

УДК 691-419:534.1

*М. В. МАРКОВА*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ**

В работе представлены уравнения движения для круглой трёхслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних слоёв. Модель деформирования пластины согласуется с гипотезой «ломаной линии». Вывод уравнений движения основан на вариационном принципе Гамильтона. Полученное для частного случая вынужденных колебаний решение предполагает деление рассматриваемой задачи на две составляющие: задачу о квазистатическом деформировании и задачу о собственных колебаниях пластины. Для апробации составленного решения для трёх различных пакетов пластин выполнены численные исследования по определению параметров напряжённо-деформированного состояния при восприятии линейного во времени внешнего воздействия.

**Ключевые слова:** трёхслойная круговая пластина, ступенчатая пластина, динамическое деформирование.

**Введение.** Трёхслойные пакеты материалов не являются новым инженерно-конструктивным решением и уже более полувека активно используются при возведении зданий и сооружений, проектировании элементов корпуса морских и воздушных судов, пассажирских и грузовых железнодорожных вагонов, транспортных цистерн и контейнеров, рефрижераторных фургонов, магистральных трубопроводов и т. д. С появлением новых материалов и развитием производственных технологий применение трёхслойных композитов в различных сферах только увеличивается. Сочетание физико-механических свойств разнородных материалов в одном пакете позволяет получить конструкцию, обладающую совокупностью параметров, обеспечивающих с экономической, функциональной, эксплуатационной и эстетической точек зрения наибольшую рациональность её применения.

Как правило, трёхслойный пакет представляет собой монолитный элемент, состоящий из тонких наружных слоёв, воспринимających внешнее воздействие, и относительно толстого связующего срединного заполнителя, функция которого заключается в перераспределении напряжений между наружными слоями и наделении всего пакета требуемыми физическими параметрами: тепло- или электропроводностью, звуко- или магнитной проницаемостью и т. д.

Теория расчёта напряжённо-деформированного состояния трёхслойных пакетов естественным образом сформировалась из теории расчёта однослойных элементов [1], и на сегодняшний день насчитывается несколько тысяч публикаций, посвящённых исследованию работы трёхслойных конструкций.

Такое обилие разноплановых исследований обусловлено наличием различных подходов к решению поставленных задач [2, 3]. Однако следует отметить, что наибольшее развитие теория многослойных конструкций получила благодаря методу гипотез, основанному на некоторых предположениях об особенностях изменения искомых величин по толщине пакета. В работе [4] предложено деление метода гипотез на два основных подхода: непрерывно-структурный, основанный на единой для всего пакета гипотезе, и дискретно-структурный, рассматривающий работу каждого слоя в отдельности. Система гипотез дискретно-структурного подхода получила в литературе название «гипотеза ломаной линии» (англ. *Zig-Zag theory* [5, 6]).

Несмотря на явные преимущества трёхслойных конструкций над однослойными, стремление улучшить их работу привело к созданию пакетов с локальными утолщениями в наиболее напряжённых местах. Увеличение толщины элемента в критических областях позволяет повысить его прочность и жёсткость без существенного изменения массы.

В данной работе с применением дискретно-структурного метода гипотез рассматривается такой трёхслойный элемент со ступенчато-переменной толщиной. Для подтверждения актуальности предложенной темы рассмотрены выполненные за последние годы работы со схожей проблематикой.

Так, к примеру, в работе [7] представлен основанный на теории сдвига первого порядка вывод уравнений движения для круговой трёхслойной пластины со сквозным утолщением жёстких внешних слоёв в центре. В статье [8] рассмотрено исследование, основанное на гипотезе ломаной линии и вариационном принципе Лагранжа и направленное на изучение напряжённо-деформированного состояния трёхслойной прямоугольной пластины со ступенчатым увеличением толщины растянутого лицевого слоя.

Подобный способ улучшения несущей способности прямоугольной сэндвич-панели предложен в работах [9, 10]. Здесь ступенчатое изменение толщины имеют как наружные листы пакета, так и срединный наполнитель (утолщение наружного слоя обуславливает сужение внутреннего). Авторы исследования подчеркивают, что с точки зрения изгиба и устойчивости ступенчатые сэндвич-пластины доказали свою рациональность. Приведенные результаты расчетов продемонстрировали снижение значений основных частот собственных колебаний при ступенчатом варьировании толщин по сравнению со значениями для аналогов постоянной толщины. Отмечается, что такое изменение может быть недопустимым для некоторых конструкций и должно контролироваться.

Свободные колебания круговой пластины с линейно-переменной толщиной наполнителя и наружными слоями постоянной толщины, моделируемые как пологие оболочки, воспринимающие мембранные силы и изгибающие моменты, рассмотрены в исследовании Ч. Чанга и Х. Чена [11].

Динамическое деформирование круглых сэндвич-пластин с функциональным изменением толщины наполнителя достаточно широко рассмотрено в работах Р. Лала и Р. Рани. Уравнения движения здесь выводятся на основе

теории Миндлина и принципа Гамильтона, внешние слои, как и в предыдущем случае, моделируются как мембраны, а срединный наполнитель изменяет свою толщину вдоль радиального направления параболически [12, 13], экспоненциально [14] или линейно [15, 16].

