УДК 691-419:534.1

Е. А. ЛАЧУГИНА
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С ЖЕСТКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Рассмотрена постановка задачи о поперечных колебаниях упругой круговой симметричной по толщине пятислойной пластины. Нагрузка осесимметричная, равномерно распределенная по верхней плоскости пластины. Для тонких внешних и внутреннего несущих слоев выполняются кинематические гипотезы Кирхгофа. В слоях сравнительно толстого жесткого заполнителя деформированная нормаль считается прямолинейной. Она имеет постоянную длину и поворачивается на некоторый угол. Учтена работа поперечных сил инерции, а также касательных напряжений в заполнителе. Представлен вывод системы дифференциальных уравнений движения в перемещениях вариационным методом.

Ключевые слова: пятислойная круговая пластина, упругость, колебания, уравнения движения.

Введение. За последние годы применение слоистых элементов конструкций выросло и расширилось. Они нашли свое место и в строительстве, и в машиностроении. Это обуславливает требование по созданию расчетных математических моделей, в которых должен учитываться как статический, так и динамический характер нагрузок. В связи с этим исследование колебаний круговой пятислойной пластины является актуальным.

В монографиях [1–3] предлагаются общие подходы и различные кинематические гипотезы для слоистых конструкций при постановке краевых и начально-краевых задач. В статьях [4, 5] рассмотрены задачи динамики слоистых оболочек. В работах [6–8] содержатся результаты исследования колебаний неоднородных балок и круговых трехслойных пластин. Квазистатическое деформирование трехслойных пластин в случае линейно сжимаемого заполнителя представлено в работе [9], при учете взаимодействия с основанием Пастернака – в статье [10], при неосесимметричном растяжении-сжатии – в публикации [11]. Изгиб трехслойных пластин в нейтронном потоке исследован в статье [12].

Свободные колебания пятислойной прямоугольной пластины рассмотрены в [13], симметричной по толщине круговой – в [14]. В представленной работе для подобной пластины выведена система дифференциальных уравнений, описывающих ее вынужденные колебания.

Постановка начально-краевой задачи. Деформирование симметричной по толщине пятислойной круговой пластины рассматривается в цилиндрической системе координат, которая связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя (*1*). В тонких жестких несущих слоях (*1, 2, 4*) (рисунок 1) принимаются гипотезы Кирхгофа: нормаль прямолинейна, несжимаема и перпендикулярна деформированной срединной плоскости своего слоя. В относительно толстых несжимаемых по толщине слоях заполнителя (*3*, *5*), учитывается работа тангенциальных напряжений. Считаем, что толщины слоев: *внутреннего несущего* – h_1; *внешних несущих* – h_2; заполнителя – h_3. Нормаль к срединной плоскости несжимаема, остается прямолинейной и сдвигается на дополнительный угол $\psi(r, t)$.

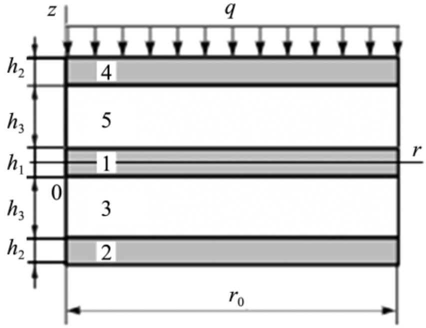

Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойной пластины

Принимаем, что вертикальная нагрузка $q = q(r, t)$ не зависит от окружной координаты φ. На контуре пластины ($r = r_0$) сдвиговая деформация отсутствует ($\psi = 0$) благодаря наличию жесткой диафрагмы. Прогиб пластины обозначим через $w(r, t)$. Продольные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$, благодаря принятым гипотезам, можно выразить через две искомые функции: $w(r, t)$ и $\psi(r, t)$. В результате:

