**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТРАНСПОРТА»**

Кафедра технической физики и теоретической механики

И. О. ДЕЛИКАТНАЯ, К. П. ШИЛЯЕВА, Е. И. ДОЦЕНКО

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2023

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра технической физики и теоретической механики

И. О. ДЕЛИКАТНАЯ, К. П. ШИЛЯЕВА, Е. И. ДОЦЕНКО

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области транспорта и транспортной деятельности для обучающихся по специальностям 1-44 01 01 «Организация перевозок и управление на автомобильном и городском транспорте», 1-44 01 02 «Организация дорожного движения», 1-44 01 03 «Организация перевозок и управление на железнодорожном транспорте» в качестве учебно-методического пособия по учебной дисциплине «Физика»

Гомель 2023

УДК 537(075.8)
ББК 22.33
Д29

Рецензенты: кафедра общей физики ГГУ им. Ф. Скорины (заведующий кафедрой – канд. техн. наук, доцент *Е. Б. Шершнев*);
профессор кафедры вагонов д-р техн. наук, профессор *О. В. Холодилов* (БелГУТ)

Деликатная, И. О.
Д29 Электричество и магнетизм. Контрольные задачи и примеры : учеб.-метод. пособие / И. О. Деликатная, К. П. Шиляева, Е. И. Доценко ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2023. – 74 с.
ISBN 978-985-891-088-4

Приведены основные законы и формулы по разделу курса физики «Электричество и магнетизм», представлены примеры решения задач, задачи для самостоятельной работы, рекомендуемая литература и справочные таблицы по разделам программы курса физики.

Предназначено для методического обеспечения практических занятий и контрольной работы по соответствующему разделу курса физики студентов факультета УПП.

УДК 537(075.8)
ББК 22.33

ISBN 978-985-891-088-4

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных условий успешного освоения курса физики является систематическое решение задач, которое помогает уяснить физический смысл явлений, закрепить законы и формулы, выработать навыки практического применения теоретических знаний.

Целью практических занятий является обобщение и закрепление имеющихся у студентов знаний по изучаемым темам.

При подготовке к практическим занятиям по изучаемой теме следует воспользоваться лекционным материалом, учебниками и методическими пособиями из списка рекомендуемой литературы.

К выполнению контрольных работ студент приступает только после изучения материала, соответствующего данному разделу программы. При этом необходимо пользоваться учебными пособиями и конспектами лекций, ответить на вопросы для самоконтроля и внимательно ознакомиться с примерами решения задач, предназначенных для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для выполнения контрольной работы № 2 «Электростатика. Постоянный ток. Электромагнетизм» студентами специальностей: 1-44 01 01 «Организация перевозок и управление на автомобильном и городском транспорте»; 1-44 01 02 «Организация дорожного движения»; 1-44 01 03 «Организация перевозок и управление на железнодорожном транспорте».

Варианты задач контрольных работ выдаются преподавателем в ходе проведения практических занятий.

1 ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

1.1 Электростатическое поле

Основные законы и формулы

Закон Кулона (для однородной изотропной среды)

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

где F – сила взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2; ε – диэлектрическая проницаемость среды; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; r – расстояние между зарядами.

Закон сохранения электрического заряда

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \text{const},$$

где левая часть представляет собой алгебраическую сумму зарядов, входящих в электрически изолированную систему; n – число зарядов.

Напряжённость электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0},$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на точечный положительный заряд q_0, помещённый в данную точку поля.

Поток вектора напряжённости электрического поля:

а) через произвольную поверхность, помещённую в неоднородное поле,

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha\, dS,$$

где α – угол между вектором напряжённости поля и нормалью к элементу поверхности; dS – площадь элемента поверхности;

б) через плоскую поверхность S, помещённую в однородное электрическое поле,

$$\Phi_E = ES\cos\alpha.$$

Поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность S

$$\Phi_E = \oint_S E\cos\alpha\, dS,$$

где интегрирование ведётся по всей поверхности.

Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в вакууме. Поток вектора напряжённости через произвольную замкнутую поверхность, охватывающую электрические заряды q_1, q_2, ..., q_n, равен алгебраической сумма зарядов, заключённых внутри этой замкнутой поверхности, деленной на электрическую постоянную ε_0:

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i.$$

Напряжённость поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от заряда,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{q}{r^2}.$$

Напряжённость поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R и зарядом q на расстоянии r от центра сферы:

а) внутри сферы ($r < R$)

$$E = 0;$$

б) на поверхности сферы ($r = R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{q}{R^2};$$

в) вне сферы ($r > R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{q}{r^2}.$$

Принцип суперпозиции (наложения) электрических полей, согласно которому напряжённость результирующего поля, созданного двумя и более источниками поля, равна векторной сумме напряжённостей складываемых полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n .$$

В случае двух электрических полей с напряжённостями $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ модуль вектора напряжённости

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\,\alpha}\ ,$$

где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$.

Плотность заряда: линейная, поверхностная, объемная (соответственно)

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \ \sigma = \frac{dq}{dS}, \ \rho = \frac{dq}{dV},$$

где l – длина, S – площадь, V – объем заряженного тела.

Напряжённость поля:

а) создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon};$$

б) создаваемого двумя параллельными бесконечными равномерно и разноимённо заряженными плоскостями, с одинаковой по модулю поверхностной плотностью заряда (поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon};$$

в) создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью (или цилиндром) на расстоянии r от оси:

$$E = \frac{1}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\tau}{r}.$$

Циркуляция вектора напряжённости электрического поля есть величина, численно равная работе по перемещению единичного точечного положительного заряда вдоль любого замкнутого контура. Циркуляция выражается интегралом и в случае электростатического поля равна нулю:

$$\oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = \oint_L E_l \, dl = 0,$$

где E_l – проекция вектора напряжённости в данной точке контура на направление касательной к контуру в той же точке.

Потенциал электрического поля есть величина, равная отношению потенциальной энергии точечного положительного заряда, помещённого в данную точку поля, к этому заряду:

$$\varphi = \frac{W_p}{q_0}.$$

Потенциал электрического поля есть величина, равная отношению работы силы по перемещению точечного положительного заряда из данной точки в бесконечность к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}.$$

Потенциал электрического поля в бесконечности от источника поля условно принимается равным нулю.

Потенциал электрического поля, создаваемый точечным зарядом q на расстоянии r от заряда:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r}.$$

Потенциал электрического поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R и зарядом q на расстоянии r от центра сферы:

а) внутри сферы ($r < R$)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{R};$$

б) на поверхности сферы ($r = R$)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{R};$$

в) вне сферы ($r > R$)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r}.$$

Во всех приведенных формулах для потенциала сферы ε есть диэлектрическая проницаемость однородного диэлектрика, окружающего сферу.

Потенциал электрического поля, созданного системой зарядов, в данной точке согласно принципу суперпозиции равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых отдельными зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i.$$

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\varphi_i,$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд q_i, всеми зарядами, кроме i-го.

Работа, совершаемая силами электрического поля при перемещении точечного заряда q из точки 1 в точку 2,

$$A = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), \text{ или } A = q\int_1^2 E_l\, dl,$$

где E_l – проекция вектора напряжённости на направление перемещения; dl – модуль перемещения.

В случае однородного поля формула для работы принимает вид

$$A = qEl\cos\alpha,$$

где l – модуль перемещения; α – угол между направлениями векторов напряженности и перемещения.

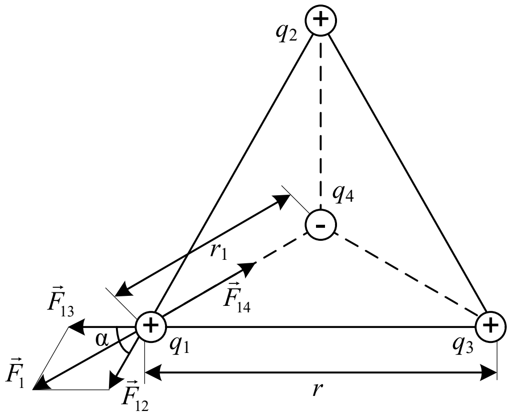
Примеры решения задач

Пример 1.1. Три одинаковых положительных заряда, по 1 нКл каждый, расположены в вершине равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд надо поместить в центр треугольника, чтобы система находилась в равновесии?

Д а н о:
$q_1 = q_2 = q_3 = 1$нКл.
q_4 – ?

Р е ш е н и е

Все три заряда находятся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно выяснить, при каких условиях будет находиться в равновесии один из трёх зарядов, например q_1.



Заряд будет находиться в равновесии, если сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{14} = 0,$$

или $F_1 - F_{14} = 0$. Выразив F_1 через F_{12} и F_{13} и учитывая, что $F_{12} = F_{13}$, получим

$$F_{14} = F_{12}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Применив закон Кулона и имея в виду, что $q_1 = q_2 = q_3$, запишем:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_4}{\varepsilon\, r_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1^2}{\varepsilon\, r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; ε – диэлектрическая проницаемость среды. В нашем случае $\varepsilon = 1$. Из этого выражения получим

$$q_4 = \frac{q_1 r_1^2}{\varepsilon\, r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}.$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует:

$$r_1 = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

С учётом этого $q_4 = q_1/1{,}73 = 0{,}58$ нКл.

О т в е т: $q_4 = 0{,}58$ нКл.

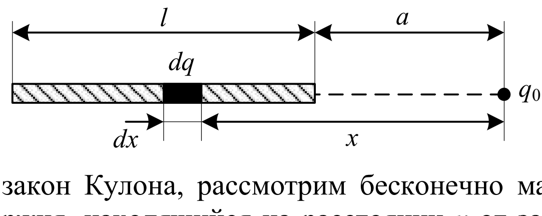
Пример 1.2. Тонкий прямой стержень длиной 15 см равномерно заряжен с линейной плотностью заряда 0,1 мКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии 10 см от ближайшего конца находится точечный заряд $q_0 = 10$ нКл. Определить силу взаимодействия стержня и заряда.

Д а н о:
$l = 15$ см,
$\tau = 0{,}1$ мКл/м,
$a = 10$ см,
$q_0 = 10$ нКл.

F – ?

Р е ш е н и е

Здесь нельзя определить силу взаимодействия зарядов непосредственно по закону Кулона, так как заряд, распределённый по стержню, нельзя считать точечным.



Чтобы применить закон Кулона, рассмотрим бесконечно малый элемент длины dx стержня, находящийся на расстоянии x от заряда q_0. Заряд этого элемента $dq = \tau dx$.

По закону Кулона на *точечный* заряд q_0 со стороны *точечного* заряда dq будет действовать сила

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 dq}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 \tau\, dx}{x^2}.$$

Со стороны всех остальных бесконечно малых элементов стержня на заряд q_0 также будут действовать элементарные силы, направленные в ту же сторону, что и dF. Сложив их модули, найдём искомую силу, равную результирующей силе действия всех элементов стержня на заряд q_0:

$$F = \int dF = \int\limits_a^{a+\ell} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 \tau\, dx}{x^2}.$$

Вынеся постоянные множители за знак интеграла, получим

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 \tau \int\limits_a^{a+\ell} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_0 \tau \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\ell}\right).$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины: $\ell = 0{,}15$ м, $a = 0{,}1$ м, $q_0 = 1\cdot10^{-8}$ Кл, $\tau = 1\cdot10^{-7}$ Кл/м, где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная. Подставив эти значения и выполнив вычисления, найдём

$$F = \frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\cdot 1\cdot 10^{-8}\cdot 1\cdot 10^{-7}\left(\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}1+0{,}15}\right) = 5\cdot 10^{-5}\ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 5\cdot10^{-5}$ Н.

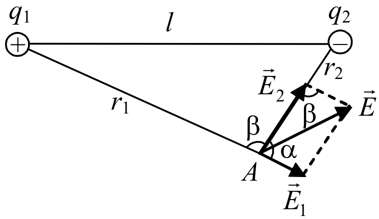
Пример 1.3. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1 = 5$ нКл и $q_2 = -4$ нКл, расположенными в вакууме, равно 15 см. Определить напряженность поля, создаваемого этими зарядами в точке, удаленной от первого заряда на расстояние 10 см и от второго заряда на 7 см.

Дано:
$q_1 = 5$ нКл,
$q_2 = -4$ нКл,
$l = 15$ см,
$r_1 = 10$ см,
$r_2 = 7$ см.

E – ?

Решение

Согласно принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – напряженности электрических полей в рассматриваемой точке, которые создавались бы каждым из зарядов при отсутствии других (направления векторов показаны на рисунке).



Модули напряженностей электрических полей, создаваемых в вакууме точечными зарядами q_1 и q_2,

$$E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2}, \quad E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2}. \tag{1}$$

Модуль вектора $\vec{E}$ найдем по формуле, которая следует из теоремы косинусов (учитывая, что для используемого при сложении векторов параллелограмма $\cos\alpha = -\cos\beta$):

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos\alpha}. \tag{2}$$

По теореме косинусов для треугольника $q_1 A q_2$

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\beta,$$

откуда следует, что

$$\cos\alpha = \frac{l^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}.$$

Вычислим значение $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{(0{,}15)^2 - (0{,}1)^2 - (0{,}07)^2}{2 \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}1} = 0{,}54.$$

Подставив (1) в формулу (2), получим искомую напряженность:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + \frac{2|q_1||q_2|}{r_1^2 r_2^2}\cos\alpha}.$$

Размерность вычисляемой физической величины по структуре формулы совпадает с аналогичной формулой для напряженности поля заряда, поэтому проверку единиц для нее можно не проводить.

Произведем вычисления, предварительно переведя все значения единиц в систему СИ:

$$E=\frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\sqrt{\frac{15\cdot 10^{-18}}{\left(0{,}1\right)^{4}}+\frac{16\cdot 10^{-18}}{\left(0{,}07\right)^{4}}+\frac{2\cdot 5\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot 10^{-9}}{\left(0{,}1\right)^{2}\left(0{,}07\right)^{2}}\cdot 0{,}54}=$$

$=10{,}5$ кВ/м.

О т в е т: E = 10,5 кВ/м.

Пример 1.4. Определить начальную скорость v_0 сближения протонов, находящихся на очень большом расстоянии друг от друга, если минимальное расстояние $r_{\min}$, на которое они могут сблизиться, составляет 10^{-11} см.

Д а н о:
$q = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл,
$r_{\min} = 10^{-11}$ см.
E – ?

Р е ш е н и е

Поместим начало координат в центр масс двух протонов. Он будет находиться посередине отрезка, соединяющего эти две одинаковые частицы. Относительно центра масс протоны будут всегда иметь одинаковые по модулю скорости. Когда частицы находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга, скорости v_1 каждой частицы равны половине начальной скорости v_0, т. е. $v_1 = v_0/2$.

Применим закон сохранения энергии, согласно которому полная механическая энергия изолированной системы постоянна:

$$E = \text{Т} + \text{П},$$

где Т – сумма кинетических энергий обоих протонов относительно центра масс; П – потенциальная энергия системы зарядов.