Отметим, что интерес к исследованию потенциальных преимуществ пластин ступенчато-переменной толщины на сегодняшний день актуален и для однослойных элементов. В работе [17] для анализа собственных колебаний круговых пластин с многократным ступенчатым изменением толщины предложен усовершенствованный полуаналитический метод Фурье – Ритца, а в [18] на основе метода Якоби – Рэлея – Ритца описан подход, позволяющий получить отклик такой пластины при восприятии ударной нагрузки и проанализировать характеристики переходных процессов и установившихся колебаний.

**Постановка задачи.** На рисунке 1 представлена круглая трёхслойная пластина со ступенчатым изменением толщины наружных слоёв 1 и 2. Пластина рассматривается в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , привязанной к срединной плоскости наполнителя 3, который относительно наружных слоёв имеет большую толщину:  $h_3 = 2c = \text{const}$ . Толщина внешних слоёв задаётся с помощью кусочно-постоянной функции Хевисайда  $H_0(r)$  [19]:  $h_1(r) = h_{1(I)} + (h_{1(II)} - h_{1(I)}) \cdot H_0(r - R_I)$ ;  $h_2(r) = h_{2(I)} + (h_{2(II)} - h_{2(I)}) \cdot H_0(r - R_I)$ , здесь римскими цифрами I и II обозначены номера участков, разделяемых ступенью,  $R_I$  – радиус центрального участка I. Изменение толщины на центральном участке пластины может быть как положительным (уширение), так и отрицательным (сужение).

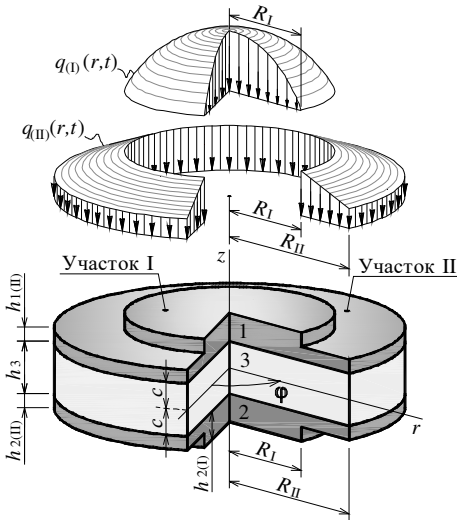


Рисунок 1 – Круговая трёхслойная ступенчатая пластина

В момент времени  $t_0$  пластина воспринимает действие внешней осесимметричной нагрузки, выводящей её из состояния равновесия:  $q = q_{(I,II)}(r, t)$ . В результате чего, в пластине возникает прогиб  $w(r, t)$ , радиальное перемещение координатной поверхности  $u(r, t)$  и сдвиг в наполнителе  $\psi(r, t)$ . Модель деформирования пластины согласуется с гипотезой ломаной линии: изгиб тонких внешних слоёв описывается классической гипотезой Кирхгофа [20] о прямолинейности и перпендикулярности нормали, деформирование относительно толстого срединного наполнителя подчиняется сдвиговой гипотезе Тимошенко [21].

**Уравнения движения.** На основе вариационного принципа Гамильтона [22] в работе [23] был представлен вывод уравнений движения круговой трёхслойной пластины с функционально-переменной толщиной наружных слоёв:

$$\begin{aligned}
& a_3^+ L_3(u) + 2a_{3,r}^+ L_2(u) + a_5^+ L_3(\Psi) + 2a_{5,r}^+ L_2(\Psi) - a_6^+ L_3(w,r) - 2a_{6,r}^+ L_2(w,r) + \\
& + \left( a_{3,rr}^+ + \frac{a_{3,r}^-}{r} \right) u_{,r} + \left( a_{5,rr}^+ + \frac{a_{5,r}^-}{r} \right) \Psi_{,r} - \left( a_{6,rr}^+ + \frac{a_{6,r}^-}{r} \right) w_{,rr} + \\
& + \left( a_{3,rr}^- - \frac{a_{3,r}^+}{r} \right) \frac{u}{r} + \left( a_{5,rr}^- - \frac{a_{5,r}^+}{r} \right) \frac{\Psi}{r} - \left( a_{6,rr}^- - \frac{a_{6,r}^+}{r} \right) \frac{w_{,r}}{r} - \\
& - \left[ M_{3,r} + \frac{M_3}{r} \right] \ddot{u} - \left[ M_{5,r} + \frac{M_5}{r} \right] \ddot{\Psi} + \left[ M_{6,r} + \frac{M_6}{r} \right] \ddot{w}_{,r} - \\
& - M_3 \ddot{u}_{,r} - M_5 \ddot{\Psi}_{,r} + M_6 \ddot{w}_{,rr} - M_1 \ddot{w} = -q; \tag{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_1^+ L_2(u) + a_2^+ L_2(\Psi) - a_3^+ L_2(w,r) + a_{1,r}^+ u_{,r} + a_{2,r}^+ \Psi_{,r} - a_{3,r}^+ w_{,rr} + \\
& + a_{1,r}^- \frac{u}{r} + a_{2,r}^- \frac{\Psi}{r} - a_{3,r}^- \frac{w_{,r}}{r} - M_1 \ddot{u} - M_2 \ddot{\Psi} + M_3 \ddot{w}_{,r} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_2^+ L_2(u) + a_4^+ L_2(\Psi) - a_5^+ L_2(w,r) + a_{2,r}^+ u_{,r} + a_{4,r}^+ \Psi_{,r} - a_{5,r}^+ w_{,rr} + \\
& + a_{2,r}^- \frac{u}{r} + a_{4,r}^- \frac{\Psi}{r} - a_{5,r}^- \frac{w_{,r}}{r} - M_2 \ddot{u} - M_4 \ddot{\Psi} + M_5 \ddot{w}_{,r} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь запятая в нижнем индексе означает операцию дифференцирования по указанной координате;  $M_k$  и  $a_k^\pm$  – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв пластины;  $L_2(g)$  и  $L_3(g)$  – дифференциальные операторы:

