

УДК 691-419:534.1

*А. В. ЯРОВАЯ**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ КРУГОВОЙ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ**

Исследуются свободные поперечные колебания находящейся в температурном поле круговой трехслойной пластины с шарнирно закрепленным контуром. Принято, что деформирование соответствует кинематической гипотезе ломаной линии. Для решения системы дифференциальных уравнений движения применен метод разложения по системе собственных ортонормированных функций. Получено трансцендентное уравнение, из которого определены собственные числа и соответствующие им частоты собственных колебаний. Представлены результаты численного расчета зависимости собственных частот колебаний от температуры.

Ключевые слова: круговая сэндвич-пластина, свободные колебания, собственные функции, температура.

Введение. Современные требования машиностроения к прочности композитных конструкций, работающих в условиях воздействия различных физико-механических полей, приводят к необходимости создания расчетных моделей квазистатического и динамического деформирования, вызванного, в том числе, тепловым воздействием.

Монографии [1–3] предлагают подходы к построению математических моделей статического и динамического деформирования элементов слоистых конструкций при различных краевых условиях. Решения ряда задач о нестационарных и гармонических, в том числе неосесимметричных, нагружениях неоднородных цилиндрических и сферических оболочек представлены в работах [4, 5]. В публикациях [6, 7] исследованы вынужденные колебания трехслойных круговых пластин при локальных и резонансных нагрузках. Решения ряда задач о квазистатическом упругопластическом деформировании трехслойных круговых пластин, в том числе с учетом сжимаемости заполнителя и деформирования в своей плоскости, рассмотрены в работах [8–12]. Изотермическое деформирование трехслойных пластин, взаимодействующих с упругим основанием, рассмотрено в [13, 14]. Термосиловое нагружение неоднородной пластины изучалось в работах [15, 16]. Статья [17] посвящена исследованию свободных колебаний в температурном поле трехслойной круговой пластины, контур которой защемлен.

Целью данной работы является решение задачи о свободных осесимметричных колебаниях шарнирно закрепленной сэндвич-пластины в стационарном температурном поле.

Постановка начально-краевой задачи. Рассматривается трехслойная пластина, в которой тонкие несущие слои имеют толщины $h_1 = h_2$, а достаточно

толстый наполнитель – $h_3 = 2c$. Введена цилиндрическая система координат, в которой в качестве координатной принята срединная плоскость наполнителя, а ось z направляется перпендикулярно этой плоскости в сторону первого слоя (рисунок 1). При разработке математической модели использованы следующие кинематические гипотезы: Кирхгофа – для несущих слоев; прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали – для легкого наполнителя.

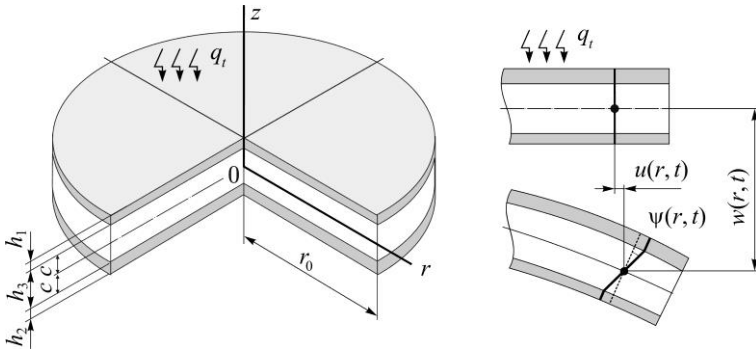


Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойной пластины

Температурное поле принято однородным ($T = \text{const}$). Деформации в слоях связаны с напряжениями соотношениями термоупругости:

$$s_i^{(k)} = 2G_k(T)\varepsilon_i^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T) \quad (k = 1, 2, 3); \quad (1)$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_k(T)\varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (i = r, \varphi),$$

где $s_i^{(k)}$, $\varepsilon_i^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T)$, $K_k(T)$ – модули сдвига и объемного деформирования, T – усредненная по толщине пластины температура; ΔT – приращение температуры по отношению к некоторому начальному значению T_0 ; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя.

Выражения модулей упругости $G(T)$, $K(T)$ в зависимости от температуры приняты в соответствии с универсальной формулой Белла [1]:

$$\{G(T), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\} \varphi(T);$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \leq 0,06; \\ 1,03(1 - T/(2T_m)), & 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases}$$

где T_m – температура плавления материала; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения, определяемые по результатам экспериментов, например, если при некоторой начальной температуре T_0 знаем G_0 , то получаем $G(0) = G_0 / \varphi(T_0)$.

Прогиб пластины $w(r, t)$ и относительный сдвиг в наполнителе $\psi(r, t)$ в дальнейшем считаются искомыми функциями. Предполагается, что на кон-

туре пластины располагается жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$).

