$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\xi,y)\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(\varsigma-y)^2}{4a^2t}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(\varsigma+y)^2}{4a^2t}\right)\right)d\xi d\varsigma-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi.$$

УДК 517.4:621.3.011.7

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК, А. В. ВОРОЖУН
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Операционный метод нашел широчайшее применение при решении различных задач прикладной математики, механики, электротехники. Прежде всего это относится к теории линейных электрических цепей, где операционный метод стал основным математическим аппаратом при рассмотрении переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами. Широкое применение операционный метод нашел при рассмотрении задач теории колебаний в системах с распределенными и сосредоточенными массами [1]. В задачах теории линейных электрических цепей помимо ситуации цепей с сосредоточенными параметрами операционный метод оказался также эффективным средством исследования процессов в цепях с распределенными параметрами [2]. В этой статье мы рассмотрим задачу исследования переходных процессов в цепях с распределенными параметрами и получим основные уравнения.

Для линии с распределенными параметрами напряжение u и ток i зависят не только от времени t, но и от координаты x, измеряющей длину линии, т. е. являются функциями $u(x, t)$ и $i(x, t)$. Если линия состоит из двух параллельных проводов, то токи $i(x, t)$ в точках обоих проводов с одинаковой координатой x равны по величине, но направлены в противоположные стороны. Функци $u(x, t)$ определяет разность потенциалов между проводами в точке x.

Пусть R, L, C и G – величины сопротивления, индуктивности, емкости и утечки на единицу длины линии соответственно. Для рассматриваемой двухпроводной линии имеет место следующая система уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} + L\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} + Ri(x,t) = 0, \\ \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} + C\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Gu(x,t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Продифференцировав первое уравнение системы (1) по *x*, а второе по *t*, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + L\dfrac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t\partial x} + R\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t\partial x} + C\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + G\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение этой системы $\dfrac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t\partial x}$ из второго уравнения, а производную $\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x}$ – из второго уравнения системы (1), приходим к уравнению второго порядка для функции *u(x, t)* (так называемое «телеграфное уравнение»):

$$LC\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + (LG+RC)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - RGu(x,t). \tag{2}$$

Уравнение (2) будем решать операционным методом. Полагая начальные условия нулевыми $u(x,0) = \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$ вводим лаплас-образ функции напряжения $v(x,p) \div u(x,t),$ переходим к лаплас-образам в обеих частях уравнения (2). С учетом нулевых начальных условий получаем уравнение вида

$$\frac{d^2 v(x,p)}{dx^2} - \gamma^2(p)v(x,p) = 0, \tag{3}$$

где $\gamma(p) = \sqrt{LCp^2 + (LG+RC)p + RG} = \sqrt{(Lp+R)(Cp+G)}$ – так называемый «волновой коэффициент» (коэффициент распространения волны).

Общее уравнение (3) запишем в виде

$$v(x, p) = C_1 \mathrm{ch}\gamma x + C_2 \mathrm{sh}\gamma x. \tag{4}$$

Вводим лаплас-образ функции тока $i(x,t) \div I(x, p)$. Переходя к соответствующим лаплас-образам в первом уравнении системы (1) и используя уравнение (4), для лаплас-образа функции тока окончательно получаем

$$I(x, p) = -\frac{1}{Z(p)}\left(C_1 \mathrm{sh}\gamma x + C_2 \mathrm{ch}\gamma x\right), \tag{5}$$

где $Z(p) = \sqrt{\dfrac{Lp + R}{Cp + G}}$ – характеристическое сопротивление (характеристический импеданс линии).

Рассмотрим следующие ситуации:

1 Электрическая линия с источником питания и нагрузкой на концах.

Рассмотрим линию конечной длины l. На левый конец линии $l = 0$ из сети подается ЭДС $e(t)$. Сеть, из которой подается ЭДС, в общем случае состоит из одного или нескольких контуров с сопротивлениями, индуктивностями и емкостями. Аналогичным образом к выходным зажимам в общем случае присоединена сеть из нескольких контуров.

Источник питания (сеть при входе) и объект потребления (сеть при выходе) могут быть охарактеризованы посредством импедансов $Z_0(p)$ и $Z_l(p)$. Вводим лаплас-образ входной ЭДС $v_0(p) \div e(t)$. На концах линии мы будем иметь следующие граничные условия (записанные в лаплас-образах):

$$\begin{cases} v(0, p) = v_0(p) - Z_0(p) I(0, p), \\ v(l, p) = Z_l(p) I(l, p). \end{cases} \tag{6}$$

Используя соотношения (4) и (5), получаем

$$\begin{cases} v(0, p) = C_1, \\ I(0, p) = -\dfrac{C_2}{Z}; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} v(l, p) = C_1 ch\gamma l + C_2 sh\gamma l, \\ I(l, p) = -\dfrac{1}{Z}\left(C_1 sh\gamma l + C_2 ch\gamma l\right). \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнения системы (6), получаем систему уравнений для коэффициентов C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = v_0(p) + \dfrac{Z_0 C_2}{Z}, \\ C_1\left(Zch\gamma l + Z_l sh\gamma l\right) = -C_2\left(Zsh\gamma l + Z_l ch\gamma l\right). \end{cases}$$

Решая полученную систему, получаем следующие выражения:

$$C_1 = \frac{v_0(p) Z\left(Z_l \operatorname{ch}\gamma l + Z\operatorname{sh}\gamma l\right)}{Z\left(Z_0 + Z_l\right)\operatorname{ch}\gamma l + \left(Z_0 Z_l + Z^2\right)\operatorname{sh}\gamma l},$$

$$C_2 = -\frac{v_0(p) Z\left(Z\operatorname{ch}\gamma l + Z_l\operatorname{sh}\gamma l\right)}{Z\left(Z_0 + Z_l\right)\operatorname{ch}\gamma l + \left(Z_0 Z_l + Z^2\right)\operatorname{sh}\gamma l}.$$

Далее подставляем полученные выражения для коэффициентов C_1 и C_2 в формулу (3) и после элементарных преобразований получаем выражение для лаплас-образа функции напряжения:

$$v(x,p) = \frac{v_0(p)\left(Z_l \operatorname{ch}\gamma(l-x) + Z\operatorname{sh}\gamma(l-x)\right)}{\left(Z_0 + Z_l\right)\operatorname{ch}\gamma l + \left(Z + \dfrac{Z_0 Z_l}{Z}\right)\operatorname{sh}\gamma l}.$$

2 Полубесконечная линия (кабель).

Рассмотрим краевую задачу на полупрямой, $0 < x < \infty$. Из внешней сети с импедансом $Z_0(p)$ на конец кабеля подается ЭДС $e(t)$. В этом случае решение уравнения (3) представим в виде

$$v(x,p) = ce^{-\gamma(p)x}. \tag{7}$$

Из начального условия (первое уравнение системы (6)) находим коэффициент

$$c = \frac{v_0(p) Z(p)}{Z_0(p) + Z(p)}.$$

Подставляем этот коэффициент в формулу (7) и для лаплас-образа функции напряжения получаем

$$v(x, p) = \frac{v_0(p) Z(p)}{Z_0(p) + Z(p)} e^{-\gamma(p)x}. \tag{8}$$

Формулу (8) можно существенно упростить в ситуации, когда волновой коэффициент $\gamma(p)$ является линейной функцией. Так как

$$\gamma^2(p) = (Lp + R)(Cp + G) = LC\left(\left(p + \frac{RC + LG}{2LC}\right)^2 + \frac{RG}{LC} - \frac{(RC + LG)^2}{4(LC)^2}\right),$$

то такой случай будет иметь место тогда, когда

$$\frac{RG}{LC} - \frac{(RC + LG)^2}{4(LC)^2} = 0.$$

Из этого уравнения получаем соотношение

$$LG = RC. \tag{9}$$

Электрическая линия, параметры которой удовлетворяют уравнению (9), называется линией без искажений. Волновой коэффициент для такой линии и характеристический импеданс равны:

$$\gamma(p) = \sqrt{LC}\left(p + \frac{R}{L}\right), \quad Z(p) = \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{10}$$

С учетом полученных соотношений (10) из общей формулы (8) для лаплас-образа напряжения получаем следующее выражение:

$$v(x, p) = v_0(p) \frac{e^{-xR\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot e^{-xp\sqrt{LC}}}{1 + Z_0(p)\sqrt{\frac{L}{C}}}. \tag{11}$$

Список литературы

1 *Карслоу, Х.* Операционные методы в прикладной математике / Х. Карслоу, Д. Егер. – М. : Издательство иностранной литературы. – 1948. – 291 с.

2 *Деч, Г.* Руководство к практическому применению преобразований Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М. : Главная редакция физико-математической литературы. – 1971. – 288 с.