В начальный момент протоны находились на большом расстоянии, поэтому их потенциальной энергией можно пренебречь ($\text{П}_1 = 0$). Полная энергия будет равна кинетической энергии протонов:

$$E = \text{Т}_1. \qquad (1)$$

В конечный момент, когда протоны максимально сблизятся, их скорости и кинетические энергии будут равны нулю, а полная энергия будет равна потенциальной энергии протонов:

$$E = \text{П}_2. \qquad (2)$$

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$\text{Т}_1 = \text{П}_2. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий протонов:

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = mv_1^2 = \frac{mv_0^2}{4}. \qquad (4)$$

Потенциальная энергия системы двух точечных зарядов, находящихся в вакууме, определяется по формуле

$$\Pi_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}. \qquad (5)$$

С учетом равенств (4) и (5) формула (3) примет вид

$$\frac{mv_0^2}{4} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}},$$

откуда

$$v_0 = \frac{q}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 m r_{\min}}}.$$

Выполнив вычисления по полученной формуле, найдем

$$v_0 = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}}{\sqrt{3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 10^{-13}}} = 2{,}35\cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

О т в е т: v_0 = 2,35 Мм/с.

Пример 1.5. Плоская рамка радиусом r = 5 см находится на некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости. Нормаль к рамке составляет угол $\varphi = 60^\circ$ с линиями напряженности электрического поля. Поверхностная плотность заряда пластины σ = 3 мкКл/м^2. Вычислить поток вектора напряженности Φ_E через рамку.

Д а н о:

r = 5 см,
$\varphi = 60^\circ$,
σ = 3 мкКл/м^2.

Φ_E – ?

Решение

Бесконечная равномерно заряженная плоскость создает вокруг себя однородное электрическое поле с напряженностью

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Поток вектора напряженности в случае однородного поля через плоскую рамку

$$\Phi_E = ES\cos\alpha,$$

где α – угол между вектором напряжённости поля и нормалью к рамке, в данной задаче $\alpha = \varphi$.

Подставляя в данную формулу выражение для напряженности и учитывая, что $S = \pi r^2$, получим

$$\Phi_E = \frac{\pi r^2 \sigma}{2\varepsilon_0}\cos\varphi.$$

Выполнив вычисления по полученной формуле, найдем

$$\Phi_E = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}05^2 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 665\ \text{В} \cdot \text{м}.$$

О т в е т: $\Phi_E = 665$ В·м.

Пример 1.6. Бесконечно длинная тонкая нить равномерно заряжена с поверхностной плотностью 1 нКл/м. Определить разность потенциалов электростатического поля между точками, лежащими на расстояниях 10 и 20 см от нити на прямой, проведенной вдоль силовой линии.

Д а н о:
$\tau = 1$ нКл/м,
$r_1 = 10$ см,
$r_2 = 20$ см.
$\varphi_1 - \varphi_2$ – ?

Р е ш е н и е

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от нити

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr,$$

где E – напряженность, создаваемая нитью, определяется как

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}.$$

Подставляя и интегрируя, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r} dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Выполним вычисления по полученной формуле

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\ln 2 = 12{,}5\ \text{В}.$$

О т в е т: $\varphi_1 - \varphi_2 = 12{,}5$В.

Пример 1.7. Положительные заряды $q_1 = 5$ мкКл и $q_2 = 10$ нКл находятся в вакууме на расстоянии 2 м друг от друга. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния 1 м.

Д а н о:

$q_1 = 5$ мкКл,
$q_2 = 10$ нКл,
$r_1 = 2$ м,
$r_2 = 1$ м.

A – ?

Решение

Можно положить, что первый заряд q_1 остается неподвижным, а второй q_2 под действием внешних сил перемещается в поле, созданном зарядом q_1, приближаясь к нему с расстояния $r_1 = 2$ м до $r_2 = 1$ м.

Работа A' внешней силы по перемещению заряда q из одной точки поля с потенциалом φ_1 в другую, потенциал которой φ_2, равна по абсолютной величине и противоположна по знаку работе A сил поля по перемещению заряда между теми же точками

$$A' = -A.$$

Это следует из теоремы об изменении кинетической энергии тела: если кинетическая энергия не изменяется (предполагаем это), то полная работа всех сил равна нулю ($A' + A = 0$).

Работа A сил электрического поля по перемещению заряда выражается формулой

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Тогда работа A' внешних сил может быть записана в таком виде:

$$A' = q(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1)$$

Потенциалы точек начала и конца пути выразятся формулами:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (1) и учитывая, что для данного случая переносимый заряд $q = q_2$, получим:

$$A' = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Выполним вычисления по полученной формуле. Учитывая, что $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, получим

$$A' = \frac{5\cdot10^{-6}\cdot10\cdot10^{-9}}{4\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = 0{,}22\cdot10^{-3}\,\text{Дж}.$$

О т в е т: $A' = 0{,}22\cdot10^{-3}$ Дж.

Задачи к контрольной работе

1.1 Два одинаковых металлических шарика имеют заряды $q_1 = 4{,}5$ нКл и $q_2 = 7{,}5$ нКл. Найти силу их взаимодействия после соприкосновения и удаления друг от друга на расстояние 10 см.

1.2 Тонкий стержень длиной 20 см равномерно заряжен. Линейная плотность заряда 21 мкКл/м. На продолжении стержня на расстоянии 20 см от ближайшего конца расположен точечный заряд 50 нКл. Найти силу взаимодействия стержня и точечного заряда.

1.3 Вычислить ускорение, сообщаемое одним электроном другому, находящемуся от первого на расстоянии 1,6 мм.

1.4 Два одинаковых металлических шарика имеют заряды $q_1 = 5{,}7$ мкКл и $q_2 = -6{,}9$ мкКл. Найти силу их кулоновского взаимодействия после того, как их привели в соприкосновение, а затем удалили друг от друга на расстояние 6 см. Диаметры шариков существенно меньше расстояния между ними.

1.5 Тонкий стержень длиной 10 см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью 1 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии 20 см от ближайшего конца находится точечный заряд 100 нКл. Найти силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

1.6 Сила электростатического отталкивания уравновешивает силу гравитационного притяжения двух одинаковых капель воды радиусом 0,1 мм. Определить заряд капель.

1.7 Тонкая нить длиной $l = 30$ см заряжена с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. На расстоянии 15 см от нити, против ее середины, находится точечный заряд 1 нКл. Вычислить силу, действующую на этот заряд со стороны заряженной нити.

1.8 На двух одинаковых капельках воды находится по одному лишнему электрону. Определить радиус капелек, если сила электростатического отталкивания уравновешивает силу их гравитационного притяжения.

1.9 Два точечных заряда величиной 1,1 нКл находятся на расстоянии 17 см. С какой силой они действуют на такой же заряд, находящийся на расстоянии 17 см от каждого из них?

1.10 В сосуд с трансформаторным маслом погружен алюминиевый шарик радиусом 0,01 м и зарядом 10 мКл. Определить, при какой напряженности вертикального электростатического поля шарик будет находиться во взвешенном состоянии.

1.11 Точечные заряды $q_1 = 10$ нКл и $q_2 = -20$ нКл находятся на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность поля в точке, удаленной на расстояние $r_1 = 8$ см от первого и $r_2 = 7$ см от второго зарядов.

1.12 Найти силу F, действующую на заряд $q = 9$ нКл, находящийся на расстоянии $r = 4$ см от бесконечно длинной нити, заряженной равномерно с линейной плотностью заряда $\tau = 20$ мкКл/м.

1.13 Капелька воды диаметром 0,1 мм несет такой отрицательный заряд, что напряженность электрического поля на ее поверхности $E_0 = 6 \cdot 10^5$ В/м. Найти напряженность E вертикального поля, удерживающего каплю от падения.

1.14 Бесконечная плоскость несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\sigma = 40$ нКл/м^2. Параллельно ей расположена прямая тонкая нить, заряженная равномерно с линейной плотностью заряда $\tau = 0{,}4$ нКл/м. Определить силу, действующую на отрезок нити длиной 1 м.

1.15 Две бесконечные параллельные плоскости несут равномерно распределенные по поверхностям заряды с плотностями $\sigma_1 = 20$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = 10$ мкКл/м^2. Определить силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь $S = 1$ м^2.

1.16 Положительные заряды $q_1 = 30$ мкКл и $q_2 = 60$ мкКл находятся в вакууме на расстоянии $r_1 = 2{,}5$ м друг от друга. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния $r_2 = 0{,}5$ м.

1.17 Найти силу отталкивания (на единицу длины) двух одноименно заряженных бесконечно длинных параллельных нитей с одинаковой линейной плотностью заряда 3 мкКл/м, находящихся в вакууме на расстоянии 2 см друг от друга. Найти также работу (на единицу длины), которую нужно совершить, чтобы сблизить эти нити до расстояния 1 см.

1.18 Вблизи бесконечной заряженной плоскости находится точечный заряд 10^{-8} Кл. Под действием поля заряд перемещается вдоль силовой линии на расстояние 20 см. При этом совершается работа 1 мДж. Определить поверхностную плотность заряда.

1.19 Сфера радиусом 5 см равномерно заряжена с поверхностной плотностью 1 нКл/м^2. Определить разность потенциалов электростатического поля между точками этого поля, лежащими на расстояниях 10 и 15 см от центра сферы.

1.20 Бесконечно длинная нить заряжена равномерно с линейной плотностью заряда $\tau = 70$ мкКл/м. Найти работу сил поля по перемещению точечного $q = 2$ нКл с расстояния $a = 2{,}4$ см до расстояния $b = 4{,}8$ см от нити.

1.21 Плоская квадратная рамка со стороной $a = 10$ см находится на некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости. Плоскость пластины с линиями поля составляет угол $\varphi = 30^\circ$. Поверхностная плотность заряда равна $\sigma = 1$ мкКл/м^2. Вычислить поток вектора напряженности Φ_E через эту пластину.

1.22 Бесконечная плоскость несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\sigma = 3$ мкКл/м^2. На некотором расстоянии от плоскости параллельно ей расположен круг радиусом $r = 20$ см. Вычислить поток вектора напряженности Φ_E через этот круг.

1.23 Прямоугольная плоская площадка со сторонами, длины которых равны $a = 3$ см и $b = 2$ см. Площадка ориентирована так, что ее плоскость составляет угол $\varphi = 30^\circ$ с линиями однородного магнитного поля. Индукция магнитного поля имеет такое же значение, как и индукция на расстоянии 1 м от точечного заряда $q = 1$ мкКл. Вычислить поток вектора напряженности Φ_E через данную площадку.

1.24 Расстояние между двумя бесконечными параллельными плоскостями $d = 1$ см. Плоскости равномерно заряжены с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 0{,}1$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = 0{,}2$ мкКл/м^2. Найти разность потенциалов между пластинами.

1.2 Электрическое поле в веществе

Основные законы и формулы

Диполь есть система двух равных по величине и противоположных по знаку точечных электрических зарядов, расстояние между которыми значительно меньше расстояния от центра диполя до точек наблюдения. Вектор $\vec{l}$, проведённый от отрицательного заряда диполя к его положительному заряду, называется плечом диполя.

Электрический момент диполя

$$\vec{p} = |q|\vec{l}.$$

Напряжённость и потенциал поля диполя в точке:

а) лежащей на оси диполя

$$E=\frac{p}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}, \qquad \varphi=\frac{p}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды; r – модуль радиус-вектора, проведённого от центра диполя к рассматриваемой точке поля.

б) лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восстановленном из его середины,

$$E=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}, \qquad \varphi=0.$$

Механический момент, действующий на диполь в однородном электрическом поле,

$$\vec{M}=\left[\vec{p}\vec{E}\right], \quad \text{или} \quad M=pE\sin\alpha,$$

где α – угол между направлениями векторов дипольного момента и напряжённости поля.

Вектор поляризации или поляризованность

$$\vec{P}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i,$$

где $\vec{p}_i$ – электрический момент i-й молекулы; N – число молекул, содержащихся в объёме ΔV.

Связь поляризованности с напряжённостью поля в диэлектрике

$$P=\chi\varepsilon_0 E,$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, величина безразмерная, характеризующая свойства диэлектрика.

Связь диэлектрической проницаемости с диэлектрической восприимчивостью

$$\varepsilon=1+\chi.$$

Напряжённость среднего макроскопического поля в диэлектрике связана с напряжённостью E_0 внешнего поля соотношениями:

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad E=E_0-\frac{P}{\varepsilon_0}.$$

Электрическое смещение связано с напряжённостью поля соотношением

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}.$$

Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в веществе. Поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность, охватывающую заряды q_1, q_2, ... q_n, равен алгебраической сумме зарядов, заключённых внутри этой замкнутой поверхности

$$\Phi_D = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^{n} q_i,$$

где D_n – проекция вектора электрического смещения на направление нормали к элементу поверхности; n – число зарядов.

Электрическая ёмкость уединённого проводника или конденсатора

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \varphi},$$

где Δq – заряд, сообщённый проводнику (конденсатору); $\Delta\varphi$ – изменение потенциала, вызванное этим зарядом.

Электрическая ёмкость:

а) плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d};$$

б) уединённой проводящей сферы радиусом R, находящейся в среде с диэлектрической проницаемостью ε,

$$C = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R,$$

где S – площадь пластины; d – расстояние между пластинами;

в) сферического конденсатора

$$C = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где r_1 и r_2 – радиусы концентрических сфер;

г) цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)},$$

где l – длина обкладок конденсатора; r_1 и r_2 – радиусы полых коаксиальных цилиндров.

Емкость батареи конденсаторов при последовательном соединении:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ \dots\ +\frac{1}{C_n}.$$

Емкость батареи конденсаторов при параллельном соединении

$$C=C_1+C_2+\dots+C_n.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W=\frac{C(\Delta\varphi)^2}{2}=\frac{q\Delta\varphi}{2}=\frac{q^2}{2C},$$

где q – заряд конденсатора; C – его емкость; $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Энергия электростатического поля плоского конденсатора

$$W=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}S\,d=\frac{\varepsilon_0\varepsilon SU^2}{2d}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}V,$$

где S – площадь одной пластины; U – разность потенциалов между пластинами; V – объём конденсатора.

Объёмная плотность энергии

$$w=\frac{W}{V}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}=\frac{ED}{2},$$

где E – напряжённость электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью ε; D – электрическое смещение.

Примеры решения задач

Пример 1.8. Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 1,5 кВ, зажата пластинка толщиной 5 мм из парафина ($\varepsilon = 2$). Определить поверхностную плотность связанных зарядов на парафине.

Д а н о:
$U = 1{,}5$ кВ,
$d = 5$ мм,
$\varepsilon = 2$.

$\sigma' - ?$

Решение

Векторы электрического смещения и напряжённости связаны между собой соотношением

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P},$$

где $\vec{P}$ – вектор поляризации диэлектрика. Так как векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ нормальны к поверхности диэлектрика, то $D_n = D$ и $E_n = E$. Тогда можно записать

$$D=\varepsilon_0 E+P,$$

где $P = \sigma'$, т. е. поляризованность равна поверхностной плотности связанных зарядов диэлектрика. Тогда

$$\sigma' = D - \varepsilon_0 E.$$

Учитывая, что $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ и $E = U/d$, где d – расстояние между обкладками конденсатора, найдём

$$\sigma' = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \frac{U}{d}.$$

Выполнив вычисления по полученной формуле, найдем

$$\sigma' = 8{,}85 \cdot 10^{-12} (2-1) \frac{1{,}5 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-3}} = 2{,}65 \cdot 10^{-6}\ \text{Кл/м}^2.$$

О т в е т: $\sigma' = 2{,}65$ мкКл/м^2.

