УДК 519.633

ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫЙ КАБЕЛЬ. ЗАДАЧА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК, А. В. ВОРОЖУН
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Рассмотрим полубесконечную электрическую линию (кабель) без искажений. Пусть импеданс внешней силы, из которой в линию подается периодическая ЭДС $e(t)$ имеет вид

$$Z_0(p) = R_0 + \frac{1}{C_0 p}.$$

В этом случае из общей формулы (1) предыдущей статьи для лаплас-образа напряжения $v(x, p)$ получаем

$$v(x, p) = \frac{\sqrt{L} C_0 \alpha}{\sqrt{C}} e^{-xR\sqrt{\frac{C}{L}}} \frac{p v_0(p) e^{-xp\sqrt{LC}}}{p+\alpha}, \tag{1}$$

где коэффициент $\alpha = \dfrac{\sqrt{C}}{C_0\left(\sqrt{L} + R_0\sqrt{C}\right)}$.

Из внешней сети в рассматриваемую линию подаётся периодическая ЭДС $e(t)$ с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ вида

$$e(t) = \begin{cases} E_0 \sin \omega t, \ 0 \le t < \dfrac{\pi}{\omega}, \\ 0, \ \dfrac{\pi}{\omega} \le t < \dfrac{2\pi}{\omega}. \end{cases} \tag{2}$$

Используя соотношение (2) для функции $e(t)$ и формулу для вычисления лаплас-образа периодической функции с периодом T [1]

$$v_0(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e(t)\, dt,$$

Получаем лаплас-образ периодической ЭДС (2) вида

$$v_0(p)=\frac{E_0\omega}{2}\frac{e^{\frac{\pi p}{2\omega}}}{\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2\omega}}.$$

Подставляя это выражение в равенство (1), получаем для лаплас-образа $v(x,p)$ следующее соотношение:

$$v(x,p)=\frac{\sqrt{L}\alpha C_0}{\sqrt{C}}e^{-xR\sqrt{\frac{L}{C}}}v_1(p)e^{-xp\sqrt{LC}},$$

где лаплас-образ $v_1(p)$ имеет вид

$$v_1(p)=\frac{pv_0(p)}{p+\alpha}=\frac{E\omega}{2}\frac{pe^{\frac{\pi p}{2\omega}}}{(p+\alpha)\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2\omega}}=\frac{E\omega}{2}\frac{pe^{\frac{\pi p}{2\omega}}}{B(p)}.$$

Найдем функцию-оригинал, отвечающую лаплас-образу $v_1(p)$. Функция $B(p)=(p+\alpha)\left(p^2+\omega^2\right)\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2\omega}$ имеет комплексные нули в точках p_n, являющихся решением уравнения $\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2\omega}=0,\ p_n=i2n\omega,$ $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$ комплексный нуль $p=i\omega,$ а также действительный нуль $p=-\alpha$. Полюса функции $v_1(p)$ в точках $p=p_n$ $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$ $p=i\omega$ и $p=-\alpha$ являются простыми. Вычислим вычет функции $v_1(p)e^{pT}$ в комплексном полюсе p_n. Представив производную функции $B(p)$ в виде

$$B'(p)=\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{ch}\frac{\pi p}{2\omega}(p+\alpha)\left(p^2+\omega^2\right)+\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2\omega}\left((p+\alpha)\left(p^2+\omega^2\right)\right)'_p,$$

находим

$$B'(p_n)=\frac{\pi}{2\omega}\cos\pi n(\alpha+i2n\omega)\left(\omega^2-4n^2\omega^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\omega(-1)^n\left(1-4n^2\right)(\alpha+2n\omega).$$

Так как $e^{\frac{\pi p n}{2\omega}} = e^{i\pi n} = \cos\pi n = (-1)^n$, получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(v_1(p)e^{pT}\right) = E_0\,\frac{i2n\omega e^{i2n\omega t}}{\pi(\alpha+i2n\omega)\left(1-4n^2\right)} =$$

$$= \frac{2E_0\omega}{\pi}\,\frac{ne^{i2n\omega t}}{(2n\omega-i\alpha)\left(1-4n^2\right)} = \frac{2E_0\omega}{\pi}\,\frac{n(2n\omega+i\alpha)e^{i2n\omega t}}{\left(\alpha^2+4\omega^2n^2\right)\left(1-4n^2\right)} =$$

$$= \frac{2E_0\omega}{\pi}\,\frac{n(2n\omega+i\alpha)(\cos 2n\omega t+i\sin 2n\omega t)}{\left(\alpha^2+4\omega^2n^2\right)\left(1-4n^2\right)}.$$

Выделяя в полученном выражении действительную часть, окончательно получаем

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(v_1(p)e^{pt}\right) = \frac{2E_0\omega}{\pi}\,\frac{n\cos(2n\omega t+\varphi_n)}{\left(\alpha^2+4\omega^2n^2\right)\left(1-4n^2\right)}, \qquad (3)$$

где $\operatorname{tg}\varphi_n = \dfrac{\alpha}{2n\omega}$.

