_{k}\right).$$

Для прогнозирования различных геологических объектов необходимо выполнить сравнение полученных функций: если фактические значения дискриминантных функций больше граничного значения ($D > D_0$), этот объект относится к классу A, если, наоборот, $D < D_0$, то объект принадлежит классу B.

Вывод. Решение вышеперечисленных задач позволяет не только применять свои знания математики, гидромеханики и физики пласта, но и расширять их, формируя таким образом технико-математическое мышление и научное мировоззрение будущих горных инженеров. Использование в учебной деятельности программного пакета MathCAD даёт студентам возможность почувствовать опыт как совместной, так и индивидуальной практической работы и применить свои теоретические знания для создания математической модели геологического объекта. Наличие различных вариантов решения задач формирует у них более целостное видение и понимание дисциплин, касающихся работы нефтяного пласта.

Список литературы

1 *Санаева, Т. А.* Использование информационных технологий в преподавании математического моделирования / Т. А. Санаева. // Modern European Researches. – 2022. – № 1 (Т. 1). – С. 121–124.

2 *Невзорова, А. Б.* Накопление базовых знаний у студентов / А. Б. Невзорова, В. В. Невзоров // Непрерывная система образования «школа – университет». Инновации и перспективы : сб. ст. IV Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 100-летию БНТУ Минск, 29–30 октября 2020 г. – Минск : БНТУ, 2020. – С. 264–267.

3 *Кудрявцев, В. Б.* Тестовое распознавание / В. Б. Кудрявцев, А. Е. Андреев // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 67–99.