Пример 1.9. Конденсатор емкостью $C_1 = 4$ мкФ заряжен до напряжения $U_1 = 400$ В, а конденсатор емкостью $C_2 = 5$ мкФ заряжен до $U_2 = 500$ В. Определить напряжение между пластинами конденсатора после соединения их одноименно заряженными пластинами. Какое количество теплоты выделится в результате этого соединения?

Д а н о:

$C_1 = 4$ мкФ,
$U_1 = 400$ В,
$C_2 = 5$ мкФ,
$U_2 = 500$ В.

U – ?
Q – ?

Решение

Если конденсаторы соединены параллельно, то их общая емкость $C = C_1 + C_2$. В соответствии с законом сохранения заряда, заряд эквивалентного конденсатора

$$q = q_1 + q_2,$$

где q_1 и q_2– заряды конденсаторов до соединения.

Так как соединялись одноименно заряженные пластины, то искомое напряжение

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}.$$

Учитывая, что $q_1 = C_1 U_1$ и $q_2 = C_2 U_2$, получим:

$$U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 400 + 5 \cdot 10^{-6} \cdot 500}{4 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} = 455{,}6\ \text{В}.$$

Количество выделившейся теплоты определим, пользуясь законом сохранения и превращения энергии. Энергия конденсаторов до соединения

$$W_1 = \frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2},$$

после соединения

$$W_2 = \frac{CU^2}{2} = \left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right)U^2.$$

Следовательно, искомое количество теплоты

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} - \left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right)U^2.$$

Выполнив вычисления, получим:

$$Q = \frac{4\cdot10^{-6}\cdot400^2}{2} + \frac{5\cdot10^{-6}\cdot500^2}{2} - \left(\frac{4\cdot10^{-6} + 5\cdot10^{-6}}{2}\right)\cdot455{,}6^{\,2} = 1{,}1\cdot10^{-2}\text{ Дж.}$$

Размерность очевидна.

О т в е т: $U = 455{,}6$ В; $Q = 1{,}1\cdot10^{-2}$Дж.

Пример 1.10. К пластинам плоского воздушного ($\varepsilon_1 = 1$) конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 1{,}5$ кВ. Площадь пластины $S = 150$ см^2, расстояние между ними $d = 5$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения в пространство между пластинами внесли стекло ($\varepsilon_2 = 7$). Определить: 1) разность потенциалов между пластинами после внесения диэлектрика; 2) емкость конденсатора до и после внесения диэлектрика; 3) поверхностную плотность заряда на пластинах до и после внесения диэлектрика**.**

Д а н о:
$U_1 = 1{,}5$ кВ,
$S_1 = 150$ см^2,
$\varepsilon_1 = 1{,}0$,
$\varepsilon_2 = 7{,}0$,
$d = 5$ мм.

U_2, C_1, C_2 – ?
σ_1, σ_2 – ?

Решение

Так как конденсатор отключили от источника до замены диэлектрика, то заряд обкладки, а значит, и поверхностная плотность заряда на обкладке остаются постоянными:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma.$$

Напряженность электрического поля в плоском конденсаторе может быть определена из двух выражений:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{U}{d},$$

поэтому до внесения диэлектрика и после его внесения справедливы соотношения

$$\sigma d = U_1\varepsilon_0\varepsilon_1 \quad \text{и} \quad \sigma d = U_2\varepsilon_0\varepsilon_2,$$

из которых следует:

$$U_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} U_1.$$

Емкость конденсатора до и после включения диэлектрика определяется соответственно выражениями:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d} \text{ и } C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d}.$$

Заряд пластин после отключения от источника напряжения не меняется, т. е. Q = const. Поэтому поверхностную плотность заряда на пластинах до и после внесения диэлектрика можно найти по одной из следующих формул:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{C_1 U_1}{S} = \frac{C_2 U_2}{S}.$$

Из четырех конечных формул только последняя нуждается в проверке получающихся единиц:

$$[\sigma] = \frac{\text{Ф} \cdot \text{В}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} \frac{\text{В}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Подставим в полученные соотношения исходные значения и проведем вычисления:

$$U_2 = \frac{1}{7} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3 = 214\,\text{В}; \; C_1 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3}} = 2{,}65 \cdot 10^{-11}\,\text{Ф};$$

$$C_2 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}86 \cdot 10^{-10}\,\text{Ф}; \; \sigma = \frac{2{,}65 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^{-2}} = 2{,}65 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

О т в е т: U_2 = 214 В; C_1 = 26,5 пФ; C_2 = 186 пФ; σ = 2,65 мкКл/м^2.

Пример 1.11. Определить электрическую емкость плоского конденсатора с двумя слоями диэлектриков: фарфор (ε_1 = 5,0) толщиной 2 мм и эбонит (ε_2 = 2,7) толщиной 1,5 мм, если площадь каждой пластины равна 100 см^2.

Д а н о:
d_1 = 2 мм,
ε_1 = 5,0,
d_2 =1,5 мм,
ε_2 = 2,7,
S = 100 см^2.

C – ?

Р е ш е н и е

Емкость конденсатора, по определению, $C = Q/U$, где Q – модуль заряда на одной из пластин конденсатора, U – разность потенциалов между пластинами.

Заменив в этом равенстве общую разность потенциалов суммой $U_1 + U_2$ на слоях диэлектриков, получим

$$C = \frac{Q}{U_1 + U_2}. \qquad (1)$$

Заряд пластины выразим через его поверхностную плотность (σ), разности потенциалов − через напряженности электрических полей в диэлектриках (E_1 и E_2) и электрическое смещение (D) в веществах, которое одинаково, т. к. векторы полей перпендикулярны к поверхностям диэлектриков:

$$Q = \sigma S;\ U_1 = E_1 d_1 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_1;\ U_2 = E_2 d_2 = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} d_2.$$

С учетом вышеприведенных формул равенство (1) можно переписать в виде

$$C = \frac{\sigma S}{\dfrac{D d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} + \dfrac{D d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}}. \qquad (2)$$

Умножив числитель и знаменатель равенства на ε_0 и учитывая, что $D = \sigma$, окончательно получим:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{(d_1/\varepsilon_1) + (d_2/\varepsilon_2)}. \qquad (3)$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$[C] = \frac{\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot \text{м}^2}{\text{м} + \text{м}} = \text{Ф}.$$

Подставим числовые значения величин в формулу (3):

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{\dfrac{2 \cdot 10^{-3}}{5} + \dfrac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{267}} = 9{,}22 \cdot 10^{-11}\,\text{Ф}.$$

О т в е т: C = 92,2 пФ.

Пример 1.12. Плоский конденсатор заряжен до разности потенциалов U = 1 кВ. Расстояние между пластинами d = 1 см. Диэлектрик – стекло. Определить объемную плотность энергии поля конденсатора.

Д а н о:	Р е ш е н и е
$U = 1$ кВ, $d = 0{,}01$ м.	Объемная плотность энергии однородного электрического поля
w – ?	

$$w = \frac{W}{V}, \qquad (1)$$

где W – энергия поля конденсатора (энергия заряженного конденсатора); V – объем, занимаемый полем, т. е. объем пространства, заключенного между пластинами конденсатора.

Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле

$$W = \frac{CU^2}{2}, \qquad (2)$$

где U – разность потенциалов, до которой заряжены пластины конденсатора; C – его электроемкость.

Для плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}; \quad V = Sd,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость (для стекла $\varepsilon = 7$); S – площадь пластины конденсатора.

Подставим эти соотношения в (2), а получившуюся формулу − в (1):

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon U^2}{2d^2}. \qquad (3)$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$[w] = \frac{\text{Ф}}{\text{м}}\frac{\text{В}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}\frac{\text{В}^2}{\text{м}^3} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Подставим в формулу (3) исходные данные и выполним вычисления:

$$w = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot (1000)^2}{2 \cdot (0{,}01)^2} \approx 0{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

О т в е т : $w = 0{,}31$ Дж/м^3.

Задачи к контрольной работе

1.25 В однородное электростатическое поле напряженностью $E_0 = 700$ В/м перпендикулярно полю помещается бесконечная плоскопараллельная стеклянная пластинка. Определить: 1) напряженность поля внутри пластины; 2) электрическое смещение внутри пластины; 3) поляризованность стекла; 4) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле.

1.26 Расстояние между пластинами плоского конденсатора составляет 2 мм. После зарядки конденсатора до разности потенциалов 400 В между пластинами конденсатора вдвинули стеклянную пластинку. Определить: 1) диэлектрическую восприимчивость стекла; 2) поверхностную плотность связанных зарядов σ' на стеклянной пластинке.

1.27 Определить поверхностную плотность связанных зарядов на слюдяной пластинке толщиной 1 мм, служащей изолятором плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами конденсатора 250 В.

1.28 Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено парафином. Расстояние между пластинами 2 мм. Разность потенциалов равна 5 кВ. Определить: 1) поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора; 2) поверхностную плотность связанных зарядов σ' на диэлектрике.

1.29 Поверхностная плотность связанных зарядов на поверхности слюдяной пластинки толщиной 0,2 мм, служащей изолятором в плоском конденсаторе, $\sigma' = 2{,}88 \cdot 10^{-5}$ Кл/м^2. Найти разность потенциалов между обкладками конденсатора.

1.30 Между пластинами плоского конденсатора находится диэлектрик. На пластины подана разность потенциалов $U_1 = 100$ В, расстояние между пластинами $d = 1$ мм. Если, отключив источник напряжения, вынуть диэлектрик из конденсатора, то разность потенциалов между пластинами возрастет до $U_2 = 400$ В. Найти: а) диэлектрическую проницаемость диэлектрика; 2) поверхностную плотность связанных зарядов.

1.31 Диэлектрик поместили в электрическое поле напряженностью $E_0 = 16$ кВ/м. Чему равна поляризованность P диэлектрика, если напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике стала равной 8 кВ/м?

1.32 Определить поляризованность P стекла, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью $E_0 = 2$ МВ/м.

1.33 Эбонитовая плоскопараллельная пластина помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E_0 = 2$ МВ/м. Границы пластины перпендикулярны силовым линиям. Определить поверхностную плотность связанных зарядов σ' на гранях пластины.

1.34 При какой напряженности среднего макроскопического поля в диэлектрике ($\varepsilon = 3$) поляризованность P диэлектрика достигнет значения, равного 100 мкКл/м^2?

1.35 Определить расстояние между пластинами плоского конденсатора, если напряжение между ними $U = 200$ В. Площадь каждой пластины $S = 50$ см^2, ее заряд $q = 5$ нКл, диэлектрик − слюда.

1.36 К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 500$ В. Площадь каждой пластины $S = 200$ см^2, расстояние между ними $d = 1{,}5$ мм. После отключения конденсатора от источника питания в пространство между пластинами внесли парафин. Определить разность потенциалов U_2 между пластинами после внесения диэлектрика. Определить также емкости конденсатора C_1 и C_2 до и после внесения диэлектрика.

1.37 Металлический шарик диаметром $d = 3$ см заряжен отрицательно до потенциала $\varphi = 120$ В. Сколько избыточных электронов N находится на поверхности шарика?

1.38 Пластины изолированного плоского конденсатора раздвигаются так, что его емкость изменяется от 100 до 80 пФ. Какая работа совершается при этом, если заряд конденсатора $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Кл? Поле между пластинами остается однородным.

1.39 Конденсатор емкостью $C_1 = 10$ мкФ заряжен до напряжения $U_1 = 300$ В. К нему параллельно присоединяют незаряженный конденсатор емкостью $C_2 = 300$ мкФ. Какое напряжение установится после их соединения?

1.40 Конденсаторы емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 4$ мкФ заряжены до разности потенциалов $\Delta\varphi_1 = 10$ В и $\Delta\varphi_2 = 40$ В соответственно. После зарядки конденсаторы соединили одноименными полюсами. Определить разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками конденсаторов после их соединения.

1.41 Найти механическую работу, совершённую электрическими силами при повороте ручки настройки конденсатора переменной емкости, подключенного к батарее с ЭДС $\varepsilon = 300$ В, если емкость изменяется от $C_1 = 20$ мФ до $C_2 = 100$ мФ.

1.42 Найти энергию W уединенной сферы радиусом $R = 5$ см, заряженной до потенциала $\varphi = 400$ В.

1.43 Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины к другой, приобретает скорость $v = 10^6$ м/с. Расстояние между пластинами $d = 4$ мм. Найти: а) разность потенциалов U между пластинами; б) напряженность электрического поля E внутри конденсатора; в) объемную плотность энергии поля w в конденсаторе.

1.3 Постоянный электрический ток проводимости в металлах, электролитах, газах и вакууме

Основные законы и формулы

Сила тока определяется количеством электричества, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени,

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Плотность тока есть векторная величина, измеряемая отношением силы тока к единице площади поперечного сечения проводника,

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS}\vec{k},$$

где $\vec{k}$ – единичный вектор, совпадающий по направлению с направлением движения положительных зарядов.

Плотность тока в проводнике

$$\vec{j} = nq\langle\vec{v}\rangle,$$

где n – концентрация носителей заряда; $\langle\vec{v}\rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике.

Закон Ома:

а) для однородного участка цепи (т. е. не содержащего ЭДС)

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R};$$

б) для неоднородного участка цепи

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R};$$

в) для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R},$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; ε_{12} – ЭДС источников тока, входящих в участок; R – сопротивление цепи (участка цепи); ε – ЭДС всех источников тока цепи.

Закон Ома в дифференциальной форме: плотность тока пропорциональна напряжённости электрического поля в данной точке проводника:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} ,$$

где $\gamma = 1/\rho$ – удельная проводимость материала проводника.

Сопротивление однородного проводника

$$R = \rho \frac{l}{S} ,$$

где ρ – удельное сопротивление материала; l – длина проводника; S – площадь поперечного сечения.

Зависимость удельного сопротивления от температуры

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \alpha t\right) ,$$

где ρ_0 и ρ – удельные сопротивления, соответственно, при 0 °С и при температуре t (по шкале Цельсия), α – температурный коэффициент сопротивления.

Сопротивление проводников:

а) при последовательном соединении

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i .$$

б) при параллельном соединении

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i},$$

где n – число проводников; R_i – сопротивление i-го проводника.

Правила Кирхгофа для разветвлённых цепей:

1) алгебраическая сумма токов, сходящихся в любом узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

где n – число токов, сходящихся в узле;

2) для любого замкнутого контура алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме всех ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k ,$$

где n – число участков, содержащих активное сопротивление; I_i – сила тока на i-м участке цепи; R_i – сопротивление i-го участка; m – число участков, содержащих источники тока; ε_k – ЭДС источников тока на k-м участке.