Далее вычисляем вычет функции $v_1(p)e^{pt}$ в полюсе $p = i\omega$. Записав производную функции $B(p)$ в виде

$$B'(p) = 2p(p+\alpha)\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2\omega} + \left(p^2+\omega^2\right)\left((p+\alpha)\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2\omega}\right)'_p,$$

получаем

$$B'(i\omega) = 2i\omega(\alpha+i\omega)\operatorname{sh}\frac{i\pi}{2} = -2\omega(\alpha+i\omega).$$

Используя это соотношение, находим требуемую величину

$$\operatorname*{Res}_{p=i\omega}\left(v_1(p)e^{pt}\right) = \frac{E_0\omega}{2}\,\frac{i\omega e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\omega t}}{B'(i\omega)} = \frac{E_0\omega}{4}\,\frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega} =$$

$$= \frac{E_0\omega}{4}\,\frac{(\alpha-i\omega)(\cos\omega t+i\sin\omega t)}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Как следствие, действительная часть полученного выражения

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i\omega}\left(v_1(p)e^{pt}\right)=\frac{E_0\omega}{4}\frac{\cos(\omega t+\varphi)}{\alpha^2+\omega^2},\tag{4}$$

где $\operatorname{tg}\varphi=-\dfrac{\omega}{\alpha}$.

Находим вычет функции $v_1(p)e^{pt}$ в действительном $p=-\alpha$:

$$\operatorname*{Res}_{p=-\alpha}\left(v_1(p)e^{pt}\right)=\frac{E_0\omega}{2}\frac{\alpha e^{-\frac{\pi\alpha}{2\omega}}e^{-\alpha t}}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)\operatorname{sh}\dfrac{\pi\alpha}{2\omega}}.\tag{5}$$

Функцию-оригинал $V_1(t)$, отвечающую лаплас-образу $v_1(p)$, находим по формуле

$$V_1(t)=\operatorname*{Res}_{p=-\alpha}\left(v_1(p)e^{pt}\right)+2\operatorname*{Res}_{p=i\omega}\left(v_1(p)e^{pt}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(v_1(p)e^{pt}\right).$$

Подставляя в это выражение полученные соотношения (3)–(5), находим функцию $V_1(t)$:

$$V_1(t)=\frac{E_0\alpha\omega}{2\left(\alpha^2+\omega^2\right)}\frac{e^{-\alpha\left(t+\frac{\pi}{2\omega}\right)}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi\alpha}{2\omega}}+\frac{E_0\omega}{2\left(\alpha^2+\omega^2\right)}\cos(\omega t+\varphi)+$$
$$+\frac{4E_0\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos(2n\omega t+\varphi_n)}{\left(4\omega^2n^2+\alpha^2\right)\left(1-4n^2\right)}.$$

Для лаплас-образа $v_1(p)e^{-xp\sqrt{LC}}$ находим функцию-оригинал, используя теорему запаздывания [2]:

$$v_1(p)e^{-xp\sqrt{LC}}\div V_1\left(t-x\sqrt{LC}\right)\theta\left(t-x\sqrt{LC}\right).\tag{6}$$

Здесь $\theta(t)$ – единичная функция Хевисайда,

$$\theta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Используя соотношение (6) и найденную функцию-оригинал $V_1(t)$, находим функцию напряжения в электрическом кабеле:

$$u(x,t)=\frac{\sqrt{L}C_0\alpha}{\sqrt{C}}e^{-xR\sqrt{\frac{L}{C}}}V_1\left(t-x\sqrt{LC}\right)\theta\left(t-x\sqrt{LC}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{L}C_0\alpha}{\sqrt{C}}e^{-xR\sqrt{\frac{L}{C}}}\left(\frac{E_0\omega}{2\left(\alpha^2+\omega^2\right)}\left(\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\frac{\pi\alpha}{2\omega}}e^{-\alpha\left(t-x\sqrt{LC}+\frac{\pi}{2\omega}\right)}+\cos\left(\omega\left(t-x\sqrt{LC}\right)+\varphi\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{4E_0\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos\left(2n\omega\left(t-x\sqrt{LC}\right)+\varphi_n\right)}{\left(4\omega^2n^2+\alpha^2\right)\left(1-4n^2\right)}\right)\cdot\theta\left(t-x\sqrt{LC}\right).$$

Список литературы

1 *Деч, Г.* Руководство к практическому применению преобразований Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М. : Наука, 1971. – 288 с.

2 *Свешников, А. Г.* Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1974. – 320 с.

УДК 004.85

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ОСНОВЫ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ»

Н. В. КНЯЗЮК, О. В. РЫКОВА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

Активная разработка информационных технологий и внедрение их в систему образования являются актуальными направлениями развития высшего образования. Цифровая трансформация обусловливает изменение в организации образовательного процесса, позволяя частично заменять аудиторные занятия самостоятельной работой, тестированием, вебинарами. В 2020 году в БГУИР стартовал экспериментальный проект «Апробация смешанной модели обучения по ИТ-специальностям в рамках трансформации БГУИР в «Цифровой университет». Период осуществления проекта – 2020–2024 гг. В рамках этого проекта преподавателями кафедры высшей математики были разработаны электронные образовательные ресурсы по учебным дисциплинам «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и «Математический анализ» для всех форм обучения студентов [1]. В 2020/21 учебном году на кафедре выс-