$$L_2(g) = g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) = g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Используя метод декомпозиции, в работах [24, 25] система (1) была адаптирована для описания колебаний пластины со ступенчато-переменной толщиной внешних слоёв:

$$\begin{aligned}
w &= w_{(I)} + (w_{(II)} - w_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1); \quad u = u_{(I)} + (u_{(II)} - u_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1); \\
\Psi &= \Psi_{(I)} + (\Psi_{(II)} - \Psi_{(I)}) \cdot H_0(r - R_1),
\end{aligned}$$

$$\Delta \Delta w_{(I,II)} + D_{(I,II)} m_{(I,II)} \Delta \dot{w}_{(I,II)} + D_{(I,II)} M_{(I,II)} \dot{w}_{(I,II)} = D_{(I,II)} q_{(I,II)}; \tag{2}$$

$$u_{(I,II)} = b_{1(I,II)} w_{(I,II),r} + r C_{1(I,II)} + \frac{C_{2(I,II)}}{r} - \frac{m_{1(I,II)}}{r} \int r \dot{w}_{(I,II)} dr;$$

$$\Psi_{(I,II)} = b_{2(I,II)} w_{(I,II),r} + r C_{3(I,II)} + \frac{C_{4(I,II)}}{r} - \frac{m_{2(I,II)}}{r} \int r \dot{w}_{(I,II)} dr.$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $D_{(i)}$ ,  $b_{k(i)}$ ,  $m_{k(i)}$  – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв на  $i$ -м участке пластины;  $C_{k(i)}$  – константы интегрирования, определяемые из условий ограниченности решения в точках  $r = 0$ ,  $r = R_1$  и  $r = R_{II}$ .

Решение системы (2) строилось путём разделения искомых перемещений на квазистатические ( $w_s$ ,  $u_s$ ,  $\Psi_s$ ) и динамические ( $w_d$ ,  $u_d$ ,  $\Psi_d$ ) составляющие [26]:

$$w_{(I, II)} = w_{s(I, II)} + w_{d(I, II)}, \quad u_{(I, II)} = u_{s(I, II)} + u_{d(I, II)}, \quad \Psi_{(I, II)} = \Psi_{s(I, II)} + \Psi_{d(I, II)},$$

и в конечном виде для линейного по времени внешнего воздействия было представлено выражениями:

$$w_{s(I, II)} = C_{s5(I, II)} + C_{s6(I, II)}r^2 + C_{s7(II)} \ln r + C_{s8(II)}r^2 \ln r + \\ + D_{(I, II)} \int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (rq_{(I, II)}) dr dr dr dr;$$

$$w_{d(I, II)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d5n(I, II)} I_0 \left( r \gamma_{(I, II)n}^+ \right) + C_{d6n(II)} K_0 \left( r \gamma_{(II)n}^+ \right) + C_{d7n(I, II)} J_0 \left( r \gamma_{(I, II)n}^- \right) + \right. \\ \left. + C_{d8n(II)} Y_0 \left( r \gamma_{(II)n}^- \right) \right] \left( A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right);$$

$$u_{s(I, II)} = C_{s1(I, II)}r + \frac{C_{s2(II)}}{r} + 2C_{s6(I, II)}b_{1(I, II)}r + C_{s7(II)} \frac{b_{1(II)}}{r} + C_{s8(II)}b_{1(II)}r(2 \ln r + 1) + \\ + \frac{D_{(I, II)}b_{1(I, II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (rq_{(I, II)}) dr dr dr,$$

$$u_{d(I, II)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d1n(I, II)}r + \frac{C_{d2n(II)}}{r} + C_{d5n(I, II)}I_1 \left( r \gamma_{(I, II)n}^+ \right) \left( \gamma_{(I, II)n}^+ b_{1(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_{(I, II)n}^+} \right) - \right. \\ \left. - C_{d6n(II)}K_1 \left( r \gamma_{(II)n}^+ \right) \left( \gamma_{(II)n}^+ b_{1(II)} + \frac{\omega_n^2 m_{1(II)}}{\gamma_{(II)n}^+} \right) - \right. \\ \left. - C_{d7n(I, II)}J_1 \left( r \gamma_{(I, II)n}^- \right) \left( \gamma_{(I, II)n}^- b_{1(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(I, II)}}{\gamma_{(I, II)n}^-} \right) - \right. \\ \left. - C_{d8n(II)}Y_1 \left( r \gamma_{(II)n}^- \right) \left( \gamma_{(II)n}^- b_{1(II)} - \frac{\omega_n^2 m_{1(II)}}{\gamma_{(II)n}^-} \right) \right] \left( A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right),$$