Работа, совершаемая электростатическим полем и сторонними силами в участке цепи постоянного тока за время t:

$$A = IUt.$$

Мощность тока

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}.$$

Закон Джоуля – Ленца определяется соотношением:

$$Q = I^2 Rt = UIt = \frac{U^2}{R} t,$$

где Q – количество теплоты, выделяющееся в участке цепи постоянного тока за время t. Закон Джоуля – Ленца справедлив при условии, что участок неподвижен и в нём не протекают химические реакции.

Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме

$$w = jE = \gamma E^2,$$

где w – удельная тепловая мощность тока, т. е. количество теплоты, выделяемое в единицу времени в единице объема проводника при протекании в нем тока.

Плотность тока в газе при отсутствии насыщения

$$j = qn\left(u_+ + u_-\right)E,$$

где q – заряд иона; n – концентрация ионов; u_+, u_- – подвижности положительных и отрицательных ионов.

Плотность тока насыщения в газе между плоскими электродами

$$j_\text{н} = q\Delta n\, d,$$

где q – заряд иона; Δn – число пар ионов, создаваемых ионизатором в единицу времени в единице объёма газа, $\Delta n = N/(Vt)$; d – расстояние между электродами.

Примеры решения задач

Пример 1.13. Определить плотность электрического тока в медном проводнике (удельное сопротивление ρ = 17 нОм·м), если удельная тепловая мощность тока w = 1,7 Дж/(м^3·с).

Дано:	Решение
w = 1,7 Дж/(м^3·с), ρ = 17 нОм·м. j – ?	Согласно законам Джоуля – Ленца и Ома в дифференциальной форме

$$w = \gamma E^2 = E^2/\rho, \tag{1}$$

$$j = \gamma E = E/\rho, \tag{2}$$

где γ и ρ – соответственно удельные проводимость и сопротивление материала проводника. Из (2) получим, что $E = \rho j$. Подставив это выражение в (1), найдем искомую плотность тока:

$$j = \sqrt{\frac{w}{\rho}}.$$

Выполнив вычисления по полученной формуле, найдем

$$j = \sqrt{\frac{1,7}{1,7 \cdot 10^{-8}}} = 10^4 \text{ А/м}^3.$$

Ответ: $j = 10^4$ А/м^3.

Пример 1.14. Сила тока в проводнике равномерно растет от $I_0 = 0$ до I_{max} = 3 А за время τ = 6 с. Сопротивление проводника R = 50 Ом. Определить выделившееся за это время количество теплоты.

Дано:	Решение
$I_0 = 0$, I_{max} = 3 А, τ = 6 с, R = 50 Ом. Q – ?	Согласно закону Джоуля – Ленца для бесконечно малого промежутка времени

$$dQ = I^2 R\, dt.$$

По условию задачи сила тока в проводнике равномерно растет, то есть $I = kt$, где коэффициент пропорциональности $k = (I_{max} - I_0)/\tau$ = const. Тогда можно записать:

$$dQ = k^2 R t^2 dt. \tag{1}$$

Проинтегрировав (1) и подставив выражение для k, найдем искомое количество теплоты:

$$Q = \int_0^\tau k^2 R t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R \tau^3 = \frac{1}{3} \frac{\left(I_{max} - I_0\right)^2}{\tau^2} R\tau^3 = \frac{1}{3} R\tau\left(I_{max} - I_0\right)^2.$$

Выполнив вычисления по полученной формуле, найдем

$$Q = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 6 \cdot (3-0)^2 = 900 \text{ Дж}.$$

О т в е т: Q = 900 Дж.

Пример 1.15. Электрическая лампа под напряжением U = 50 В потребляет мощность P = 500 Вт. Определить, на сколько градусов нагреются подводящие провода через 1 мин после включения лампы, если проводка выполнена медным проводом сечением S = 1 мм^2 и половина выделившейся теплоты отдана окружающим телам; число электронов, проходящих через поперечное сечение провода за 1 с; среднюю скорость упорядоченного движения электронов, считая число электронов в проводнике равным числу атомов; силу, действующую на отдельные электроны проводимости.

Д а н о:
U = 50 В,
P = 500 Вт,
τ = 1 мин,
S = 1 мм^2.

Δt, N – ?
$\langle v\rangle$, F – ?

Решение

Количество теплоты, выделившейся в проводах за время τ, равное $Q = I^2R\tau$, и количество теплоты, затраченное на нагревание проводника $Q = cm\Delta t$, связаны следующим соотношением:

$$cm\Delta t = \eta I^2 R\tau, \tag{1}$$

где c – удельная теплоемкость; $m = \rho_м Sl$ – масса проводника; $\rho_м$ – плотность меди; η – КПД. Так как $I = P/U$ и $R = \rho l/S$ (где ρ – удельное сопротивление меди), то из формулы (1) получим

$$\Delta t = \frac{\eta P^2 \rho\tau}{c\rho_м S^2 U^2} = \frac{0{,}5 \cdot 500^2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 60}{385 \cdot 8{,}93 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12} \cdot 50^2} \approx 14{,}8\ °\text{C}.$$

Число электронов, проходящих через поперечное сечение за 1 с,

$$N = \frac{I}{e} = \frac{P}{Ue} = \frac{500}{50 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 6{,}25 \cdot 10^{19}\ \text{с}^{-1}.$$

Среднюю скорость упорядоченного движения электронов найдем из выражения для плотности тока

$$\langle v\rangle = \frac{I}{en_0S} = \frac{P}{SUen_0},$$

где n_0 – число свободных электронов в единице объема;

$$n_0 = \frac{N_A}{V_0} = \frac{N_A\rho_м}{A},$$

A – атомная масса меди; N_A – число Авогадро. Следовательно,

$$\langle v\rangle = \frac{PA}{eN_A\rho_м SU} = \frac{500\cdot 63{,}5\cdot 10^{-3}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 6{,}62\cdot 10^{23}\cdot 8{,}93\cdot 10^{3}\cdot 10^{-6}\cdot 50} = 6{,}74\cdot 10^{-4}\ \text{м/с}.$$

Сила, действующая на отдельные электроны проводимости,

$$F = eE = e\frac{U}{l} = \frac{e\rho P}{SU} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}7\cdot 10^{-8}\cdot 500}{10^{-6}\cdot 50} = 2{,}72\cdot 10^{-20}\ \text{Н}.$$

Ответ: $\Delta t \approx 14{,}8$ °C, $N = 6{,}25\cdot 10^{19}$ с$^{-1}$, $\langle v\rangle = 6{,}74\cdot 10^{-4}$ м/с,

$F = 2{,}72\cdot 10^{-20}$ Н.

Пример 1.16. Пространство между пластинами плоского конденсатора имеет объем V = 375 см^3 и заполнено частично ионизированным водородом. Площадь пластин конденсатора S = 250 см^2. При каком напряжении U между пластинами конденсатора сила тока, протекающего через конденсатор, достигнет значения I = 2 мкА, если концентрация ионов обоих знаков в газе равна 5,3·10^7 см$^{-3}$? Принять подвижность ионов u_+ = 5,4·10^{-4} м^2/(В·с), u_- = 7,4·10^{-4} м^2/(В·с).

Дано:

V = 375 см^3,
S = 250 см^2,
I = 2 мкА,
n = 5,3·10^7 см$^{-3}$,
u_+ = 5,4·10^{-4} м^2/(В·с),
u_- = 7,4·10^{-4} м^2/(В·с).

U – ?

Решение

Напряжение на пластинах конденсатора связано с напряженностью однородного электрического поля между пластинами и расстоянием между ними соотношением

$$U = Ed. \tag{1}$$

Напряженность поля может быть найдена из выражения для плотности тока

$$j = qn\left(u_+ + u_-\right)E,$$

где q – заряд иона. Отсюда

$$E = \frac{j}{qn\left(u_+ + u_-\right)} = \frac{I}{qn\left(u_+ + u_-\right)S}.$$

Расстояние между пластинами, входящее в формулу (1), найдем из соотношения $d = V/S$.

Подставив выражения для E и d в (1), получим

$$U = \frac{IV}{qn\left(u_+ + u_-\right)S^2}. \tag{2}$$

Подставив в формулу (2) значения величин и произведя вычисления, получим:

$$U = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}75 \cdot 10^{-4}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5{,}3 \cdot 10^{13} \cdot \left(5{,}4 + 7{,}4\right) \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}} = 110 \text{ В.}$$

О т в е т: $U = 110$ В.

Задачи к контрольной работе

1.44 К железному проводу длиной $l_1 = 1{,}6$ м и поперечным сечением $S_1 = 1$ мм^2 параллельно присоединен никелиновый провод длиной $l_2 = 1{,}2$ м и поперечным сечением $S_2 = 2$ мм^2. Определить силу тока в железном проводе, если в никелиновом сила тока $I_2 = 0{,}5$ А.

1.45 Сопротивление катушки из медной проволоки 16 Ом, масса проволоки 4 кг. Определить длину и площадь поперечного сечения проволоки.

1.46 Масса мотка медной проволоки 0,1 кг, ее сечение 0,1 мм^2. Определить сопротивление этой проволоки при температуре 393 К.

1.47 Напряжение на концах двух параллельно соединенных сопротивлений по 4 Ом каждый равно 6 В. Если одно из сопротивлений выключить, вольтметр показывает 8 В. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника.

1.48 По медному проводнику сечением 1 мм^2 течет ток 100 мА. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

1.49 Лампа накаливания потребляет ток, равный 0,6 А. Температура вольфрамовой нити диаметром 0,1 мм равна 2200 °С. Ток подводится медным проводом сечением 6 мм^2. Определить напряженность электрического поля: 1) в вольфраме; 2) в меди.

1.50 Электрическая плитка мощностью 1 кВт с нихромовой спиралью, удельным сопротивлением $\rho_0 = 9{,}8 \cdot 10^{-7}$ Ом·м и температурным коэффициентом $\alpha = 0{,}25 \cdot 10^{-3}$ °С, предназначена для включения в сеть напряжением 220 В. Сколько метров проволоки диаметром 0,5 мм надо взять для изготовления спирали, если температура нити составляет 900 °С?

1.51 Определить ток короткого замыкания источника ЭДС, если при внешнем сопротивлении $R_1 = 50$ Ом ток в цепи $I_1 = 0{,}2$ А, а при сопротивлении $R_2 = 110$ Ом, ток в цепи $I_2 = 0{,}1$ А.

1.52 По прямому медному проводу длиной 1000 м и сечением 1 мм^2 проходит ток 4,5 А. Считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, найти время, за которое электрон переместится от одного конца провода к другому.

1.53 По медному проводу сечением 0,2 мм^2 проходит ток силой 0,2 А. Определить силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля.

1.54 Определить удельное сопротивление ρ проводника длиной $l = 2$ м, если при плотности тока $j = 10^6$ А/м^2 на его концах поддерживается разность потенциалов $U = 2$ В.

1.55 Два элемента с ЭДС $\varepsilon_1 = 1{,}3$ В и $\varepsilon_2 = 0{,}9$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}1$ Ом и $r_2 = 0{,}3$ Ом соединены одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов $R = 0{,}2$ Ом. Определить силу тока в цепи.

1.56 При каком сопротивлении R внешней цепи источник с ЭДС $\varepsilon = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 20$ Ом будет отдавать максимальную мощность? Каково значение $P_{\max}$ этой мощности?

1.57 Лифт массой 0,8 т поднимается на высоту 40 м за 0,5 мин. Определить мощность, потребляемую электродвигателем лифта и силу тока в электродвигателе, если напряжение на его зажимах равно 120 В, а КПД составляет 90 %.

1.58 Два проводника одинаковой длины и одинакового сечения, один из меди, а другой из железа, соединены параллельно. Определить отношение мощностей токов для этих проводников.

1.59 Определить напряженность электрического поля в алюминиевом проводнике объемом $V = 10$ см^3, если при прохождении по нему постоянного тока за время $t = 5$ мин выделилось количество теплоты $Q = 2{,}3$ кДж.

1.60 Найти сопротивление R трубки длиной $l = 80$ см и площадью поперечного сечения $S = 5$ мм^2, если она наполнена водородом, ионизированным так, что в 1 см^3 его находятся при равновесии $n = 10^7$ пар одновалентных ионов.

2 МАГНЕТИЗМ

2.1 Магнитное поле. Электромагнитная индукция и электромагнитное поле

Основные законы и формулы

Закон Био – Савара – Лапласа: элемент $d\vec{l}$ проводника с током I создает в некоторой точке пространства магнитное поле, магнитная индукция $d\vec{B}$ которого определяется формулой

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \frac{\left[d\vec{l}\ \vec{r} \right]}{r^3},$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведённый от элемента $d\vec{l}$ до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Модуль вектора

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I\, dl \sin\alpha}{r^2},$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $d\vec{l}$.

Магнитная индукция результирующего поля равна векторной сумме магнитных индукций складываемых полей, т. е.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i .$$

В частном случае наложение двух полей

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 ,$$

а модуль магнитной индукции

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2\, B_1 B_2 \cos\alpha} ,$$

где α – угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ отдельных полей.

Магнитная индукция $\vec{B}$ связана с напряженностью магнитного поля $\vec{H}$ (в случае однородной, изотропной среды) соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} ,$$

или в вакууме

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} .$$

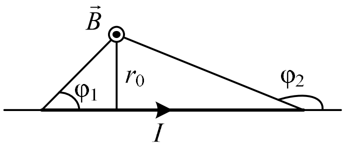
Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{r},$$

где r – расстояние от оси проводника до рассматриваемой точки поля.

Магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$



Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком прямолинейного проводника,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r_0} \left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \right).$$

Магнитное поле точечного заряда q, свободно движущегося с нерелятивистской скоростью v,

$$B = \frac{\mu_0 \mu q v \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где α – угол между вектором скорости и радиус-вектором; r – модуль радиус-вектора, проведённого от заряда к точке наблюдения.

Закон Ампера: сила, действующая на элемент длины $d\vec{l}$ проводника с током I в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$,

$$d\vec{F} = I \left[d\vec{l}\, \vec{B} \right].$$

Модуль силы Ампера

$$dF = IB\, dl \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$.

Сила взаимодействия двух бесконечно длинных прямолинейных параллельных проводников с токами I_1 и I_2

$$dF = \frac{\mu_0 \mu 2 I_1 I_2}{4\pi R}\, dl,$$

где R – расстояние между проводниками; dl – длина отрезка проводника.

Механический момент, действующий на контур с током, помещённый в однородное магнитное поле,

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \vec{B}\right] \quad \text{или для модуля} \quad M = p_m B \sin\alpha ,$$

где $\vec{p}_m$ – магнитный момент контура площадью S с током I,

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости контура; α – угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{n}$.

Сила Лоренца, действующая на заряд q, движущийся со скоростью v в магнитном поле с индукцией B,

$$\vec{F} = q\left[\vec{v}\vec{B}\right] \quad \text{или для модуля} \quad F = |q|\, vB\sin\alpha ,$$

где α – угол между вектором скорости и вектором индукции магнитного поля.

Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{1}{en}\frac{IB}{d},$$

где I – сила тока; B – магнитная индукция; d – толщина пластинки; n – концентрация носителей заряда.