– в несущих слоях 1, 2, 4

$$u_r^{(4)} = -zw,_r + h_3\psi, \quad 0,5h_1 + h_3 \le z \le 0,5h_1 + h_3 + h_2;$$

$$u_r^{(1)} = -zw,_r\,, \quad -0,5h_1 \le z \le 0,5h_1;$$

$$u_r^{(2)} = -zw,_r - h_3\psi, \quad -0,5h_1 - h_3 - h_2 \le z \le -0,5h_1 - h_3;$$

– в заполнителе 3, 5 (1)

$$u_r^{(5)} = -zw,_r + (z - 0,5h_1\psi), \quad 0,5h_1 \le z \le 0,5h_1 + h_3;$$

$$u_r^{(3)} = -zw,_r + (z + 0,5h_1\psi), \quad -0,5h_1 - h_3 \le z \le -0,5h_1,$$

где z – координата рассматриваемой точки слоя; запятая в нижнем индексе соответствует операции дифференцирования по следующей за ней координате.

Воспользовавшись соотношениями Коши [1], получим из (1) деформации в слоях:

$$\varepsilon_r^{(4)} = -zw,_{rr} + h_3\psi,_r; \quad \varepsilon_\varphi^{(4)} = \frac{1}{r}(-zw,_r + h_3\psi); \; \varepsilon_{rz}^{(4)} = 0;$$

$$\varepsilon_r^{(1)} = -zw,_{rr}; \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(-zw,_r); \; \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0;$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = -zw,_{rr} - h_3\psi,_r; \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(-zw,_r - h_3\psi); \; \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0; \qquad (2)$$

$$\varepsilon_r^{(5)} = -zw,_{rr} + (z - 0,5h_1\psi,_r); \quad \varepsilon_\varphi^{(5)} = \frac{1}{r}(-zw,_r + (z - 0,5h_1\psi)); \; \varepsilon_{rz}^{(5)} = \frac{1}{2}\psi;$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = -zw,_{rr} + (z + 0,5h_1\psi,_r); \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(-zw,_r + (z + 0,5h_1\psi)); \; \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi.$$

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r$, φ; k = 1, 2, 3, 4, 5), вводим внутренние усилия и моменты:

$$T_\alpha = \sum_{k=1}^{5} T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{5} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz; \; M_\alpha = \sum_{k=1}^{5} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{5} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz;$$

$$H_\alpha = (M_\alpha^{(3)} + M_\alpha^{(5)}) + h_3(T_\alpha^{(4)} - T_\alpha^{(2)}) + 0,5h_1(T_\alpha^{(3)} - T_\alpha^{(5)}); \tag{3}$$

$$Q = \int_{0,5h_1}^{0,5h_1+h_3} \sigma_{rz}^{(3)} dz + \int_{-0,5h_1-h_3}^{-0,5h_1} \sigma_{rz}^{(5)} dz.$$

Считается, что к контуру пластины приложены заданные силы и моменты T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0. Учитывается инерция движения пластины от поперечных колебаний. Инерция вращения нормали заполнителя не учитывается. Вариация работы внешней поверхностной нагрузки и сил инерции имеет вид

$$\delta A_1 = \iint_S (q\delta w - M_0 \ddot{w} \delta w) r dr d\varphi. \tag{4}$$

Виртуальная работа контурных усилий

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta\psi + M_r^0 \delta w,_r + Q^0 \delta w) d\varphi. \tag{5}$$

Виртуальная работа сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^{5} \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta\varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta\varepsilon_\varphi^{(k)} dz + \int_{0,5h_1}^{0,5h_1+h_3} \sigma_{rz}^{(3)} \delta\psi dz + \int_{-0,5h_1-h_3}^{-0,5h_1} \sigma_{rz}^{(5)} \delta\psi dz + \right] r dr d\varphi. \tag{6}$$

Двойной интеграл здесь берется по площади срединной плоскости заполнителя S. Виртуальные перемещения определяются выражениями:

$$\delta u^{(4)} = -z\delta w,_{rr} + h_3 \delta\psi,_r; \quad 0,5h_1 + h_3 \le z \le 0,5h_1 + h_3 + h_2;$$

$$\delta u^{(1)} = -z\delta w,_{rr}; \quad -0,5h_1 \le z \le 0,5h_1;$$

$$\delta u^{(2)} = -z\delta w,_{rr} - h_3 \delta\psi,_r; \quad -0,5h_1 - h_3 - h_2 \le z \le -0,5h_1 - h_3;$$

$$\delta u^{(5)} = -z\delta w,_{rr} + (z\delta\psi - 0,5h_1 \delta\psi,_r); \quad 0,5h_1 \le z \le 0,5h_1 + h_3;$$

$$\delta u^{(3)} = -z\delta w,_{rr} + (z\delta\psi + 0,5h_1 \delta\psi,_r); \quad -0,5h_1 - h_3 \le z \le -0,5h_1.$$

Вариации деформаций получим из (2):

$$\delta\varepsilon_r^{(4)} = -z\delta w,_{rr} + h_3 \delta\psi,_r; \; \delta\varepsilon_\varphi^{(4)} = \frac{1}{r}(-z\delta w,_r + h_3 \delta\psi);$$

$$\delta\varepsilon_r^{(1)} = -z\delta w,_{rr}; \; \delta\varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(-z\delta w,_r);$$

$$\delta\varepsilon_r^{(2)} = -z\delta w,_{rr} - h_3\delta\psi,_r;\ \delta\varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(-z\delta w,_r - h_3\delta\psi);$$

$$\delta\varepsilon_r^{(5)} = -z\delta w,_{rr} + (z\delta\psi,_r - 0,5h_1\delta\psi,_r);\ \delta\varepsilon_\varphi^{(5)} = \frac{1}{r}(-z\delta w,_r + (z\delta\psi - 0,5h_1\delta\psi));$$

$$\delta\varepsilon_r^{(3)} = -z\delta w,_{rr} + (z\delta\psi,_r + 0,5h_1\delta\psi,_r);\ \delta\varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(-z\delta w,_r + (z\delta\psi + 0,5h_1\delta\psi));$$

$$\delta\varepsilon_{rz}^{(3)} = \delta\varepsilon_{rz}^{(5)} = \frac{1}{2}\delta\psi. \qquad (7)$$

Рассмотрим входящую в (6) сумму интегралов по толщине слоев. Используя вариации радиальных составляющих деформаций (7) в первом слое, получим

$$\int_{h_1} (\sigma_r^{(1)}\delta\varepsilon_r^{(1)})dz = \int_{h_1} \sigma_r^{(1)}(-z\delta w,_{rr})dz = -M_r^{(1)}\delta w,_{rr}.$$

Аналогично

$$\int_{h_2} \sigma_r^{(2)}\delta\varepsilon_r^{(2)}dz = -M_r^{(2)}\delta w,_{rr} - h_3T_r^{(2)}\delta\psi,_r;$$

$$\int_{h_3} \sigma_r^{(3)}\delta\varepsilon_r^{(3)}dz = -M_r^{(3)}\delta w,_{rr} + M_r^{(3)}\delta\psi,_r + 0,5h_1T_r^{(3)}\delta\psi,_r;$$

$$\int_{h_4} \sigma_r^{(4)}\delta\varepsilon_r^{(4)}dz = -M_r^{(4)}\delta w,_{rr} + h_3T_r^{(4)}\delta\psi,_r;$$

$$\int_{h_5} \sigma_r^{(5)}\delta\varepsilon_r^{(5)}dz = -M_r^{(5)}\delta w,_{rr} + M_r^{(5)}\delta\psi,_r - 0,5h_1T_r^{(5)}\delta\psi,_r;$$

$$\int_{h_1} \sigma_\varphi^{(1)}\delta\varepsilon_\varphi^{(1)}dz = \int_{h_1} \sigma_\varphi^{(1)}\frac{1}{r}(-z\delta w,_r)dz = \frac{1}{r}(-M_\varphi^{(1)}\delta w,_r);$$

$$\int_{h_2} \sigma_\varphi^{(2)}\delta\varepsilon_\varphi^{(2)}dz = \frac{1}{r}(-M_\varphi^{(2)}\delta w,_r - h_3T_\varphi^{(2)}\delta\psi);$$

$$\int_{h_3} \sigma_\varphi^{(3)}\delta\varepsilon_\varphi^{(3)}dz = \frac{1}{r}(-M_\varphi^{(3)}\delta w,_r + M_\varphi^{(3)}\delta\psi + 0,5h_1T_\varphi^{(3)}\delta\psi);$$

$$\int_{h_4} \sigma_\varphi^{(4)}\delta\varepsilon_\varphi^{(4)}dz = \frac{1}{r}(-M_\varphi^{(4)}\delta w,_r + h_3T_\varphi^{(4)}\delta\psi);$$

$$\int_{h_5} \sigma_\varphi^{(5)}\delta\varepsilon_\varphi^{(5)}dz = \frac{1}{r}(-M_\varphi^{(5)}\delta w,_r + M_\varphi^{(5)}\delta\psi - 0,5h_1T_\varphi^{(5)}\delta\psi).$$

Просуммировав полученные интегралы и подставив их в соотношение (5), для вариации энергии деформации имеем выражение

$$\delta W = \int_r\int_\varphi \Big[r(-M_r\delta w,_{rr} + H_r\delta\psi,_r + Q\delta\psi) + H_\varphi\delta\psi - M_\varphi\delta w,_r\Big]d\varphi dr. \qquad (8)$$

Слагаемые в подынтегральном выражении (8) представим в виде

$$rH_r\delta\psi,_r = (rH_r\delta\psi),_r - (rH_r),_r\, r\delta\psi;$$

$$rM_r\delta w,_r = (rM_r\delta w,_r),_r - \left[(rM_r),_r\, \delta w\right],_r + (rM_r),_{rr}\, \delta w;$$

$$M_\varphi\delta w,_r = (M_\varphi\delta w),_r - M_\varphi,_r\, \delta w.$$

С учетом представленных выражений разобьем (8) на два интеграла. В первом выносим операцию дифференцирования за скобку, во втором – группируем слагаемые, содержащие одинаковые виртуальные перемещения:

$$\delta W = \int\limits_r\int\limits_\varphi \left\{rH_r\delta\psi - rM_r\delta w,_r + \left[(rM_r),_r - M_\varphi\right]\delta w\right\},_r d\varphi dr -$$

$$-\int\limits_r\int\limits_\varphi \left\{\left[(rH_r),_r - H_\varphi\right]\delta\psi - \left[(rM_r),_{rr} - M_\varphi,_r\right]\delta w\right\} d\varphi dr.$$

Отсюда

$$\delta W = \int\limits_0 \left\{rH_r\delta\psi - rM_r\delta w,_r + \left[(rM_r),_r - M_\varphi\right]\delta w\right\} d\varphi -$$

$$-\int\limits_r\int\limits_\varphi \left\{\left[(rH_r),_r - H_\varphi - rQ\right]\delta\psi - \left[(rM_r),_{rr} - M_\varphi,_r\right]\delta w\right\} d\varphi dr.$$

Приравниваем полученное выражение виртуальной работы внутренних усилий к работе внешних и контурных нагрузок (4), (5). Данное равенство справедливо при любых варьируемых перемещениях, если коэффициенты при независимых вариациях равны нулю. Отсюда получим систему дифференциальных уравнений движения в усилиях для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пятислойной пластины

$$\begin{gathered} H_r,_r + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) - M_0\ddot{w} = -q. \end{gathered} \qquad (9)$$

При этом для контура пластины $r = r_0$ выполняются силовые граничные условия:

$$H_r = H_r^0;\ M_r = M_r^0;\ M_r,_{rr} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0. \qquad (10)$$

Используя закон Гука, деформации (2) и соотношения (3), получаем выражение обобщенных усилий через две неизвестные функции: $w(r, t)$, $\psi(r, t)$. Подстановка полученных выражений в уравнения (9) дает систему дифференциальных уравнений движения в частных производных для определения перемещений

$$\begin{gathered} L_2(a_4\psi - a_5 w,_r) - 2h_3G_3\psi = 0, \\ L_3(a_5\psi - a_6 w,_r) - M_0\ddot{w} = -q, \end{gathered} \qquad (11)$$

где a_i – коэффициенты:

$$a_4 = \left[2K_2^{+}\ h_2 h_3^2 + 2K_3^{+} \frac{h_3^3}{3} \right],\ a_5 = \left[K_2^{+} h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^{+} h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right],$$

$$a_6 = \left[2K_2^{+} h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^{+} \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^{+} h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right],$$

$$a_7 = \left[2K_2^{-} h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^{-} \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^{-} h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right],$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^{+},\ K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^{-};$$

G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования; L_2, L_3 – операторы:

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg),_r \right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2};$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r} \big(r L_2(g) \big),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Начальные условия движения принимаются однородные

$$w(r,0) = 0, \quad \dot{w}(r,0) = 0. \qquad (12)$$

Кинематические граничные условия в случае заделки контура пластины

$$\psi = 0,\ w = w,_r = 0. \qquad (13)$$

Для решения полученных уравнений предполагается использовать метод разложения искомых перемещений по системе собственных ортонормированных функций.

Вывод. В работе получена система (11) дифференциальных уравнений движения, которая совместно с начальными (12) и граничными (10), (13) условиями позволяет исследовать вынужденные поперечные колебания упругих круговых пятислойных пластин при осесимметричной нагрузке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела // М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.

2 **Aghalovyan, L. A.** Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. A. Aghalovyan. – Singapore–London : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.

3 **Mikhasev, G. I.** Thin-walled laminated structures: buckling, vibrations and their suppression / G. I. Mikhasev, H. Altenbach. – Cham : Springer, 2019. – 280 p.

4 **Tarlakovskii, D. V.** Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

5 **Kuznetsova, E. L.** Methods of diagnostic of pipe mechanical damage using functional analysis, neural networks and method of finite elements / E. L. Kuznetsova, G. V. Fedotenkov, E. I. Starovoitov // INCAS Bulletin. – Vol. 12. – 2020. – P. 79–90.

6 **Fedotenkov, G. V.** Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.

7 **Могилевич, Л. И.** Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем / Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Э. И. Старовойтов // Наука и техника транспорта. − 2006. − № 2. − С. 56–63.

8 **Vakhneev, S.** Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – 18 (4). – P. 699–704.

9 **Захарчук, Ю. В.** Влияние сжимаемости заполнителя на перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.

10 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–34.

11 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

12 **Pronina, P. F.** Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // Periódico Tchê Química. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.

13 **Kaplunov, J. D.** Low-frequency vibration modes of strongly inhomogeneous elastic laminates / J. D. Kaplunov, L. A. Prikazchikova // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – Т. 18, вып. 4. – С. 447–457.

14 **Лачугина, Е. А.** Задача о свободных колебаниях пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. : в 2 ч., Гомель, 24–25 ноября 2022 г. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. − С. 202–204.

E. A. LACHUGINA
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

TRANSVERSE VIBRATIONS OF THE FIVE-LAYER ELASTIC CIRCULAR PLATE WITH RIGID FILLERS

The formulation of the transverse oscillations problem for an elastic circular five-layer plate symmetrical in thickness is considered. The load is axisymmetric, it is evenly distributed over the upper plane of the plate. For the thin outer and inner bearing layers, the kinematic hypotheses of Kirchhoff are fulfilled. In the layers of relatively thick rigid filler, the deformed normal remains rectilinear. It has the constant length and rotates by some additional angle. The work of transverse inertial forces, as well as the shear stresses in the filler, are taken into account. The derivation of the motion differential equations system in displacements by the variational method is presented.

Keywords: five-layer circular plate, elasticity, vibrations, equations of motion.

Получено 11.10.2022