$$\Psi_{s(I, II)} = C_{s3(I, II)}r + \frac{C_{s4(II)}}{r} + 2C_{s6(I, II)}b_{2(I, II)}r + C_{s7(II)} \frac{b_{2(II)}}{r} + C_{s8(II)}b_{2(II)}r(2 \ln r + 1) + \\ + \frac{D_{(I, II)}b_{2(I, II)}}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int (rq_{(I, II)}) dr dr dr;$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{d(I, II)} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_{d3n(I, II)} r + \frac{C_{d4n(II)}}{r} + C_{d5n(I, II)} I_1 \left( r \gamma_{(I, II)n}^+ \right) \left( \gamma_{(I, II)n}^+ b_{2(I, II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_{(I, II)n}^+} \right) - \right. \\
& - C_{d6n(II)} K_1 \left( r \gamma_{(II)n}^+ \right) \left( \gamma_{(II)n}^+ b_{2(II)} + \frac{\omega_n^2 m_{2(II)}}{\gamma_{(II)n}^+} \right) - \\
& - C_{d7n(I, II)} J_1 \left( r \gamma_{(I, II)n}^- \right) \left( \gamma_{(I, II)n}^- b_{2(I, II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(I, II)}}{\gamma_{(I, II)n}^-} \right) - \\
& \left. - C_{d8n(II)} Y_1 \left( r \gamma_{(II)n}^- \right) \left( \gamma_{(II)n}^- b_{2(II)} - \frac{\omega_n^2 m_{2(II)}}{\gamma_{(II)n}^-} \right) \right] \left( A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \right).
\end{aligned}$$

Здесь  $\gamma_{(i)n}^{\pm}$  – коэффициенты, зависящие от частоты собственных колебаний пластины  $\omega_n$ ;  $I_0(r\gamma_{(i)n}^+)$ ,  $K_0(r\gamma_{(i)n}^+)$ ,  $J_0(r\gamma_{(i)n}^-)$ ,  $Y_0(r\gamma_{(i)n}^-)$  – функции Бесселя от действительного и мнимого аргумента [27, 28];  $A_n$  и  $B_n$  – константы, определяемые из начальных условий колебаний пластины.

Ввиду конечности значений перемещений, возникающих в центральной точке  $r = 0$ , требуется принять, что константы интегрирования:

$$C_{s2(I)} = C_{s4(I)} = C_{s7(I)} = C_{s8(I)} = C_{d2n(I)} = C_{d4n(I)} = C_{d6n(I)} = C_{d8n(I)} = 0.$$

Условия опирания внешнего контура пластины формируют граничные условия, служащие для определения оставшихся констант интегрирования. Так, в точке  $r = R_{II}$  при шарнирном опирании и наличии в торце пластины жёсткой диафрагмы, препятствующей сдвиговым деформациям:

$$u_{(II)} = 0, \quad \Psi_{(II)} = 0, \quad w_{(II)} = 0, \quad M_{r(II)} = 0.$$

При заделке наружного контура:

$$u_{(II)} = 0, \quad \Psi_{(II)} = 0, \quad w_{(II)} = 0, \quad w_{,r(II)} = 0.$$

Здесь  $M_r$  – изгибающий момент;  $w_{,r}$  – угол поворота нормали при изгибе пластины.

Кроме того, метод декомпозиции предполагает наложение между отдельными участками пластины условий непрерывности перемещений и усилий, т. е. в точке  $r = R_I$  необходимо потребовать выполнения условий:

$$\begin{aligned}
u_{(I)} = u_{(II)}, \quad \Psi_{(I)} = \Psi_{(II)}, \quad w_{(I)} = w_{(II)}, \quad w_{,r(I)} = w_{,r(II)}, \\
T_{r(I)} = T_{r(II)}, \quad M_{r(I)} = M_{r(II)}, \quad H_{r(I)} = H_{r(II)}, \quad Q_{(I)} = Q_{(II)}.
\end{aligned}$$

Здесь  $T_r$ ,  $H_r$ ,  $Q$  – продольная сила, момент на границе контакта слоёв и поперечная сила соответственно. Выражения для определения внутренних усилий представлены в статье [23].

Рассматриваемая задача предполагает, что до восприятия внешнего воздействия пластина находилась в покое и не обладала начальной деформацией, поэтому константы интегрирования по времени  $A_n$  и  $B_n$  могут быть определены из условия:

$$w(r, 0) = w_s(r, 0) + w_d(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = \dot{w}_s(r, 0) + \dot{w}_d(r, 0) = 0,$$

или 
$$w_d(r, 0) = -w_s(r, 0), \quad \dot{w}_d(r, 0) = -\dot{w}_s(r, 0).$$

Предполагая, что связь деформаций и напряжений, возникающих в пластине, соответствует линейной теории упругости, получаем выражения для определения напряжений в слоях:

– в зоне контакта срединного заполнителя и внешних слоёв

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(3)}(r, t) &= \varepsilon_r^{(3)}(r, t)K_3^+ + \varepsilon_\phi^{(3)}(r, t)K_3^- = \\ &= K_3^+ (u_{,r}(r, t) + c\Psi_{,r}(r, t) - cw_{,rr}(r, t)) + \frac{K_3^-}{r} (u(r, t) + c\Psi(r, t) - cw_{,r}(r, t)); \end{aligned}$$