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора магнитной индукции): циркуляция вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру L равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов ΣI, охватываемых этим контуром,

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k .$$

Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего N витков и длину l,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}.$$

Магнитная индукция поля внутри тороида (в вакууме)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через элементарную площадку dS

$$d\Phi_B = \vec{B}\,d\vec{S} = B_n\,dS,$$

где B_n – проекция вектора магнитной индукции на направление нормали к площадке dS.

Магнитный поток через плоский контур площадью S в случае:

а) неоднородного поля

$$\Phi_B = \int_S B_n dS;$$

б) однородного поля

$$\Phi_B = B_n S = BS\cos\alpha,$$

где α – угол между вектором нормали к плоскости контура и вектором магнитной индукции; B_n – проекция вектора магнитной индукции на нормаль.

Потокосцепление, т. е. полный магнитный поток, сцеплённый со всеми N витками соленоида или тороида,

$$\Psi = N\Phi_B,$$

где Φ_B – магнитный поток через один виток.

Для соленоида

$$\Psi = \mu_0\mu\frac{N^2 I}{l}S,$$

где μ – магнитная проницаемость среды.

Работа по перемещению проводника с током I в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi_B,$$

где $\Delta\Phi_B$ – магнитный поток, пересечённый движущимся проводником.

Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$A = I\Delta\Psi,$$

где I – сила тока в контуре; $\Delta\Psi$ – изменение потокосцепления контура.

Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея)

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где ε_i – ЭДС индукции; N – число витков контура.

Потокосцепление контура индуктивностью L с током I

$$\Psi = LI.$$

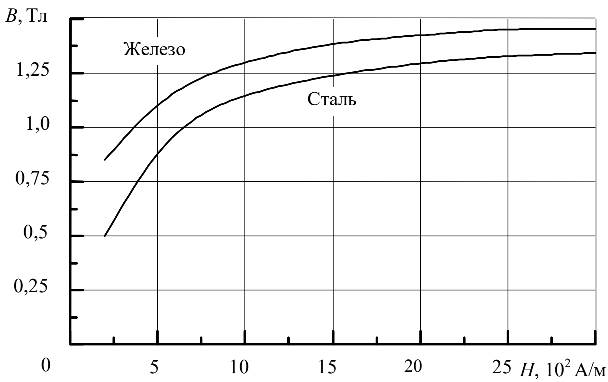
Индуктивность соленоида (тороида)

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l},$$

где N – число витков соленоида; S – площадь поперечного сечения; l – длина соленоида.

При вычислениях индуктивности соленоида с ферромагнитным сердечником по приведенной формуле для определения магнитной проницаемости следует предварительно использовать график зависимости магнитной индукции B поля в ферромагнетике от напряженности внешнего магнитного поля H, а затем воспользоваться формулой

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$



Энергия магнитного поля, связанного с контуром индуктивностью L, по которому течёт ток силой I,

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объёмная плотность энергии однородного магнитного поля

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{BH}{2}.$$

Намагниченность

$$\vec{J} = \frac{\vec{P}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_m}{V},$$

где $\vec{P}_m$ – магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул в единице объема вещества.

Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

Связь между векторами $\vec{B}, \vec{H}, \vec{J}$:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}),$$

где μ_0 – магнитная постоянная.

Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества

$$\mu = 1 + \chi.$$

Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в веществе):

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^{n} I_k,$$

где ΣI – алгебраическая сумма сил токов проводимости, охватываемых контуром L.

Примеры решения задач

Пример 2.1. Три бесконечно длинных параллельных проводника с токами силой I = 5 А в каждом пересекают перпендикулярную к ним плоскость в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника со стороной d = 0,1 м. Определить магнитную индукцию поля в центре треугольника, если: а) токи в проводниках имеют одинаковое направление; б) направление тока в одном из проводников противоположно направлению токов в двух других.

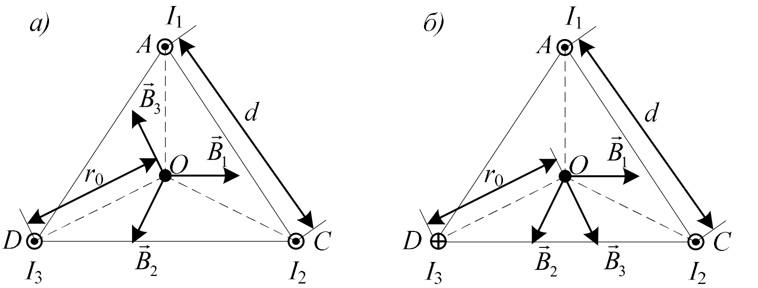
Дано:
I = 5 А,
d = 0,1 м.
$B_а$ – ? $B_б$ – ?

Решение

Магнитная индукция в центре ΔACD по принципу суперпозиции равна векторной сумме индукций магнитных полей, создаваемых каждым из токов в этой точке:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

Векторы $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ перпендикулярны соответственно к отрезкам *AO*, *CO*, *DO*, и их направления определяются по правилу правого винта.



Силы токов в проводниках равны, рассматриваемая точка расположена симметрично относительно проводников, следовательно модули индукций также равны между собой:

$$B_1 = B_2 = B_3 = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r_0} = \mu\mu_0 \frac{\sqrt{3}I}{\pi d}, \tag{1}$$

где расстояние от центра до проводников

$$r_0 = \frac{AC}{2\cos 30^\circ} = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Рассмотрим случай *а*. Токи I_1, I_2, I_3 направлены одинаково, значит, углы между векторами $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ равны 120º, а магнитная индукция результирующего поля в силу симметрии равна нулю ($B_а = 0$).

В случае *б* углы между соседними векторами магнитных индукций равны 60º, а значит,

$$B = B_3 + (B_1 + B_2)\cos 60^\circ.$$

С учетом формулы (1) это соотношение примет следующий вид:

$$B = \mu\mu_0 \frac{\sqrt{3}I}{2\pi d}\left(1 + 2\cos 60^\circ\right) = \mu\mu_0 \frac{\sqrt{3}I}{\pi d}.$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$\left[B\right] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}}\frac{\text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Проведем расчет, подставив данные из условия (с учетом $\mu = 1$ для вакуума):

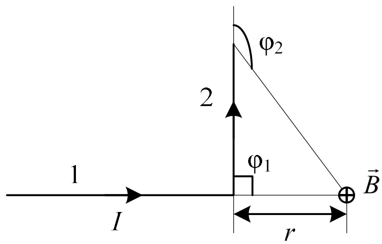
$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1,73 \cdot 5}{\pi \cdot 0,1} = 3,46 \cdot 10^{-7} \text{ Тл}.$$

Ответ: $B_{\text{а}} = 0$; $B_{\text{б}} = 3,46 \cdot 10^{-7}$ Тл.

Пример 2.2. Бесконечно длинный прямой провод согнут под прямым углом. По проводу течет ток I = 100 А. Какова магнитная индукция B в точке A, если r = 1 м?

Дано:
$I = 5$ А,
$d = 0,1$ м.
B – ?

Решение



Магнитное поле в точке A создается проводником с током, изогнутым под прямым углом. Закон Био – Савара − Лапласа позволяет рассчитать магнитную индукцию от проводника с током простой формы. В нашем случае поле от всего проводника следует рассматривать как суперпозицию полей, созданных двумя отрезками 1 и 2, бесконечными с одной стороны и ограниченными с другой стороны изломом.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Если α – угол между векторами $\vec{r}$ и $d\vec{l}$, то модуль вектора $d\vec{B}$ от элемента $d\vec{l}$ проводника с током I вычисляется по формуле

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I \, dl \sin\alpha}{4\pi r^2}. \tag{1}$$

Для отрезка проводника в результате интегрирования этой формулы получим:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} \left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right), \tag{2}$$

где φ_1 и φ_2 – углы между векторами, соединяющими концы отрезка провода с точкой A, и направлением тока в проводнике.

В точке A магнитная индукция поля, создаваемого отрезком 1, $B_1 = 0$, т. к. для каждого элемента dl этого отрезка по формуле (1) $dB = 0$.

Магнитную индукцию поля B_2 в точке A, создаваемого отрезком 2, определяем по формуле (2). В этом случае $\varphi_1 = 90^\circ$ и $\varphi_2 = 180^\circ$, соответственно $\cos\varphi_1 = 0$, а $\cos\varphi_2 = -1$.

Таким образом,

$$B = B_2 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r}.$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$[B] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}}\frac{\text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Подставим в формулу численные значения (для вакуума $\mu = 1$) и произведем расчет:

$$B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 100}{4\pi\cdot 1} = 10^{-5}\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 10^{-5}$ Тл.

Пример 2.3. В одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током $I = 6$ А расположена прямоугольная рамка со сторонами $a = 40$ см и $b = 30$ см так, что длинные стороны рамки параллельны проводу. Сила тока в рамке $I_1 = 1$ А. Определить силы, действующие на каждую из сторон рамки, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии $d = 10$ см, а ток в ней сонаправлен току I.

Дано:
$I = 6$ А,
$I_1 = 1$ А,
$a = 40$ см,
$b = 30$ см,
$d = 10$ см.

F_1, F_2 – ?
F_3, F_4 – ?

Решение

Ток I в бесконечно длинном проводнике создает вокруг магнитное поле, величина которого характеризуется магнитной индукцией

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}, \qquad (1)$$

где r – расстояние от рассматриваемой точки поля до проводника с током.

На стороны рамки с током I_1, находящейся в магнитном поле проводника с током I, действуют силы Ампера $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, $\vec{F}_3, \vec{F}_4$, направленные согласно правилу «левой руки», как показано на рисунке.

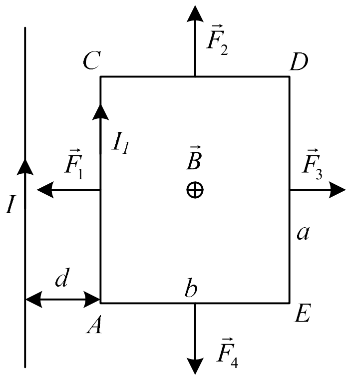
Величина силы Ампера, действующей на элемент $d\vec{l}$ проводника с током, определяется формулой:

$$d\vec{F} = I_1\left[d\vec{l}\,\vec{B}\right],$$

где $\vec{B}$ – магнитная индукция поля в данной точке.

В рассматриваемом случае угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$ равен $\pi/2$, поэтому формулу для модуля силы, действующей на элемент рамки длиной dl, можно записать в виде

$$dF = IBdl.$$



Так как индукция магнитного поля в точках на стороне рамки длиной a, расположенных на одном расстоянии d от проводника с током I, одинакова, то сила F_1, действующая на сторону рамки AC,

$$F_1 = \int_0^a I_1Bdl = I_1B\int_0^a dl = I_1Ba.$$

Вычисляя индукцию по формуле (1), учитывая, что диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon = 1$ и, в данном случае, $r = d$, получим для силы, действующей на сторону AC,

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi d}a.$$

Для стороны рамки DE $r = d + b$, поэтому

$$F_3 = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi(b+d)}a.$$

Сила F_2, действующая на сторону CD рамки, является результирующей бесконечно малых сил, действующих на элементы dl этой стороны, расположенные на различных расстояниях от проводника с током I. В данном случае r – переменная ($dr = dl$), она изменяется от d до $d + b$. Так как все векторы $d\vec{F}$ направлены одинаково, то принцип суперпозиции сводится к интегрированию модулей сил:

$$F_2 = \int_d^{d+b} I_1Bdl = I_1\int_d^{d+b} Bdr = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi}\int_d^{d+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi}\ln\frac{d+b}{d}.$$

Сила F_4, действующая на сторону AE рамки, по величине равна силе F_2, но направлена в противоположную сторону, т. к. каждому элементу $d\vec{l}$ стороны AE соответствует аналогичный элемент стороны CD, находящийся в тех же самых условиях, но направленный противоположно.

Все конечные формулы имеют один и тот же структурный вид. Проверим единицы в одной из них:

$$[F] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{А}\cdot\text{А}}{\text{м}}\text{м} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}}\frac{\text{А}^2}{\text{м}} = \text{Тл}\cdot\text{м}^2\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}\text{А}\cdot\text{м} = \text{Н}.$$

Подставим в формулы численные значения и произведем расчет:

$$F_1 = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6\cdot 0,4}{2\pi\cdot 0,1} = 4,8\cdot 10^{-6}\ \text{Н};$$

$$F_2 = F_4 = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6}{2\pi}\ln\frac{0,1+0,3}{0,1} = 1,66\cdot 10^{-6}\ \text{Н};$$

$$F_3 = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6\cdot 0,4}{2\pi\cdot(0,1+0,3)} = 1,2\cdot 10^{-6}\ \text{Н}.$$

Ответ: $F_1 = 4,8\cdot 10^{-6}$ Н; $F_2 = F_4 = 1,66\cdot 10^{-6}$ Н; $F_3 = 1,2\cdot 10^{-6}$ Н.

Пример 2.4. Квадратная рамка со стороной a = 10 см, по которой течет ток I = 100 А, свободно установилась в однородном магнитном поле индукцией B = 1 Тл. Определить работу, совершаемую внешними силами при повороте рамки относительно оси, проходящей через середину ее противоположных сторон, на угол φ = 90°. При повороте рамки сила тока в ней поддерживалась постоянной.

Д а н о:
I = 100 А,
B = 1 Тл,
a = 10 см,
φ = 90°.
A – ?

Решение

На контур с током в магнитном поле действует механический момент, равный по модулю

$$M = p_m B\sin\varphi, \qquad (1)$$

где p_m – модуль магнитного момента рамки; φ – угол между положительной нормалью к поверхности контура и вектором индукции магнитного поля.

По условию задачи в начальном положении рамка свободно установилась в магнитном поле. При этом момент силы равен нулю, а значит, φ = 0, т. е. нормаль к поверхности контура и вектор магнитной индукции совпадают по направлению.

Если внешние силы выведут рамку из положения равновесия, то возникший момент сил, определяемый формулой (1), будет стремиться возвратить ее в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешними силами. Так как момент сил переменный (зависит от угла поворота), то для подсчета работы применим формулу работы в дифференциальной форме

$$dA = M\,d\varphi.$$

Подставив выражение (1) в формулу для определения работы и учитывая, что магнитный момент $p_m = IS$, где $S = a^2$ − площадь контура, получим:

$$dA = Iba^2 \sin\varphi\, d\varphi.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу при повороте рамки на конечный угол:

$$A = IBa^2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = I\,Ba^2 \left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = IBa^2.$$

Убедимся, что правая часть этого равенства дает единицу работы:

$$\left[A\right] = \text{А} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{А}\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}\text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$A = 100 \cdot 1 \cdot 0{,}1^2 = 1\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A = 1$ Дж.

Пример 2.5. Чему равна механическая мощность, развиваемая при перемещении прямолинейного проводника длиной l = 20 см со скоростью v = 5 м/с перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией B = 0,1 Тл? Величина тока в проводнике I = 50 А.