Общие уравнения движения трехслойной упругой пластины, полученные вариационным методом, представлены в [1]. Соответственно свободные колебания описываются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2cG_3\psi &= 0; \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}; \end{aligned}$$

коэффициенты a_i зависят от температуры и выражаются через упругие модули

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right); \\ a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ K_k^+ &= K_k(T) + \frac{4}{3} G_k(T), \quad K_k^- = K_k(T) - \frac{2}{3} G_k(T); \end{aligned}$$

$M_0\ddot{w}$ – поперечные силы инерции, $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$, ρ_k – плотность материала.

Начальные условия движения

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (3)$$

Кинематические условия шарнирного закрепления на контуре пластины

$$\psi = w = 0, \quad M_r = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz = 0 \quad \text{при } r = r_0, \quad (4)$$

где изгибающий момент определяется с использованием выражений (1)

$$M_r = \left(a_5 \psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} \frac{w_{,r}}{r_1} - M_t \right) = 0,$$

причем температурная составляющая момента при $T = \text{const}$

$$\begin{aligned} M_t &= \sum_{k=1}^3 M_{kt} = 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_k K_k \int_{h_k} T z dz = 0; \\ a_{60} &= h_1 K_1^- \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + h_2 K_2^- \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^-. \end{aligned}$$

Аналитическое решение. Система дифференциальных уравнений движения (2), преобразовывается к виду

$$\psi = \frac{a_5}{a_4} w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

$$L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = 0,$$

где коэффициенты $M^4 = M_0 D$, $D = \frac{a_4}{a_6 a_4 - a_5^2}$.

Перемещения в центре пластины ограничены по величине, поэтому в (5) необходимо положить $C_2 = 0$. Прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(\beta r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

где $v(\beta r)$ – искомая функция, ω – частота собственных колебаний, A и B – константы, которые определяются начальными условиями (3).

Уравнение для определения функции $v(r)$ получим после подстановки прогиба (6) в (5):

$$L_3(v_{,r}) - \beta^4 v = 0,$$

где β – собственное число оператора L_3 связано с частотой ω

$$\beta^4 = M^4 \omega^2.$$

Решение уравнения (7) известно:

$$v(\beta r) = C_3 J_0(\beta r) + C_4 I_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r) + C_6 K_0(\beta r),$$

где C_3, \dots, C_6 – константы интегрирования, J_0, Y_0 – функции Бесселя; I_0, K_0 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда.

Функции $Y_0(\beta r)$ и $K_0(\beta r)$ обладают особенностью типа логарифма в начале координат. Поэтому в (8) необходимо положить $C_5 = C_6 = 0$. В результате решение системы (5) записываем в виде

$$\psi(r, t) = b_2 w_{,r} + C_3 r,$$

$$w(r, t) = v(\beta r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

где

$$v(\beta r) = C_5 J_0(\beta r) + C_6 I_0(\beta r).$$

Подставив в граничные условия (4) решение (9) с учетом функции $v(\beta r)$, получаем систему алгебраических уравнений, из которой определяются константы интегрирования C_3, C_4 :

$$\begin{aligned} C_3 J_0(\beta r_0) + C_4 I_0(\beta r_0) &= 0, \\ C_3 (a_7 (\beta J_0(\beta r_0) - J_1(\beta r_0)) + a_8 J_1(\beta r_0)) + \\ + C_4 (a_7 (\beta I_0(\beta r_0) - I_1(\beta r_0)) + a_8 I_1(\beta r_0)) &= 0. \end{aligned}$$

Эта система является однородной, поэтому имеет нетривиальное решение только при равенстве нулю ее детерминанта. Поэтому уравнение для нахождения собственных чисел шарнирно закрепленной по контуру круговой трехслойной пластины, находящейся в температурном поле

$$\frac{J_0(\beta r_0)}{a_7(\beta J_0(\beta r_0) - J_1(\beta)) + a_8 J_1(\beta r_0)} = -\frac{I_0(\beta r_0)}{a_7(\beta I_0(\beta r_0) - I_1(\beta r_0)) + a_8 I_1(\beta r_0)}, \quad (10)$$

где J_1, I_1 – функции Бесселя первого порядка;

$$a_7 = a_6 - \frac{a_5^2}{a_4}; \quad a_8 = a_{60} + \frac{a_5^2}{a_4};$$

$$a_{60} = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^- + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^3 K_3^-.$$

Трансцендентное уравнение (10) имеет бесконечное число решений β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), которые представляют собой собственные числа оператора в уравнении (7). Соответственно частоты собственных колебаний

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}. \quad (11)$$

Заметим, что частоты ω_n зависят от температуры в связи с изменением коэффициентов в знаменателе. Собственные числа от температуры не зависят.