– по наружной поверхности пластины

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r, t) &= \varepsilon_r^{(1)}(r, t)K_1^+ + \varepsilon_\phi^{(1)}(r, t)K_1^- = \\ &= K_1^+ (u_{,r}(r, t) + c\Psi_{,r}(r, t)) + \frac{K_1^-}{r} (u(r, t) + c\Psi(r, t)) - \\ &- \left( K_1^+ w_{,rr}(r, t) + \frac{K_1^-}{r} w_{,r}(r, t) \right) \left( c + h_{1(I)} + (h_{1(II)} - h_{1(I)}) H_0(r - R_1) \right); \\ \sigma_r^{(2)}(r, t) &= \varepsilon_r^{(2)}(r, t)K_2^+ + \varepsilon_\phi^{(2)}(r, t)K_2^- = \\ &= K_2^+ (u_{,r}(r, t) - c\Psi_{,r}(r, t)) + \frac{K_2^-}{r} (u(r, t) - c\Psi(r, t)) + \\ &+ \left( K_2^+ w_{,rr}(r, t) + \frac{K_2^-}{r} w_{,r}(r, t) \right) \left( c + h_{2(I)} + (h_{2(II)} - h_{2(I)}) H_0(r - R_1) \right). \end{aligned}$$

Здесь 
$$K_k^+ = K_k + 4/3G_k, \quad K_k^- = K_k - 2/3G_k,$$

где  $K_k$  и  $G_k$  – модуль объёмной деформации и модуль сдвига материала слоёв.

**Численные исследования.** Для апробации полученного решения определены параметры напряжённно-деформированного состояния зацементированных по внешнему контуру круговых трёхслойных пластин радиусом  $R_{II} = 1$  м со ступенчатым изменением толщины наружных слоёв при их вынужденных колебаниях, побуждаемых восприятием внешнего воздействия в виде равномерно распределённой по всей площади нагрузки интенсивностью  $q_{(0)} = q_{(II)} = -100$  кПа. Пакеты пластин представлены материалами: «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т», «сталь–фторопласт-4–сталь» и «сталь–ПС-1–сталь», со следующими физико-механи-

ческими характеристиками [29–31]: дюралюминий (Д16Т) –  $\rho_{1,2}=2700 \text{ кг/м}^3$ ;  $K_{1,2}=0,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $G_{1,2}=0,267 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ; фторопласт-4 –  $\rho_3=2150 \text{ кг/м}^3$ ;  $K_3=345 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ,  $G_3=90 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ; сталь –  $\rho_{1,2}=7850 \text{ кг/м}^3$ ;  $K_{1,2}=1,913 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $G_{1,2}=0,78 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ; полистирольный пенопласт (ПС-1) –  $\rho_3=60 \text{ кг/м}^3$ ;  $K_3=10 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ,  $G_3=15 \cdot 10^6 \text{ Па}$ . Значения толщин наружных слоёв:  $h_{1(\text{I})}=h_{2(\text{I})}=0,04 \text{ м}$ ,  $h_{1(\text{II})}=h_{2(\text{II})}=0,02 \text{ м}$  (пластины имеют уширение в центральной части). Толщина срединного заполнителя –  $h_3=0,3 \text{ м}$ .

На рисунке 2 представлен график изменения прогиба в центральной точке пластины ( $r=0$ ) с течением времени вынужденных колебаний.

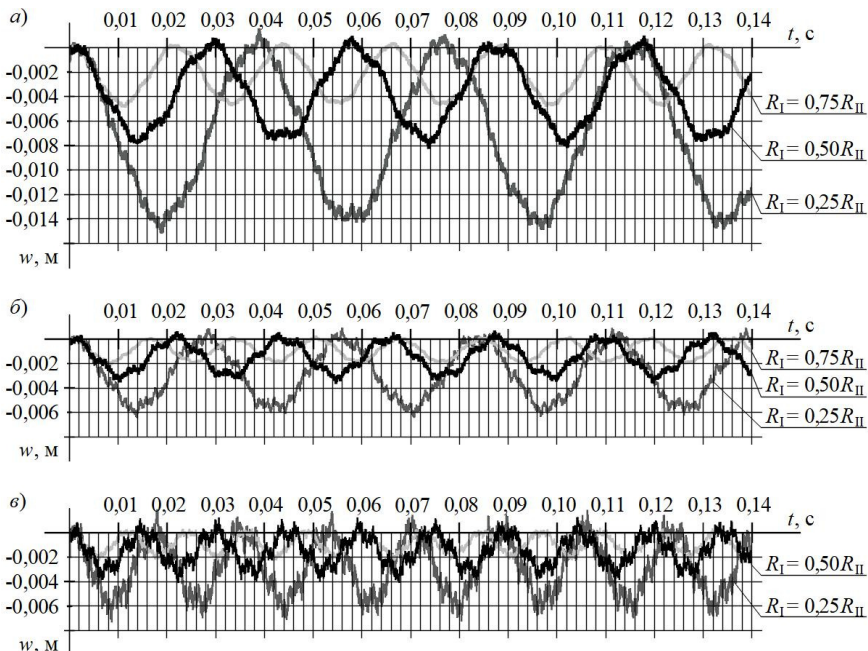


Рисунок 2 – Изменение прогиба в центральной точке пластины в процессе колебаний:

*a* – пакет «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т», *б* – пакет «сталь–фторопласт-4–сталь»,  
*в* – пакет «сталь–ПС-1–сталь»

Изменение значений максимальных прогибов и периода колебаний пластин обусловлено изменением жёсткости при варьировании геометрии и физико-механических характеристик слоёв. В рамках рассмотренных пакетов наблюдается, что наибольшее влияние на деформативность трёхслойного элемента оказывает материал внешних слоёв.