Дано:	Решение
l = 20 см, v = 5 м/с, B = 0,1 Тл, I = 50 А.	Со стороны магнитного поля на проводник с током действует сила Ампера, величина которой определяется формулой
P – ?	$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}\,\vec{B}\right],$$

где dl – длина элемента проводника; B – индукция магнитного поля в данной точке. Поскольку в данном случае магнитное поле однородно (B = const), а угол между проводником и вектором магнитной индукции равен $\pi/2$, то модуль силы Ампера, действующую на весь проводник длиной l, можно определить по формуле

$$dF = IBl.$$

Работа, которую совершает сила Ампера по перемещению проводника с током в магнитном поле на расстояние ds вдоль направления действия силы

$$dA = Fds.$$

Тогда механическая мощность, развиваемая при перемещении прямолинейного проводника, будет определяться формулой

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{Fds}{dt} = Fv = IBlv.$$

Проверим размерность полученной величины:

$$\left[P\right] = \text{А} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}\frac{\text{м}}{\text{с}} = \text{А}\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}\frac{\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$P = 50 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 5 = 5\ \text{Вт}.$$

Ответ: P= 5Вт.

Пример 2.6. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов U = 10^5 В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое и магнитное поля. Напряженность электрического поля E = 20 кВ/м, индукция магнитного поля B = 0,1 Тл. Найти отношение заряда частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

Дано:
$U = 10^5$ В,
B = 0,1 Тл,
E = 20 кВ/м.

q/m – ?

Решение

Заряженная частица, прошедшая ускоряющую разность потенциалов, приобретает кинетическую энергию, равную, при условии отсутствия начальной скорости, работе ускоряющего электрического поля:

$$\frac{mv^2}{2} = qU,$$

где v – скорость частицы после ускорения. Отсюда следует

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

С этой скоростью заряженная частица влетает в скрещенные под прямым углом электрическое и магнитное поля. Со стороны магнитного поля на нее действует сила Лоренца, направление которой определяется правилом «левой руки» (для положительного заряда), величина для движения под прямым углом к магнитному полю формулой $F_Л = qvB$.

Со стороны электрического поля на заряженную частицу действует электрическая сила, равная по модулю $F_{эл} = qE$.

Поскольку электрическое и магнитные поля направлены перпендикулярно друг другу, то электрическая сила направлена или по силе Лоренца, или противоположно ей. Так как в условии задачи сказано, что частица летит по прямой, значит, верно второе, и сила Лоренца компенсируется электрической силой (векторная сумма этих сил равна нулю).

То есть $F_Л = F_{эл}$, или $qvB = qE$. Откуда $vB = E$. Подставим в эту формулу выражение для скорости:

$$E = B\sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

Из этого выражения следует конечная формула

$$\frac{q}{m} = \frac{1}{2U}\left(\frac{E}{B}\right)^2.$$

Результат решения задачи не зависит от знака заряда частицы. При его изменении на противоположный изменятся на противоположные направления обеих сил (Лоренца и электрической), что не изменит основного уравнения, лежащего в основе решения задачи (равенство модулей сил).

Проверим размерность полученной величины

$$\left[\frac{q}{m}\right] = \frac{1}{\text{В}}\left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\frac{1}{\text{Тл}}\right)^2 = \text{В}\left(\frac{1}{\text{м}}\frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}}\right)^2 = \frac{\text{Дж}\cdot\text{А}^2}{\text{Кл}}\left(\frac{\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}}\right)^2 =$$

$$= \frac{\text{Кл}^2}{\text{с}^2}\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}\cdot\text{с}^2}\frac{\text{с}^4}{\text{кг}^2\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Подставим численные значения и произведем расчет:

$$\frac{q}{m} = \frac{1}{2\cdot 10^5}\left(\frac{20\cdot 10^3}{0{,}1}\right)^2 = 2\cdot 10^5\ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Ответ: $\dfrac{q}{m} = 2 \cdot 10^5 \ \dfrac{\text{Кл}}{\text{кг}}$.

Пример 2.7. Электрон, пройдя ускоряющее напряжение $U = 900$ В, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ мТл под углом $\alpha = 60^\circ$ к линиям индукции. Определить траекторию движения электрона.

Дано:
$U = 900$ В,
$B = 1$ мТл,
$\alpha = 60^\circ$.
h – ?
R – ?

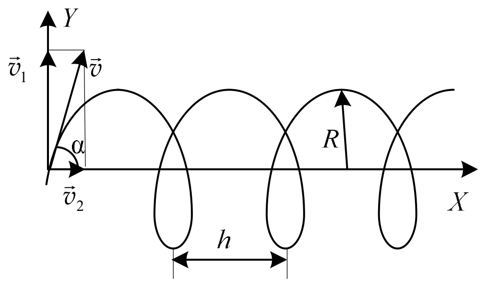
Решение

На заряженную частицу, влетевшую в магнитное поле, действует сила Лоренца, перпендикулярная векторам магнитной индукции и скорости частицы. Модуль этой силы для электрона

$$F = evB\sin\alpha,$$

где e – элементарный заряд; v – скорость электрона.

Движение электрона удобно представить как наложение двух движений: движения со скоростью $v_1 = v\sin\alpha$ перпендикулярно вектору $\vec{B}$, и движения со скоростью $v_2 = v\cos\alpha$ параллельно этому вектору.



Для движения под действием силы Лоренца модуль скорости не изменяется, останется постоянным и значение силы Лоренца. Постоянная сила, перпендикулярная скорости, вызывает движение по окружности. Значит, электрон будет двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, со скоростью, равной v_1.

В результате одновременного участия в двух движениях по окружности и по прямой электрон будет двигаться по винтовой линии с осью, параллельной силовым линиям поля. Определить траекторию движения электрона в данном случае значит найти радиус R и шаг h винтовой линии.

Для определения радиуса окружности, по которой движется электрон, учтем, что центростремительное ускорение частице сообщает сила Лоренца. На основании 2-го закона Ньютона

$$F = ev_1 B = \frac{mv_1^2}{R}.$$

Из этой формулы найдем радиус винтовой линии:

$$R = \frac{mv\sin\alpha}{eB}.$$

Входящую в это выражение скорость выразим через конечную (после ускорения в электрическом поле) кинетическую энергию электрона W_k, которая равна работе ускоряющего электрического поля

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}} = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Тогда окончательное выражение для радиуса винтовой линии приобретает вид

$$R = \frac{\sin\alpha}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Время одного оборота (период обращения по окружности) определим как отношение ее длины к скорости первого движения

$$T = \frac{2\pi R}{v_1}.$$

Шаг винтовой линии равен пути, пройденному электроном вдоль поля (второе движение) со скоростью v_2 за время одного оборота:

$$h = v_2 T = v_2\frac{2\pi R}{v_1} = 2\pi R\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Проверим единицы измерения в формуле для радиуса:

$$[R] = \frac{1}{\text{Тл}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{В}}{\text{Кл}}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}}\sqrt{\frac{\text{кг}}{\text{Кл}}\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}} =$$

$$= \frac{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}\sqrt{\text{кг}\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{с}}{\text{кг}}\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}} = \text{м}.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$R = \frac{0{,}866}{10^{-3}}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 900}{1{,}6\cdot 10^{-19}}} = 8{,}77\cdot 10^{-2}\ \text{м};$$

$$h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}577 = 0{,}318 \text{ м}.$$

Ответ: R= 8,8 см; h = 32 см.

Пример 2.8. Вычислить циркуляцию вектора индукции вдоль контура, охватывающего токи I_1 = 1 А, I_2 = 5 А, текущие в одном направлении, и токи I_3 = 2 А, I_4 = 3А, текущие в противоположном направлении.

Дано:
I_1 = 1 А,
I_2 = 5 А,
I_3 = 2 А,
I_4 = 3 А.

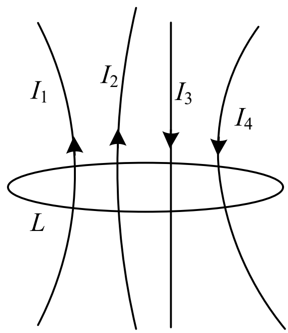
$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l}$ – ?

Решение

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции (иначе закон полного тока для вакуума) выражается формулой

$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \oint\limits_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{N} I_k,$$

где $d\vec{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; B_l – составляющая вектора магнитной индукции в направлении касательной контура L произвольной формы; ΣI – алгебраическая сумма токов, охватываемая контуром. В этой сумме ток берется положительным, если его направление совпадает с направлением обхода контура, и отрицательным – в обратном случае. В нашей задаче N = 4 (четыре тока). Тогда



$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \left(I_1 + I_2 - I_3 - I_4\right).$$

Токи I_3 и I_4 берутся со знаком минус, т.к. их направление противоположно токам I_1 и I_2. Проверим размерность полученной величины:

$$\left[\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l}\right] = \text{Тл} \cdot \text{м}; \quad \left[\mu_0 I\right] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\text{А} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}}\frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{м}} = \text{Тл} \cdot \text{м}.$$

Видим, что единицы измерения обеих частей совпадают.

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет

$$\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = 4\pi \cdot 10^{-7}\left(1 + 5 - 2 - 3\right) = 1{,}26 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} \cdot \text{м}.$$

Ответ: $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = 1{,}26 \cdot 10^{-6}$ Тл · м.

Пример 2.9. Пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$, определить индукцию B и напряженность H магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей 1000 витков, протекает ток силой $I = 1$ А. Внешний диаметр тороида составляет $D_1 = 60$ см, внутренний – $D_2 = 40$ см.

Д а н о:
$I_1 = 1$ А,
$N = 1000$,
$D_1 = 60$ см,
$D_2 = 40$ см.

B − ?
H – ?

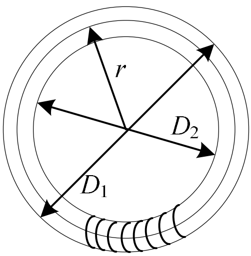
Решение

Так же как и в предыдущем примере, применим закон полного тока для магнитного поля в вакууме. Циркуляция вектора магнитной индукции:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{N} I_k,$$

Контур L, по которому происходит циркуляция вектора $\vec{B}$, представляет собой окружность радиуса $r = D/2$, где r − средний диаметр.

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}, \quad r = \frac{D_1 + D_2}{4}.$$



Контур охватывает N токов (по числу витков в катушке), значит

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 NI. \qquad (1)$$

Произведем интегрирование левой части выражения (1). Рассматриваемый контур совпадает с силовой линией магнитного поля, поэтому и в силу симметрии $B_l = B = \text{const}$ в точках контура. Длина контура $L = 2\pi r$. Выражение (1) примет вид

$$B2\pi r = \mu_0 NI.$$

Магнитная индукция (с учетом формулы для радиуса)

$$B = \frac{2\mu_0 NI}{\pi\left(D_1 + D_2\right)}.$$

Для вакуума (поскольку в условии задачи ничего не сказано про среду) индукция магнитного поля и его напряженность связаны выражением $B = \mu_0 H$, откуда следует

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{2NI}{\pi\left(D_1 + D_2\right)}.$$

Проверим размерности полученных величин

$$[H]=\frac{\text{А}}{\text{м}};\quad [B]=\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{А}}{\text{м}}=\frac{\text{Вб}}{\text{А}}\frac{\text{А}}{\text{м}^2}=\frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2}=\text{Тл}.$$

Подставим в формулы численные значения и произведем расчет:

$$H=\frac{2\cdot10^3\cdot1}{3{,}14\left(0{,}6+0{,}4\right)}=637\ \frac{\text{А}}{\text{м}};\quad B=\mu_0H=1{,}26\cdot10^{-6}\cdot637=8\cdot10^{-4}\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 8\cdot10^{-4}$ Тл; H = 637 А/м.

Пример 2.10. Железный сердечник находится в однородном магнитном поле напряженностью H= 2,5 кА/м. Определить индукцию B магнитного поля в сердечнике и магнитную проницаемость μ железа.

Дано:
H = 2,5 кА/м.
B – ?
μ – ?

Решение

Для ферромагнетиков магнитная проницаемость μ не является постоянной величиной. Она зависит от величины напряженности магнитного поля H.

Для изотропного и однородного магнетика индукция магнитного поля B связана с его напряженностью формулой $B = \mu\mu_0 H$, откуда следует

$$\mu=\frac{B}{\mu_0H}.$$

Величину индукции магнитного поля B найдем из графика. Для железа при H = 2,5 кА/м, B = 1,44 Тл. Проверим единицу полученной величины:

$$[\mu]=\text{Тл}\frac{\text{м}}{\text{Гн}}\frac{\text{м}}{\text{А}}=\frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{А}}\frac{\text{А}}{\text{Вб}}=\frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}=1.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$\mu=\frac{1{,}44}{1{,}26\cdot10^{-6}\cdot2{,}5\cdot10^3}=457.$$

Ответ: B= 1,44 Тл; μ = 457.

Пример 2.11. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл, равномерно вращается вокруг вертикальной оси горизонтальный стержень длиной l = 1 м. Ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям магнитной индукции. Определить угловую скорость, при которой на концах стержня возникает разность потенциалов U = 0,1 В.

Дано:	Решение
$B = 0{,}1$ Тл, $l = 1$ м, $U = 0{,}1$ В.	
ω – ?	

Так как вращающийся проводник представляет собой незамкнутый отрезок электрической цепи и условия вращения не изменяются, то в проводнике отсутствует электрический ток. Тогда из закона Ома для неоднородного участка цепи следует, что разность потенциалов на концах проводника по модулю равна возникающей в нем ЭДС индукции

$$U = |\varepsilon_i|.$$

Величина электромагнитной индукции, согласно закону Фарадея, определена формулой

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Так как вращение равномерное, то формулу можно преобразовать следующим образом:

$$U = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t},$$

где $\Delta\Phi_B$ – магнитный поток, пересеченный стержнем при его вращении за время Δt .

Удобнее всего в качестве интервала времени Δt взять один период вращения T, тогда пересеченный поток будет равен потоку через поверхность круга радиусом l:

$$T = 2\pi / \omega; \quad \Delta\Phi_B = B\pi l^2.$$

В результате преобразований для разности потенциалов получим

$$U = B\pi l^2 \frac{\omega}{2\pi} = \frac{Bl^2\omega}{2}.$$

Отсюда выразим угловую скорость

$$\omega = \frac{2U}{Bl^2}.$$

Проверим единицу полученной величины:

$$[\omega] = \frac{\text{В}}{\text{Тл} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}} \frac{\text{А}}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{с}} = \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right),$$

т. к. радиан – величина, по сути, безразмерная.

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет

$$\omega = \frac{2 \cdot 0{,}1}{0{,}1 \cdot 1^2} = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Ответ: ω= 2 рад/с.

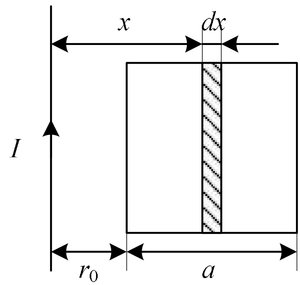
Пример 2.12. В плоскости квадратной рамки с сопротивлением R = 7 Ом и стороной a = 20 см расположен на расстоянии r_0= 20 см от нее прямой бесконечный проводник. Проводник параллелен одной из сторон рамки. Сила тока в проводнике изменяется по закону $I = \alpha t^3$, где α = 2 А/с^3. Определить силу тока в рамке в момент времени t = 10 с.

Дано:
R = 7 Ом,
a = 20 см,
r_0= 20 см,
$I = \alpha t^3$,
α = 2 А/с^3,
t = 10 с.