Описание прогиба круглой сэндвич-пластины, которая шарнирно закреплена по контуру, при свободных поперечных колебаниях осуществляется системой собственных ортонормированных функций:

$$v_n(\beta_n r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_0)}{I_0(\beta_n r_0)} I_0(\beta_n r) \right], \quad (12)$$

где d_n – нормирующие коэффициенты.

В (12) учтено вытекающее из условия $w = 0$ при $r = r_0$ соотношение между константами интегрирования $C_6 = -C_5 J_0(\beta r_0) / I_0(\beta r_0)$.

В конечном виде искомое решение получается в результате разложения в ряд по полученной фундаментальной системе функций (12)

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \\ w(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\varphi_n \equiv \varphi_n(\beta_n, r)$ – система функций, связанная с системой собственных ортонормированных функций (12) дифференциальной зависимостью

$$\varphi_n = \frac{\beta_n}{d_n} \left[J_1(\beta_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} \left(I_1(\beta_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\beta_n r) \right) \right].$$

Коэффициенты A_n, B_n в (13) следуют из начальных условий движения (3):

$$A_n = \int_0^1 f(r)v_n r dr, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^1 g(r)v_n r dr.$$

Таким образом, перемещения (13) с частотами (11) описывают свободные колебания круговой сэндвич-пластины в стационарном температурном поле.

Численные результаты. В ходе вычислений получена зависимость собственных частот от температуры круговой шарнирно опертой сэндвич-пластины из материалов Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т единичного радиуса: при $h_1 = h_2 = 0,02$, $h_3 = 0,1$. На рисунке 2 приведены соответствующие графики, показывающие, что нагревание на 100°C приводит к уменьшению частот на 3,6 %, при нагревании на 200°C – 7 %.

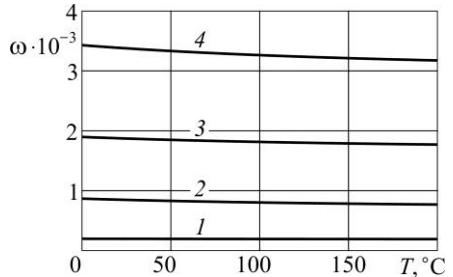


Рисунок 2 – Зависимость от температуры собственных чисел и частот колебаний:

1 – ω_0 ; 2 – ω_1 ; 3 – ω_2 ; 4 – ω_3

Вывод. При проектировании конструкций, включающих сэндвич-панели, влияние стационарной температуры на частоты собственных колебаний целесообразно учитывать при нагревании на 200°C и более.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т22УЗБ-015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore–London : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
- 3 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
- 4 Tarlakovskii, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.
- 5 Mikhailova, E. Yu. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) / E. Yu. Mikhailova, G. V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, no. 2. – P. 239–247.
- 6 Starovoitov, E. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.
- 7 Starovoitov, E. I. Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, no. 5. – P. 561–570.

8 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации.* – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

9 **Захарчук, Ю. В.** Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // *Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках.* – 2018. – № 2. – С. 14–27.

10 **Нестерович, А. В.** Напряжённое состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации.* – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

11 **Нестерович, А. В.** Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации.* – 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.

12 **Яровая, А. В.** Перемещения в трехслойной ортотропной пластине с усиливающей накладкой / А. В. Яровая // *Механика. Исследования и инновации.* – 2017. – Вып. 10. – С. 224–232.

13 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации.* – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

14 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии.* – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.

15 **Yarovaya, A. V.** Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation / A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics.* – 2006. – Vol. 42, no. 2. – P. 206–213.

16 **Плескачевский, Ю. М.** Деформирование и разрушение элементов конструкций из неоднородных материалов в условиях термосилового нагружения / Ю. М. Плескачевский, Ю. А. Чигарева, П. И. Ширвель. – Минск : БНТУ, 2018. – 228 с.

17 **Старовойтов, Э. И.** Термоупругие свободные колебания трехслойной круговой пластины / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, А. В. Яровая // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2022. – Вып. 36. – С. 15–20.

A. V. YAROVAYA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

FREE OSCILLATIONS OF A HINGED CIRCULAR SANDWICH PLATE IN A TEMPERATURE FIELD

Free transverse oscillations of a circular three-layer plate with a hinged contour located in a temperature field are investigated. It is assumed that the deformation corresponds to the kinematic hypothesis of a broken line. To solve the system of motion differential equations there is applied the method of expansion in the terms of system orthonormal eigenfunctions. A transcendental equation is obtained, on its base the eigenvalues and the corresponding frequencies of natural oscillations are determined. The numerical calculation results of the dependence of natural oscillation frequencies on temperature are presented.

Keywords: circular sandwich plate, free oscillations, eigenfunctions, temperature.

Получено 12.10.2022