На рисунке 3 представлены графики изменения прогиба пластины вдоль её радиуса при квазистатическом и динамическом (в момент первого максимального прогиба) деформировании. Материалы пакетов – прежние, радиус изменения толщины пластины –  $R_I=0,5R_{II}$ .



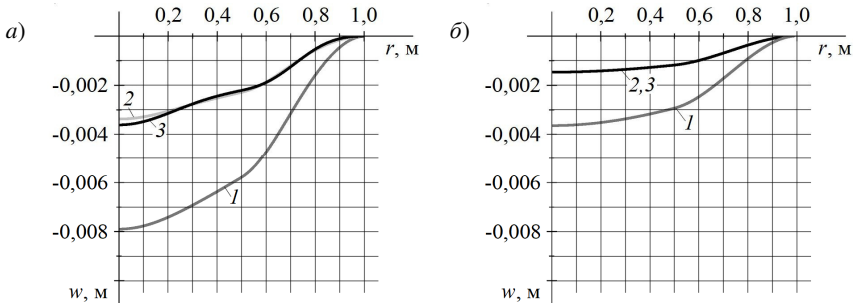


Рисунок 3 – Изменение прогиба вдоль радиуса пластины при динамическом (а) и квазистатическом (б) деформировании:

1 – пакет «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т»; 2 – пакет «сталь–фторопласт-4–сталь»;  
3 – пакет «сталь–ПС-1–сталь»

Замена материала наружных слоёв пакета с Д16Т на сталь приводит к увеличению модуля объёмной деформации внешних слоёв в 2,4 раза. При этом прогиб в центре пластины при динамическом деформировании уменьшается в 2,35, а при квазистатическом – в 2,50 раза. Замена материала срединного заполнителя пакета с фторопласт-4 на ПС-1 приводит к уменьшению модуля объёмной деформации срединного слоя в 34,5 раза. При этом динамический прогиб в центре пластины увеличивается в 1,07, а квазистатический – в 1,01 раза. Из приведенных на рисунке 3 графиков также видно, что динамическое нагружение конструкции (рисунок 3, а) вызывает существенное увеличение прогиба элемента в сравнении с квазистатическим воздействием (рисунок 3, б) с той же интенсивностью нагрузки. Для исследованных пакетов в рассматриваемый момент времени прогиб в центральной точке пластины при динамическом деформировании в среднем составил 230% от статического.

Схожие закономерности справедливы и для сдвига, возникающего в заполнителе пластины при её изгибе (рисунок 4).

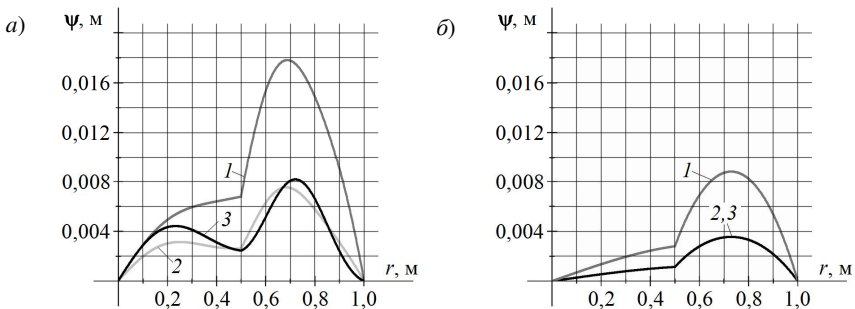


Рисунок 4 – Изменение сдвига в заполнителе вдоль радиуса пластины при динамическом (а) и квазистатическом (б) деформировании:

1 – пакет «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т»; 2 – пакет «сталь–фторопласт-4–сталь»;  
3 – пакет «сталь–ПС-1–сталь»

На рисунке 5 представлены графики изменения напряжений на растянутой грани пластины вдоль её радиуса при квазистатическом и динамическом деформировании. Материалы пакетов – прежние, радиус изменения толщины пластины –  $R_1 = 0,5R_{II}$ .

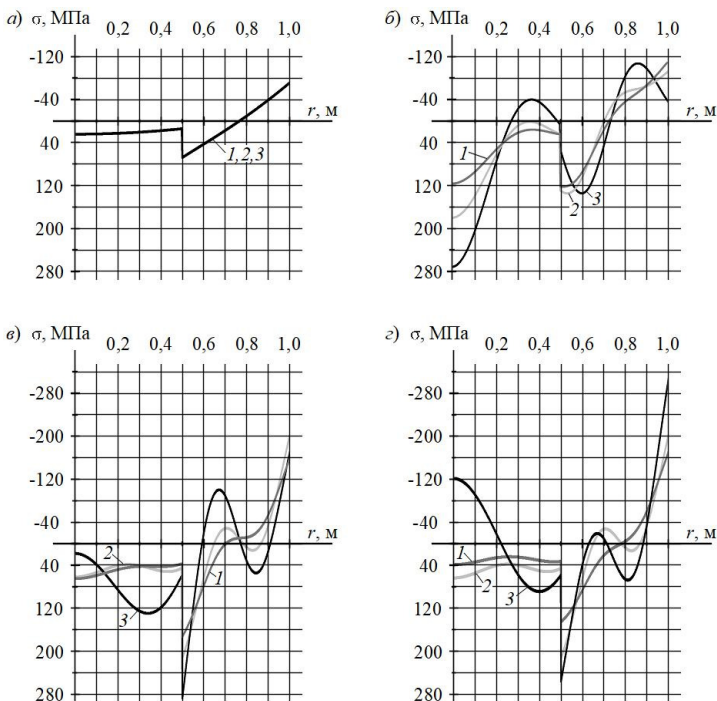


Рисунок 5 – Изменение напряжений вдоль радиуса пластины при квазистатическом деформировании (а) и в случаях динамического деформирования при достижении максимального напряжения в точках  $r = 0$  (б),  $r = R_1$  (в) и  $r = R_{II}$  (г):

1 – пакет «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т»; 2 – пакет «сталь–фторопласт-4–сталь»;  
3 – пакет «сталь–ПС-1–сталь»

Из приведенных на рисунке 5 графиков видно, что характер распределения напряжений вдоль радиуса пластины при её динамическом деформировании существенно зависит от составляющих пакет материалов. Кроме того, при динамическом деформировании физико-механические характеристики материалов оказывают более весомое влияние на значения возникающих в слоях напряжений нежели при квазистатическом деформировании.

На рисунке 6 представлены графики изменения максимальных напряжений в точках оси пластины ( $r = 0$ ). Ступенчатое изменение толщины располагается при  $R_1 = 0,5R_{II}$ . Для наглядности графического отображения масштаб напряжений в пределах срединного заполнителя (от  $-0,30$  до  $+0,30$  м) увеличен в 100 раз.

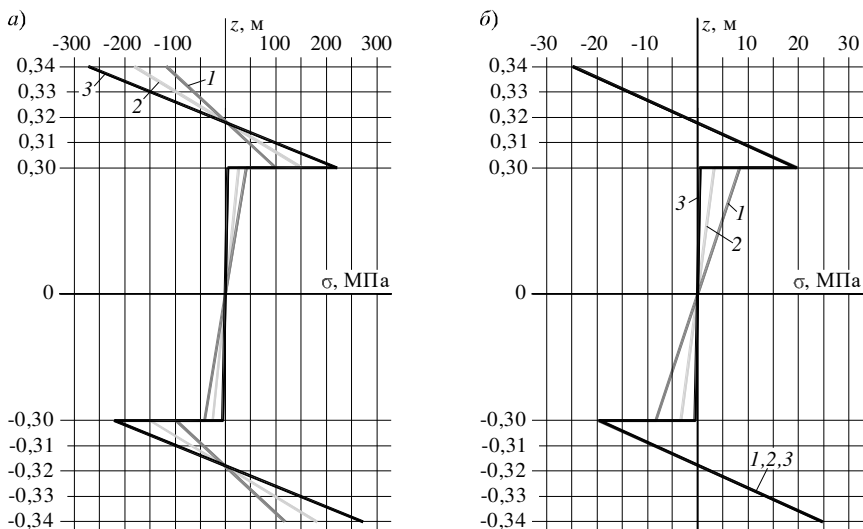


Рисунок 6 – Изменение напряжений по толщине пакета в центре пластины для случаев динамического (а) и квазистатического (б) деформирования:

1 – пакет «Д16Т–фторопласт–4–Д16Т»; 2 – пакет «сталь–фторопласт–4–сталь»;  
3 – пакет «сталь–ПС-1–сталь»

Скачок напряжений на границе контакта слоёв обусловлен изменением механических характеристик пакета.

**Заключение.** В рамках рассмотренных пакетов пластин было выявлено, что динамическое приложение внешнего воздействия приводит к увеличению прогиба элемента более чем в два раза в сравнении с квазистатическим приложением нагрузки той же величины. Напряжения, возникающие в пластине при её динамическом деформировании, более чувствительны к составу пакета, чем при работе элемента в статике.

*Работа выполнена в рамках задания 1.08 Государственной программы научных исследований «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении».*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Leissa, A. W. Vibration of plates / A. W. Leissa. – Washington : National Aeronautics and Space Administration, 1969. – 353 p.

2 Амбарцумян, С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М. : Наука, 1974. – 448 с.

3 Гольденвейзер, А. Л. Теория тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер. – М. : Наука, 1976. – 512 с.

4 Григолюк, Э. И. Современное состояние теории многослойных оболочек / Э. И. Григолюк, Ф. А. Коган // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8, № 6. – С. 5–17.

5 Carrera, E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // Applied Mechanics Reviews. – 2003. – Vol. 56, is. 3. – P. 287–308.

6 **Carrera, E.** An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered, orthotropic plates / E. Carrera // *Composite Structures*. – 2000. – Vol. 50, is. 2. – P. 183–198.

7 **Al-Jumaily, A. M.** Influence of the Poisson ratio on the natural frequencies of stepped-thickness circular plate / A. M. Al-Jumaily, K. Jameel // *Journal of Sound and Vibration*. – 2000. – Vol. 234, is. 5. – P. 881–894.

8 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной ортотропной пластины ступенчато-переменной толщины / Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2014. – № 2 (304). – С. 38–43.

9 Dynamics and buckling of sandwich panels with stepped facings / C. H. Nguyen [et al.] // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. – 2011. – Vol. 11, no. 4. – P. 697–716.

10 **Nguyen, C. H.** Enhanced static response of sandwich panels with honeycomb cores through the use of stepped facings / C. H. Nguyen, K. Chandrashekhara, V. Birman // *Journal of Sandwich Structures & Materials*. – 2011. – Vol. 13, is. 2. – P. 237–260.

11 **Chang, J. S.** Free vibrations of sandwich plates of variable thickness / J. S. Chang, H. C. Chen // *Journal of Sound and Vibration*. – 1992. – Vol. 155, is. 2. – P. 195–208.

12 **Lal, R.** On radially symmetric vibrations of circular sandwich plates of non-uniform thickness / R. Lal, R. Rani // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2015. – Vol. 99. – P. 29–39.

13 **Lal, R.** On the radially symmetric vibrations of circular sandwich plates with polar orthotropic facings and isotropic core of quadratically varying thickness by harmonic differential quadrature method / R. Lal, R. Rani // *Meccanica*. – 2016. – Vol. 51, is. 3. – P. 611–634.

14 **Rani, R.** Radially symmetric vibrations of exponentially tapered clamped circular sandwich plate using harmonic differential quadrature method / R. Rani, R. Lal // *Mathematical Analysis and its Applications : Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 143. – New Delhi : Springer, 2015. – P. 633–643.

15 **Lal, R.** On the use of differential quadrature method in the study of free axisymmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness / R. Lal, R. Rani // *Journal of Vibration and Control*. – 2016. – Vol. 22, is. 7. – P. 1729–1748.

16 **Rani, R.** Axially symmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness / R. Rani, R. Lal // *Soft Computing for Problem Solving : Proceedings of the Third International Conference : Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 258. – New Delhi : Springer, 2014. – P. 169–181.

17 **Hao, Q.** Free transverse vibration of circular plate of stepped thickness with general boundary conditions by an improved Fourier–Ritz method / Q. Hao, Zh. Chen, W. Zhai // *Shock and Vibration*. – 2022. – Vol. 2022. – Article ID 1643050. – 10 p.

18 **Gao, C.** Steady and transient vibration analysis of uniform and stepped annular/circular plates based on FSDT / C. Gao [et al.] // *Acta mechanica*. – 2022. – Vol. 233, no. 3. – P. 1061–1082.

19 **Зорич, В. А.** Математический анализ. Ч. I. / В. А. Зорич. – 6-е изд., доп. – М. : МЦНМО, 2012. – 710 с.

20 **Bauchau, O.** Kirchhoff plate theory / O. Bauchau, J. Craig // *Structural Analysis : Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 163. – Dordrecht : Springer, 2009. – P. 819–914.

21 **Timoshenko, S. P.** On the correction for shear the differential equation for transverse vibrations of the prismatic bars / S. P. Timoshenko // *Philosophical Magazine and Journal of Science*. – 1921. – Vol. 41, is. 245. – P. 744–746.

22 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.

23 **Маркова, М. В.** Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трёхслойной пластины переменной толщины / М. В. Маркова, Д. В. Леоненко // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2022. – Вып. 36. – С. 3–10.

24 **Маркова, М. В.** Вынужденные колебания круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины / М. В. Маркова // *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки*. – 2022. – № 3 (132). – С. 121–127.

25 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины при ударном периодическом воздействии / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2022. – № 3 (60). – С. 68–76.

26 **Тонг, К. Н.** Теория механических колебаний / К. Н. Тонг. – М. : Машгиз, 1963. – 351 с.

27 **Бейтман, Г.** Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1974. – 296 с.

28 **Ватсон, Г. Н.** Теория Бесселевых функций. Ч. 1 / Г. Н. Ватсон. – М. : Изд-во иностр. лит., 1949. – 798 с.

29 **Плескачевский, Ю. М.** Механика трёхслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием : [монография] / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М. : Физматлит, 2011. – 560 с.

30 СП 5.04.01-2021. Стальные конструкции. – Введ. 01.10.2021. – Минск : Минстройархитектуры, 2021. – 153 с.

31 Строительные конструкции с применением пластмасс. Примеры проектирования и расчета : учеб. пособие / А. М. Иванов [и др.]. – М. : Высш. шк., 1968. – 220 с.

*M. V. MARKOVA*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **STRESS-STRAIN BEHAVIOR OF A THREE-LAYER CIRCULAR STEPPED PLATE UNDER FORCED OSCILLATIONS**

The paper presents the motion equations for a circular three-layer plate with a step-variable thickness of the outer layers. The plate deformation is described by the «Zig-Zag theory». The motion equations are derived from Hamilton's variational principle. The solution for the special case of forced oscillations is obtained by dividing the problem into two components: the problem of quasi-static deformation and the problem of plate free oscillations. To test the formulated solution for three different plate packages, the numerical studies are performed to determine the parameters of the stress-strain state under the action of an external influence linear in time.

**Keywords:** three-layer plate, stepped plate, dynamic deformation.

Получено 28.10.2022