I_1 – ?

Решение

Вследствие изменения силы тока в проводнике магнитный поток через рамку изменяется и в ней возникает индукционный ток. Рамка находится в неоднородном магнитном поле. Для расчета магнитного потока разделим площадь рамки на столь узкие полоски так, чтобы в пределах каждой из них магнитное поле можно было считать однородным. На основании свойств магнитного поля (для всех точек поверхности рамки вектор индукции перпендикулярен ей) и на основании формулы для поля бесконечного прямолинейного проводника формула для элементарного магнитного потока через узкую полоску примет вид



$$d\Phi = Badx = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi x}dx,$$

где dx – ширина полоски; x – расстояние от нее до проводника.

Интегрируя это уравнение по x в пределах от r_0 до $r_0 + a$, находим поток через всю рамку

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_{r_0}^{r_0+a}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 a\alpha t^3}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{r_0}\right).$$

По закону Фарадея определяем ЭДС индукции (по модулю)

$$\varepsilon_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\mu_0 a\alpha t^2}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{r_0}\right),$$

а из закона Ома – силу тока

$$I_1 = \frac{3\mu_0 a\alpha t^2}{2\pi R}\ln\left(1+\frac{a}{r_0}\right).$$

Проверим размерность полученной величины:

$$[I_1] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{м}}{\text{Ом}}\frac{\text{А}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^3} = \frac{\text{Вб}}{\text{А}}\frac{\text{А}}{\text{В}}\frac{\text{А}}{\text{с}} = \frac{\text{В}}{\text{В}}\text{А} = \text{А}.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$I_1 = \frac{3\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 0,2\cdot 2\cdot 10^2}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 7}\ln\left(1+\frac{0,2}{0,2}\right) = 2,4\cdot 10^{-6}\ \text{А}.$$

Ответ: $I_1 = 2,4\cdot 10^{-6}$ А.

Пример 2.13. Замкнутый тороид с железным сердечником имеет $N = 400$ витков из тонкой проволоки, намотанных в один слой. Средний диаметр тороида $d = 25$ см. Определить напряженность и индукцию магнитного поля внутри тороида, магнитную проницаемость железа, а также намагниченность при силе тока в обмотке $I = 0,5$ А.

Дано:
$N = 400$,
$d = 25$ см,
$I = 0,5$ А.

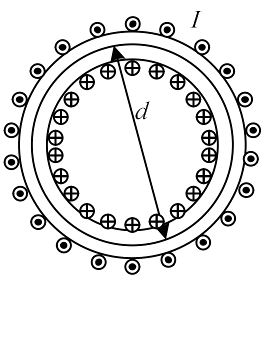
H, B, J – ?

Решение

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру L (закон полного тока для магнитного поля в веществе):

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \sum_{k=1}^{N} I_k,$$

Выберем в качестве контура L окружность, проходящую по средней линии тороида (с диаметром, равным d). Применяя этот закон, получим



$$H\pi d = IN.$$

Здесь учтено, что контур совпадает с силовой линией магнитного поля, величина напряженности во всех точках контура одинакова в силу симметрии, длина контура равна πd, а каждый ток I пересекает поверхность контура N раз в одном и том же направлении.

Тогда напряженность магнитного поля внутри тороида

$$H = \frac{IN}{\pi d}.$$

После расчета получим значение напряженности магнитного поля H = 255 А/м. Далее, используя график зависимости магнитной индукции B поля в ферромагнетике от напряженности внешнего магнитного поля H, определим индукцию магнитного поля для железного сердечника: B = 1 Тл.

Для однородного и изотропного магнетика магнитная проницаемость находится по формуле

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

После расчетов получим: $\mu \approx 3100$.

Для расчета значений намагниченности используем ее определяющую формулу, которая в этом случае дает выражение для модуля

$$J = \frac{B}{\mu_0} - H.$$

Результаты расчетов: $J \approx 8 \cdot 10^5$ А/м.

Из полученных данных видно, что силе тока I пропорциональна только напряженность магнитного поля внутри ферромагнетика, тогда как индукция B, магнитная проницаемость μ и намагниченность J являются нелинейными функциями H, а следовательно, и нелинейными функциями силы тока.

Ответ: H = 255 А/м, B = 1 Тл, $\mu \approx 3100$, $J \approx 8 \cdot 10^5$ А/м.

Пример 2.14. На круглый деревянный цилиндр намотан один слой медной проволоки, масса которой m = 50 г. Длина цилиндра равна l_0 = 60 см и много больше его диаметра. Сопротивление обмотки R = 30 Ом. Определить энергию магнитного поля катушки, если она подключена к источнику тока с ЭДС ε = 62 В и внутренним сопротивлением r = 1 Ом.

Дано:
m = 50 г,
l_0 = 60 см,
R = 30 Ом,
ε = 62 В,
r = 1 Ом.

W – ?

Решение

Энергия магнитного поля катушки с индуктивностью L

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Так как длина соленоида много большего диаметра, то катушку можно рассматривать как идеальный соленоид. В этом случае индуктивность

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l_0}\pi a^2, \quad N = \frac{l}{2\pi a},$$

где N – число витков, a − радиус витка; l − длина провода, т. е. суммарная длина N витков, каждого длиной $2\pi a$.

Запишем выражения для массы и сопротивления проволоки

$$m = \rho V = \rho l S_0, \quad R = \frac{\rho_{эл} l}{S_0},$$

где V – объем проволоки; ρ − плотность меди; $\rho_{эл}$ – удельное сопротивление меди; S_0 − площадь поперечного сечения провода. Исключая из этих соотношений S_0, получим длину провода и число витков

$$l = \sqrt{\frac{mR}{\rho\rho_{эл}}}, \quad N = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{mR}{\rho\rho_{эл}}}.$$

Следовательно,

$$L = \frac{\mu\mu_0\pi}{l_0}\frac{mR}{4\pi^2\rho\rho_{эл}} = \mu\mu_0 \frac{mR}{4\pi\rho\rho_{эл} l_0}.$$

Выразим силу тока в цепи по закону Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

и подставим это соотношение, а также формулу для индуктивности в формулу энергии. В результате получим:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \mu\mu_0 \frac{mR}{8\pi\rho\rho_{эл} l_0}\left(\frac{\varepsilon}{R + r}\right)^2.$$

Проверим размерность полученной величины

$$[W] = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}\frac{\text{кг}\cdot\text{Ом}}{\text{Ом}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}\frac{\text{м}^3}{\text{кг}}\left(\frac{\text{В}}{\text{Ом}}\right)^2 = \text{Гн}\cdot\text{А}^2 = \text{Дж}.$$

Подставим в формулу численные значения и произведем расчет:

$$W = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{5\cdot 10^{-2}\cdot 30}{8\pi\cdot 8{,}93\cdot 10^3\cdot 1{,}7\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}6}\left(\frac{62}{30 + 1}\right)^2 = 3{,}3\cdot 10^{-3}\ \text{Дж}.$$

Ответ: W = 3,3 мДж.

Задачи к контрольной работе

2.1 Два бесконечно длинных прямых провода скрещены под прямым углом. По проводам текут токи $I_1 = 60$ А и $I_2 = 40$ А. Расстояние d между проводами равно 10 см. Определить магнитную индукцию B в точке A, одинаково удаленной от обоих проводников (рисунок 1).

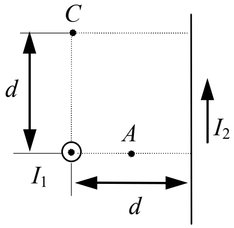


Рисунок 1

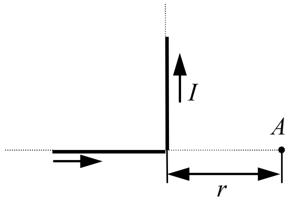


Рисунок 2

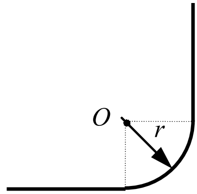


Рисунок 3

2.2 По двум бесконечно длинным прямым проводам, скрещенным под прямым углом (см. рисунок 1) текут токи $I_1 = 40$ А и $I_2 = 50$ А. Расстояние d между проводами равно 10 см. Определить магнитную индукцию B в точке C, одинаково удаленной от обоих проводников на расстояние, равное d.

2.3 Бесконечно длинный прямой провод согнут под прямым углом (рисунок 2). По проводу течет ток $I = 40$ А. Какова магнитная индукция B в точке A, если $r = 5$ см?

2.4 Бесконечно длинный прямой провод имеет изгиб (рисунок 3). По проводу течет ток $I = 10$ А. Какова магнитная индукция B в точке O, если радиус кривизны $r = 10$ см?

2.5 Бесконечно длинный тонкий проводник с током $I = 40$ А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом $R = 10$ см. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в случае, изображенном на рисунке 4.

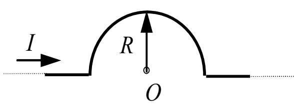


Рисунок 4

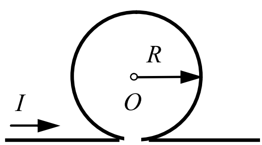


Рисунок 5

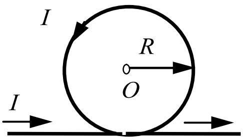


Рисунок 6

2.6 Бесконечно длинный тонкий проводник с током $I = 20$ А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом $R = 5$ см. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в случае, изображенном на рисунке 5.

2.7 Бесконечно длинный тонкий проводник с током $I = 30$ А имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом $R = 8$ см. Определить в точке O магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током, в случае, изображенном на рисунке 6.

2.8 По двум прямым бесконечно длинным проводникам проходят токи в одном направлении $I_1 = 30$ А и $I_2 = 60$ А. Расстояние между ними равно $a = 10$ см. Определить положение точек, в которых магнитная индукция поля равна нулю.

2.9 По двум прямым бесконечно длинным проводникам проходят токи в противоположном направлении $I_1 = 10$ А и $I_2 = 20$ А. Расстояние между ними равно $a = 20$ см. Определить положение точек, в которых магнитная индукция поля равна нулю.

2.10 Найти силу тока I, проходящего по тонкому кольцу радиусом $R = 10$ см, если магнитная индукция в центре кольца $B = 6{,}5 \cdot 10^{-9}$ Тл.

2.11 По двум параллельным проводам длиной $l = 5$ м каждый текут одинаковые токи силой $I = 50$ А. Расстояние между проводами $d = 10$ см. Определить силу F взаимодействия проводников.

2.12 В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл находится прямой медный проводник сечением 5 мм^2, концы которого подключены гибким проводом, находящимся вне поля, к источнику постоянного тока. Определить силу тока в проводнике, если известно, что при расположении его перпендикулярно к линиям индукции поля сила тяжести проводника уравновешивается силой, действующей на проводник со стороны поля.

2.13 Чему равна механическая мощность, развиваемая при перемещении прямолинейного проводника длиной 10 см со скоростью 6 м/с перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией 0,1 Тл? Величина тока в проводнике 60 А.

2.14 По двум параллельным проводам длиной $l = 1$ м каждый текут одинаковые токи. Расстояние между проводами $d = 1$ см. Токи взаимодействуют с силой $F = 1$ мН. Найти силу тока I в проводах.

2.15 Какой вращающий момент испытывает рамка с током 20 А при помещении ее в однородное магнитное поле с индукцией 0,3 Тл, если рамка содержит 50 витков площадью 10 см^2, а ее нормаль образует угол 30° с направлением поля?

2.16 В поле бесконечно длинного прямолинейного проводника, по которому течет ток $I_1 = 20$ А, находится квадратная рамка со стороной $a = 10$ см, по которой течет ток $I_2 = 1$ А. Проводник и рамка расположены в одной плоскости так, что две стороны рамки параллельны проводнику, расстояние от проводника до ближайшей стороны рамки $d = 5$ см. Определить силу, действующую на рамку.

2.17 Замкнутый круговой контур радиусом $R = 2$ см, по которому течет ток $I = 0{,}15$ А, помещен в однородное магнитное поле индукцией $B = 0{,}5$ Тл так, что нормаль к контуру образует с направлением поля угол $\alpha = 30°$. Найти момент сил, действующий на контур.

2.18 Замкнутый круговой контур радиусом $R = 5$ см, по которому течет ток $I = 1$ А, помещен в однородное магнитное поле так, что нормаль к контуру образует с направлением поля угол $\alpha = 60°$. При этом на контур действует механический момент $M = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н·м. Найти индукцию магнитного поля.

2.19 По круговому контуру радиусом $R = 2$ см течет ток. Контур помещен в магнитное поле индукцией $B = 1{,}1$ Тл, при этом нормаль к нему образует с направлением поля угол $\alpha = 45°$, а на контур действует момент сил $M = 7 \cdot 10^{-3}$ Н·м. Найти силу тока в контуре.

2.20 Между полюсами электромагнита создается однородное магнитное поле, индукция которого равна $B = 0{,}03$ Тл. По прямому проводу, расположенному в поле под углом $\alpha = 30°$ к силовым линиям, за время t проходит заряд, величина которого определяется законом $q(t) = (0{,}5t + 2)$, Кл. Какова длина проводника, если на него действует сила $F = 0{,}15$ мН?

2.21 В однородном магнитном поле под углом $\alpha = 30°$ к силовым линиям расположен прямой провод длиной 6,25 см. За время t по нему проходит заряд, величина которого определяется законом $q(t) = (0{,}8t + 2{,}75)$, Кл. Сила, действующая при этом на провод, $F = 2{,}5$ мН. Найти индукцию поля.

2.22 Из проволоки изготовлен контур в виде квадрата. На контур, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ мТл, действует вращающий момент сил $M = 4{,}33 \cdot 10^{-6}$ Н·м. При этом по контуру проходит ток $I = 0{,}2$ А, а нормаль к его плоскости составляет

$\alpha = 60°$ с направлением магнитного поля. Определить длину проволоки.

2.23 Из проволоки длиной 16 см изготовлен квадратный контур. При помещении контура в однородное магнитное поле с индукцией $B = 8$ мТл на него действует вращающий момент сил $M = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Н·м. При этом нормаль к его плоскости составляет угол $\alpha = 30°$ с направлением магнитного поля. Определить силу тока в контуре.

2.24 Чтобы раздвинуть два прямолинейных длинных проводника от расстояния r_1 до расстояния $r_2 = 3r_1$, на единицу длины проводника была совершена работа $A = 8{,}8 \cdot 10^{-8}$ Дж. При этом по проводникам в одном направлении текут токи. Сила тока в первом проводнике $I_1 = 0{,}2$ А. Какова сила тока I_2 во втором проводнике?

2.25 Два прямолинейных длинных проводника находятся на расстоянии r_1 друг от друга. По проводникам текут в одном направлении токи $I_1 = 0{,}7$ А и $I_2 = 0{,}5$ А. Какую работу на единицу длины проводника необходимо совершить, чтобы раздвинуть их на расстояние $r_2 = 5r_1$?

2.26 В однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл помещена квадратная рамка площадью $S = 10$ см^2. Нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = 45°$. Определить вращающий момент, действующий на рамку, если по ней течет ток $I = 1$ А.

2.27 В однородном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл находится прямоугольная рамка длиной 8 см и шириной 5 см, содержащая 100 витков проволоки. Ток в рамке 1 А, а плоскость рамки параллельна линиям магнитной индукции. Определить: 1) магнитный момент рамки; 2) вращающий момент, действующий на рамку.

2.28 В однородном магнитном поле с индукцией 0,2 Тл находится прямой проводник длиной 15 см, по которому течет ток 5 А. На проводник действует сила 0,13 Н. Определить угол между направлением тока и вектором магнитной индукции.

2.29 По прямому горизонтально расположенному проводу пропускают ток $I_1 = 10$ А. Под ним на расстоянии $R = 1{,}5$ см находится параллельный ему алюминиевый провод, по которому пропускают ток $I_2 = 1{,}5$ А. Какова должна быть площадь поперечного сечения алюминиевого провода, чтобы он удерживался незакрепленным?

2.30 Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии R друг от друга. По проводникам текут в одном направлении токи одинаковой силы. Чтобы раздвинуть проводники до расстояния $2R$, на каждый сантиметр длины проводника была совершена работа A = 138 нДж. Определить силу тока в проводниках.

2.31 Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. Определить угловую скорость вращения электрона.

2.32 Электрон, обладая скоростью 10 Мм/с, влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Индукция магнитного поля равна 0,1 мТл. Определить нормальное и тангенциальное ускорения электрона.

2.33 В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции движется прямой проводник длиной 30 см. При этом разность потенциалов, возникающая на его концах, составляет $1 \cdot 10^{-5}$ В. Определить силу Лоренца, действующую на свободный электрон проводника.

2.34 Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = 600 В, движется параллельно прямолинейному длинному проводнику на расстоянии r = 1 см от него. Определить силу, действующую на электрон, если через проводник пропустить ток I = 10 А.

2.35 Протон, ускоренный разностью потенциалов U = 500 В, влетел в однородное магнитное поле с магнитной индукцией B = 2 мТл перпендикулярно линиям магнитной индукции. Найти радиус окружности, по которой будет двигаться протон.

2.36 Электрон влетел в однородное магнитное поле с магнитной индукцией B = 1 мТл перпендикулярно линиям магнитной индукции и движется по окружности радиусом R = 10 см. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

2.37 Определить, при какой скорости пучок заряженных частиц, двигаясь перпендикулярно скрещенным под прямым углом однородным электрическому (E = 100 кВ/м) и магнитному (B = 50 мТл) полям, не отклоняется.

2.38 Найти скорость α-частицы, которая при движении в пространстве, где имеются взаимно перпендикулярные электрические и магнитные поля, не испытывает никакого отклонения. Напряженность магнитного поля 2 кА/м, напряженность электрического поля 6,28 кВ/м. Скорость α-частицы перпендикулярна к линиям напряженности того и другого полей.

2.39 Ион, несущий один элементарный заряд, движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}02$ Тл по окружности радиусом $R = 10$ см. Определить импульс p иона.

2.40 Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 480$ В, влетает в однородное магнитное поле индукцией $B = 0{,}3$ мТл, перпендикулярное направлению его движения. Определить радиус кривизны траектории частицы и период его обращения в магнитном поле.

2.41 Вычислить циркуляцию вектора индукции вдоль контура, охватывающего токи $I_1 = 10$ А, $I_2 = 15$ А, текущие в одном направлении, и ток $I_3 = 20$ А, текущий в противоположном направлении.

2.42 На железное кольцо намотано в один слой $N = 500$ витков провода. Средний диаметр кольца $d = 25$ см. Определить магнитную проницаемость μ железа, если при силе тока $I_1 = 0{,}5$ А в обмотке магнитная индукция $B_1 = 1$ Тл, а при $I_2 = 5$ А магнитная индукция $B_2 = 1{,}28$ Тл.

2.43 Стальной брусок внесли в магнитное поле напряженностью $H = 1600$ А/м. Определить намагниченность J стали, если магнитная индукция $B = 1{,}25$ Тл.

2.44 Соленоид индуктивностью $L = 1{,}5$ мГн имеет длину $l = 30$ см, площадь поперечного сечения $S = 15$ см^2 и число витков $N = 500$. По нему протекает ток $I = 1$ А. Определить магнитную индукцию и намагниченность внутри соленоида, если он находится в диамагнитной среде.

2.45 По круговому контуру радиусом $r = 50$ см, погруженному в жидкий кислород, являющийся парамагнетиком с магнитной восприимчивостью $\chi = 1{,}9 \cdot 10^{-6}$, течет ток $I = 1$ А. Определить намагниченность в центре витка.

2.46 Соленоид длиной 0,5 м содержит 1000 витков, намотанных на картонный каркас. Определить индукцию магнитного поля внутри соленоида, если сопротивление его обмотки 120 Ом, а напряжение на его концах 60 В.

2.47 Найти магнитный поток Φ_B, создаваемый соленоидом сечением $S = 10$ см^2, если он имеет $n = 10$ витков на каждый сантиметр его длины при силе тока $I = 1$ А. Сердечник немагнитный.

2.48 Плоский контур площадью $S = 25$ см^2 находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}04$ Тл. Определить магнитный поток Φ_B, пронизывающий контур, если его плоскость составляет угол $\beta = 30°$ с линиями индукции.

2.49 Соленоид сечением $S = 16$ см^2 и длиной $l = 1$ м содержит $N = 2000$ витков, намотанных на картонный каркас. Вычислить потокосцепление Ψ при силе тока в обмотке $I = 5$ А.

2.50 В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}02$ Тл находится прямой провод длиной $l = 10$ см, расположенный перпендикулярно линиям индукции. По проводу течет ток $I = 1$ А. Под действием сил поля провод переместился на расстояние $a = 5$ см. Найти работу A сил поля.

2.51 Круговой контур радиусом $R = 5$ см помещен в однородное магнитное поле, индукция которого $B = 50$ мТл. Плоскость контура перпендикулярна к силовым линиям. По контуру протекает постоянный ток $I = 2$ А. Какую работу A надо совершить, чтобы повернуть контур на $\varphi = 90°$ вокруг оси, совпадающей с диаметром контура?

2.52 Определить магнитный поток через площадь поперечного сечения катушки без сердечника, имеющей на каждом сантиметре длины 10 витков. Радиус катушки равен 2 см, сила тока в ней – 2 А.

2.53 Внутри соленоида с числом витков $N = 500$ с сердечником ($\mu = 200$) напряженность магнитного поля $H = 10$ кА/м. Площадь поперечного сечения сердечника $S = 10$ см^2. Определить индукцию магнитного поля внутри соленоида и потокосцепление.

2.54 В однородное магнитное поле напряженностью 100 кА/м помещена квадратная рамка со стороной 10 см. Плоскость рамки составляет с направлением магнитного поля угол 60°. Определить магнитный поток, пронизывающий рамку.

2.55 Определить работу, совершаемую при перемещении проводника длиной $l = 0{,}2$ м, по которому течет ток $I = 5$ А, в перпендикулярном магнитном поле напряженностью $H = 80$ кА/м, если перемещение проводника $a = 0{,}5$ м.

2.56 На расстоянии $a = 1$ м от длинного прямого провода с током $I = 1$ кА находится кольцо радиусом $r = 1$ см. Кольцо расположено так, что пронизывающий его магнитный поток максимален. Определить количество электричества q, которое протечет по кольцу, когда ток в проводе будет выключен. Сопротивление кольца $R = 10$ Ом. В пределах кольца поле считать однородным.

2.57 Соленоид содержит $N = 100$ витков. Площадь сечения сердечника $S = 10$ см^2. По обмотке протекает ток, создающий поле с индукцией $B = 1{,}5$ Тл. Найти среднюю ЭДС индукции, возникающей в соленоиде, если ток уменьшится до нуля за время $t = 0{,}5$ мс.

2.58 Индуктивность соленоида при длине $l = 1$ м и площади поперечного сечения $S = 20$ см^2 равна $L = 0{,}4$ мГн. При какой силе тока в соленоиде объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида будет равной $w = 0{,}1$ Дж/м^3?

2.59 Тороид с немагнитным сердечником содержит $n = 20$ витков на 1 см длины. Определить объемную плотность энергии магнитного поля внутри тороида, если по его обмотке протекает ток $I = 3$ А.

2.60 Обмотка тороида с немагнитным сердечником содержит $n = 10$ витков на 1 см длины. При какой силе тока в обмотке объемная плотность энергии станет равной $w = 1$ Дж/м^3?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Трофимова, Т. И.** Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 14-е изд., стер. – М. : Изд. центр «Академия», 2007. – 560 с.

2 Физика / И. И. Наркевич и [др.]. – Минск : Новое знание, 2004. – 680 с.

3 **Ташлыкова-Бушкевич, И. И.** Физика : учеб. В 2 ч. Ч. 1 : Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм / И. И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Выш. шк., 2014. – 303 с.

4 **Трофимова, Т. И.** Курс физики. Задачи и решения : учеб. пособие для учр. высш. проф. образования / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. – 4-е изд., испр. – М. : Изд. центр «Академия», 2011. – 592 с.

5 **Чертов, А. Г.** Физические величины: (Терминология, определения, обозначения, размерности, единицы) / А. Г. Чертов. – М. : Высш. шк., 1990. – 334 с. – Библ.: С. 330–335.

6 **Шиляева, К. П.** Физика. Краткая теория и задачи : пособие / К. П. Шиляева, И. О. Деликатная, Н. А. Ахраменко. – Гомель : БелГУТ, 2021. – 211 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(справочное)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Решая задачи, необходимо выполнить следующее.

1 Выбрать основные законы и формулы, которые используются при решении задачи, разъяснить буквенные обозначения, употребляемые при написании формул.

Если для решения задачи нужна формула, которая является частным случаем, не выражает физический закон или не является определением какой-нибудь физической величины, ее следует вывести.

2 При необходимости сделать чертеж или рисунок, поясняющий содержание задачи. Выполнить его нужно аккуратно при помощи чертежных принадлежностей.

3 Решение задачи должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями.

4 Все величины, входящие в условие задачи, необходимо выразить в единицах СИ.

5 Решить задачу в общем (буквенном) виде – получить конечную расчетную формулу. Проверить правильность полученной формулы. Для этого подставить в правую часть формулы вместо обозначений величин наименования их единиц и проверить, получается ли в результате единица искомой величины. Верно полученная рабочая формула должна давать правильную размерность искомой величины.

6 В окончательную формулу, полученную в результате решения задачи в общем виде, подставить числовые значения, выраженные в единицах одной системы (СИ). Значения постоянных величин, которыми необходимо воспользоваться при решении задачи, смотреть в таблицах приложения.

7 Произвести вычисления величин, подставленных в формулу, руководствуясь правилами приближенных вычислений. Точность результатов не должна превышать точности исходных данных, в том числе и табличных. При необходимости представлять результат в виде степенной функции.

8 Оценить правдоподобность полученного результата.

9 Записать в ответе числовое значение и размерность единицы измерения искомой величины в системе СИ.

В отдельных случаях при решении громоздких задач целесообразно производить вычисления промежуточных величин.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(справочное)

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

1 Некоторые физические постоянные (округленные значения)

Ускорение свободного падения .... g = 9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная................................ G = 6,67 · 10^{-11} м^3/(кг · с^2)
Постоянная Авогадро……………………………$N_А$ = 6,02·10^{23} моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная…………………...R = 8,31 Дж/(моль · К)
Скорость света в вакууме .... c = 3,00 · 10^8 м/с
Постоянная Больцмана .... k = 1,38 · 10^{-23} Дж/К
Элементарный заряд .... e = 1,6 · 10^{-19} Кл
Масса покоя электрона .... m_e = 9,11 · 10^{-31} кг
Масса покоя протона .... m_p = 1,6726 · 10^{-27} кг
Масса покоя нейтрона... m_n = 1,6750 · 10^{-27} кг
Электрическая постоянная .... ε_0 = 8,85 · 10^{-12} Ф/м
Магнитная постоянная.. μ_0 = 4π · 10^{-7} Гн/м
Магнетон Бора... $\mu_Б$ = 0,927 · 10^{-23} Дж/Тл

2 Плотность твёрдых тел и жидкостей

Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3	Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3
Алюминий	2,70	Вода (при 4 ºС)	1
Железо	7,88	Глицерин	1,26
Медь	8,93	Дизельное топливо	1
Свинец	11,3	Масло трансформаторное	0,9
Серебро	10,5	Керосин	0,8
Эбонит	1,2	Масло касторовое	0,9
Магний	1,74	Спирт	0,83

3 Диэлектрическая проницаемость ε некоторых веществ

Вещество	ε	Вещество	ε
Вода	81,0	Оргстекло	3,5
Глицерин	3,9	Полиэтилен	2,3
Керосин	2,0	Резина, каучук	2,5
Масло (трансформаторное)	2,2	Слюда	7,5
Масло (касторовое)	4,8	Стекло	7,0
Спирт	26,0	Фарфор	5,0
Парафин	2,0	Эбонит	2,7

4 Удельное сопротивление ρ_0 (при 20 °С) и температурный коэффициент α проводников

Вещество	ρ_0, 10^{-8} Ом·м	α, 10^{-4} °С$^{-1}$
Серебро	1,66	40
Алюминий	3,21	38
Медь	1,7	42,8
Железо	12	62
Вольфрам	5,5	51
Свинец	20,8	43
Нихром	100	4
Манганин	44,5	0,5
Никелин	40	2,3
Графит	390	–8

5 Подвижность ионов газов (при нормальных условиях)

Газ	Подвижность, 10^{-4} м^2/(В·с)		Газ	Подвижность, 10^{-4} м^2/(В·с)	
	u_+	u_-		u_+	u_-
Водород	1,3	1,8	Кислород	1,3	1,8
Воздух	5,4	7,4	Углекислый газ	1,0	1,1
Азот	1,4	1,9	Хлор	0,6	0,5

6 Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

Парамагнетики	χ, 10^{-6}	Диамагнетики	χ, 10^{-6}
Азот	0,013	Водород	–0,063
Алюминий	23	Бензол	–7,5
Воздух	0,38	Висмут	–176
Вольфрам	176	Вода	–9
Жидкий кислород	3400	Каменная соль	–12,6
Кислород	1,9	Кварц	–15,1
Марганец	121	Медь	–10,3
Платина	360	Стекло	–12,3

7 Множители и приставки для образования десятичных, кратных и дольных единиц и их наименования

Обозначение	Приставка	Множитель	Обозначение	Приставка	Множитель
Т	тера	10^{12}	с	санти	10^{-2}
Г	гига	10^{9}	м	милли	10^{-3}
М	мега	10^{6}	мк	микро	10^{-6}
к	кило	10^{3}	н	нано	10^{-9}
д	деци	10^{-1}	п	пико	10^{-12}

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ДЕЛИКАТНАЯ Ирина Олеговна
ШИЛЯЕВА Ксения Павловна
ДОЦЕНКО Елена Иосифовна

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

Учебно-методическое пособие

Технический редактор В. Н. Кучерова
Корректор Т. А. Пугач

Подписано в печать 14.03.2023 г. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 4,42 Уч.-изд. л. 3,10. Тираж 150 экз.
Зак. № 507. Изд. № 20.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель