**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**

Кафедра высшей математики

С. А. ДУДКО, И. М. ДЕРГАЧЁВА, А. И. ПРОКОПЕНКО

ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ.
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2022

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики

С. А. ДУДКО, И. М. ДЕРГАЧЁВА, А. И. ПРОКОПЕНКО

ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ.
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области энергетики и энергетического оборудования
для обучающихся по специальности 1-43 01 03
«Электроснабжение (по отраслям)»
в качестве учебно-методического пособия*

Гомель 2022

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.193
Д81

Р е ц е н з е н т ы: доцент кафедры информационно-управляющих систем и технологий, канд. физ.-мат. наук, доцент *Н. В. Рязанцева* (БелГУТ);
кафедра фундаментальной и прикладной математики (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент *Л. Н. Марченко*; канд. физ.-мат. наук, доцент *О. В. Якубович* (ГГУ им. Ф. Скорины)

Дудко, С. А.

Д81 Численные и аналитические методы современной математики. Уравнения математической физики : учеб.-метод. пособие / С. А. Дудко, И. М. Дергачёва, А. И. Прокопенко ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2022. – 203 с.
ISBN 978-985-891-073-0

Рассматриваются основные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений математической физики. Дан вывод основных фундаментальных уравнений математической физики, достаточно подробно рассмотрена процедура приведений дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду. Дается решение задачи Коши для волнового уравнения, сопровождаемое большим количеством примеров. Метод разделения переменных излагается применительно к решению краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности дается через метод интегрального преобразования Фурье.

Предназначено для студентов специальности 1-43 01 03 «Электроснабжение (по отраслям)», а также для студентов технических специальностей.

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.193

ISBN 978-985-891-073-0

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ И ПРИВЕДЕНИЕ ИХ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1.1 Дифференциальные уравнения в частных производных

Прежде чем приступать к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных, вспомним некоторые основные факты теории обыкновенных дифференциальных уравнений для облегчения понимания последующего материала.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка с неизвестной функцией $u(x)$:

$$F(x, u(x), u'(x), \ \ldots, u^{(n)}(x)) = 0. \tag{1.1}$$

Решить уравнение (1.1) – значит найти такую функцию $u = f(x)$, после подстановки которой, а также ее производных $f'(x), \ \ldots, \ f^{(n)}(x)$ в уравнение (1.1), это уравнение обращалось бы в тождество. Функция $u = f(x)$, обладающая этим свойством, называется *решением* рассматриваемого уравнения, или *интегралом* уравнения. Но задача состоит не только в том, чтобы найти какое-либо частное решение уравнения (1.1), но и в том, чтобы найти всю совокупность решений, то есть общее решение уравнения (1.1). В дифференциальном уравнении (1.1) n-го порядка совокупность решений может быть задана функцией, зависящей от независимой переменной x и от n произвольных постоянных $c_1, c_2, \ \ldots, c_n$:

$$u = \varphi(x, c_1, c_2, \ \ldots, c_n). \tag{1.2}$$

Очевидно, что эта функция должна являться решением уравнения (1.1) при всех значениях произвольных постоянных $c_1, c_2, \ \ldots, c_n$. Имея общее решение (1.2), можно ставить задачу о выделении из общего решения частных решений, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Одной из таких задач является *задача Коши*: среди бесконечного числа решений (1.2) найти решение, которое удовлетворяет поставленным начальным условиям

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_1, \ \ldots, \ u^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1},$$

где x_0 принадлежит промежутку значений X, на котором отыскивается решение уравнения (1.1), $u_0, u_1, \ \ldots, u_{n-1}$ – заданные числа. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается, что при весьма общих ограничениях на функцию F, задача Коши для уравнения (1.1) всегда имеет решение. Наряду с решением задачи Коши для уравнения (1.1), часто появляется необходимость в нахождении такого решения уравнения (1.1), когда начальные условия заданы не в одной точке x_0, а в нескольких точках (в этом случае их принято называть *краевыми условиями*).

Дифференциальное уравнение в частных производных с m неизвестными переменными $x_1, x_2, \ \ldots, x_m$ относительно неизвестной функции $u(x_1, x_2, \ \ldots, x_m)$ имеет вид

$$F\left(x_1, x_2, \ \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \right.$$
$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_m^n} \right) = 0, \qquad (1.3)$$

где F – заданная функция своих аргументов.

Наивысший порядок n производной от неизвестной функции $u(x_1, \ x_2, \ \ldots, x_m)$, входящей в дифференциальное уравнение (1.3), называется *порядком* этого уравнения.

Решением, или *интегралом уравнения* (1.3), называется такая функция $u = f(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_m)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции, обращает это уравнение в тождество.

Большое число физических и технических задач приводит к дифференциальным уравнениям с частными производными 2-го порядка относительно функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать более простое уравнение вида

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m},\right.$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right) = 0. \qquad (1.4)$$

Очень часто уравнение 2-го порядка (1.4) является линейным относительно производных 2-го порядка, то есть имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi\left(x_1, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0,$$

где коэффициенты a_{ij} являются функциями только независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то есть $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Если функция $\Phi\left(x_1, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)$ является линейной относительно аргументов $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$, то уравнение 2-го порядка называется *линейным*. Таким образом, в самом общем случае линейное уравнение 2-го порядка будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, \ldots, x_m), \qquad (1.5)$$

где коэффициенты a_{ij}, b_i, c являются функциями только независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Функция $f(x_1, \ldots, x_m)$ – заданная функция.

Если $f(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0$, то уравнение (1.5) называется *линейным однородным уравнением*, в противном случае – *линейным неоднородным уравнением*.

Если коэффициенты a_{ij}, b_i, c постоянны, то уравнение (1.5) называется *линейным уравнением с постоянными коэффициентами*.

1.2 Приведение уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду

Рассмотрим линейное уравнение 2-го порядка с неизвестной функцией $u = u(x, y)$, которое имеет вид

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f, \qquad (1.6)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ и f – заданные функции переменных x и y. Перейдем в уравнении (1.6) к новым независимым переменным ξ и η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y); \quad \eta = \psi(x, y). \qquad (1.7)$$

От неизвестных функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ будем требовать, чтобы они были непрерывны вместе с их частными производными 1-го и 2-го порядков. Будем также полагать, что функции (1.7) устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками (ξ, η) и (x, y) соответствующих областей. Аналитически это условие выражается тем, что якобиан преобразования (1.7)

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

нигде в области рассмотрения (той области, где ищется решение уравнения (1.6)) не обращается в нуль, то есть выполняется условие

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} \neq 0.$$

Для осуществления требуемой замены переменного выражаем частные производные от функции u по переменным x и y через производные от функции u по переменным ξ и η, дифференцируя сложную функцию $u = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$. Для частных производных 1-го порядка получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}. \tag{1.8}$$

Совершенно аналогичным образом вычисляем частные производные 2-го порядка (при этом фактически берем производную от произведения двух функций):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

для смешанной частной производной 2-го порядка получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

аналогичным образом получаем частную производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Суммируем полученные соотношения для частных производных 2-го порядка функции $u(x, y)$:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \\
+\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \\
+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \\
+\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.
\end{cases} \tag{1.9}
$$

Подставляя полученные соотношения для производных (1.8) и (1.9) в исходное уравнение (1.6), после элементарных преобразований получаем уравнение следующего вида:

$$
\overline{a_{11}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\overline{a_{12}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{a_{22}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \overline{b_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \overline{b_2}\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f(\xi, \eta),
$$

где функциональные коэффициенты имеют вид

$$
\overline{a_{11}} = a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,
$$

$$
\overline{a_{12}} = a_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + a_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y},
$$

$$
\overline{a_{22}} = a_{11}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,
$$

$$
\overline{b_1} = a_{11}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial \xi}{\partial x} + b_2\frac{\partial \xi}{\partial y},
$$

$$
\overline{b_2} = a_{11}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial \eta}{\partial x} + b_2\frac{\partial \eta}{\partial y}.
$$

Введем функцию $\overline{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \overline{b_1}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \overline{b_2}\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu$ и окончательно представим полученное уравнение в следующем виде:

$$\overline{a_{11}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\overline{a_{12}}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{a_{22}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \overline{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = f(\xi, \eta). \quad (1.10)$$

Дальнейший ход очевиден. Коэффициенты $\overline{a_{11}}, \overline{a_{12}}, \overline{a_{22}}$ преобразованного уравнения (1.10) выражаются через функции $\xi = \varphi(x, y)$; $\eta = \psi(x, y)$, и может оказаться так, что некоторые из коэффициентов обратятся в нуль, что существенно упростит уравнение (1.10), то есть исходное уравнение (1.6) через преобразование переменных (1.7) будет приведено к более простому виду. Выберем переменную ξ так, чтобы коэффициент $\overline{a_{11}}$ был равен нулю. В этом случае получаем

$$a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Таким образом, если функция $z = \varphi(x, y)$ – какое-нибудь частное решение уравнения в частных производных 1-го порядка

$$a_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0, \quad (1.11)$$

то, положив $\xi = z = \varphi(x, y)$, получаем коэффициент $\overline{a_{11}} = 0$.

Как следствие, наша задача подбора переменных ξ и η свелась к задаче интегрирования уравнения (1.11). Нижеследующая лемма позволит нам обойти процесс интегрирования уравнения (1.11), заменив его решением обыкновенного дифференциального уравнения.

Лемма. Если $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения (1.11), то соотношение $\varphi(x, y) = c$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \quad (1.12)$$

Проверим, что функция $\varphi(x, y) = c$ есть интеграл уравнения (1.12). Перепишем уравнение (1.12) в виде

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0. \tag{1.13}$$

Дифференцируя обе части равенства $\varphi(x, y(x)) = c,$ получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \text{ или } \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}.$$

Подставляем полученное соотношение в уравнение (1.13), получаем

$$a_{11}\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}} + a_{22} = 0$$

или, умножая обе части равенства на $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$, приходим к соотношению

$$a_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Полученное равенство выполняется в силу того, что функция $\varphi(x, y)$ является решением уравнения (1.11). Как следствие, функция $\varphi(x, y) = c$ будет решением уравнения (1.12).

Уравнение (1.12), которое приобретает ключевое значение для решения нашей задачи классификации уравнений, будем называть *характеристическим уравнением*.

Очевидно, что характеристическое уравнение (1.12) распадается на два уравнения, которые получим, решая уравнение как квадратное относительно $\dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{1.14}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{1.15}$$

Если $\varphi(x, y)=c$ – общий интеграл уравнения (1.14), то полагая $\xi=\varphi(x, y),$ мы получаем коэффициент $\overline{a_{11}}=0.$ Если $\psi(x, y)=c$ является общим интегралом уравнения (1.15), независимым от функции $\varphi(x, y),$ то полагая $\eta=\psi(x, y)$ мы получаем коэффициент $\overline{a_{22}}=0.$

Интегральные кривые характеристического уравнения (1.12), то есть все кривые, входящие в семейства функций $\varphi(x, y)=c$ и $\psi(x, y)=c,$ называются *характеристическими* исходного дифференциального уравнения (1.6). Если дискриминант $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0,$ то получим характеристики действительные и различные. В случае $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ получаем две действительные характеристики, совпадающие между собой, а в случае $a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$ – две различные комплексные характеристики.

Для дальнейшего изложения нам потребуется одно тождество, которое мы сейчас получим. Для коэффициента $\overline{a_{12}}^2$ после элементарных преобразований получаем

$$\overline{a_{12}}^2=a_{11}^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+a_{12}^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+a_{22}^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+$$
$$+2a_{11}a_{12}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+2a_{22}a_{12}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+2a_{11}a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Находим произведение коэффициентов

$$\overline{a_{11}}\,\overline{a_{22}} = a_{11}^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 4a_{12}^2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{22}^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 +$$

$$+2a_{11}a_{12}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + 2a_{22}a_{12}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + a_{11}a_{22}\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right).$$

Используя полученные соотношения, находим разность

$$\overline{a_{12}}^{\,2} - a_{11}a_{22} = a_{12}^2\left(\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 - 4\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) +$$

$$+a_{11}a_{22}\left(2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right) =$$

$$= \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2.$$

Таким образом, мы получаем следующее тождество:

$$\overline{a_{12}}^{\,2} - \overline{a_{11}}\,\overline{a_{22}} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right)^2,$$

из которого следует, что знак дискриминанта $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ не меняется при преобразовании переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$. Значит, все множество линейных уравнений в частных производных 2-го порядка можно разбить на следующие типы уравнений, положив в основу классификации знак дискриминанта $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

Определение. Уравнение (1.6) называется в точке $M(x, y)$ области G уравнением *гиперболического типа*, если в точке $M(x, y)$ $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$; *эллиптического типа*, если в точке $M(x, y)$ $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$; *параболического типа*, если в точке $M(x, y)$ $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Область G, во всех точках которой уравнение (1.6) имеет один и тот же тип, и будет той областью, в которой мы будем приводить уравнение к каноническому виду, тем самым максимально упрощая вид уравнения.

1.2.1 Уравнение гиперболического типа

Правые части уравнений (1.14) и (1.15) действительные и различные. Их общие интегралы $\varphi(x, y) = \text{c}$ и $\psi(x, y) = \text{c}$ определяют действительные семейства характеристик.

Положим

$$\xi = \varphi(x, y), \ \ \eta = \psi(x, y).$$

Тогда уравнение (1.10) примет вид

$$2\overline{a_{12}}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \overline{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = f(\xi, \eta).$$

Разделив обе части уравнения на $2\overline{a_{12}}$, окончательно получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right), \tag{1.16}$$

где $\Phi = \dfrac{1}{2\overline{\overline{a_{12}}}}(f - \overline{F})$.

Полученное нами уравнение (1.16) имеет простейшую форму, поэтому это уравнение называют *канонической формой уравнения гиперболического типа.*

Пример 1.1. Привести к каноническому виду уравнение

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1.17}$$

Решение. В нашем случае $a_{11} = y^2, a_{22} = -x^2, a_{12} = 0.$ Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$y^2dy^2 - x^2dx^2 = (ydy)^2 - (xdx)^2 = (ydy - xdx)(ydy + xdx) = 0.$$

Исходное характеристическое уравнение распадается на два уравнения.

Первое уравнение

$$ydy = xdx, \text{ его общий интеграл } y^2 - x^2 = c_1.$$

Второе уравнение

$$ydy = -xdx, \text{ его общий интеграл } x^2 + y^2 = c_2.$$

Таким образом, уравнение (1.17) – уравнение гиперболического типа. Приводим его к каноническому виду. Вводим новые переменные

$$\xi = y^2 - x^2, \;\; \eta = x^2 + y^2. \tag{1.18}$$

Вычисляем частные производные

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -2x; \; \frac{\partial \xi}{\partial y} = 2y; \; \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -2; \; \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 2; \; \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 2x; \; \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2y; \; \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 2; \; \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0.$$

Используя полученные соотношения, по формулам (1.9) находим частные производные функции $u(x, y)$, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 8x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 8y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляем полученные выражения для частных производных $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в левую часть уравнения (1.17) и после элементарных преобразований получаем

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -16x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 2(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2(y^2 - x^2)\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Таким образом, уравнение (1.17) принимает следующий промежуточный вид:

$$8x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial\xi}-(y^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

Из равенств (1.18) получаем

$$x^2y^2=\frac{1}{4}(\eta+\xi)(\eta-\xi)=\frac{1}{4}(\eta^2-\xi^2),$$

и окончательно приводим уравнение (1.17) к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2(\eta^2-\xi^2)}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0.$$

Пример 1.2. Найти общее решение уравнения.

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(1+y^2)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y(1+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}=0. \qquad (1.19)$$

Решение. Получаем характеристическое уравнение

$$dy^2-(1+y^2)^2dx^2=(dy-(1+y^2)dx)(dy+(1+y^2)dx)=0,$$

которое распадается на два уравнения с разделяющимися переменными

$$dy=(1+y^2)dx;\ dy=-(1+y^2)dx.$$

Находим общие интегралы полученных уравнений

$$x-\operatorname{arctg} y=c_1;\ \ x+\operatorname{arctg} y=c_2.$$

Таким образом, необходимо ввести новые переменные

$$\xi=x-\operatorname{arctg} y;\ \ \eta=x+\operatorname{arctg} y.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=1;\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=0;\ \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{1}{1+y^2};\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=\frac{2}{(1+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=1;\ \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0;\ \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2};\ \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

По формулам (1.8), (1.9) находим частные производные функции $u(x,\,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{(1+y^2)^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2y\frac{\partial u}{\partial \xi} - 2y\frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Подставим полученные соотношения в исходное уравнение (1.19), приходим к следующей канонической форме уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{1.20}$$

Дальнейший ход интегрирования уравнения (1.20) очевиден. Имеем $\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0,$ тогда $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \theta_0(\eta)$ и $u(\xi, \eta) = \int \theta_0(\eta) d\eta + f(\xi).$ Введем функцию $\theta(\eta) = \int \theta_0(\eta) d\eta$ и представим решение уравнения (1.20) в виде

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + \theta(\eta), \tag{1.21}$$

где f и $\theta -$ произвольные функции переменных ξ и η. Возвращаясь в равенстве (1.21) к переменным x и y, получаем общее решение уравнения (1.19):

$$u(x, y) = f(x - \operatorname{arctg} y) + \theta(x + \operatorname{arctg} y).$$

2. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$ (1.22)

Находим решение соответствующего характеристического уравнения

$$x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = (xdy - ydx)(xdy + ydx) = 0,$$

которое дает два общих интеграла $xy = c_1;\ \frac{y}{x} = c_2.$ Поэтому переходим к новым переменным $\xi = xy;\ \eta = \frac{y}{x}.$ Вычисляем требуемые частные производные

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=y;\ \frac{\partial\xi}{\partial y}=x;\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=0;\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}=1;$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2};\ \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{x};\ \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3};\ \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=0;\ \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}.$$

По формуле (1.8) находим

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial\eta}.$$

По формуле (1.9) находим производные 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Как следствие, подставив частные производные функции $u(x,y)$ в исходное уравнение (1.22), приходим к уравнению вида

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+xy\frac{\partial u}{\partial\xi}=0.$$

Разделив обе части полученного уравнения на $xy,$ приходим к канонической форме уравнения (1.22)

$$2\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial\xi}=0.$$

Запишем полученное уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(2\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}+u\right)=0.$$

Тогда

$$2\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}+u=\psi_0(\eta), \qquad (1.23)$$

где $\psi_0(\eta)-$произвольная функция переменной η.

Уравнение (1.23) интегрируем как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной η (переменную ξ считаем фиксированным параметром). Для решения уравнения используем метод вариации произвольной постоянной. Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $u_0(\eta)=\dfrac{c}{\sqrt{\eta}}$, поэтому, меняя постоянную c на функцию $c(\eta)$, ищем решение неоднородного уравнения в виде $u(\eta)=\dfrac{c(\eta)}{\sqrt{\eta}}$. Подставляя функцию $u(\eta)$ в уравнение (1.23), получаем

$$\frac{c'(\eta)}{\sqrt{\eta}}-\frac{c(\eta)}{2\eta\sqrt{\eta}}+\frac{c(\eta)}{2\eta\sqrt{\eta}}=\frac{1}{2\eta}\psi_0(\eta)$$

или

$$c'(\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\eta}}\psi_0(\eta).$$

Интегрируя полученное соотношение, находим

$$c(\eta)=\int\limits_0^\eta \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\psi_0(\alpha)d\alpha+\varphi(\xi)=\varphi(\xi)+\overline{\psi}(\eta),$$

где $\overline{\psi}(\eta)=\int\limits_0^\eta \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}\psi_0(\alpha)d\alpha,$ $\varphi(\xi)-$произвольная функция переменной ξ.

Как следствие, решение уравнения (1.23) имеет вид

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left(\varphi(\xi)+\overline{\psi}(\eta)\right)=\frac{1}{\sqrt{\eta}}\varphi(\xi)+\psi(\eta),$$

где $\psi(\eta)=\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}\overline{\psi}(\eta).$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем общее решение уравнения (1.22):

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{x}{y}}\varphi(xy)+\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

1.2.2 Уравнение параболического типа

Для уравнения параболического типа мы сталкиваемся с ситуацией, когда уравнения (1.14) и (1.15) совпадают, и получаем только один общий интеграл уравнения (1.14) $\varphi(x, y) = c$, определяющий одно семейство характеристик.

В этом случае можно положить

$$\xi = \varphi(x, y);\ \eta = \psi(x, y),$$

где $\psi(x, y) -$ любая функция, независимая от φ (то есть удовлетворяющая условию $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \neq 0$), лишь бы она была дифференцируема по x, y нужное число раз.

Очевидно, что при выбранной замене переменных получаем

$$\overline{a_{11}} = a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

С учетом того, что для уравнения параболического типа $a_{12}^2 = a_{11}a_{22,}$ или $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$, последнее равенство для коэффициента $\overline{a_{11}}$ можно переписать в следующем виде:

$$\overline{a_{11}} = a_{11}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Это поможет показать, что коэффициент $\overline{a_{12}}$ также обращается в нуль. Действительно, получаем

$$\overline{a_{12}} = a_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + a_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= a_{11}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= \sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial y}\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)=0.$$

Таким образом, уравнение (1.10) принимает вид

$$\overline{a_{22}}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\overline{F}\left(u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)= f(\xi,\eta).$$

После деления обеих частей уравнения на $\overline{a_{22}}$ окончательно получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right), \tag{1.24}$$

где функция $\Phi=\dfrac{1}{\overline{a_{22}}}\left(f-\overline{F}\right).$

Уравнение (1.24) называют *канонической формой* уравнения параболического типа.

Пример 1.3. Найти общее решение уравнения

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1.25}$$

Решение. Характеристическое уравнение, отвечающее уравнению (1.25), имеет вид

$$x^2dy^2+2xydxdy+y^2dx^2=(xdy+ydx)^2=0.$$

Общий интеграл характеристического уравнения имеет вид $xy=c$. Переходим к переменным $\xi=xy;\ \eta=y$. Функцию η выбираем, исходя из соображений «простоты» и выполнения условия $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\neq 0.$

Вычислив требуемые производные

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=y;\ \frac{\partial\xi}{\partial y}=x;\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}=1;\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=0;$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=0;\ \frac{\partial\eta}{\partial y}=1;\ \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}=0,$$

по формулам (1.8) и (1.9) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial\xi};\ \frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2};\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xy\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial\xi}.$$

Подставляя полученные для частных производных соотношения в уравнение (1.25), после элементарных преобразований приходим к канонической форме этого уравнения

$$\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

Введем функцию $v=\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$, для которой получаем дифференциальное уравнение вида

$$\eta\frac{\partial v}{\partial\eta}+v=0,\ \text{или}\ \frac{\partial v}{v}=-\frac{\partial\eta}{\eta}.$$

Полученное уравнение интегрируем как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной η, находим

$$\ln v=-\ln\eta+\ln\psi(\xi)=\ln\left(\frac{1}{\eta}\psi(\xi)\right),$$

где $\psi(\xi)$ – произвольная функция переменной ξ.

Таким образом, получаем

$$v(\xi,\eta)=\frac{1}{\eta}\psi(\xi),\ \text{или}\ \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}=\frac{1}{\eta}\psi(\xi).$$

Интегрируя последнее равенство, находим решение уравнения

$$u(\xi,\eta)=\psi(\xi)\int\frac{\partial\eta}{\eta}+\varphi(\xi)=\psi(\xi)\ln\eta+\varphi(\xi),$$

где $\varphi(\xi)-$ произвольная функция переменной ξ.

Итак, общее решение уравнения (1.25) имеет вид

$$u(x,\,y)=\varphi(xy)+\psi\left(xy\right)\ln y.$$

1.2.3 Уравнение эллиптического типа

Правые части уравнений (1.14) и (1.15) – комплексно сопряженные функции. Пусть $\varphi(x,\,y)=\alpha(x,\,y)+i\beta(x,\,y)-$ интеграл уравнения (1.14), тогда $\psi(x,\,y)=\overline{\varphi}(x,\,y)=\alpha(x,\,y)-i\beta(x,\,y)-$ интеграл уравнения (1.15). После перехода к комплексным переменным $\xi=\varphi(x,\,y)$; $\eta=\overline{\varphi}(x,\,y)$ уравнение (1.10), так как коэффициенты $\overline{a_{11}}$ и $\overline{a_{22}}$ зануляются, примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right),$$

то есть мы приходим к такому же виду уравнения, как и для уравнения гиперболического типа, но при этом функция $u(\xi,\eta)$ будет функцией комплексных переменных $\xi=\alpha+i\beta$, $\eta=\alpha-i\beta$. Перейдем в полученном уравнении к действительным переменным α и β. Получаем $\alpha=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta)$; $\beta=\dfrac{1}{2i}(\xi-\eta)=\dfrac{i}{2}(\eta-\xi)$. Вычислив требуемые производные

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}=\frac{1}{2};\ \frac{\partial\alpha}{\partial\eta}=\frac{1}{2};\ \frac{\partial\beta}{\partial\xi}=-\frac{1}{2}i;\ \frac{\partial\beta}{\partial\eta}=\frac{1}{2}i,$$

получаем

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}-i\,\frac{\partial u}{\partial\beta}\right).$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)-i\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+i\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\right)-\right.$$

$$\left.-i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+i\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right).$$

Таким образом, уравнение (1.10) приводится к виду

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right)=\Phi\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right).$$

Вводим функцию $\overline{\Phi}=4\Phi$ и окончательно приходим к следующему каноническому виду уравнения эллиптического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=\overline{\Phi}\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right).$$

Замечание. При приведении к каноническому виду уравнения эллиптического типа мы можем ограничиться рассмотрением одного общего интеграла $\varphi(x, y)=c.$ При этом переменные ξ и η мы сразу берем в действительном виде, вводя их посредством равенств $\xi=\operatorname{Re}\varphi(x, y);\ \ \eta=\operatorname{Im}\varphi(x, y).$

Пример 1.4. Привести к каноническому виду уравнение

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1.26}$$

Решение. Характеристическое уравнение, отвечающее уравнению (1.26), принимает вид

$$\left(1+x^2\right)dy^2+(1+y^2)dx^2=(\sqrt{1+x^2}\,dy)^2+(\sqrt{1+y^2}\,dx)^2=$$
$$=(\sqrt{1+x^2}\,dy-i\sqrt{1+y^2}\,dx)(\sqrt{1+x^2}\,dy+i\sqrt{1+y^2}\,dx)=0.$$

Интегрируя уравнение с разделяющимися переменными

$$\sqrt{1+x^2}\,dy=i\sqrt{1+y^2}\,dx,$$
$$\int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=i\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

находим общий интеграл $\ln(x+\sqrt{1+x^2})+i\ln(y+\sqrt{1+y^2})=c.$ Таким образом, функция $\varphi(x, y)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+i\ln(y+\sqrt{1+y^2}),$ и мы вводим новые переменные по формулам

$$\xi = \operatorname{Re}\varphi(x,\, y) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}); \;\; \eta = \operatorname{Im}\varphi(x,\, y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Вычисляем требуемые частные производные:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \; \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}; \; \frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}; \; \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = -\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}; \; \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} = 0.$$

Используя полученные соотношения, по формулам (1.8) и (1.9) находим производные функции *u:*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{1+x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{1+y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляя полученные соотношения для производных в уравнение (1.26), приходим в итоге к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Преобразуем уравнение для переменной ξ следующим образом:

$$\xi = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = -\ln(\sqrt{1+x^2} - x).$$

Как следствие, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{1+x^2} - x = e^{-\xi}, \\ \sqrt{1+x^2} + x = e^{\xi}. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\xi} - e^{-\xi}\right) = \operatorname{sh}\xi; \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\xi} + e^{-\xi}\right) = \operatorname{ch}\xi.$$

Тогда $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi} = \operatorname{th}\xi.$

С учетом полученного соотношения, окончательно приводим уравнение (1.26) к следующему каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \operatorname{th}\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

1.3 Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение (1.10) в ситуации, когда все коэффициенты уравнения являются постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение также будет уравнением с постоянными коэффициентами, а отвечающие ему обыкновенные дифференциальные уравнения будут иметь общие интегралы вида $y = Ax + c_1$, $y = Bx + c_2$, где коэффициенты A и B равны:

$$A = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}};\ B = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{1.27}$$

Как следствие, вводим переменные $\xi = y - Ax; \eta = y - Bx$ и для частных производных функции u получаем следующие равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -A\frac{\partial u}{\partial \xi} - B\frac{\partial u}{\partial \eta},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2AB\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + B^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - (A+B)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - B\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставив все эти соотношении для производных в уравнение (1.10), после некоторых преобразований приходим к уравнению вида

$$(a_{11}A^2-2a_{12}A+a_{22})\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2(a_{11}AB-a_{12}(A+B)+a_{22})\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+$$
$$+(a_{11}B^2-2a_{12}B+a_{22})\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+(b_2-Ab_1)\frac{\partial u}{\partial\xi}+(b_2-Bb_1)\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu=f.$$

Коэффициенты при производных $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ зануляются, так как A и B являются решениями уравнений

$$a_{11}A^2-2a_{12}A+a_{22}=0,\ \ a_{11}B^2-2a_{12}B+a_{22}=0.$$

Коэффициент при производной $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}$ преобразуем следующим образом. Из равенств (1.27) получаем

$$A+B=\frac{2a_{12}}{a_{11}};\ AB=\frac{a_{22}}{a_{11}},$$

как следствие,

$$a_{11}AB-a_{12}(A+B)+a_{22}=\frac{2}{a_{11}}(a_{11}a_{22}-a_{12}^2).$$

Введем коэффициент $\overline{a_{12}}=\frac{2}{a_{11}}(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$ и приходим к уравнению следующего вида:

$$2\overline{a_{12}}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+(b_2-Ab_1)\frac{\partial u}{\partial\xi}+(b_2-Bb_1)\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu=f.$$

Разделив обе части полученного уравнения на коэффициент $2\overline{a_{12}}$, окончательно придем к следующему каноническому виду для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+a\frac{\partial u}{\partial\xi}+b\frac{\partial u}{\partial\eta}+\bar{c}u=\bar{f}, \tag{1.28}$$

где $a=\frac{1}{2\overline{\overline{a_{12}}}}(b_2-Ab_1);\ b=\frac{1}{2\overline{\overline{a_{12}}}}(b_2-Bb_1);\ \bar{c}=\frac{c}{2\overline{\overline{a_{12}}}};\ \bar{f}=\frac{f}{2\overline{\overline{a_{12}}}}.$

Полученное нами уравнение (1.28) допускает дальнейшее существенное упрощение. Перейдем к новой неизвестной функции $v(\xi, \eta)$ по формуле

$$u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)\mathrm{e}^{-b\xi - a\eta}. \qquad (1.29)$$

Вычисляем производные функции $u(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \xi} e^{-b\xi - a\eta} - bve^{-b\xi - a\eta} = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - bv \right) e^{-(b\xi + a\eta)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - av \right) e^{-(b\xi + a\eta)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - b\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) e^{-b\xi - a\eta} - a\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - bv \right) e^{-b\xi - a\eta} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - b\frac{\partial v}{\partial \eta} - a\frac{\partial v}{\partial \xi} + abv \right) e^{-(b\xi + a\eta)}.$$

Подставляя полученные соотношения для производных в левую часть уравнения (1.28), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta} + \bar{c}u = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - b\frac{\partial v}{\partial \eta} - a\frac{\partial v}{\partial \xi} + abv + \right.$$

$$\left. + a\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - bv \right) + b\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} - av \right) + \bar{c}v \right) e^{-(b\xi + a\eta)} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + (\bar{c} - ab)v)e^{-(b\xi + a\eta)} \right).$$

Таким образом, от уравнения (1.28) для функции u мы приходим к более простому уравнению для функции v, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + (\bar{c} - ab)v = \bar{f}e^{b\xi + a\eta}.$$

Заметим также, что возможны ситуации, когда исходное уравнение будет гиперболическим уравнением с переменными коэффициентами, но при приведении этого уравнения к каноническому виду мы получаем уравнение вида (1.28), уже с постоянными коэффициентами. В этом случае переход к функции $v(\xi, \eta)$ по формуле (1.29) также существенно упрощает поиск общего решения исходного уравнения для функции u.

Аналогичным образом будем действовать и при рассмотрении уравнения эллиптического типа с постоянными коэффициентами. В этом случае общие интегралы уравнений (1.14) и (1.15) имеют вид $y = Ax \pm iBx + c,$ где коэффициенты

$$A = \frac{a_{12}}{a_{11}},\ B = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}}. \tag{1.30}$$

Вводим новые переменные $\xi = y - Ax;\ \eta = Bx.$ По формулам (1.8) и (1.9) находим необходимые производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -A\frac{\partial u}{\partial \xi} + B\frac{\partial u}{\partial \eta},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2AB\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + B^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (1.10), получаем

$$\left(a_{11}A^2 - 2a_{12}A + a_{22}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a_{11}B^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2B(a_{12} - Aa_{11})\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} +$$

$$+(b_2 - Ab_1)\frac{\partial u}{\partial \xi} + Bb_1\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f.$$

С помощью равенств (1.30) несложно показать, что коэффициент $a_{12} - Aa_{11} = 0,$ а коэффициент

$$a_{11}A^2 - 2a_{12}A + a_{22} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} = a_{11}B^2.$$

Таким образом, уравнение (1.10) в данном случае принимает следующий вид:

$$a_{11}B^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + (b_2 - Ab_1)\frac{\partial u}{\partial \xi} + Bb_1\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f.$$

Разделив обе части полученного уравнения на коэффициент $a_{11}B^2$, приходим к следующему каноническому виду для эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}+\bar{c}u=\bar{f}, \qquad (1.31)$$

где

$$a=\frac{b_2-Ab_1}{a_{11}B^2};\, b=\frac{b_1}{a_{11}B};\, \bar{c}=\frac{c}{a_{11}B^2};\, \bar{f}=\frac{f}{a_{11}B^2}.$$

Полученное каноническое уравнение также можно упростить. Перейдем к новой неизвестной функции $v(\xi,\eta)$, которую введем по формуле

$$u(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(a\xi+b\eta)}.$$

Вычислив требуемые частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{1}{2}av\right)e^{-\frac{1}{2}(a\xi+b\eta)},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}=\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{1}{2}bv\right)e^{-\frac{1}{2}(a\xi+b\eta)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-\frac{1}{2}a\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{1}{2}a\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{1}{2}av\right)\right)e^{-\frac{1}{2}(a\xi+b\eta)}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-a\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{1}{4}a^2v\right)e^{-\frac{1}{2}(a\xi+b\eta)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-\frac{1}{2}b\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{1}{2}b\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{1}{2}bv\right)\right)e^{-\frac{1}{2}(a\xi+b\eta)}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-b\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{1}{4}b^2v\right)e^{-\frac{1}{2}(a\xi+b\eta)}$$

и подставив их в уравнение (1.31), получим каноническое уравнение эллиптического типа более простого вида, чем уравнение (1.31), но уже для неизвестной функции *v:*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+dv=\bar{f}e^{\frac{1}{2}(a\xi+b\eta)}.$$

При записи последнего уравнения мы ввели коэффициент $d = \bar{c} - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

Для уравнения параболического типа характеристическое уравнение дает только один общий интеграл $y = Ax + C$, где $A = \frac{a_{12}}{a_{11}}$. Как следствие, получаем новую переменную $\xi = y - Ax$, а вторую возьмем в виде $\eta = x$, и исходя из соображений наиболее простых выражений для частных производных (при этом $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = -1 \neq 0$).

Вычисляем требуемые производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -A\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Подставляя полученные соотношения в уравнение (1.10), после необходимых преобразований приходим к уравнению следующего вида:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \left(b_2 - b_1\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b_1\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = f.$$

Разделив обе части полученного уравнения на коэффициент a_{11}, приходим к каноническому виду уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta} + \bar{c}u = \bar{f}, \tag{1.32}$$

где при записи последнего уравнения мы ввели коэффициенты $a = \frac{1}{a_{11}^2}(b_2 a_{11} - b_1 a_{12})$; $b = \frac{b_1}{a_{11}}$; $\bar{c} = \frac{c}{a_{11}}$ и функцию $\bar{f} = \frac{f}{a_{11}}$.

Полученное каноническое уравнение также можно упростить. Вводим новую функцию $v(\xi,\eta)$ через равенство

$$u(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)e^{\lambda\xi-\frac{1}{2}b\eta}, \qquad (1.33)$$

где коэффициент λ пока остается неопределенным. Вычислив требуемые частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}+\lambda v\right)e^{\lambda\xi-\frac{1}{2}b\eta},\ \frac{\partial u}{\partial\eta}=\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{1}{2}bv\right)e^{\lambda\xi-\frac{1}{2}b\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}-b\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{1}{4}b^2 v\right)e^{\lambda\xi-\frac{1}{2}b\eta},$$

после их подстановки в уравнение (1.32) приходим к каноническому уравнению следующего вида:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}+a\frac{\partial v}{\partial\xi}+dv=\bar{f}e^{-\left(\lambda\xi-\frac{1}{2}b\eta\right)},$$

где коэффициент $d=\bar{c}+a\lambda-\dfrac{1}{4}b^2.$

Таким образом, если при переходе к функции v по формуле (1.33) выбрать коэффициент λ как корень уравнения $\bar{c}+a\lambda-\dfrac{1}{4}b^2=0,$ то есть занулив коэффициент d, мы придем к каноническому уравнению параболического типа наиболее простого вида

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}+a\frac{\partial v}{\partial\xi}=\bar{f}e^{-\left(\lambda\xi-\frac{1}{2}b\eta\right)}.$$

Как видно, при переходе к новой функции по формуле (1.33) не удается избавиться от слагаемого $\dfrac{\partial v}{\partial\xi}$ в полученном каноническом уравнении параболического типа. Фактически наиболее простая ситуация для уравнения параболического типа реализуется в случае, когда в уравнении (1.32) зануляется коэффициент a. В этом случае мы получаем для функции u обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной η (переменную ξ рассматриваем как фиксированный параметр).

Пример 1.5. Найти общее решение уравнения.

1. $$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{16}u-16xe^{-\frac{1}{16}(x+y)}=0. \qquad (1.34)$$

Записав характеристическое уравнение как квадратное

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-10\left(\frac{dy}{dx}\right)+3=0,$$

находим его решение $\frac{dy}{dx}=3;\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}.$

Общие интегралы полученных уравнений $y=3x+c_1;\ 3y=x+c_2$, поэтому переходим к новым переменным $\xi=y-3x;\ \eta=3y-x.$ Вычисляем частные производные

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-3;\ \frac{\partial\xi}{\partial y}=1;\ \frac{\partial\eta}{\partial x}=-1;\ \frac{\partial\eta}{\partial y}=3.$$

Для производных функции *u* находим по формулам (1.8)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-3\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+3\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

и (1.9)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)-10\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Подставив полученные соотношения в уравнение (1.34), приходим к уравнению вида

$$32\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{1}{32}u+8xe^{-\frac{1}{16}(x+y)}=0.$$

Выразив *x* и *y* через переменные ξ и η, подставляем полученное уравнение $8x=\eta-3\xi;\ x+y=\frac{1}{2}(\eta-\xi)$ и окончательно приходим к следующему уравнению:

$$32\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{1}{32}u+(\eta-3\xi)e^{-\frac{1}{32}(\eta-\xi)}=0. \qquad (1.35)$$

Перейдем в последнем уравнении к новой неизвестной функции v по формуле (1.29)

$$u(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)e^{\frac{1}{32}(\xi-\eta)}=v(\xi,\eta)e^{\frac{1}{32}\xi}\cdot e^{-\frac{1}{32}\eta}.$$

Вычислив производные

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{1}{32}v\right)e^{\frac{1}{32}(\xi-\eta)},\ \frac{\partial u}{\partial\eta}=\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{1}{32}v\right)e^{\frac{1}{32}(\xi-\eta)},$$

$$32\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\left(32\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{\partial v}{\partial\xi}-\frac{1}{32}v\right)e^{\frac{1}{32}(\eta-\xi)}$$

и подставив в уравнение (1.35), получаем уравнение для функции v, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{32}(3\xi-\eta). \qquad (1.36)$$

Находим частное решение уравнения (1.36). Введем функцию $\omega=\dfrac{\partial v}{\partial\eta}$, для которой получаем уравнение

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi}=\frac{1}{32}(3\xi-\eta).$$

Интегрируя полученное уравнение (при интегрировании по переменной ξ переменную η считаем постоянной), находим

$$\omega=\frac{1}{32}\int(3\xi-\eta)d\xi=\frac{1}{32}\left(\frac{3}{2}\xi^2-\eta\xi\right).$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}=\frac{1}{32}\left(\frac{3}{2}\xi^2-\eta\xi\right),$$

интегрируя которое по переменной η, находим частное решение уравнения (1.36):

$$\bar{v}(\xi,\eta)=\frac{1}{32}\left(\frac{3}{2}\xi^2\eta-\frac{1}{2}\xi\eta^2\right)=\frac{1}{64}\xi\eta\left(3\xi-\eta\right).$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

находим по формуле (1.21)

$$v_0(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta),$$

где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ – произвольные функции переменных ξ и η.

Как следствие, общее решение уравнения (1.36) будет суммой двух функций, то есть

$$v(\xi,\eta)=v_0(\xi,\eta)+\bar{v}(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)+\frac{1}{64}\xi\eta(3\xi-\eta).$$

Возвращаясь к функции $u(\xi,\eta)$, получаем

$$u(\xi,\eta)=\left(\varphi(\xi)+\psi(\eta)-\frac{1}{64}\xi\eta(\eta-3\xi)\right)e^{-\frac{1}{32}(\eta-\xi)}.$$

От переменных ξ и η вновь возвращаемся к переменным x и y, после чего общее решение уравнения (1.34) принимает вид

$$u(x,y)=\left(\varphi(y-3x)+\psi(y-3x)-\frac{1}{8}x(y-3x)(3y-x)\right)e^{-\frac{1}{16}(x+y)}.$$

2. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{5}{4}u=0. \qquad (1.37)$$

Уравнение (1.37) является уравнением параболического типа. Действительно, характеристическое уравнение имеет вид

$$dy^2+2dxdy+dx^2=(dy+dx)^2=0,\ \text{или}\ d(y+x)=0.$$

Находим общий интеграл $y+x=c$, поэтому к новым переменным переходим по формулам $\xi=x+y;\eta=y$. Как следствие, для частных производных функции $u(x,y)$ получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

После подстановки этих соотношений в исходное уравнение (1.37) получаем уравнение, являющееся обыкновенным дифференциальным уравнением по переменной η:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{5}{4}u=0. \tag{1.38}$$

Полученное уравнение также можно упростить, перейдя к новой функции v по формуле

$$u(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\eta}.$$

Вычислив требуемые производные

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{1}{2}v\right)e^{-\frac{1}{2}\eta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}-\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{1}{4}v\right)e^{-\frac{1}{2}\eta}$$

и подставив в уравнение (1.38), получаем для функции v простое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+v=0,$$

общее решение которого (роль произвольных постоянных при этом играют произвольные функции переменной ξ) имеет вид

$$v(\xi,\eta)=f(\xi)\cos\eta+g(\xi)\sin\eta.$$

Как следствие, для функции $u(\xi,\eta)$ получаем равенство

$$u(\xi,\eta)=\left(f(\xi)\cos\eta+g(\xi)\sin\eta\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\eta}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.37) имеет вид

$$u(x, y) = \big(f(x+y)\cos y + g(x+y)\sin y \big) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y}.$$

1.4 Классификация линейных уравнений 2-го порядка со многими независимыми переменными

Прежде чем приступить к классификации линейных уравнений в частных производных со многими независимыми переменными остановимся на случае линейного уравнения с двумя независимыми переменными, в котором $a_{12} = 0,$ то есть рассмотрим уравнение вида

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y). \qquad (1.39)$$

Принадлежность к тому или другому типу уравнения (1.39) определяется знаками коэффициентов a_{11} и a_{22}. Если $a_{11}(x, y)$ и $a_{22}(x, y)$ всюду в области G имеют разные знаки (и в области G коэффициенты $a_{11}, a_{22} \neq 0$), то уравнение (1.39) является гиперболическим в области G. Если коэффициенты уравнения (1.39) $a_{11}(x, y)$ и $a_{22}(x, y)$ всюду в области G имеют одинаковые знаки (при этом оба коэффициента отличны от нуля), то уравнение (1.39) является уравнением эллиптического типа. Если же всюду в области G один из коэффициентов $a_{11}(x, y)$ или $a_{22}(x, y)$ равен нулю, то уравнение (1.39) является уравнением параболического типа.

Аналогичный признак может быть положен в основу классификации уравнений 2-го порядка вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (1.40)$$

в которых функция u зависит от n независимых переменных, коэффициенты a_{ii}, b_k, c являются функциями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Уравнение (1.40) будет уравнением гиперболического типа в точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n),$ если все коэффициенты $a_{ii}(M)$ в этой точке не равны нулю, а также все коэффициенты, кроме одного (например,

a_{11}), имеют один и тот же знак, а коэффициент $a_{11}(M)$ имеет противоположный знак.

Уравнение (1.40) будет уравнением эллиптического типа в точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если все коэффициенты $a_{ii}(M)$ в этой точке не равны нулю и все коэффициенты имеют один и тот же знак.

Уравнение (1.40) будет уравнением параболического типа в точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если в этой точке все коэффициенты $a_{ii}(M)$, кроме одного (например, $a_{11}(M)$), не равны нулю и имеют один и тот же знак, то есть для параболического уравнения выполняются условия

$$a_{11}(M) = 0, b_1(M) \neq 0.$$

Если уравнение (1.40) является уравнением эллиптического (соответственно гиперболического, параболического) типа в каждой точке области G, то оно называется эллиптическим (соответственно гиперболическим, параболическим) в этой области.

Например, уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z),$$

где $u = u(x, y, z)$, является уравнением эллиптического типа на области $G = \{-\infty < x < +\infty; -\infty < y < +\infty; -\infty < z < +\infty\}$.

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, y, z, t)$$

является уравнением гиперболического типа ($u = u(x, y, z, t)$, a – действительный коэффициент) на области $G = \{-\infty < x, y, z < +\infty;$ $t > 0\}$.

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z, t),$$

где $u = u(x, y, z, t)$, является уравнением параболического типа на той же области, что и волновое уравнение.

1.5 Упражнения для самостоятельной работы

Упражнение 1. *Следующие уравнения привести к каноническому виду.*

1.1. $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}-2u=0$.

Ответ: уравнение гиперболического типа $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+3\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}+2u=0$, $\xi=y-x$, $\eta=2y-x$.

1.2. $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+10\frac{\partial u}{\partial x}-15\frac{\partial u}{\partial y}-50u+x-2y=0$.

Ответ: уравнение параболического типа
$27\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-105\frac{\partial u}{\partial\xi}+30\frac{\partial u}{\partial\eta}-150u-2\xi+5\eta=0$, $\xi=x+3y$, $\eta=x$.

1.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+13\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+24\frac{\partial u}{\partial y}-9u+9(x+y)=0$.

Ответ: уравнение эллиптического типа
$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}-u+\eta-\xi=0$, $\xi=2x-y$, $\eta=3x$.

1.4. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Ответ: уравнение параболического типа
$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$, $\xi=y^2-x^2$, $\eta=x^2$.

1.5. $(1+x^2)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2x(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

Ответ: уравнение эллиптического типа $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0$, $\xi=y$, $\eta=\operatorname{arctg}x$.

1.6. $(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-2u=0$.

Ответ: уравнение эллиптического типа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2u=0$, $\xi=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $\eta=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

1.7. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\dfrac{\partial u}{\partial x}+ye^{\frac{y}{x}}=0$.

Ответ: уравнение параболического типа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2\dfrac{\xi^2}{\eta^2}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=-\dfrac{1}{\eta}e^{\xi}$, $\xi=\dfrac{y}{x}$, $\eta=y$.

1.8. $xy^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x^2y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.

Ответ: уравнение параболического типа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}+\dfrac{2\eta^2}{\xi-\eta^2}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=0$, $\xi=x^2+y^2$, $\eta=x$.

1.9. $4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-e^{2x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Ответ: уравнение гиперболического типа

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\dfrac{1}{2(\eta-\xi)}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi}-\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\dfrac{1}{4(\eta+\xi)}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi}-\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0$, $\xi=y^2-e^x$, $\eta=y^2+e^x$.

Упражнение 2. *Найти общее решение для каждого из следующих уравнений.*

2.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+a\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

Ответ: $u(x,y)=g(y-ax)-f(y-ax)e^{-x}$, где f и g – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции. Канонический вид уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0$, $\xi=y-ax$, $\eta=x$.

2.2. $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

Ответ: $u(x, y) = (\varphi(x+y) + \psi(x+3y))e^{-\frac{1}{2}(x+3y)}$. Канонический вид уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi} = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = x + 3y$. Делая замену $u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)e^{-\frac{1}{2}\eta}$, получим уравнение $\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = 0$. Интегрируя это уравнение, вернемся к переменным x, y и получим общее решение исходного уравнения.

2.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 8\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} + 4e^{5x+\frac{3}{2}y} = 0$.

Ответ: $u(x, y) = e^{x+\frac{1}{2}y}((2x+y)e^{4x+y} + \varphi(2x+y) + \psi(4x+y))$. Канонический вид уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\eta} - e^{\eta+\frac{1}{2}\xi} = 0$, $\xi = y + 2x$, $\eta = y + 4x$. Делая замену $u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)e^{\frac{1}{2}\xi}$, получим уравнение $\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = e^{\eta}$.

2.4. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Ответ: $u(x, y) = \sqrt{xy}\,\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi(xy)$. Канонический вид уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \dfrac{1}{2\xi}\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = 0$, $\xi = xy$, $\eta = \dfrac{y}{x}$.

2.5. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Ответ: $u(x, y) = y\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ Канонический вид уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0$, $\xi = \dfrac{y}{x}$, $\eta = y$.

2.6. $e^{-2x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-e^{-2y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-e^{-2x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^{-2y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+8e^{y}=0$.

Ответ: $u(x,y)=e^{y}(e^{y}-e^{x})+f(e^{y}+e^{x})+g(e^{y}-e^{x})$. Канонический вид уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\xi+\eta$, $\xi=e^{x}+e^{y}$, $\eta=e^{y}-e^{x}$.

2.7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(3+\sin^2 x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+(\sin x-\cos x-2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Ответ: $u(x,y)=\varphi(y+\sin x-2x)e^{-\frac{1}{4}(y+\sin x+2x)}+\psi(y+\sin x+2x)$. Канонический вид уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0$, $\xi=y+\sin x-2x$, $\eta=y+\sin x+2x$. Делаем замену $u(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{4}\eta}$.

2 ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

2.1 Уравнение малых поперечных колебаний струны

Струной будем называть упругую нить, не сопротивляющуюся изгибу, но сопротивляющуюся растяжению. Отсутствие сопротивления изгибу математически выражается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательной к ее мгновенному профилю (рисунок 2.1).

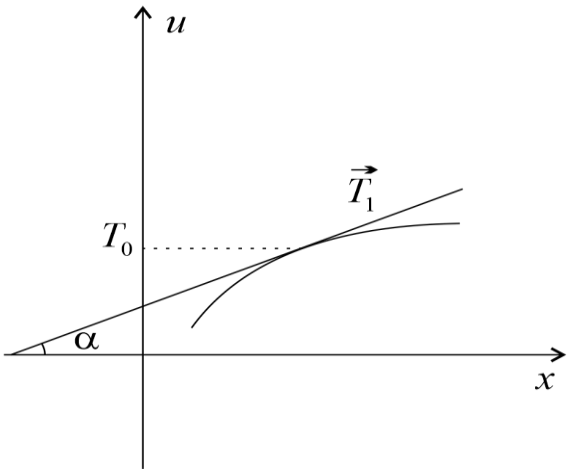

Рисунок 2.1

Будем рассматривать струну, расположенную вдоль оси *Ox*. Полагаем, что колебания струны происходят вдоль оси *u,* т.е. амплитуда смещения точки струны с координатой *x* в момент времени *t*. При этом мы ограничимся рассмотрением малых колебаний, т.е. таких, в которых можно пренебречь величиной $\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2$ в сравнении с единицей, в этом случае величину натяжения *T*, возникающую в струне, можно считать не зависящей от времени *t*. Таким образом, величина натяжения T будет функцией только переменной x, т.е. $T = T(x)$. Поскольку мы рассматриваем только поперечные колебания, нас будет интересовать проекция вектора $\vec{T}$ на ось u, которую мы обозначим через Tu.

Как видно из рисунка 2.1,

$$Tu = T\sin\alpha = T\cos\alpha\,\mathrm{tg}\alpha = T\mathrm{tg}\alpha\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} =$$

$$= T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2}} \approx T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

где α – угол касательной к кривой $u(x,t)$ с осью X при фиксированном времени t.

Момент импульса участка струны (x_1, x_2) в момент времени t равен величине

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\rho(\xi)\,d\xi,$$

где $\rho(x)$ – линейная плотность струны. Пусть $f(x;t)$ – плотность равнодействующей внешних сил, действующих на струну в направлении оси u. На участок струны (x_1, x_2) действуют силы, которые в рассматриваемом случае складываются из сил натяжения $T\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ и внешних сил $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi,t)\,d\xi$, поэтому по второму закону Ньютона получаем

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}\rho(\xi)\,d\xi = T(x_2)\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x} - T(x_1)\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x} + \int_{x_1}^{x_2} f(\xi,t)\,d\xi.$$

Интегрируя обе части полученного равенства по переменной t, приходим к уравнению вида

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial u(\xi,t_2)}{\partial t}-\frac{\partial u(\xi,t_1)}{\partial t}\right)\rho(\xi)\,d\xi=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(T(x_2)\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x}-T(x_1)\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right)dt+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi,t)\,d\xi dt. \qquad (2.1)$$

Полученное нами уравнение (2.1) и есть уравнение малых поперечных колебаний участка струны (x_1, x_2) в интегральной форме.

Полагаем, что функция $u(x,t)$ имеет непрерывные производные второго порядка, а $T(x)$ – непрерывную производную первого порядка. В этом случае все интегралы в уравнении (2.1) вычисляем, используя теорему Лагранжа о среднем для приращения функции и теорему о среднем для интегралов. Получаем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial u(\xi,t_2)}{\partial t}-\frac{\partial u(\xi,t_1)}{\partial t}\right)\rho(\xi)\,d\xi=\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u(\xi,\tau_1)}{\partial t^2}\Delta t\rho(\xi)\,d\xi=$$

$$=\rho(\xi_1)\frac{\partial^2 u(\xi,\tau_1)}{\partial t^2}\Delta t\Delta x,$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(T(x_2)\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x}-T(x_1)\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right)dt=\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(T(\xi_2)\frac{\partial u(\xi_2,t)}{\partial x}\right)dt=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(T(\xi_2)\frac{\partial u(\xi_2,\tau_2)}{\partial x}\right)\Delta t\Delta x,$$

где $\Delta t=t_2-t_1$; $\Delta x=x_2-x_1$; $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in[x_1;x_2]$; $\tau_1,\tau_2,\tau_3\in[t_1;t_2]$.

Таким образом, мы приходим к уравнению следующего вида:

$$\rho(\xi_1)\frac{\partial^2 u(\xi,\tau_1)}{\partial t^2}\Delta t\Delta x=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(T(\xi_2)\frac{\partial u(\xi_2,t)}{\partial x}\right)+f(\xi_3,\tau_3)\right)\Delta t\Delta x. \qquad (2.2)$$

Разделив обе части уравнения (2.2) на $\Delta t\Delta x$ и перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$ и $\Delta x\to 0$, получим дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний струны

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)+f(x,t). \qquad (2.3)$$

При дальнейшем рассмотрении мы существенно упростим нашу задачу. Будем рассматривать случай, когда $T=\mathrm{const}$ и $\rho=\mathrm{const}$, т.е. натяжение и линейная плотность являются постоянными коэффициентами. В этой ситуации от уравнения (2.3) мы приходим к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t), \qquad (2.4)$$

где коэффициент $a^2=\frac{T}{\rho}$, $F(x,t)=\frac{f(x,t)}{\rho}$. Уравнение (2.4) называется *одномерным волновым уравнением.*

2.2 Уравнение малых продольных колебаний упругого стержня

Мы будем рассматривать стержень, расположенный вдоль оси *X*. Введем следующие обозначения: $S(x)$ – площадь сечения стержня плоскостью, перпендикулярной оси *X*, проведенной через точку *X*; $E(x)$ и $\rho(x)$ – модуль Юнга и плотность в сечении с абсциссой *x;* $u(x,t)$ – величина отклонения (вдоль стержня) сечения с абсциссой *x* в момент времени *t*, при этом мы полагаем, что величина отклонения всех точек фиксированного сечения одинакова. Таким образом, продольные колебания стержня будут описываться функцией $u(x,t)$. При этом мы ограничимся рассмотрением малых колебаний, т.е. таких колебаний, которые подчиняются закону Гука. Закон Гука формулируется следующим образом: натяжение *T*, возникающее в упругом теле при его растяжении или сжатии, пропорциональны деформации и площади сечения тела. Подсчитаем фигурирующее в формулировке закона Гука относительное удлинение (деформацию) участка стержня $(x,x+\Delta x)$ в момент времени *t*. Координаты концов этого участка равны (вновь используем теорему Лагранжа о среднем)

$$\frac{x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)-(x+u(x,t))-\Delta x}{\Delta x}=\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}=$$

$$= \frac{\partial u\left(x+\theta\Delta x, t\right)}{\partial x} \quad \left(0<\theta<1\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, находим относительное удлинение стержня в точке X в момент времени t, которое равно $\dfrac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}$. Таким образом, величина натяжения по закону Гука равна

$$T\left(x,t\right)=E\left(x\right)S\left(x\right)\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}.$$

Пусть $f\left(x,t\right)$ – плотность равнодействующей внешних сил, действующих на сечение с абсциссой x вдоль оси X. Вновь применяя второй закон Ньютона к участку стержня $\left(x_1,x_2\right)$ (за время $\Delta t = t_2 - t_1$), получаем

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial u\left(\xi,t_2\right)}{\partial t}-\frac{\partial u\left(\xi,t_1\right)}{\partial t}\right)\rho\left(\xi\right)s\left(\xi\right)d\xi =$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(S\left(x_2\right)E\left(x_2\right)\frac{\partial u\left(x_2,t\right)}{\partial x}-S\left(x_1\right)E\left(x_1\right)\frac{\partial u\left(x_1,t\right)}{\partial x}\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f\left(\xi,t\right)d\xi dt.$$

Это и есть уравнение малых продольных колебаний участка стержня $\left(x_1,x_2\right)$ в интегральной форме в рамках модели, основанной на применении закона Гука. Используя теорему Лагранжа о среднем и теорему о среднем для интегралов, от интегрального уравнения приходим к дифференциальному уравнению малых продольных колебаний стержня:

$$\rho\left(x\right)S\left(x\right)\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S\left(x\right)E\left(x\right)\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\right)+f\left(x,t\right). \qquad (2.5)$$

Вновь существенно упрощаем задачу, полагая S, E и $\rho = \text{const}$ (стержень с постоянной площадью сечения, плотность и модуль Юнга материала стержня постоянны).

В этом случае уравнение (2.5) приводит к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t),$$

где $a^2 = \frac{E}{\rho}; F(x,y) = \frac{f(x,t)}{\rho S}$.

Таким образом, мы вновь приходим к одномерному волновому уравнению вида (2.4). Очевидно, что полученное волновое уравнение является уравнением гиперболического типа.

Рассмотренные нами модели малых поперечных колебаний струны и продольных колебаний стержня допускают дальнейшее обобщение. Например, мы можем рассмотреть уравнение колебаний с учётом сопротивления среды. В простейших моделях сопротивление среды движению учитывают, полагая силу сопротивления пропорциональной скорости, т.е. при движении частицы в среде с сопротивлением вводят силу сопротивления среды $\overrightarrow{F_{\text{сопр}}} = -\beta\vec{v}$, где $\vec{v}$ – скорость частицы, коэффициент $\beta = \text{const}$. Поэтому в случае малых поперечных колебаний струны мы также можем учесть силу сопротивления среды, добавив в правую часть уравнения (2.4) слагаемое вида $-2v\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, где $v = \text{const}$. В этом случае уравнение поперечных колебаний струны примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2v\frac{\partial u}{\partial t} + F(x,t)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t). \tag{2.6}$$

Очевидно, что введённое нами слагаемое $2v\frac{\partial u}{\partial t}$ не меняет характера уравнения. Уравнение (2.6) также будет уравнением гиперболическим.

2.3 Уравнение малых поперечных колебаний мембраны

Мембраной называется натянутая плоская плёнка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу, но сказывающая сопротивление растяжению. Мембраной также можно считать плоскую пластину, толщина которой мала в сравнении с двумя другими измерениями.

Мы будем рассматривать малые поперечные колебания мембраны, в которых смещение перпендикулярно плоскости мембраны (x, y) и в которых величинами $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ можно пренебречь в сравнении с единицей, где $u = u(x, y, t)$ – величина смещения точки (x, y) в момент времени t.

Сделаем ещё ряд допущений, существенно упрощающих нашу модель. Пусть dS – элемент дуги некоторого контура, лежащего на поверхности мембраны, $M(x, y)$ – точка этого элемента. На этот элемент действуют силы натяжения $\vec{T}dS$. Отсутствие сопротивления мембраны изгибу и сдвигу $\vec{T}(M)$ математически выражается в том, что вектор напряжения $\vec{T}$ лежит в плоскости, касательной к поверхности мембраны в точке M, и перпендикулярен элементу dS, а величина натяжения не зависит от направления элемента dS, содержащего точку M. В рамках этой модели можно считать, что:

1) проекция $T_{\text{пр}}$ вектора натяжение $\vec{T}$ на плоскость (x, y) равна T.

Действительно, $T_{\text{пр}} = T\cos\alpha$, где α – угол между вектором $\vec{T}$ и плоскостью (x, y). Пусть γ – угол между касательной плоскостью к поверхности мембраны, в которой лежит вектор $\vec{T}$, и плоскостью (x, y). Так как $\alpha < \gamma$, то

$$\cos\alpha \geq \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \approx 1.$$

Следовательно, $\cos\alpha \approx 1$ и $T_{\text{пр}} = T$.

2) натяжение T не зависит от времени t.

Действительно, рассмотрим участок S невозмущенной мембраны. Площадь $S = \iint\limits_S dxdy.$ Так как $\cos\gamma \approx 1,$ то площадь этого участка в момент времени t

$$\iint\limits_S \frac{dxdy}{\cos\gamma} \approx \iint\limits_S dxdy.$$

Таким образом, площадь фиксированного участка мембраны не меняется со временем, т.е. этот участок не растягивается. Поэтому в силу закона Гука и величина T не меняется со временем.

3) величина натяжения T не зависит от x и y. Действительно, рассмотрим прямоугольный участок невозмущенной мембраны $A_1B_1B_2A_2$ (рисунок 2.2).

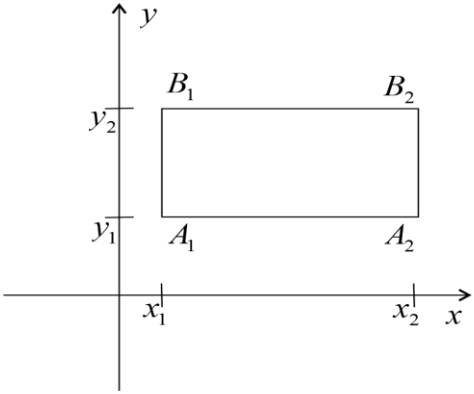

Рисунок 2.2

На этот участок действует сила натяжения, равная

$$\int\limits_{A_1A_2} \vec{T}dS + \int\limits_{A_1B_2} \vec{T}dS + \int\limits_{B_2B_1} \vec{T}dS + \int\limits_{B_1A_1} \vec{T}dS.$$

Так как площадь $S_{A_1B_1B_2A_2} = \text{const}$, проекции этой силы на оси X и Y равны нулю. С другой стороны, проекция силы напряжения на ось Y равна

$$\int\limits_{A_2B_2} \vec{T}dS + \int\limits_{B_1A_1} \vec{T}dS = \int\limits_{y_1}^{y_2} T\left(x_2, y\right)dy - \int\limits_{y_1}^{y_2} T\left(x_1, y\right)dy =$$

$$= \int\limits_{y_1}^{y_2} T\left(x_2, y\right) - T\left(x_1, y\right)dy = 0, \qquad (2.7)$$

а на ось X равна

$$\int_{A_1A_2} \vec{T} dS + \int_{B_2B_1} \vec{T} dS = \int_{x_1}^{x_2} T(x, y_1) - T(x, y_2) dx = 0. \qquad (2.8)$$

Так как промежутки (x_1, x_2) и (y_1, y_2) выбраны совершенно произвольно, то из равенств (2.7) и (2.8) получаем $T(x, y) = T(x_2, y)$ и $T(x_1, y_1) = T(x, y_2)$, т.е. величина T не зависит от X и Y.

Пусть S – участок мембраны в момент времени t, ограниченный контуром C. Обозначим через S_1 и C_1 проекции S и C на плоскость (x, y) (рисунок 2.3).

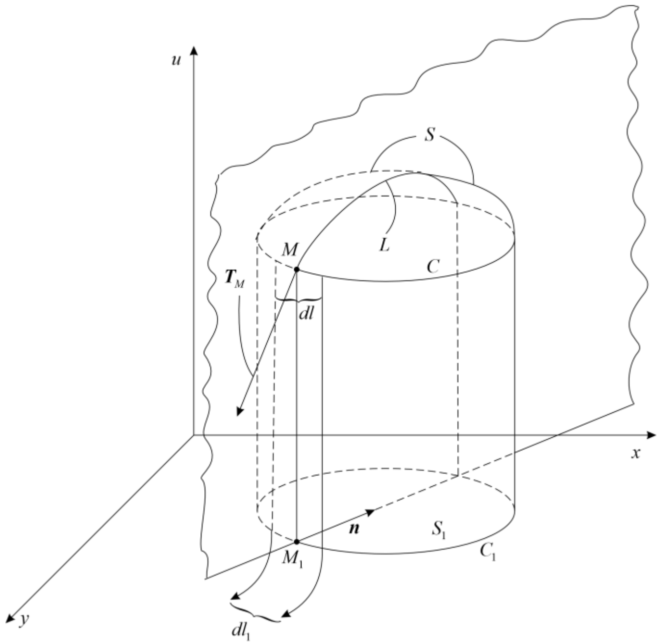

Рисунок 2.3

Находим величину вертикальной составляющей P и силы натяжения, действующей вдоль контура C. Рассмотрим элемент dl на C и точку M на dl. $\overrightarrow{T_M}$ – вектор натяжения в точке M, перпендикулярный dl. Через $\overrightarrow{T_M}$ проведём плоскость, перпендикулярную плоскости (x, y).

Эта плоскость пересекает плоскость (x, y) по нормали $\vec{n}$ к C_1 в точке M_1 (см. рисунок 2.3). На рисунке 2.4 изображен профиль L сечения поверхности S.

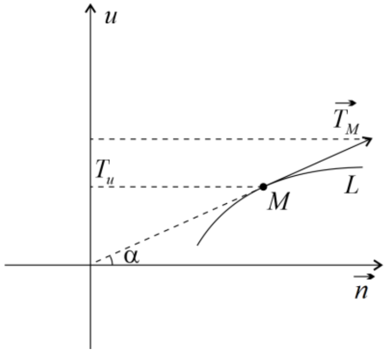

Рисунок 2.4

Как видно из рисунка 2.4,

$$T_u = T\sin\alpha = T\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = T\frac{\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)^2}} \approx T\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}.$$

Пусть β – угол между dl и dl_1. Так как $\beta \le \gamma$, то

$$\cos\beta \ge \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \approx 1.$$

Как следствие, получаем

$$P_u = \int_C T_u dl = \int_C T\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dl = \int_C T\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\frac{dl_1}{\cos\beta} = \int_C T\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dl_1.$$

Применяя к этому интегралу формулу Гаусса – Остроградского, получаем

$$P_u = T\iint_{S_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy.$$

Зная величину P_u, нетрудно получить уравнение малых поперечных колебаний мембраны. Обозначим через $f(x,y,t)$ плотность равнодействующей внешних сил, действующих на мембрану в точке $M(x,y)$, соответственно через $\rho(x,y)$ – поверхностную плотность мембраны.

Применяя 2-й закон Ньютона к участку S_1 мембраны (за время $\Delta t = t_2 - t_1$), получаем уравнение колебаний в интегральной форме

$$\iint\limits_{S_1}\left(\frac{\partial u(x,y,t_2)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,y,t_1)}{\partial t}\right)\rho(x,y)dxdy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\iint\limits_{S_1}T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdydt+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\iint\limits_{S_1}f(x,y,t)dxdydt.$$

Представив разность производных по t в виде

$$\frac{\partial u(x,y,t_2)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,y,t_1)}{\partial t}=\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}dt,$$

получаем уравнение в следующем виде:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\iint\limits_{S_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho(x,y)\,dxdydt=\int\limits_{t_1}^{t_2}\iint\limits_{S_1}\left(T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t)\right)dxdydt$$

или

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\iint\limits_{S_1}\left(\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-f(x,y,t)\right)dxdydt=0.$$

Из последнего равенства в силу произвольности выбора интервала (t_2,t_1) получаем уравнение малых поперечных колебаний мембраны в дифференциальной форме:

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t).$$

Вновь существенно упрощаем нашу задачу, полагая $\rho(x, y) = \text{const}.$ Как следствие, полученное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t), \tag{2.9}$$

где $a^2 = \frac{T}{\rho}$; $F(x, y, t) = \frac{f(x, y, t)}{\rho}.$ Уравнение (2.9) называется *двумерным волновым уравнением.* Очевидно, что полученное нами уравнение (2.9) является уравнением гиперболического типа.

2.4 Уравнение для напряжённости электрического и магнитного полей в вакууме

Электромагнитное поле полностью определяется системой уравнений Максвелла (мы рассматриваем электромагнитное поле в вакууме). Для области, в которой отсутствуют электрические заряды и токи, уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},\ \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{E} = 0,\ \operatorname{div}\vec{H} = 0, \end{gathered} \tag{2.10}$$

где $\vec{H}$ – напряжённость магнитного поля, $\vec{E}$ – напряжённость электрического поля.

Применим операцию rot к 1-му уравнению системы (2.10) (для $\operatorname{rot}\vec{E}$), получаем $\operatorname{rotrot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\vec{H}\right).$

Далее используем известную формулу векторного анализа

$$\operatorname{rotrot}\vec{E} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}, \tag{2.11}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – трехмерный оператор Лапласа. Так как $\operatorname{div}\vec{E} = 0,$ то получаем $\operatorname{rotrot}\vec{E} = -\Delta\vec{E}.$ Подставляя это равенство в формулу (2.11) и используя уравнение для $\operatorname{rot}\overrightarrow{H}$ из системы (2.10), получаем трёхмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}.$$

Полученное нами волновое уравнение для вектора $\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right)$ представляет собой систему из трёх скалярных уравнений для трёх компонент вектора $\vec{E}$. Для проекции E_x на ось x мы получаем трёхмерное волновое уравнение вида

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right).$$

Аналогичные уравнения мы получаем для компонент E_y и E_z вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$.

Подобным же образом, применяя операцию rot к обеим частям уравнения для $\operatorname{rot}\overrightarrow{H}$ из системы (2.10), получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{H}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \overrightarrow{H}.$$

Замечание. Остановимся подробнее на введенном нами операторе Лапласа Δ. Рассмотрим функцию $u = u\left(x, y, z\right)$. Градиент скалярной функции $\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$. Применим операцию дивергенции к вектору ∇u, получаем $\operatorname{div}\left(\nabla u\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Таким образом, на языке векторного анализа введенный оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla u = \operatorname{div}\left(\nabla u\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{2.12}$$

2.5 Уравнение теплопроводности и диффузии

Получаем уравнение, описывающее распределение температуры в твердом теле.

Пусть $u(M,t)=u(x,y,z,t)$ – температура тела в точке $M(x,y,z)$ в момент времени *t*. Согласно закону Фурье, плотность потока тепла в точке ω в направлении $\vec{n}$ в единицу времени равна $\omega=-k\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$. Здесь *k* – коэффициент теплопроводности. В самом общем случае он может быть функцией температуры, координат и времени, т.е. $k=k(u,M,t)$.

Рассмотрим область тела *D*, ограниченную поверхностью *S*. Обозначим через $f(M,t)$ плотность источников тепла внутри области *D*. Подсчитаем баланс тепла для *D* за малое время Δt:

$Q_1=\iiint\limits_D f(M,t)dv\Delta t$ – приход за счёт источников тепла $(dv=dxdydz)$;

$Q_2=-\iint\limits_S k\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}d\sigma\Delta t=-\iint\limits_S k\left(\nabla u,\vec{n}^{\,0}\right)d\sigma\Delta t$ – расход за счёт выходящего из *D* потока тепла, производная $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ берётся по направлению вектора внешней нормали к поверхности *S*; $\vec{n}^{\,0}=\dfrac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}$ – вектор единичной нормали;

$Q_3=\iiint\limits_D c\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}dv\Delta t$ – изменение количества тепла в области *D* за время Δt; $c=c(M)$ – коэффициент теплоёмкости, $\rho=\rho(M)$ – плотность вещества тела.

Закон сохранения энергии даёт уравнение

$$Q_3=Q_1-Q_2$$

или

$$\iiint\limits_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv\Delta t=\iiint\limits_D f(M,t)dv\Delta t+\iint\limits_S k\left(\nabla u,\vec{n}^{\,0}\right)d\sigma\Delta t.$$

Применяя к последнему интегралу формулу Гаусса – Остроградского, получаем

$$\iiint\limits_D c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv\Delta t = \iiint\limits_D \left(\operatorname{div}\left(k\nabla u\right) + f\left(M,t\right)\right) dv\Delta t,$$

откуда, в силу произвольности выбора области D, следует уравнение теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(k\nabla u\right) + f\left(M,t\right). \tag{2.13}$$

В дальнейшем рассмотрении мы существенно упростим полученное уравнение. Все коэффициенты, входящие в уравнение (2.13), будем считать постоянными, т.е. $k, c, \rho = \text{const}$. В этом случае, используя равенства (2.12), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F\left(x, y, z, t\right),$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$; $F\left(x, y, z, t\right) = \dfrac{f\left(x, y, z, t\right)}{c\rho}$.

Будем также использовать более краткую запись трёхмерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + F\left(x, y, z, t\right). \tag{2.14}$$

При рассмотрении процессов переноса тепла в пластине или тонкой плите (толщина плиты, измеряемая вдоль оси z, существенно меньше размеров плиты вдоль осей x и y) приходим к двумерному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F\left(x, y, t\right).$$

Соответственно, при рассмотрении процесса теплопередачи в стержне, расположенном вдоль оси X, приходим к одномерному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F\left(x, t\right).$$

Совершенно аналогично выводится уравнение диффузии (уравнение переноса вещества). При выводе уравнения используется закон Нернста для потока вещества ω в направлении вектора $\vec{n}$:

$$\omega = -D\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}.$$

Здесь $u = u(M,t) = u(x,y,z,t)$ – концентрация диффундирующего вещества (рассматриваем процесс диффузии в газе или жидкости) в точке $M(x,y,z)$ в момент времени *t*, *D* – коэффициент диффузии. Введём также коэффициент пористости среды *c*, который в самом общем случае есть $c = c(u,M,t)$, т.е. зависит от концентрации диффундирующего вещества и свойств среды. При такой постановке задачи уравнение диффузии принимает вид

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(D\nabla u) + f(M,t), \tag{2.15}$$

где $f(M,t)$ – объёмная плотность источников вещества в среде, в которой рассматривается диффузия. Уравнение (2.15) также будем рассматривать в максимально упрощённой постановке, полагая $D, c = \mathrm{const}.$ Как следствие, уравнение диффузии принимает вид

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(x,y,z,t).$$

Очевидно, что уравнения (2.13) и (2.15) являются уравнениями параболического типа.

2.6 Типы кривых условий. Постановка краевых задач

При решении задач физики и техники математическими методами, прежде всего, необходимо дать адекватную математическую постановку задачи, которая включает в себя два необходимых элемента:

а) написать уравнение, которому удовлетворяет искомая функция, описывающая исследуемое явление;

б) написать дополнительные условия, которым должны удовлетворять искомая функция на границах её области определения.

При решении каждой конкретной задачи математическими методами надо ставить вопрос о решении соответствующего уравнения вместе с соответствующими дополнительными условиями (т.е. о решении математической задачи в её полной постановке). Дифференциальные уравнения, описывающие различные явления, имеют множество решений. Поэтому недостаточно написать только уравнение, которому удовлетворяет искомая функция, необходимо задать дополнительные условия, позволяющие выделить единственное решение. Таким образом, дополнительные условия должны обеспечить существование и единственность решения поставленной задачи.

Рассмотрим дополнительные условия, которые необходимо поставить для описания малых колебаний струн и стержней.

Прежде всего, при решении уравнения (2.4) зададим начальные условия, т.е. задаем начальный профиль струны $u(x,0)=\varphi(x)$ и начальную скорость точек струны $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi(x)$. Аналогичным образом мы можем задать начальные условия для любого волнового уравнения.

Кроме начальных условий, надо записать условия на концах струны (или стержня).

Так, если задан закон движения концов ($x=0,\ x=l$)

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ \ u(l,t)=\mu_2(t),$$

то мы будем называть такие дополнительные условия *краевыми условиями 1-го типа.*

Если задан закон изменения силы, приложенной к концу струны (стержня) и действующей в направлении колебаний, то условия на концах можно написать следующим образом:

$$E\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=f_1(t),\ \ E\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=f_2(t)$$

или

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=v_1(t),\ \ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=v_2(t).$$

Это *краевые условия 2-го типа*.

Пусть к концу стержня $(x = l)$ прикреплена пружина, действующая вдоль оси *X*. Тогда сила натяжения $E\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}$ на конце стержня будет уравновешиваться силой действия пружины $\alpha u(l,t)$ (α – коэффициент жёсткости пружины). Краевое условие на этом конце стержня можно записать следующим образом:

$$E\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -\alpha u(l,t)$$

или

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + hu(l,t) = 0.$$

Если пружина, в свою очередь, движется по закону $x = \beta(t)$, то краевой режим запишется в виде

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + h\big(u(l,t) - \beta(t)\big) = 0.$$

На левом конце пружины l краевое условие запишется в виде

$$\frac{\partial u(o,t)}{\partial x} - h\big(u(o,t) - \beta(t)\big) = 0.$$

Это *краевые условия 3-го типа.*

Замечание. Краевые условия 3-го типа могут иметь «несимметричный» характер. Пружины, действующие на конце стержня, могут иметь разные коэффициенты жёсткости. В этом случае краевые условия 3-го типа будут иметь вид

$$\frac{\partial u(o,t)}{\partial x} - h_1 u(o,t) = 0\,;\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + h_2 u(l,t) = 0.$$

Для трёхмерного случая рассмотренные типы краевых условий будут иметь следующий вид:

$u\big|_s = \mu(M,t)$ (краевое условие 1-го типа),

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_s = \upsilon(M,t) \text{ (краевое условие 2-го типа),}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + hu\right)\right|_s = \beta(M,t) \text{ (краевое условие 3-го типа),}$$

где точка M принадлежит поверхности S; $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ – производная по направлению внешней нормали к поверхности S.

Такие же краевые условия получаются и для задач, в которых рассматриваются уравнения параболического типа. Так, если задаётся плотность потока тепла $-k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ через поверхность тела S, то имеем краевое условие 2-го типа. Если на поверхности тела происходит теплообмен со средой, температура которой даётся функцией $\beta(M,t)$, то получаем уравнение баланса тепла, протекающего через поверхность S вида

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_s = h\left(u - \beta(M,t)\right).$$

Это *краевое условие 3-го типа.*

Естественно, встречаются краевые условия других типов (смешанные краевые условия). Например, мы можем рассмотреть задачу распределения температуры в стержне, на левом конце $x = 0$ которого задана температура $u_1(t)$, а на правом конце $x = l$ происходит теплообмен со средой, температура которой даётся функцией $u_2(t)$. В этом случае получаем смешанные краевые условия $u(o,t) = u_1(t)$:

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + h\left(u(l,t) - u_2(t)\right) = 0.$$

Рассмотренные нами краевые условия называются *линейными*, поскольку функция u и её производные входят в эти краевые условия линейно. Краевые условия называются *однородными*, если их правые части $\mu(M,t)$, $\upsilon(M,t)$, $\beta(M,t) \equiv 0$. В противном случае, краевые условия называются *неоднородными*.

Теперь мы приведём постановку соответствующих трёх типов краевых задач для гиперболических уравнений вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathrm{div}\left(k\nabla u\right) - qu + f\left(M,t\right) \tag{2.16}$$

и параболических уравнений

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}\left(k\nabla u\right) - qu + f\left(M,t\right), \tag{2.17}$$

где k, q и ρ – функции точки $M\left(x,y,z\right)$.

Краевая задача 1-го рода. Найти функцию $u\left(M,t\right)$, удовлетворяющую в области $B = \left\{M \in D, t > 0\right)$ уравнению (2.16) или (2.17) и дополнительным условиям:

а) начальные условия

$$u\left(M,o\right) = \varphi\left(M\right);\ \frac{\partial u\left(M,o\right)}{\partial t} = \psi\left(M\right), \text{ где } M \in D$$

(соответственно, $u\left(M,o\right) = \varphi\left(M\right)$ для уравнения (2.17));

б) краевым условием на поверхности S, ограничивающей область D

$$u\left(M,t\right)\Big|_s = \mu\left(M,t\right) \text{ для } t > 0.$$

Краевая задача 2-го рода. Ищется решение $u\left(M,t\right)$ уравнения (2.16) (или (2.17)), удовлетворяющее поставленным начальным условиям и краевому условию

$$\left.\frac{\partial u\left(M,t\right)}{\partial \vec{n}}\right|_s = \upsilon\left(M,t\right) \text{ для } t > 0.$$

Краевая задача 3-го рода. Найти функцию $u\left(M,t\right)$, являющуюся решением уравнения (2.16) (соответственно, (2.17)), удовлетворяющую поставленным начальным условиям и краевому условию

$$\left.\left(\gamma_1\left(M\right)\frac{\partial u\left(M,t\right)}{\partial \vec{n}} + \gamma_2\left(M\right)u\left(M,t\right)\right)\right|_s = \beta\left(M,t\right) \text{ для } t > 0.$$

Наряду с краевыми задачами будем рассматривать и задачу, содержащую только начальные условия (задачу Коши). Мы поставим эту задачу следующим образом.

Задача Коши. Найти функцию $u(M,t)$, удовлетворяющую при $t>0$ уравнению (2.16) (соответственно, (2.17)) в любой точке M пространства $(-\infty<x,y,z<+\infty)$, а также начальным условием

$$u(M,0)=\varphi(M);\ \frac{\partial u(M,0)}{\partial t}=\psi(M)$$

(соответственно, $u(M,0)=\varphi(M)$).

Для уравнений эллиптического типа краевые задачи ставятся следующим образом: найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую в области D уравнению

$$\operatorname{div}(k\nabla u)-q(M)u=-f(M),$$

а на границе S в области D одному из краевых условий

$$u(M)\big|_s=\mu(M)\ \text{(1-я краевая задача)}$$

$$\left.\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}}\right|_s=\upsilon(M)\ \text{(2-я краевая задача)},$$

$$\left.\left(\gamma_1(M)\frac{\partial u(M)}{\partial \vec{n}}+\gamma_2(M)u(M)\right)\right|_s=\beta(M)\ \text{(3-я краевая задача)}.$$

Замечание. Замкнутая поверхность S ограничивает две области: внутреннюю D и внешнюю D_1. Поэтому при постановке краевых задач всегда определяют для какой из двух областей (по координатам) требуется найти решение. В соответствии с этим различают внутренние и внешние краевые задачи. Это различие существенно прежде всего для уравнений эллиптического типа.

2.7 Оператор Лапласа в цилиндрических и сферических координатах

В дальнейшем изложении мы будем рассматривать трехмерные волновые уравнения или уравнения теплопроводности не только в декартовых, но также в цилиндрических и сферических координатах. Как следствие, нам потребуется выражение для оператора Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

в цилиндрических и сферических координатах (здесь (x, y, z) – функция, которая имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно).

Получим выражение для оператора Лапласа в цилиндрических координатах (ρ, φ, z), где

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{2.18}$$

Из формул (2.18) получаем

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{2.19}$$

Находим частные производные первого порядка. Из равенств (2.19) получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos\varphi, \ \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-yx^{-2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\varphi}{\rho},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

Используя полученные равенства, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

Введем оператор $Du=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}$. Применяя формулы Эйлера $\cos\varphi\pm i\sin\varphi=e^{\pm i\varphi}$, будем иметь

$$Du=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)+\frac{1}{\rho}\left(i\cos\varphi-\sin\varphi\right)\frac{\partial u}{\partial \varphi}=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{i}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)e^{i\varphi},$$

для сопряженного оператора

$$\overline{Du}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\left(\cos\varphi-i\sin\varphi\right)-\frac{1}{\rho}\left(i\cos\varphi+\sin\varphi\right)\frac{\partial u}{\partial \varphi}=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}-\frac{i}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)e^{-i\varphi}.$$

Рассмотрим действие оператора

$$\overline{D}Du=\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-i\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

С другой стороны, в цилиндрических координатах

$$\overline{D}Du=e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}-\frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{i}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)e^{i\varphi}=$$

$$=e^{-i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{i}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)e^{i\varphi}-\frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(e^{i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{i}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right)\right]=$$

$$=e^{-i\varphi}\left[e^{i\varphi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{i}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \varphi}-\frac{i}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)-\frac{i}{\rho}e^{i\varphi}\left(i\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{i}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \varphi}+\frac{i}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{i}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \varphi}-\frac{i}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{i}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}-\frac{i}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \varphi}+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Сравнивая два полученных равенства для оператора $\overline{D}Du,$ находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Как следствие, для оператора Лапласа в цилиндрических координатах получаем выражение

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \qquad (2.20)$$

Найдем теперь выражение для оператора Лапласа в сферических координатах (r,θ,φ), где

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\theta. \end{cases} \qquad (2.21)$$

Введем величину $\rho=r\sin\theta.$ Переход от декартовых координат (x,y,z) к сферическим координатам (r,θ,φ) осуществим с помощью двух последовательных преобразований

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases} + \begin{cases} \rho=r\sin\theta, \\ z=r\cos\theta. \end{cases} \qquad (2.22)$$

Величины (ρ,φ,z) (первые слагаемые в формуле (2.22)) являются цилиндрическими координатами точки $M(x,y,z),$ поэтому на основании формулы (2.21) можно рассматривать как полярные координаты на плоскости $(z,\rho).$ Как следствие, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Подставляя это выражение для суммы $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$ в предыдущее равенство, получаем для оператора Лапласа

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \qquad (2.23)$$

Из формул (2.22) получаем $z=\sqrt{\rho^2+z^2}$, $\theta=\operatorname{arctg}\frac{\rho}{z}$.

Тогда

$$\frac{\partial r}{\partial \rho}=\frac{\rho}{r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}=\cos\theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \rho}=\frac{z}{z^2+\rho^2}=\frac{\cos\theta}{r},\quad \frac{\partial \theta}{\partial z}=-\frac{\rho}{z^2+\rho^2}=-\frac{\sin\theta}{r}.$$

Находим производную $\frac{\partial u}{\partial r}$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \rho}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

и, как следствие,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.23), после несложных вычислений приходим к равенству

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Полученное равенство преобразуем, используя очевидные соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

Окончательно получаем следующее выражение для оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \qquad (2.24)$$

3 ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

3.1 Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения

Рассмотрим свободные колебания бесконечной струны ($-\infty < x < \infty$), то есть фактически достаточно длинной струны, влиянием концов которой на процесс колебаний можно пренебречь.

Причинами, вызывающими такие колебания, могут являться начальные отклонения струны от равновесного положения или сообщенный струне начальный импульс, обуславливающий некоторое распределение скоростей частиц струны. Поэтому, описывая свободные колебания бесконечной струны, мы будем решать одномерное волновое уравнение (уравнение 2.4 при $F(x,t) \equiv 0$) при поставленных начальных условиях, то есть решать *задачу Коши* следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; -\infty < x < \infty, t > 0, \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x); \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{3.2}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на всей числовой оси.

Одномерную задачу Коши решим методом характеристик. Записав уравнение (3.1) в виде

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

находим соответствующее характеристическое уравнение

$$(adt)^2 - (dx)^2 = d(at - x)d(at + x) = 0,$$

решения которого дают новые независимые переменные

$$\xi = x - at; \eta = x + at.$$

Используя эти равенства, переходим в частных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ к новым переменным ξ и $\eta,$ находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставив полученные соотношения в уравнение (3.1), приводим его к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Решение этого уравнения дается формулой (1.21)

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + F(\eta),$$

где $f(\xi)$ и $F(\eta)$ – произвольные функции переменных ξ и η соответственно. Возвращаясь к переменным x и $t,$ находим общее решение уравнения (3.1):

$$u(x, t) = f(x - at) + F(x + at). \tag{3.3}$$

Далее используем начальные условия (3.2). Тогда при $t = 0$ из равенства (3.3) получаем

$$u(x, 0) = f(x) + F(x) = \varphi(x).$$

Соответственно, для производной $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ находим

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \left(f'(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial t} + F'(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)\Big|_{t=0} =$$

$$= a\big(F'(x + at) - f'(x - at)\big)\Big|_{t=0} = a(F'(x) - f'(x)) = \varphi(x).$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} f(x)+F(x)=\varphi(x); \\ F'(x)-f'(x)=\dfrac{1}{a}\psi(x), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x)+F(x)=\varphi(x); \\ F(x)-f(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \psi(z)dz. \end{cases} \tag{3.4}$$

Из системы (3.4) находим функции

$$f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz;\ F(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz,$$

которые подставляем в равенство (3.3), получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(z)dz+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(z)dz=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz.$$

Итак, решение поставленной задачи Коши (3.1), (3.2) дается следующей формулой:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \tag{3.5}$$

При этом полагаем, что функция $\varphi(x)$ имеет производные до 2-го порядка включительно, а функция $\psi(x)$ – до 1-го порядка. Соотношение (3.5) называют *формулой д'Аламбера*.

3.2 Задача Коши для трехмерного волнового уравнения

Рассмотрим трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{3.6}$$

и будем искать решение уравнения (3.6), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z);\ \frac{\partial u(x,y,z,0)}{\partial t}=\psi(x,y,z). \tag{3.7}$$

Будем полагать, что функция $\varphi(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими производными до 3-го порядка включительно, а $\psi(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими производными до 2-го порядка включительно во всем пространстве $-\infty < x, y, z < +\infty$.

Рассмотрим интеграл

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a} \iint\limits_{S_{at}} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r, \tag{3.8}$$

взятый по поверхности сферы S_{at} радиуса $r = at$ с центром в точке $M(x, y, z)$. Покажем, что интеграл (3.8) является решением волнового уравнения (3.6), при этом $f(\xi, \eta, \zeta) -$ произвольная функция.

Координаты точек сферы S_{at} в сферической системе координат (формулы (2.20)) задаются равенствами

$$\xi = x + \alpha at, \eta = y + \beta at, \zeta = z + \gamma at,$$

где $\alpha = \sin\theta\cos\varphi; \beta = \sin\theta\sin\varphi; \gamma = \cos\theta -$ направляющие косинусы вектора единичной нормали $\vec{n}^0$ к поверхности сферы, то есть $\vec{n}^0 = (\alpha, \beta, \gamma)$. При этом угол $\theta \in [0; \pi]$, и угол $\varphi \in [0; 2\pi]$. Когда точка (ξ, η, ζ) описывает сферу S_{at}, точка (α, β, γ) описывает сферу S единичного радиуса с центром в начале координат, а элементы площади обеих сфер связаны соотношением

$$d\sigma_r = r^2 d\sigma = (at)^2 d\sigma = (at)^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

При переходе к сферическим координатам интеграл (3.8) приводится к виду

$$u(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S} f(x + \alpha at, y + \beta at, z + \gamma at) d\sigma. \tag{3.9}$$

Так как

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{df}{d\xi}; \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \text{ и т.д.,}$$

то из формулы (3.9) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right)d\sigma,$$

или, возвращаясь к интегрированию по сфере S_{at},

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{t}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right)d\sigma_\tau. \quad (3.10)$$

Далее дифференцируем соотношение (3.9) по переменной t (в процессе вычислений переходим от интегрирования по сфере S к интегрированию по сфере S_{at} и используем формулу Гаусса – Остроградского), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} f(\xi,\eta,\zeta)d\sigma+\frac{at}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\alpha+\frac{\partial f}{\partial \eta}\beta+\frac{\partial f}{\partial \zeta}\gamma\right)d\sigma=$$

$$=\frac{u}{t}+\frac{t}{4\pi at}\iint\limits_{S_{at}}\left(\nabla f,\vec{n}^{\,0}\right)d\sigma_\tau=\frac{u}{t}+\frac{t}{4\pi at}\iiint\limits_{D_{at}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta,$$

где D_{at} – шар радиуса $r=at$ с центром в точке $M(x,y,z)$.

Введем величину

$$\mathrm{I}=\iiint\limits_{D_{at}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right)d\xi d\eta d\zeta$$

и окончательно получаем следующее соотношение:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{\mathrm{I}}{4\pi at}.$$

Дифференцируя это выражение по переменной t, находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\mathrm{I}}{4\pi at^2}+\frac{1}{4\pi at}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t}=$$

$$=-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{u}{t}+\frac{\mathrm{I}}{4\pi at}\right)-\frac{\mathrm{I}}{4\pi at^2}+\frac{1}{4\pi at}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t}=\frac{1}{4\pi at}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t}.$$

Таким образом, нами получено следующее соотношение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi a t}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t}. \qquad (3.11)$$

В интеграле для I от переменных ξ, η, ζ перейдем к сферическим координатам ρ, θ, φ $(\rho \in [0;\, at])$, имеем

$$\mathrm{I} = \int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right)\rho^2 d\rho \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^{at}\rho^2 d\rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t} = a(at)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right)_{\rho = at} \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= a\iint_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right) d\sigma_\tau. \qquad (3.12)$$

Сравнивая равенства (3.10)−(3.12), мы видим, что функция $u(x, y, z, t)$, определяемая равенством (3.8), является решением волнового уравнения (3.6) при любом выборе функции $f(\xi, \eta, \zeta)$, имеющей непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно. Как видно из формулы (3.9), функция $u(x, y, z, t)$ удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$u(x, y, z, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{f(x, y, z)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\varphi = f(x, y, z).$$

Таким образом, функция $u(x, y, z, t)$, являющаяся решением уравнения (3.6), удовлетворяет начальным условиям

$$u(x, y, z, 0) = 0, \; \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = f(x, y, z). \qquad (3.13)$$

Если $u(x, y, z, t)$ есть решение волнового уравнения (3.6) с начальными условиями (3.13), то функция

$$v(x, y, z, t) = \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}$$

будет решением уравнения (3.6), удовлетворяющим начальным условиям

$$v(x, y, z, 0) = f(x, y, z); \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = 0. \qquad (3.14)$$

Взяв теперь в случае начальных условий (3.13) за $f(x, y, z)$ функцию $\psi(x, y, z)$, а в случае начальных условий (3.14) за $f(x, y, z)$ функцию $\varphi(x, y, z)$, и суммировав эти два решения, получим решение уравнения (3.6), удовлетворяющее начальным условиям (3.7).

Таким образом, решение волнового уравнения (3.6) с начальными условиями (3.7) запишется в виде:

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}}\frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{r}d\sigma_r + \frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}}\frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{r}d\sigma_r. \qquad (3.15)$$

Переходя в формуле (3.15) к интегрированию по сфере S единичного радиуса, окончательно представим решение задачи Коши для однородного волнового уравнения в следующем виде

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x + at\sin\theta\cos\varphi,\ y + at\sin\theta\sin\varphi,\right.$$

$$\left. z + at\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi\right) + \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(x + at\sin\theta\cos\varphi,\ y + at\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z + at\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi. \qquad (3.16)$$

Формулу (3.15) (или (3.16)) называют *формулой Пуассона*.

3.3 Задача Коши для неоднородного волнового уравнения

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g(x, y, z, t) \qquad (3.17)$$

и будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$u(x, y, z, 0) = 0; \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = 0. \qquad (3.18)$$

Для решения этой задачи введем в рассмотрение функцию $v(x, y, z, t; \tau)$ (τ – некоторый параметр), которая является решением однородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \qquad (3.19)$$

удовлетворяющим начальным условиям вида

$$v\big|_{t=\tau} = 0, \frac{\partial v}{\partial \tau}\big|_{t=\tau} = g(x, y, z, t), \qquad (3.20)$$

то есть за начальный момент времени взято не $t = 0,$ а момент времени $t = \tau.$ Решение задачи Коши (3.19), (3.20) дается формулой Пуассона (3.16), в которой t надо заменить на $t - \tau,$ так как начальным моментом времени является не $t = 0,$ а момент времени $t = \tau.$

Таким образом, будем иметь

$$v(x, y, z, t; \tau) = \frac{t-\tau}{4\pi}\iint_S (g(x + a\alpha(t-\tau), y + a\beta(t-\tau), z + a\gamma(t-\tau))d\sigma.$$

Покажем далее, что функция $u(x, y, z, t),$ определенная формулой

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t v(x, y, z, t; \tau)d\tau, \qquad (3.21)$$

является решением неоднородного волнового уравнения (3.17) с нулевыми начальными условиями (3.18). Действительно, действуя оператором Лапласа на обе части равенства, из формулы (3.21) получаем

$$\Delta u = \int_0^t \Delta v(x, y, z, t; \tau)d\tau. \qquad (3.22)$$

Далее дифференцируем выражение (3.21) по $t,$ получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial v(x, y, z, t; \tau)}{\partial t} d\tau + v(x, y, z, t; \tau)\big|_{t=\tau}. \qquad (3.23)$$

Внеинтегральное слагаемое зануляется с учетом начальных условий (3.20). Дифференцируя еще раз по переменной t равенство (3.23), с учетом уравнения (3.22) и начальных условий (3.20) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v(x, y, z, t; \tau)}{\partial t} d\tau + g(x, y, z, t) =$$

$$= a^2 \int_0^t \Delta v d\tau + g(x, y, z, t) = a^2 \Delta u + g(x, y, z, t).$$

Таким образом, функция $u(x, y, z, t)$, определяемая уравнением (3.21), является решением неоднородного уравнения (3.17). Начальные условия (3.18) также выполнены. Из равенства (3.21) следует $u\big|_{t=0} = 0,$ а из равенства (3.23) получаем $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0.$

Подставив в равенство (3.21) выражение для функции $v(x, y, z, t; \tau),$ находим решение неоднородного волнового уравнения

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t-\tau) d\tau \iint_S g(x + a\alpha(t-\tau), y + a\beta(t-\tau), z +$$
$$+ a\gamma(t-\tau), \tau) d\sigma$$

или

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t-\tau) d\tau \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(x + a(t-\tau)\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y + a(t-\tau)\sin\theta\sin\varphi, z + a(t-\tau)\cos\theta, \tau)\sin\theta d\theta d\varphi. \qquad (3.24)$$

Очевидно, что решение неоднородного волнового уравнения (3.17) с начальными условиями

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z); \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = \psi(x, y, z)$$

будет суммой двух функций, то есть

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z, t) + \bar{u}(x, y, z, t),$$

где функция $u_0(x, y, z, t)$ дается равенством (3.16), а функция $\bar{u}(x, y, z, t)$ определяется равенством (3.24).

Преобразуем решение неоднородного волнового уравнения к другому виду. Введем вместо τ новую переменную интегрирования $\tau = a(t-\tau)$. Переходя в формуле (3.24) к интегрированию по сфере S_{at}, получаем

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a}\int_0^t d\tau \iint_{S_{at}} \frac{g(x+\alpha r, y+\beta r, z+\gamma r, \tau)}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (3.25)$$

Перейдем в интеграле (3.25) к декартовым координатам

$$\xi = x + \alpha r, \eta = y + \beta r, \zeta = z + \gamma r.$$

Так как $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, то для r получаем

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

С учетом того, что $\tau = t - \frac{r}{a}; d\tau = -\frac{dr}{a}$, интеграл (3.25) окончательно представим в следующем виде:

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{D_{at}} \frac{g(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (3.26)$$

где D_{at} – шар радиуса at с центром в точке $M(x, y, z)$.

Решение неоднородного волнового уравнения в виде (3.26) называется *запаздывающим потенциалом*, так как при выполнении интегрирования функция g берется не в рассматриваемый момент времени t, а в момент времени $t - \frac{r}{a}$, предшествующий t на промежуток времени, который требуется, чтобы процесс, распространяющийся со скоростью a, прошел путь от точки (ξ, η, ζ) до точки (x, y, z). В литературе по физике и электродинамике решение неоднородного волнового уравнения в виде интеграла (3.26) называют обычно *формулой Кирхгофа.*

3.4 Задача Коши для двумерного волнового уравнения. Метод спуска

Решение двумерного волнового уравнения мы получим из формулы (3.15), используя так называемый метод спуска, то есть исходя из решения волнового уравнения большей размерности.

Рассмотрим частный случай, когда функции φ и ψ в начальных условиях (3.7) зависят только от переменных x и y, то есть на всякой прямой, параллельной оси Oz, функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ сохраняют постоянное значение. В этом случае правая часть формулы Пуассона (3.15) не будет зависеть от координаты z, то есть функция u не зависит от координаты z. Как следствие, формула (3.15) дает решения двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{3.27}$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y); \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y). \tag{3.28}$$

Рассмотрим сферу S_{at} радиуса at с центром в точке $M(x, y, 0)$. Уравнение сферы имеет вид

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2 = (at)^2,$$

или (рассматриваем верхнюю половину сферы, $\eta > 0$)

$$\zeta = \sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}. \tag{3.29}$$

Проекцией этой сферы на плоскость $O\xi\eta$ будет круг C_{at} радиуса at с центром в точке (x, y), ограниченный окружностью

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = (at)^2.$$

Преобразуем интегралы в формуле (3.15) от интегрирования по сфере S_{at} к интегрированию по кругу C_{at}.

Из равенства (3.29) получаем

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = -\frac{\xi - x}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} = -\frac{\eta - y}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$

Используя эти соотношения для производных, находим элементарную площадь на сфере S_{at} :

$$d\sigma_r = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2}\, d\xi d\eta =$$

$$= \frac{atd\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} = \frac{atd\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}},$$

где мы ввели величину

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2.$$

Переходим к полярным координатам

$$\xi - x = \rho\cos\varphi;\ \eta - y = \rho\sin\varphi$$

и для 1-го интеграла в формуле Пуассона (3.15) получаем (при вычислении интеграл удваиваем, учитывая вклад в интеграл от нижней половины сферы S_{at})

$$\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{at} d\sigma_r = \frac{2}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{C_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{C_{at}} \frac{\varphi(x + \rho\cos\varphi,\ y + \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}}.$$

Совершенно аналогичным образом преобразуем и второй интеграл в формуле (3.15).

Таким образом, решение двумерного волнового уравнения (3.27) с начальными условиями (3.28) будет иметь вид

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{C_{at}} \frac{\varphi(x + \rho\cos\varphi,\ y + \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}}\frac{\psi(x+\rho\cos\varphi,\, y+\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}$$

или

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{at}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+\rho\cos\varphi,\, y+\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^{at}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\psi(x+\rho\cos\varphi,\, y+\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}. \qquad (3.30)$$

Формулу (3.30) также будем называть *формулой Пуассона для двумерного волнового уравнения.*

Совершенно аналогично, как и выше, мы можем получить решение неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+g(x,y,t) \qquad (3.31)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,y,0)=0;\ \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0.$$

Для этого рассмотрим однородное волновое уравнение для функции $v(x,y,t;\tau)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (3.32)$$

с начальными условиями

$$v(x,y,t;\tau)\Big|_{t=\tau}=0;\ \frac{\partial v(x,y,t;\tau)}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=g(x,y,\tau).$$

Решение уравнения (3.32) дается формулой (начальный момент времени смещаем из точки $t=0$ в точку $t=\tau$)

$$v(x,y,t;\tau)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{a(t-\tau)}}\frac{g(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}=$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{C_{a(t-\tau)}} \frac{g(x+\rho\cos\varphi,\, y+\rho\sin\varphi,\, \tau)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}.$$

Тогда решение уравнения (3.31) находим по формуле (3.21)

$$u(x, y, t) = \int_0^t v(x, y, t; \tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \iint\limits_{C_{a(t-\tau)}} \frac{g(x+\rho\cos\varphi,\, y+\rho\sin\varphi,\, \tau)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}.$$

Таким образом, решение неоднородного уравнения (3.31) с нулевыми начальными условиями окончательно запишем в следующем виде:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_0^{a(t-\tau)} \int_0^{2\pi} \frac{g(x+\rho\cos\varphi,\, y+\rho\sin\varphi,\, \tau)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}. \quad (3.33)$$

Решение неоднородного волнового уравнения (3.31) с ненулевыми начальными условиями (3.28) будет суммой двух функций, определяемых соотношениями (3.30) и (3.33).

Очевидно, что метод спуска мы можем использовать для решения одномерного волнового уравнения, получив его из решения двумерного волнового уравнения.

Решение задачи Коши для одномерного неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t) \quad (3.34)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x); \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (3.35)$$

найдем как решение задачи Коши для двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g(x, t), \quad (3.36)$$

когда начальные условия являются функциями только переменной x, то есть имеют вид

$$u(x,y,0)=\varphi(x);\ \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\psi(x).$$

Решение двумерного волнового уравнения (3.36) запишем в декартовых координатах ξ и η (то есть в формуле (3.30) перейдем обратно от полярных координат ρ и φ к координатам ξ и η)

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}}\frac{\varphi(\xi)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}}\frac{\psi(\xi)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_{C_{a(t-\tau)}}\frac{g(\xi,\tau)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}. \qquad (3.37)$$

Вычисляем последовательно интегралы в каждом трех слагаемых. Введем переменные интегрирования $\xi_1=\xi-x, \eta_1=\eta-y.$ Тогда уравнение окружности, ограничивающей круг C_{at}, примет вид

$$\xi_1^{\,2}+\eta_1^{\,2}=(at)^2.$$

Из этого уравнения находим пределы интегрирования

$$-\sqrt{(at)^2-\xi_1^{\,2}}\le\eta_1\le\sqrt{(at)^2-\xi_1^{\,2}};\ -at\le\xi_1\le at.$$

Далее вычисляем интеграл в 1-м слагаемом

$$\iint\limits_{C_{at}}\frac{\varphi(\xi)d\xi_1 d\eta_1}{\sqrt{(at)^2-\xi_1^{\,2}-\eta_1^{\,2}}}=\int\limits_{-at}^{at}\varphi(\xi_1+x)d\xi_1\int\limits_{-\sqrt{(at)^2-\xi_1^2}}^{\sqrt{(at)^2-\xi_1^2}}\frac{d\eta_1}{\sqrt{(at)^2-\xi_1^{\,2}-\eta_1^{\,2}}}=$$

$$=\int\limits_{-at}^{at}\varphi(\xi_1+x)\arcsin\frac{\eta_1}{\sqrt{(at)^2-\xi_1^{\,2}}}\Bigg|_{-\sqrt{(at)^2-\xi_1^2}}^{\sqrt{(at)^2-\xi_1^2}}d\xi_1=$$

$$=2\arcsin 1\int\limits_{-at}^{at}\varphi(\xi_1+x)d\xi_1=\pi\int\limits_{-at}^{at}\varphi(\xi_1+x)d\xi_1.$$

Как следствие, для первого слагаемого в формуле (3.37), используя полученный интеграл, приходим к следующему равенству:

$$\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi\int\limits_{-at}^{at}\varphi(\xi_1+x)d\xi_1\right)=\frac{1}{2a}(a\varphi(x+at)-(-a)\varphi(x-at))=$$

$$=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)). \qquad (3.38)$$

Аналогичным образом вычисляем в формуле (3.37) 2-е слагаемое, получаем

$$\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}}\frac{\psi(\xi)d\xi_1 d\eta_1}{\sqrt{(at)^2-\xi_1{}^2-\eta_1{}^2}}=\frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at}\psi(\xi_1+x)d\xi_1=(\text{введем}$$

$$\text{переменную интегрирования } z=\xi_1+x)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \qquad (3.39)$$

Далее находим 3-е слагаемое в формуле (3.37) (меняем t на $t-\tau$), получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_{C_{a(t-\tau)}}\frac{g(\xi,\tau)d\xi_1 d\eta_1}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\xi_1{}^2-\eta_1{}^2}}=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}g(z,\tau)dz. \qquad (3.40)$$

Суммируя все три полученные соотношения (3.38)−(3.40), находим решение задачи Коши (3.34), (3.35) для одномерного волнового уравнения

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}g(z,\tau)dz. \qquad (3.41)$$

Очевидно, что первые два слагаемые в формуле (3.41) совпадают с решением задачи Коши для однородного волнового уравнения (формула (3.5)), которое мы получили методом характеристик. Формула (3.41), дающая решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения, называется *формулой д'Аламбера*.

Пример 3.1. Решить задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xt,$$

$$u(x,0)=\varphi(x)=x^2;\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)=x.$$

Решение. Решение задачи Коши представим в виде суммы двух слагаемых

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \bar{u}(x,t), \tag{3.42}$$

где слагаемое $u_0(x,t)$ определяется функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящими в начальные условия, а слагаемое $\bar{u}(x,t)$ определяется неоднородным характером волнового уравнения (3-е слагаемое в формуле (3.41)).

Находим функцию

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+2t) + \varphi(x-2t)) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \psi(z)dz =$$

$$= \frac{1}{2}((x+2t)^2 + (x-2t)^2) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} zdz =$$

$$= \frac{1}{2}(2x^2 + 8t^2) + \frac{1}{8}((x+2t)^2 + (x-2t)^2) = x^2 + 4t^2 + xt.$$

Так как для данного уравнения функция $g(x,t) = xt,$ то для 2-го слагаемого в равенстве (3.42) получаем

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t \tau d\tau \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} zdz = \frac{1}{8}\int_0^t \tau((x+2(t-\tau))^2 - (x-2(t-\tau))^2)d\tau =$$

$$= x\int_0^t \tau(t-\tau)d\tau = x\left(t\int_0^t \tau d\tau - \int_0^t \tau^2 d\tau\right) = \frac{1}{6}xt^3.$$

Подставляем найденные функции $u_0(x,t)$ и $\bar{u}(x,t)$ в равенство (3.42) и находим решение поставленной задачи Коши:

$$u(x,t) = x^2 + 4t^2 + xt + \frac{1}{6}xt^3 = x^2 + 4t^2 + xt\left(1 + \frac{1}{6}t^2\right).$$

Пример 3.2. Найти решение задачи Коши для двумерного волнового уравнения.

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

начальные условия

$$u(x,y,0)=2x^2-y^2;\ \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=2x^2+y^2.$$

Решение. По формуле (3.30) находим решение задачи Коши с данными начальными условиями. В данном случае функция $\varphi(x,y)=2x^2-y^2$, поэтому получаем

$$\varphi(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)=2(x+\rho\cos\varphi)^2-(y+\rho\sin\varphi)^2=$$
$$=2(x^2+2x\rho\cos\varphi+\rho^2\cos^2\varphi)-(y^2+2y\rho\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)=$$
$$=2x^2-y^2+2\rho(2x\cos\varphi-y\sin\varphi)+\rho^2(2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=$$
$$=2x^2-y^2+2\rho(2x\cos\varphi-y\sin\varphi)+\frac{1}{2}\rho^2(1+3\cos2\varphi).$$

Вычисляем двойной интеграл в 1-м слагаемом формулы (3.30):

$$\int_0^{\sqrt{2}t}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}=(2x^2-y^2)\int_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}\int_0^{2\pi}d\varphi+$$
$$+2\int_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}\int_0^{2\pi}(2x\cos\varphi-y\sin\varphi)d\varphi+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}\int_0^{2\pi}(1+3\cos2\varphi)d\varphi=$$
$$=2\pi(2x^2-y^2)\int_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}+\pi\int_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}$$

(2-е слагаемое зануляется при интегрировании по углу φ).
Далее вычисляем интегралы по переменной ρ, получаем

$$\int_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}=-\int_0^{\sqrt{2}t}\frac{d(2t^2-\rho^2)}{2\sqrt{2t^2-\rho^2}}=\sqrt{2t^2-\rho^2}\Big|_{\sqrt{2}t}^{0}=\sqrt{2}t,$$
$$\int_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}=\int_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho^2 d\rho^2}{2\sqrt{2t^2-\rho^2}}=-\int_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho^2 d(2t^2-\rho^2)}{2\sqrt{2t^2-\rho^2}}=$$
$$=\int_0^{\sqrt{2}t}\frac{(2t^2-\rho^2)-2t^2}{2\sqrt{2t^2-\rho^2}}d(2t^2-\rho^2)=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}t}\sqrt{2t^2-\rho^2}\,d(2t^2-\rho^2)-$$

$$-2t^2\int\limits_0^{\sqrt{2}t}\frac{d(2t^2-\rho^2)}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{(2t^2-\rho^2)^3}\,\Big|_0^{\sqrt{2}t}+2t^2\sqrt{2t^2-\rho^2}\,\Big|_{\sqrt{2}t}^{0}=\frac{4\sqrt{2}}{3}t^3.$$

Таким образом, для интеграла в 1-м слагаемом окончательно получаем

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}t}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+\rho\cos\varphi,\,y+\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}=2\sqrt{2}\pi t(2x^2-y^2)+$$

$$+\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi t^3=2\pi\sqrt{2}(t(2x^2-y^2)+\frac{2}{3}t^3). \qquad (3.43)$$

Аналогичным образом вычисляем интеграл 2-го слагаемого формулы (3.30). Так как $\psi(x,y)=2x^2+y^2$, то находим

$$\psi(x+\rho\cos\varphi,\,y+\rho\sin\varphi)=2(x+\rho\cos\varphi)^2+(y+\rho\sin\varphi)^2=$$

$$=2x^2+y^2+2\rho(2x\cos\varphi+y\sin\varphi)+\rho^2(2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=$$

$$=2x^2+y^2+2\rho(2x\cos\varphi+y\sin\varphi)+\frac{1}{2}\rho^2(3+\cos 2\varphi).$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}t}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\psi(x+\rho\cos\varphi,\,y+\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}=(2x^2+y^2)\int\limits_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi+$$

$$+2\int\limits_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}\int\limits_0^{2\pi}(2x\cos\varphi+y\sin\varphi)d\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}t}\frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{2t^2-\rho^2}}\int\limits_0^{2\pi}(3+\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=2\sqrt{2}\pi t(2x^2+y^2)+4\sqrt{2}\pi t^3=2\pi\sqrt{2}(t(2x^2+y^2)+2t^3). \qquad (3.44)$$

Используя найденные величины интегралов (3.43), (3.44), находим решение поставленной задачи Коши:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left(2\pi\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial t}(t(2x^2-y^2)+\frac{2}{3}t^3\right)+2\pi\sqrt{2}(t(2x^2+y^2)+$$

$$+2t^3))=2x^2-y^2+2t^2+t(2x^2+y^2)+2t^3=2x^2-y^2+$$

$$+t(2x^2+y^2)+2t^2(1+t).$$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + x^3 + y^3,$

$u(x, y, 0) = \dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0.$

Решение. Начальные условия нулевые, поэтому решение будет содержать только одно слагаемое (формула (3.33)). Вычисляем внутренний интеграл для функции $g(x, y, t) = x^3 + y^3$, находим

$$g(x + \rho\cos\varphi, y + \rho\sin\varphi) = (x + \rho\cos\varphi)^3 + (y + \rho\sin\varphi)^3 =$$
$$= x^3 + 3x^2\rho\cos\varphi + 3x\rho^2\cos^2\varphi + \rho^3\cos^3\varphi + y^3 + 3y^2\rho\sin\varphi +$$
$$+ 3y\rho^2\sin^2\varphi + \rho^3\sin^3\varphi = x^3 + y^3 + 3\rho(x^2\cos\varphi + y^2\sin\varphi) +$$
$$+ 3\rho^2(x\cos^2\varphi + y\sin^2\varphi) + \rho^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Поэтому для внутреннего интеграла получаем

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}(t-\tau)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{g(x + \rho\cos\varphi, y + \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{3(t-\tau)^2 - \rho^2}} =$$
$$= (x^3 + y^3) \int\limits_0^{\sqrt{3}(t-\tau)} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{3(t-\tau)^2 - \rho^2}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi +$$
$$+3 \int\limits_0^{\sqrt{3}(t-\tau)} \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{3(t-\tau)^2 - \rho^2}} \int\limits_0^{2\pi} (x^2\cos\varphi + y^2\sin\varphi) d\varphi +$$
$$+3 \int\limits_0^{\sqrt{3}(t-\tau)} \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{3(t-\tau)^2 - \rho^2}} \int\limits_0^{2\pi} (x\cos^2\varphi + y\sin^2\varphi) d\varphi +$$
$$+ \int\limits_0^{\sqrt{3}(t-\tau)} \frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{3(t-\tau)^2 - \rho^2}} \int\limits_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) d\varphi.$$

Интегрирование по углу φ зануляет 2-е и 4-е слагаемые. Во втором слагаемом интегралы элементарные, в 4-м слагаемом получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \cos^3\varphi d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \sin^3\varphi d\varphi =$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi+\int_{2\pi}^{0}(1-\cos^2\varphi)d\cos\varphi=$$

$$=(\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi)\Big|_0^{2\pi}+(\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi)\Big|_{2\pi}^{0}=0.$$

В третьем слагаемом интегрируем по переменной φ, используя формулы понижения степени

$$\int_0^{2\pi}(x\cos^2\varphi+y\sin^2\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x(1+\cos 2\varphi)+y(1-\cos 2\varphi))d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}(x+y)\int_0^{2\pi}d\varphi+\frac{1}{2}(x-y)\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi d\varphi=\pi(x+y).$$

Окончательно получаем

$$\int_0^{\sqrt{3}(t-\tau)}\int_0^{2\pi}\frac{g(x+\rho\cos\varphi,\, y+\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{3(t-\tau)^2-\rho^2}}=$$

$$=2\pi(x^3+y^3)\int_0^{\sqrt{3}(t-\tau)}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{3(t-\tau)^2-\rho^2}}+$$

$$+3\pi(x+y)\int_0^{\sqrt{3}(t-\tau)}\frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{3(t-\tau)^2-\rho^2}}=$$

$$=2\pi\sqrt{3}(x^3+y^3)(t-\tau)+6\pi\sqrt{3}(x+y)(t-\tau)^3=$$

$$=2\pi\sqrt{3}((x^3+y^3)(t-\tau)+3(x+y)(t-\tau)^3). \qquad (3.45)$$

Далее возвращаемся к формуле (3.33) и находим решение поставленной задачи Коши, используя полученный нами интеграл (3.45)

$$u(x,y,t)=(x^3+y^3)\int_0^t(t-\tau)d\tau+3(x+y)\int_0^t(t-\tau)^3d\tau=$$

$$=-(x^3+y^3)\int_0^t(t-\tau)d(t-\tau)-3(x+y)\int_0^t(t-\tau)^3d(t-\tau)=$$

$$=-\frac{1}{2}(x^3+y^3)(t-\tau)^2\Big|_0^t-\frac{3}{4}(x+y)(t-\tau)^4\Big|_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}t^2(x^3+y^3)+\frac{3}{4}t^4(x+y).$$

Пример 3.3. Найти решение задачи Коши для трехмерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+x^2t^2$$

с начальными условиями

$$u(x,y,z,0)=y^2;\ \frac{\partial u(x,y,z,0)}{\partial t}=z^2.$$

Решение. Для удобства вычислений решение задачи Коши представим в виде суммы двух слагаемых

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,z,t)+\bar{u}(x,y,z,t).$$

Первое слагаемое $u_0(x,y,z,t)$ определяется функциями начального условия $\varphi(x,y,z,t)=y^2$ и $\psi(x,y,z,t)=z^2$. Вычисляем функцию $u_0(x,y,z,t)$ по формуле Пуассона (3.16). Находим подынтегральные функции

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\eta^2=(y+at\sin\theta\sin\varphi)^2=y^2+2aty\sin\theta\sin\varphi+$$
$$+(at)^2\sin^2\theta\sin^2\varphi,$$
$$\psi(\xi,\eta,\zeta)=\zeta^2=(z+at\cos\theta)^2=z^2+2atz\cos\theta+(at)^2\cos^2\theta.$$

Далее вычисляем интегралы

$$t\iint_{S_{at}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\sin\theta d\theta d\varphi=t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(y^2+2aty\sin\theta\sin\varphi+(at)^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\times$$
$$\times\sin\theta d\theta d\varphi=t(y^2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi+2aty\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi+$$
$$+(at)^2\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi)=t(4\pi y^2+\frac{4}{3}\pi(at)^2)=4\pi(y^2t+\frac{1}{3}a^2t^3),$$

$$t\iint_{S_{at}}\psi(\xi,\eta,\zeta)\sin\theta d\theta d\varphi=t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(z^2+2atz\cos\theta+(at)^2\cos^2\theta)\sin\theta d\theta d\varphi=$$

$$=t(z^2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi+2atz\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi+$$

$$+(at)^2\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi)=t(4\pi z^2+2\pi(at)^2\int_{\pi}^{0}\cos^2\theta\, d\cos\theta)=$$

$$=t(4\pi z^2+\frac{4}{3}\pi(at)^2)=4\pi t(z^2+\frac{1}{3}(at)^2).$$

Подставив полученные интегралы в формулу (3.16), находим первое слагаемое нашего решения

$$u_0(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}(y^2t+\frac{1}{3}a^2t^3)+t(z^2+\frac{1}{3}(at)^2)=$$

$$=y^2+(at)^2+t(z^2+\frac{1}{3}(at)^2).$$

Функцию $\bar{u}(x,y,z,t)$ вычисляем по формуле (3.24). Так как

$$g(\xi,\eta,\zeta,\tau)=\xi^2\tau^2=\tau^2(x+a(t-\tau)\sin\theta\cos\varphi)^2=$$
$$=\tau^2(x^2+2ax(t-\tau)\sin\theta\cos\varphi+a^2(t-\tau)^2\sin^2\theta\cos^2\varphi),$$

то для внутреннего интеграла по переменным θ и φ получаем

$$\iint\limits_{S_{a(t-\tau)}} g(\xi,\eta,\zeta)\sin\theta d\theta d\varphi=\tau^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x^2+2ax(t-\tau)\sin\theta\cos\varphi+$$

$$+a^2(t-\tau)^2\sin^2\theta\cos^2\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=\tau^2(x^2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi+$$

$$+2ax(t-\tau)\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi+a^2(t-\tau)^2\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi)=$$

$$=\tau^2(4\pi x^2+\frac{4}{3}\pi a^2(t-\tau)^2)=4\pi(x^2\tau^2+\frac{1}{3}a^2\tau^2(t-\tau)^2).$$

Подставляя этот интеграл в формулу (3.24), находим

$$\bar{u}(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t(t-\tau)d\tau\iint\limits_{S_{a(t-\tau)}} g(\xi,\eta,\zeta)\sin\theta d\theta d\varphi=$$

$$= x^2\int_0^t \tau^2(t-\tau)d\tau + \frac{1}{3}a^2\int_0^t \tau^2(t-\tau)^3 d\tau = \frac{1}{12}x^2t^4 + \frac{1}{180}a^2t^6 =$$

$$= \frac{1}{12}t^4(x^2 + \frac{1}{15}(at)^2).$$

Суммируя полученные функции u_0 и $\bar{u}$, находим решение исходной задачи Коши

$$u(x, y, z, t) = y^2 + (at)^2 + t(z^2 + \frac{1}{3}(at)^2) + \frac{1}{12}t^4(x^2 + \frac{1}{15}(at)^2) =$$

$$= y^2 + tz^2 + (at)^2 + (1 + \frac{1}{3}t) + \frac{1}{12}t^4(x^2 + \frac{1}{15}(at)^2).$$

3.5 Метод подбора частных решений

Зачастую удобно искать решение задачи Коши для волнового уравнения, не применяя общей формулы решения, а используя специфику функций, входящих в начальные условия задачи Коши. Для неоднородного волнового уравнения можно строить решение, исходя из вида функции $g(x, y, t)$ (двумерное уравнение), или $g(x, y, z, t)$ (трехмерное волновое уравнение).

Пример 3.4. Решить задачу Коши

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = e^{-2x}\cos y; \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = e^{-x}\sin 2y.$$

Решение. Исходную задачу Коши разобьем на две задачи, сумма решений которых и даст требуемое решение:

1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$u(x, y, 0) = e^{-2x}\cos y,$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0.$$

2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$u(x, y, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = e^{-x}\sin 2y.$$

Находим решение первой задачи. Так как $(e^{-2x})'' = 4e^{-2x}$, $(\cos y)'' = -\cos y$ (действие второй производной сохраняет структуру функций-множителей, входящих в начальное условие), то естественно искать решение задачи Коши в виде

$$u_1(x, y, t) = \varphi_1(t)e^{-2x}\cos y,$$

причем начальные условия для функции $\varphi_1(t)$ имеют вид $\varphi_1(0) = 1; \varphi_1'(0) = 0$ (чтобы выполнялись начальные условия задачи Коши).

Находим вторые производные функции $u_1(x, y, t)$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 4\varphi_1(t)e^{-2x}\cos y, \ \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -\varphi_1(t)e^{-2x}\cos y,$$

после подстановки которых в волновое уравнение получаем

$$\varphi_1''(t)e^{-2x}\cos y = 3a^2\varphi_1(t)e^{-2x}\cos y.$$

Как следствие, задача Коши для функции $\varphi_1(t)$ принимает вид

$$\varphi_1''(t) - (\sqrt{3}a)^2\varphi_1(t) = 0, \ \ \varphi_1(0) = 1; \varphi_1'(0) = 0.$$

Решение полученного уравнения имеет вид

$$\varphi_1(t) = c_1\mathrm{ch}(\sqrt{3}at) + c_2\mathrm{sh}(\sqrt{3}at).$$

Исходя из начальных условий, находим $c_1 = 1, c_2 = 0.$ Таким образом, решение задачи Коши для функции $\varphi_1(t)$

$$\varphi_1(t) = \mathrm{ch}(\sqrt{3}at).$$

Как следствие,

$$u_1(x, y, t) = \mathrm{ch}(\sqrt{3}at)e^{-2x}\cos y.$$

Подобным образом находим решение второй задачи. Ищем это решение в виде

$$u_2(x, y, t) = \varphi_2(t)e^{-x}\sin 2y$$

с начальными условиями $\varphi_2(0) = 0; \varphi_2'(0) = 1.$

Так как

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=-3\varphi_2(t)e^{-x}\sin 2y,$$

то волновое уравнение принимает вид

$$\varphi_2''(t)e^{-x}\sin 2y=-3a^2\varphi_2(t)e^{-x}\sin 2y.$$

Для функции $\varphi_2(t)$ получаем задачу Коши

$$\varphi_2''(t)+(\sqrt{3}a)^2\varphi_2(t)=0,\ \ \varphi_2(0)=0;\ \varphi_2'(0)=1,$$

решение которой имеет вид

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{\sqrt{3}a}\sin(\sqrt{3}at).$$

Поэтому для второй задачи Коши получаем следующее решение:

$$u_2(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{3}a}\sin(\sqrt{3}at)e^{-x}\sin 2y.$$

Решение исходной задачи будет иметь вид

$$u(x,y,t)=u_1(x,y,t)+u_2(x,y,t)=\mathrm{ch}(\sqrt{3}at)e^{-2x}\cos y+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}a}\sin(\sqrt{3}at)e^{-x}\sin 2y.$$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+xe^t\cos(3y+4z)$

с начальными условиями

$$u(x,y,z,0)=xy\cos z;\ \ \frac{\partial u(x,y,z,0)}{\partial t}=yze^x.$$

Решение. Решение поставленной задачи Коши разбиваем на сумму решений трех задач.

1) Задача Коши для неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными условиями, то есть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+xe^t\cos(3y+4z),$$

$$u(x,y,z,0)=\frac{\partial u(x,y,z,0)}{\partial t}=0.$$

Решение этой задачи ищем в виде

$$\bar{u}(x, y, z, t) = xf(t)\cos(3y + 4z).$$

Так как

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = -9xf(t)\cos(3y + 4z), \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -16xf(t)\cos(3y + 4z),$$

то

$$\Delta\bar{u} = -25xf(t)\cos(3y + 4z),$$

и после подстановки лапласиана функции $\bar{u}$ в исходное волновое уравнение получаем задачу Коши для функции $f(t)$, которая имеет вид

$$f''(t) + 25a^2 f(t) = e^t, \ f(0) = f'(0) = 0.$$

Решение уравнения для функции $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = c_1\cos(5at) + c_2\sin(5at) + \frac{e^t}{1 + 25a^2}. \qquad (3.46)$$

Из начальных условий

$$f(0) = c_1 + \frac{1}{1 + 25a^2} = 0, \ f'(0) = 5ac_2 + \frac{1}{1 + 25a^2} = 0$$

находим коэффициенты c_1 и c_2, подставив которые в равенство (3.46), получаем функцию

$$f(t) = \frac{1}{1 + 25a^2}(e^t - \cos(5at) - \frac{1}{5a}\sin(5at)).$$

Как следствие, решение 1-й задачи Коши принимает вид

$$\bar{u}(x, y, z, t) = \frac{x}{1 + 25a^2}\cos(3y + 4z)(e^t - \cos(5at) - \frac{1}{5a}\sin(5at)).$$

Ненулевые начальные условия учитываем, решая следующие две задачи Коши для однородного волнового уравнения:

2) $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2\Delta u_1,$

$$u_1(x, y, z, 0) = xy\cos z, \ \frac{\partial u_1(x, y, z, 0)}{\partial t} = 0. \qquad (3.47)$$

Решение 2-й задачи Коши ищем в виде

$$u_1(x, y, z, t) = \varphi_1(t) xy\cos z.$$

Вычислив требуемые производные 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \ \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = -\varphi_1(t) xy\cos z$$

и подставив их в волновое уравнение (3.47), получаем уравнение

$$\varphi_1''(t) + a^2\varphi_1(t) = 0,$$

где $\varphi_1(0) = 1, \varphi_1''(0) = 0.$

Решение этой задачи Коши имеет вид $\varphi_1 = \cos at.$ Таким образом, решение 2-й задачи Коши для волнового уравнения будет следующим:

$$u_1(x, y, z, t) = xy\cos z\cos at.$$

3) $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2\Delta u_2,$

$$u_2(x, y, z, t) = 0, \ \frac{\partial u_2(x, y, z, 0)}{\partial t} = yze^x. \qquad (3.48)$$

Решение 3-й задачи Коши ищем в виде

$$u_2(x, y, z, t) = \varphi_2(t) yze^x.$$

После подстановки функции u_2 в уравнение (3.48) приходим к уравнению для функции $\varphi_2(t)$ вида

$$\varphi_2''(t) - a^2\varphi_2(t) = 0,$$

с начальными условиями $\varphi_2(0) = 0, \varphi_2'(0) = 1.$

Находим функцию $\varphi_2(t) = \dfrac{1}{a}\operatorname{sh} at.$ Как следствие, решение 3-й задачи Коши имеет вид

$$u_2(x, y, z, t) = \frac{1}{a} yze^x \operatorname{sh} at.$$

Суммируя все три функции u_1, u_2 и $\overline{u}$, находим решение исходной задачи Коши:

$$u_2(x, y, z, t) = xy\cos z\cos at + \frac{1}{a} yze^x \operatorname{sh} at +$$

$$+\frac{x}{1+25a^2}\cos(3y+4z)(e^t - \cos(5at) - \frac{1}{5a}\sin(5at)).$$

3.6 Упражнения для самостоятельной работы

Упражнение 1. *Решить задачу Коши для одномерного волнового уравнения* $(-\infty < x < \infty, t > 0)$.

1.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x$, $u(x,0) = \sin x$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$.

Ответ: $u(x,t) = \sin x$.

1.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x$, $u(x,0) = \sin x$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x + \cos x$.

Ответ: $u(x,t) = xt + \sin(x+t) - (1 - \operatorname{ch} t)e^x$.

1.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \omega x$, $u(x,0) = 0$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{1}{a^2\omega^2}(1 - \cos a\omega t)\sin \omega x$.

1.4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \omega t$, $u(x,0) = \sin \omega x$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos \omega x$.

Ответ: $u(x,t) = \sin \omega x \cos a\omega t + \dfrac{1}{a\omega}\cos \omega x \sin a\omega t + \dfrac{1}{\omega}\left(t - \dfrac{1}{\omega}\sin \omega t \right)$.

Упражнение 2. *Найти решение задачи Коши для двумерного волнового уравнения* $(-\infty < x, y < \infty, t > 0)$.

2.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6xyt$, $u(x,y,0) = x^2 - y^2$, $\dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = xy$.

Ответ: $u(x,y,t) = x^2 - y^2 + xyt(1 + t^2)$.

2.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x^3 - 3xy^2$, $u(x,y,0) = 0$, $\dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = 0$.

Ответ: $u(x,y,t) = \dfrac{1}{2}xt^2(x^2 - 3y^2)$.

2.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$, $u(x,y,0) = x^2$, $\dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = y^2$.

Ответ: $u(x,y,t) = x^2 + ty^2 + t^2(3 + t)$.

2.4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, $u(x, y, 0) = \left(x^2 + y^2\right)^2$,

$\dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \left(x^2 + y^2\right)^2$.

Ответ: $u(x, y, t) = \left(x^2 + y^2\right)(1+t) + 8(at)^2\left(x^2 + y^2\right)\left(1 + \dfrac{1}{3}t\right) +$

$+\dfrac{38}{3}(at)^4\left(1 + \dfrac{1}{5}t\right)$.

2.5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $u(x, y, 0) = x^2 y^2$, $\dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0$.

Ответ: $u(x, y, t) = (xy)^2 + \left(x^2 + y^2\right)t^2 + \dfrac{1}{3}t^4$.

2.6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $u(x, y, 0) = 0$, $\dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = x^4 - y^4$.

Ответ: $u(x, y, t) = \left(x^2 - y^2\right)\left(\left(x^2 + y^2\right)t + 2t^3\right)$.

2.7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(x^2 + y^2\right)t$, $u(x, y, 0) = 0$, $\dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0$.

Ответ: $u(x, y, t) = \dfrac{1}{6}\left(x^2 + y^2\right)t^3 + \dfrac{10}{3}t^5$.

2.8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $u(x, y, 0) = e^x \cos y$, $\dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = e^y \sin x$.

Ответ: $u(x, y, t) = e^x \cos y + e^y \sin x$.

Упражнение 3. *Найти решение задачи Коши для трехмерного-волнового уравнения* $(-\infty < x, y, z < \infty, t > 0)$.

3.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$, $u(x, y, z, 0) = x^2 + y^2$, $\dfrac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = z^2$.

Ответ: $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + tz^2(at)^2\left(2 + \dfrac{1}{3}t\right)$.

3.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$, $u(x, y, z, 0) = (x - y)^2$, $\dfrac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = (x + y + 2z)^2$.

Ответ: $u(x, y, z, t) = (x - y)^2 + t(x + y + 2z)^2 + (at)^2 (t + 2)$.

3.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 3\Delta u + 6\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, $u\big|_{t=0} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$.

Ответ: $u(x, y, z, t) = 3t^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{3}{2} t^2 \right)$.

3.4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z$, $u(x, y, z, 0) = e^{x+y} \cos z\sqrt{2}$,

$\dfrac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = e^{3y+4z} \sin 5x$.

Ответ: $u(x, y, z, t) = e^{x+y} \cos z\sqrt{2} + \; + te^{3y+4z} \sin 5x + t^3 e^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z$.

3.5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$, $u\big|_{t=0} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$.

Ответ: $u(x, y, z, t) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 (1 + t) + 10a^2 t^2 \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \times$

$\times \left(1 + \dfrac{1}{3} t \right) + a^4 t^4 (5 + t)$.

3.6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$, $u(x, y, z, 0) = x^2 y^2$, $\dfrac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = xyz$.

Ответ: $u(x, y, z, t) = x^2 y^2 + xyzt + (at)^2 \left(x^2 + y^2 \dfrac{1}{3} (at)^2 \right)$.

3.7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$, $u(x, y, z, 0) = (x + y)^2$, $\dfrac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = xyz^2$.

Ответ: $u(x, y, z, t) = (x + y)^2 + 2(at)^2 + xyt \left(z^2 + \dfrac{1}{3} (at)^2 \right)$.

3.8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + 2xyz$, $u\big|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 1$.

Ответ: $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - 2z^2 + t(1 + xyzt)$.

3.9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$, $u\big|_{t=0} = x^2 + y^2 - z^2$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - z^2 + t(x^2 + y^2 + z^2) + (at)^2(t+1)$.

3.10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + xyze^{-t}$, $u\big|_{t=0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

Ответ: $u(x, y, z, t) = xyz(t - 1 + e^{-t})$.

3.11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$, $u(x, y, z, 0) = (x + y)z^2$, $\dfrac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = \left(x^2 + y^2\right)z$.

Ответ: $u(x, y, z, t) = xy\left(z^2 + t^2\right) + zt\left(x^2 + y^2 + \dfrac{2}{3}t^2\right)$.

4 МЕТОД ФУРЬЕ (МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ) РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

4.1 Решение простейших краевых задач для уравнений гиперболического типа

Метод разделения переменных, или метод Фурье, является одним из основных методов решения краевых задач математической физики в ограниченных областях. Мы начнем рассмотрение этого метода с решения однородной краевой задачи 1-го рода, то есть задачи о свободных колебаниях ограниченной струны с закрепленными концами, которая формулируется следующим образом: найти решение однородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, t > 0, 0 < x < l, \tag{4.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), 0 \le x \le l, \tag{4.2}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные функции,
и однородным краевым условиям 1-го типа

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \ge 0. \tag{4.3}$$

Идея метода Фурье основана на линейности и однородности уравнения и краевых (или граничных) условий. В этом случае справедлив принцип суперпозиции для любых двух частных решений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ уравнения (4.1), удовлетворяющих граничным условиям (4.3), то есть функция $u(x,t) = c_1u_1(x,t) + c_2u_2(x,t)$, где c_1 и c_2 – произвольные постоянные, также удовлетворяет уравнению (4.1) и граничным условиям (4.3).

Будем искать нетривиальное решение уравнения (4.1) в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{4.4}$$

одна из которых зависит только от переменной x, а другая – только от t.

Подставляя выражение (4.4) в уравнение (4.1), получаем

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

или

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{4.5}$$

Равенство (4.5) должно выполняться при всех значениях $x \in (0, l)$ и $t > 0$. Особенностью равенства (4.5) является разделение переменных в нем, то есть левая часть равенства зависит только от t, а правая – только от x. Поэтому, если, например, зафиксировать x, правая часть равенства, а вместе с ней и левая должны сохранять постоянное значение при любых значениях t. Аналогично, левая часть и правая часть равенства при фиксированном t не должны изменяться при любых значениях x. Но тогда однозначно вытекает вывод о том, что равенство (4.5) будет справедливо лишь в том случае, когда обе его части не зависят ни от x, ни от t, то есть являются постоянной величиной. Обозначив эту постоянную разделения как $(-\lambda^2)$ (то есть постоянная разделения отрицательна), запишем (4.5) в виде

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \tag{4.6}$$

Как следует из (4.6), функции $T(t)$ и $X(x)$ являются решениями двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$T''(t) + (a\lambda)^2 T(t) = 0, \;\; X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Чтобы выполнялись граничные условия (4.3), необходимо потребовать выполнения условий $X(0) = 0$ и $X(l) = 0$.

Таким образом, мы приходим к следующей граничной задаче для однородного дифференциального уравнения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,\ \ 0 < x < l, \tag{4.7}$$

где

$$X(0) = 0 \ \text{ и } \ X(l) = 0. \tag{4.8}$$

Общее решение уравнения (4.7) имеет вид

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

Из граничных условий (4.8) находим

$$X(0) = c_1 = 0,\ X(l) = c_2 \sin \lambda l = 0,$$

где $c_2 \neq 0$ (ищем нетривиальное решение).

Таким образом, получаем

$$\sin \lambda l = 0,\ \lambda l = \pi n\ (n = 1, 2, \ldots),\ \text{ то есть } \lambda = \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Значение $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{l}$ будем называть *собственными значениями граничной задачи* (4.7), (4.8), а отвечающие им функции $X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \dfrac{\pi n x}{l}$ – собственными функциями граничной задачи.

При $\lambda = 0$ граничная задача (4.7), (4.8) имеет только тривиальное решение. При положительной постоянной разделения в уравнении (4.6) приходим для функции $X(x)$ к уравнению вида

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0,$$

общее решение которого

$$X(x) = c_1 \operatorname{ch} \lambda x + c_2 \operatorname{sh} \lambda x.$$

Для выполнения граничных условий (4.8) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \cdot 0 = 0, \\ c_1 \operatorname{ch} \lambda x + c_2 \operatorname{sh} \lambda x = 0, \end{cases}$$

которая имеет только нулевое решение $c_1 = c_2 = 0.$ Таким образом, при положительной постоянной разделения граничная задача (4.7), (4.8) имеет только тривиальное решение $X(x) \equiv 0.$

Итак, только при собственных значениях

$$\lambda = \lambda_n = \frac{\pi n}{l},\ n = 1, 2, ..., \tag{4.9}$$

задача (4.7), (4.8) имеет в качестве нетривиального решения систему собственных функций

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l},\ n = 1, 2, \ldots. \tag{4.10}$$

Каждому собственному значению λ_n (4.9) будет соответствовать функция $T_n(t),$ которую находим из решения уравнения

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 T_n(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi a n t}{l} + B_n \sin\frac{\pi a n t}{l}, \tag{4.11}$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Подставляя выражения (4.10), (4.11) в формулу (4.4), находим частные решения уравнения (4.1), удовлетворяющие граничным условиям (4.3). При этом каждому $n = 1, 2, \ldots$ будет отвечать решение

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos\frac{\pi a n t}{l} + B_n \sin\frac{\pi a n t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{4.12}$$

Суперпозиция всех решений вида (4.12)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi a n t}{l} + B_n \sin\frac{\pi a n t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l} \tag{4.13}$$

также будет решением уравнения (4.1), удовлетворяющим граничным условиям (4.3).

Коэффициенты A_n, B_n ряда (4.13) находим, используя начальные условия задачи (4.2). Дифференцируя обе части равенства (4.13), получаем

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi an}{l}\left(B_n\cos\frac{\pi ant}{l}-A_n\sin\frac{\pi ant}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Тогда из двух равенств в условиях (4.2) находим

$$\begin{aligned} &u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi nx}{l},\ 0\le x\le l,\\ &\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi an}{l}B_n\sin\frac{\pi nx}{l},\ 0\le x\le l. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Умножим обе части первого равенства системы (4.14) на $\sin\dfrac{\pi kx}{l}$ и проинтегрируем на отрезке $[0;l]$. Так как

$$\int_0^l \sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx=\begin{cases}0,\ n\ne k,\\ \dfrac{l}{2},\ n=k,\end{cases}$$

то получаем для коэффициентов A_n следующее равенство:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx.$$

Совершенно аналогичным образом из второго уравнения системы (4.14) находим соотношение для коэффициентов B_n, получаем

$$\frac{\pi an}{l}B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx.$$

Таким образом, коэффициенты A_n и $\dfrac{\pi an}{l}B_n$ не что иное, как коэффициенты разложения функций начальных условий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\left\{\sin\dfrac{\pi nx}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Итак, решение однородной краевой задачи 1-го рода дается формулой (4.13), а коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx,\;\; B_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \qquad (4.15)$$

4.1.1 Краевая задача 1-го рода для неоднородного волнового уравнения

Метод Фурье (метод разделения переменных) является эффективным средством решения краевых задач и для неоднородного волнового уравнения. Мы рассматриваем вынужденные колебания струны под действием непрерывно распределенной силы с линейной плотностью $\rho f(x,t)$. Начальные условия полагаем нулевыми, то есть решаем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\; t>0,\; 0<x<l, \qquad (4.16)$$

$$u(x,0)=0,\;\; \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0, \qquad (4.17)$$

$$u(0,t)=0,\;\; u(l,t)=0,\;\; t\geq 0. \qquad (4.18)$$

Будем искать решение неоднородного волнового уравнения (4.16) в виде разложения в ряд по собственным функциям однородной краевой задачи $\left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющим краевым условиям (4.18), то есть представим решение в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}. \qquad (4.19)$$

Разлагаем функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l},\;\; f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(z,t)\sin\frac{\pi n z}{l}dz. \qquad (4.20)$$

Подставив ряды (4.19), (4.20) в уравнение (4.16), получаем следующее равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)+\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 T_n(t)\right)\sin\frac{\pi nx}{l}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых собственных функциях, находим уравнение для функции $T_n(t)$. С учетом нулевых начальных условий (4.17) приходим к следующей задаче Коши:

$$T_n''(t)+\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t), \tag{4.21}$$

$$T_n(0)=T_n'(0)=0. \tag{4.22}$$

Решение неоднородного уравнения (4.21) ищем методом вариации произвольных постоянных. Исходя из решения соответствующего однородного уравнения, строим решение неоднородного уравнения в виде

$$T_n(t)=c_1(t)\cos a\lambda_n t+c_2(t)\sin a\lambda_n t, \tag{4.23}$$

где коэффициент λ_n дается формулой (4.9). Функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos a\lambda_n t+c_2'(t)\sin a\lambda_n t=0, \\ -c_1'(t)\sin a\lambda_n t+c_2'(t)\cos a\lambda_n t=\dfrac{1}{a\lambda_n} f_n(t). \end{cases}$$

Найдем из системы производные

$$c_1'(t)=-f_n(t)\sin a\lambda_n t,\ c_2'(t)=\frac{1}{a\lambda_n} f_n(t)\cos a\lambda_n t,$$

интегрируем полученные соотношения и находим требуемые функции $c_1(t)$ и $c_2(t)$, которые имеют вид

$$c_1(t)=c_1-\frac{1}{a\lambda_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin a\lambda_n\tau d\tau,$$

$$c_2(t)=c_2+\frac{1}{a\lambda_n}\int_0^t f_n(\tau)\cos a\lambda_n\tau d\tau.$$

Подставив эти функции в равенство (4.23), находим общее решение уравнения (4.21):

$$T_n(t)=\left(c_1-\frac{1}{a\lambda_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin a\lambda_n\tau d\tau\right)\cos a\lambda_n t+$$
$$+\left(c_2+\frac{1}{a\lambda_n}\int_0^t f_n(\tau)\cos a\lambda_n\tau d\tau\right)\sin a\lambda_n t=$$
$$=c_1\cos a\lambda_n t+c_2\sin a\lambda_n t+\frac{1}{a\lambda_n}\int_0^t f_n(\tau)(\sin a\lambda_n t\cos a\lambda_n\tau-$$
$$-\cos a\lambda_n t\sin a\lambda_n\tau)d\tau=c_1\cos a\lambda_n t+c_2\sin a\lambda_n t+$$
$$+\frac{1}{a\lambda_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin a\lambda_n(t-\tau)d\tau.$$

Из начальных условий (4.22) находим значения коэффициентов $c_1=c_2=0.$

Таким образом, решение задачи Коши (4.21), (4.22) имеет вид

$$T_n(t)=\frac{1}{a\lambda_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin a\lambda_n(t-\tau)d\tau,$$

или с учетом явного выражения для собственных значений λ_n

$$T_n(t)=\frac{l}{\pi na}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi an(t-\tau)}{l}d\tau. \qquad (4.24)$$

Подставив соотношение (4.24) в формулу (4.19), находим решение неоднородного волнового уравнения (4.16) с нулевыми начальными условиями:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi na}\left[\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi an(t-\tau)}{l}d\tau\right]\sin\frac{\pi nx}{l}. \qquad (4.25)$$

Очевидно, что в случае рассмотрения краевой задачи 1-го рода с неоднородным волновым уравнением и ненулевыми начальными условиями (4.2) решение будет являться суммой двух функций. Ряд (4.13) учитывает ненулевые начальные условия, а равенство (4.25) – наличие «внешней силы» $f(x,t)$ в волновом уравнении. То есть решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), t > 0, 0 < x < l,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), 0 \le x \le l,$$

$$u(0,t) = 0, \; u(l,t) = 0, \; t \ge 0$$

имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi a n t}{l} + B_n \sin \frac{\pi a n t}{l} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \left[\int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi a n (t-\tau)}{l} d\tau \right] \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где коэффициенты A_n, B_n даются формулами (4.15).

Пример 4.1. Найти решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \left(e^{-t} \sin \frac{\pi x}{l} + e^{-2t} \sin \frac{2\pi x}{l} \right), \tag{4.26}$$

где $A = \text{const}, 0 < x < l, t \ge 0,$ краевые условия $u(0,t) = u(l,t) = 0,$ начальные условия нулевые, то есть $u(x,0) = \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$

Решение. Решение неоднородного волнового уравнения (4.26) ищем по формуле (4.19). Подставив ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

в уравнение (4.26), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + \left(\frac{\pi a n}{l} \right)^2 T_n(t) \right) \sin \frac{\pi n x}{l} = A \left(e^{-t} \sin \frac{\pi n x}{l} + e^{-2t} \sin \frac{2\pi n x}{l} \right).$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты рядов в левой и правой частях равенства, получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$T_1''(t) + \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 T_1(t) = A e^{-t}, T_2''(t) + \left(\frac{2\pi a}{l} \right)^2 T_2(t) = A e^{-2t},$$

$$T_n''(t)+\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 T_n(t)=0,\ n=3,4,\ldots.$$

Начальные условия имеют вид $T_n(0)=T_n'(t)=0, n=1,2,3,\ldots.$
Находим решение задачи Коши:

$$T_1''(t)+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 T_1(t)=Ae^{-t},\ T_1(0)=T_1'(0)=0. \tag{4.27}$$

Общее решение уравнения (4.27) имеет вид

$$T_1(t)=c_1\cos\frac{\pi a t}{l}+c_2\sin\frac{\pi a t}{l}+\frac{Ae^{-t}}{1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}, \tag{4.28}$$

тогда

$$T_1'(t)=\frac{\pi a}{l}\left(c_2\cos\frac{\pi a t}{l}-c_1\sin\frac{\pi a t}{l}\right)-\frac{Ae^{-t}}{1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}.$$

Из нулевых начальных условий получаем

$$T_1(0)=c_1+\frac{A}{1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}=0, T_1'(t)=\frac{\pi a c_2}{l}-\frac{A}{1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}=0.$$

Таким образом, коэффициенты c_1 и c_2 имеют вид

$$c_1=-\frac{A}{1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}, c_2=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}.$$

Подставив эти коэффициенты в равенство (4.28), находим решение задачи Коши (4.27):

$$T_1(t)=\frac{A}{1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\left(e^{-t}+\frac{l}{\pi a}\sin\frac{\pi a t}{l}-\cos\frac{\pi a t}{l}\right).$$

Совершенно аналогичным образом решается задача Коши для функции $T_2(t)$

$$T_2''(t)+\left(\frac{2\pi a}{l}\right)^2 T_2(t)=Ae^{-2t},\ T_2(0)=T_2'(0)=0.$$

Решение этой задачи будет иметь вид

$$T_2(t)=\frac{A}{4\left(1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\right)}\left(e^{-2t}+\frac{l}{2\pi a}\sin\frac{2\pi at}{l}-\cos\frac{2\pi at}{l}\right).$$

Задача Коши

$$T_n''(t)+\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 T_n(t)=0,\ T_n(0)=T_n'(0)=0,\ n=3,4,\ldots$$

имеет только тривиальное решение $T_n(t)\equiv 0.$

Таким образом, решение исходной краевой задачи для неоднородного волнового уравнения (4.26) будет иметь вид

$$u(x,t)=T_1(t)\sin\frac{\pi x}{l}+T_2(t)\sin\frac{2\pi x}{l}=$$

$$=\frac{A}{1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\left(\left(e^{-t}+\frac{l}{\pi a}\sin\frac{\pi at}{l}-\cos\frac{\pi at}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(e^{-2t}+\frac{l}{\pi a}\sin\frac{2\pi at}{l}-\cos\frac{2\pi at}{l}\right)\sin\frac{2\pi x}{l}\right).$$

Пример 4.2. К струне $0\le x\le l$ с жестко закрепленными концами с момента времени $t=0$ приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $f(x,t)=\rho\Phi(x)\sin\omega t,$ где $\rho-$ линейная плотность материала струны, $\Phi(x)-$заданная функция переменной $x.$ Начальные условия нулевые. Решить задачу о колебании струны.

Краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\Phi(x)\sin\omega t,\ 0<x<l,\ t>0, \tag{4.29}$$

$$u(x,0)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\ 0\le x\le l, \tag{4.30}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ t\ge 0. \tag{4.31}$$

Решение. Несложно заметить, что $(\sin\omega t)''=-\omega^2\sin\omega t,$ то есть оператор $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ в левой части уравнения (4.29) не меняет временную зависимость внешней силы, действующей на струну. Поэтому решение неоднородного уравнения (4.29) будем искать в виде суммы двух функций

$$u(x,t)=w(x)\sin\omega t+v(x,t). \tag{4.32}$$

Подставив функцию (4.32) в неоднородное уравнение (4.29), получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\omega^2 w(x)\sin\omega t=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(a^2w''(x)+\Phi(x))\sin\omega t$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(a^2w''(x)+\omega^2 w(x)+\Phi(x))\sin\omega t=0.$$

Пусть функция $w(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$a^2w''(x)+\omega^2 w(x)+\Phi(x)=0\,.$$

Из краевых задач условий (4.31) получаем $w(0)=w(l)=0.$ Таким образом, функция $w(x)$ является решением следующей краевой задачи:

$$w''(x)+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 w(x)=-\frac{1}{a^2}\Phi(x), \tag{4.33}$$
$$w(0)=w(l)=0.$$

Общее решение неоднородного уравнения (4.33) вновь ищем методом вариации произвольных постоянных:

$$w(x)=c_1(x)\cos\frac{\omega x}{a}+c_2(x)\sin\frac{\omega x}{a}, \tag{4.34}$$

где функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos\dfrac{\omega x}{a} + c_2'(x)\sin\dfrac{\omega x}{a} = 0, \\ -c_1'(x)\sin\dfrac{\omega x}{a} + c_2'(x)\cos\dfrac{\omega x}{a} = -\dfrac{1}{a\omega}\Phi(x). \end{cases}$$

Решив эту систему и проинтегрировав полученные соотношения, находим требуемые функции

$$\begin{cases} c_1(x) = c_1 + \dfrac{1}{\omega a}\displaystyle\int_0^x \Phi(z)\sin\dfrac{\omega z}{a}\,dz, \\ c_2(x) = c_2 - \dfrac{1}{\omega a}\displaystyle\int_0^x \Phi(z)\cos\dfrac{\omega z}{a}\,dz. \end{cases} \tag{4.35}$$

Подставляем полученные функции (4.35) в равенство (4.34) и находим общее решение неоднородного уравнения (4.33):

$$w(x) = \left(c_1 + \frac{1}{\omega a}\int_0^x \Phi(z)\sin\frac{\omega z}{a}\,dz\right)\cos\frac{\omega x}{a} +$$

$$+\left(c_2 - \frac{1}{\omega a}\int_0^x \Phi(z)\cos\frac{\omega z}{a}\,dz\right)\sin\frac{\omega x}{a} = c_1\cos\frac{\omega x}{a} + c_2\sin\frac{\omega x}{a} +$$

$$+\frac{1}{\omega a}\int_0^x \Phi(z)\left(\sin\frac{\omega z}{a}\cos\frac{\omega x}{a} - \cos\frac{\omega z}{a}\sin\frac{\omega x}{a}\right)dz =$$

$$= c_1\cos\frac{\omega x}{a} + c_2\sin\frac{\omega x}{a} + \frac{1}{\omega a}\int_0^x \Phi(z)\sin\frac{\omega(z-x)}{a}\,dz. \tag{4.36}$$

Коэффициенты c_1 и c_2 находим из краевых условий для функции $w(x)$, получаем

$$w(0) = c_1 = 0,$$

$$w(l) = c_2\sin\frac{\omega l}{a} + \frac{1}{\omega a}\int_0^l \Phi(z)\sin\frac{\omega(z-l)}{a}\,dz = 0,$$

тогда

$$c_2 = -\frac{1}{\omega a \sin\frac{\omega l}{a}} \int_0^l \Phi(z)\sin\frac{\omega(z-l)}{a}\,dz.$$

Подставив найденные коэффициенты в равенство (4.36), находим решение краевой задачи для уравнения (4.33):

$$w(x) = -\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\omega a \sin\frac{\omega l}{a}} \int_0^l \Phi(z)\sin\frac{\omega(z-l)}{a}\,dz +$$

$$+\frac{1}{\omega a}\int_0^x \Phi(z)\sin\frac{\omega(z-x)}{a}\,dz. \qquad (4.37)$$

Для функции $v(x,t)$ получаем однородную краевую задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ v(0,t) = v(l,t) = 0.$$

Из нулевых начальных условий (4.30) найдем начальные условия для функции $v(x,t)$. Из начального условия для функции $u(x,t)$ получаем

$$u(x,0) = v(x,0) + 0 = 0, \text{ то есть } v(x,0) = 0.$$

Так как производная

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \omega w(x)\cos\omega t,$$

то из (4.30) находим

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} + \omega w(x) = 0, \text{ то есть } \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = -\omega w(x).$$

Таким образом, для функции $v(x,t)$ получаем краевую задачу следующего вида:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ \ 0 < x < l,\ t > 0, \qquad (4.38)$$

$$v(x,0) = 0,\ \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = -\omega w(x), \qquad (4.39)$$

$$v(0,t)=0,\ v(l,t)=0. \tag{4.40}$$

Решение краевой задачи (4.38)–(4.40) дается формулой (4.13). Коэффициенты ряда вычисляем по формулам (4.15), используя начальные условия для функции $v(x,t)$. С учетом полученных равенств (4.39) находим

$$A_n=0,\ B_n=\frac{2\omega}{\pi an}\int_0^l(-w(x))\sin\frac{\pi nx}{l}dx=0. \tag{4.41}$$

Итак, решение исходной краевой задачи (4.29)–(4.31) имеет вид

$$u(x,t)=w(x)\sin\omega t+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{\pi ant}{l}\sin\frac{\pi nx}{l},$$

где функция $w(x)$ дается соотношением (4.37), а коэффициенты B_n вычисляем по формуле (4.41).

Рассмотрим случай, когда $\Phi(x)=\Phi_0=\text{const}$, то есть внешняя сила, действующая на струну, имеет линейную плотность, зависящую только от переменной t, то есть $f(t)=\Phi_0\sin\omega t$. Подставив функцию $\Phi(z)=\Phi_0=\text{const}$ в равенство (4.37), находим

$$w(x)=-\frac{\Phi_0\sin\frac{\omega x}{a}}{\omega a\sin\frac{\omega l}{a}}\int_0^l\sin\frac{\omega(z-l)}{a}dz+\frac{\Phi_0}{\omega a}\int_0^x\sin\frac{\omega(z-x)}{a}dz=$$

$$=\frac{\Phi_0}{\omega^2}\left(\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\left(1-\cos\frac{\omega l}{a}\right)+\cos\frac{\omega x}{a}-1\right)=$$

$$=\frac{\Phi_0}{\omega^2}\left(\frac{\sin\frac{\omega l}{2a}}{\cos\frac{\omega l}{2a}}\sin\frac{\omega x}{a}+\cos\frac{\omega x}{a}-1\right)=\frac{\Phi_0}{\omega^2\cos\frac{\omega l}{2a}}\left(\cos\frac{\omega(2x-l)}{2a}-\cos\frac{\omega l}{2a}\right). \tag{4.42}$$

Далее вычисляем коэффициенты B_n разложения функции $v(x,t)$ в ряд Фурье (все необходимые «табличные» интегралы для решения краевых задач методом Фурье приведены в приложении). Вычисляем интеграл

$$\int_0^l w(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{\Phi_0}{\omega^2}\left(\frac{\sin\dfrac{\omega l}{2a}}{\cos\dfrac{\omega l}{2a}}\int_0^l \sin\frac{\omega x}{a}\sin\frac{\pi nx}{l}dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^l\cos\frac{\omega x}{a}\sin\frac{\pi nx}{l}dx-\int_0^l\sin\frac{\pi nx}{l}dx\right)=\frac{\Phi_0}{l\omega^2}\frac{1}{\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2-\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2}\times$$

$$\times\left(\pi n(1-(-1)^n\cos\frac{\omega l}{a}\right)-\frac{\sin\dfrac{\omega l}{2a}}{\cos\dfrac{\omega l}{2a}}\pi n(-1)^n\sin\frac{\omega l}{a}-\frac{l^2(1-(-1)^n)}{\pi n}\times$$

$$\left.\times\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2-\left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right)\right)=\frac{\Phi_0}{l\omega^2}\frac{1}{\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2-\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2}\Big(\pi n-\pi n(-1)^n-$$

$$\left.-\pi n(1-(-1)^n)+\left(\frac{\omega l}{a}\right)^2\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\right)=\frac{\Phi_0 l}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n\left(\left(\dfrac{\pi an}{l}\right)^2-\omega^2\right)}.$$

Так как $1-(-1)^n=\begin{cases}0,\ n=2k,\ k=0,1,2,\dots,\\ 2,\ n=2k+1,\end{cases}$

то окончательно получаем

$$\int_0^l w(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=(n=2k+1)=$$

$$=\frac{2\Phi_0 l}{\pi}\frac{1}{(2k+1)\left(\left(\dfrac{\pi a}{l}\right)^2(2k+1)^2-\omega^2\right)}. \tag{4.43}$$

Подставив полученный интеграл в формулу (4.41), находим требуемые коэффициенты ряда Фурье для функции $v(x,t)$, получаем

$$B_{2k+1}=-\frac{4\Phi_0\omega l}{\pi^2 a}\frac{1}{(2k+1)^2(\omega_{2k+1}^2-\omega^2)},$$

где мы ввели частоты $\omega_{2k+1} = \frac{\pi a}{l}(2k+1)$ «свободных колебаний струны».

Таким образом, решение краевой задачи (4.38)–(4.40) имеет вид

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1} \sin\frac{\pi a(2k+1)t}{l} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{l} =$$

$$= -\frac{4\Phi_0 \omega l}{\pi^2 a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi a(2k+1)t}{l} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}}{(2k+1)^2(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)}. \qquad (4.44)$$

Подставив найденные функции (4.42) и (4.44) в равенство (4.32), находим решение неоднородного волнового уравнения в ситуации, когда на струну действует внешняя сила с линейной плотностью $\rho\Phi_0 \sin\omega t.$ Это решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{\Phi_0}{\omega^2 \cos\frac{\omega l}{2a}} \left(\cos\frac{\omega(2x-l)}{2a} - \cos\frac{\omega l}{2a} \right) \sin\omega t -$$

$$-\frac{4\Phi_0 \omega l}{\pi^2 a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi a(2k+1)t}{l} \sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}}{(2k+1)^2(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)}. \qquad (4.45)$$

Два слагаемые в правой части формулы (4.45) имеют разную природу. Первое слагаемое описывает вынужденные колебания струны с частотой вынуждающей силы $\omega.$ Второе слагаемое представляет собой «свободные колебания струны» с собственными частотами $\omega_{2k+1},$ которые порождаются действующей на струну внешней силой.

Формула (4.45) не работает в ситуации, когда частота внешней силы ω совпадает с одной из собственных частот системы ω_{2k+1} (явление резонанса). Чтобы описать колебания струны в этой ситуации, представим функцию $u(x, t)$ в другом виде. Используя интеграл (4.43), разложим функцию $w(x)$ в ряд Фурье, получаем

$$w(x) = \frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}}{(2k+1)(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)}.$$

Подставляем это разложение и функцию (4.44) в равенство (4.32) и получим решение в следующем виде:

$$u(x,t)=\frac{4\Phi_0}{\pi}\sin\omega t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{l}}{(2k+1)(\omega_{2k+1}^2-\omega^2)}-$$

$$-\frac{4\Phi_0\omega l}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi a(2k+1)t}{l}\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{l}}{(2k+1)^2(\omega_{2k+1}^2-\omega^2)}=$$

$$=\frac{4\Phi_0 l}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\omega_{2k+1}\sin\omega t-\omega\sin\omega_{2k+1}t)\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{l}}{(2k+1)^2(\omega_{2k+1}^2-\omega^2)}. \qquad (4.46)$$

Пусть частота ω совпадает с одной из собственных частот колебаний струны, то есть $\omega=\omega_{2k_0+1}$. Используя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{\omega\to\omega_{2k_0+1}}\frac{\omega_{2k+1}\sin\omega t-\omega\sin\omega_{2k+1}t}{(2k+1)^2(\omega^2-\omega_{2k+1}^2)}=$$

$$=-\frac{\sin\omega_{2k_0+1}t-\omega_{2k_0+1}t\cos\omega_{2k_0+1}t}{2\omega_{2k_0+1}(2k_0+1)^2}=$$

$$=-\frac{l}{2\pi a}\frac{\sin\omega_{2k_0+1}t-\omega_{2k_0+1}t\cos\omega_{2k_0+1}t}{(2k_0+1)^3}.$$

Таким образом, в случае резонанса решение задачи имеет вид (в (4.46) выделяем отдельно слагаемое с $k=k_0$ плюс остальные члены ряда)

$$u(x,t)=\frac{2\Phi_0 l^2}{\pi^3 a^2}\frac{\sin\omega_{2k_0+1}t-\omega_{2k_0+1}t\cos\omega_{2k_0+1}t}{(2k_0+1)^3}\frac{\sin\pi(2k_0+1)x}{l}+$$

$$+\frac{4\Phi_0 l}{\pi^2 a}\sum_{\substack{k=0\\(k\neq k_0)}}^{\infty}\frac{\omega_{2k+1}\sin\omega_{2k_0+1}t-\omega_{2k_0+1}\sin\omega_{2k+1}t}{(2k+1)^2(\omega_{2k+1}^2-\omega_{2k_0+1}^2)}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}=$$

$$=\frac{2\Phi_0 l^2}{\pi^3 a^2}\frac{\sin\omega_{2k_0+1}t-\omega_{2k_0+1}t\cos\omega_{2k_0+1}t}{(2k+1)^3}\sin\frac{\pi(2k_0+1)x}{l}+$$

$$+\frac{4\Phi_0 l}{\pi^2 a}\sin\omega_{2k_o+1}t\sum_{\substack{k=0\\(k\neq k_0)}}^{\infty}\frac{\omega_{2k+1}}{(2k+1)^2\left(\omega^2_{2k+1}-\omega^2_{2k_0+1}\right)}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}-$$

$$-\frac{4\Phi_0 l\omega_{2k_o+1}}{\pi^2 a}\sum_{\substack{k=0\\(k\neq k_0)}}^{\infty}\frac{\sin\omega_{2k+1}t}{(2k+1)^2\left(\omega^2_{2k+1}-\omega^2_{2k_0+1}\right)}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}.$$

4.1.2 Полное решение 1-й краевой задачи

Рассмотрим общую постановку 1-й краевой задачи с ненулевыми граничными условиями, т.е. концы струны не закреплены, а совершают колебания по заданным законам. В этом случае постановка 1-й краевой задачи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ \ 0<x<l,\ \ t>0, \tag{4.47}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\ 0\le x\le l, \tag{4.48}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ \ u(l,t)=\mu_2(t),\ \ t\ge 0. \tag{4.49}$$

К решению этой краевой задачи нельзя применить метод Фурье, так как граничные условия (4.49) не являются однородными. Поэтому для применения метода Фурье необходимо свести неоднородную краевую задачу (4.47)–(4.49) к однородной краевой задаче.

Будем искать решение краевой задачи (4.47)–(4.49) в виде суммы двух функций

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \tag{4.50}$$

где посредством функции $w(x,t)$ получаем неоднородные краевые условия (4.49). Пусть функция $w(x,t)$ имеет вид

$$w(x,t)=(\alpha_1 x+\beta_1)\mu_1(t)+(\alpha_2 x+\beta_2)\mu_2(t)$$

и удовлетворяет граничным условиям $w(0,t)=\mu_1(t),\ w(l,t)=\mu_2(t)$.

Из граничного условия при $x=0$ получаем

$$w(0,t)=\beta_1\mu_1(t)+\beta_2\mu_2(t)=\mu_1(t),$$

тогда $\beta_1 = 1,\ \ \beta_2 = 0.$

Граничное условие при $x = l$ дает

$$w(l,t) = (\alpha_1 l + 1)\mu_1(t) + \alpha_2 l \mu_2(t) = \mu_2(t).$$

Из этого равенства находим коэффициенты $\alpha_1 = -\dfrac{1}{l},\ \ \alpha_2 = \dfrac{1}{l}.$ Таким образом, функция $w(x,t)$, удовлетворяющая неоднородным краевым условиям (4.49), имеет вид

$$w(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1(t) + \frac{x}{l}\mu_2(t). \qquad (4.51)$$

Используя равенства (4.48) и (4.50), находим начальные условия для функции $v(x,t)$. Получаем

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = \varphi(x),$$

тогда

$$v(x,0) = \varphi(x) - w(x,0) = \varphi(x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1(0) - \frac{x}{l}\mu_2(0).$$

Дифференцируем по t обе части равенства (4.50), используя явный вид функции $w(x,t)$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1'(t) + \frac{x}{l}\mu_2'(t),$$

далее используем начальное условие

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1'(0) + \frac{x}{l}\mu_2'(0) = \psi(x),$$

из которого получаем

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1'(0) - \frac{x}{l}\mu_2'(0).$$

Подставив равенства (4.50) и (4.51) в уравнение (4.47), получим уравнение для функции $v(x,t)$, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1''(t) - \frac{x}{l}\mu_2''(t).$$

Таким образом, для функции $v(x,t)$ мы получаем краевую задачу с однородными краевыми условиями, т.е. задачу вида

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1''(t) - \frac{x}{l}\mu_2''(t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1(0) - \frac{x}{l}\mu_2(0),\ 0 \le x \le l,$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \varphi(x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_1'(0) - \frac{x}{l}\mu_2'(0),$$

$$v(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0,\ t \ge 0.$$

Полученная краевая задача для функции $v(x,t)$ может быть решена методом Фурье. Итак, найденная нами функция $w(x,t)$ (равенство (4.51)), позволяет свести исходную краевую задачу (4.47)–(4.49) с ненулевыми условиями к краевой задаче для функции $v(x,t)$ с однородными краевыми условиями.

Отметим, однако, существенный недостаток этого метода. Мы убрали неоднородности из краевых условий, но при этом существенно усложнили само уравнение для функции $v(x,t)$ и начальные условия. Очевидно, что в зависимости от конкретного вида функций $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ необходимо искать частные, более простые приемы решения задач с неоднородными краевыми условиями.

Пример 4.3. Найти решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ 0 < x < \pi,\ t > 0. \qquad (4.52)$$

$$u(0,t) = \sin \omega t,\ u(\pi,t) = \cos \omega t,\ t \ge 0. \qquad (4.53)$$

Начальные условия нулевые, т.е. $u(x,0) = \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$

Исходя из неоднородных краевых условий (4.53), будем искать решение данной краевой задачи в виде суммы трех функций

$$u(x,t) = v(x,t) + f_1(x)\sin\omega t + f_2(x)\cos\omega t. \qquad (4.54)$$

Подставив равенство (4.54) в исходное уравнение (4.52), получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(f_1''(x) + \omega^2 f_1(x)\right)\sin\omega t + \left(f_2''(x) + \omega^2 f_2(x)\right)\cos\omega t.$$

Чтобы удовлетворить неоднородному краевому условию при $x = 0,$ функция $f_1(x)$ должна быть решением следующей краевой задачи:

$$f_1''(x) + \omega^2 f_1(x) = 0, \quad f_1(0) = 1, \quad f_1(\pi) = 0. \qquad (4.55)$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$f_1(x) = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x. \qquad (4.56)$$

Из краевых условий для функции $f_1(x)$ находим коэффициенты c_1 и c_2, получаем $c_1 = 1,$ $c_2 = -\dfrac{\cos\pi\omega}{\sin\pi\omega}.$ Подставив эти коэффициенты в общее решение (4.56), находим требуемую функцию $f_1(x),$ которая имеет вид

$$f_1(x) = \cos\omega x - \frac{\cos\pi\omega}{\sin\pi\omega}\sin\omega x = \frac{\sin\omega(\pi - x)}{\sin\pi\omega}. \qquad (4.57)$$

Аналогичным образом, посредством функции $f_2(x)$ удовлетворяет неоднородному краевому условию при $x = l,$ т.е. функция $f_2(x)$ является решением следующей краевой задачи:

$$f_2''(x) + \omega^2 f_2(x) = 0, \quad f_2(0) = 0, \quad f_2(\pi) = 1. \qquad (4.58)$$

Решение краевой задачи (4.58) имеет вид

$$f_2(x) = \frac{\sin\omega x}{\sin\pi x}. \qquad (4.59)$$

Таким образом, функция $v(x,t)$ будет решением краевой задачи с однородными граничными условиями. Найдем начальные условия для функции $v(x,t)$. Исходя из нулевых начальных условий для функции $u(x,t)$ и равенства (4.54), получаем

$$u(x,0)=v(x,0)+f_2(x)=0,\ \text{т.е.}\ v(x,0)=-f_2(x).$$

Продифференцировав по t обе части равенства (4.54)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+\omega f_1(x)\cos\omega t-\omega f_2(x)\sin\omega t,$$

при $t=0$ имеем

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\frac{\partial v(x,0)}{\partial t}+\omega f_1(x)=0,\ \text{тогда}\ \frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=-\omega f_1(x).$$

Итак, функция $v(x,t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2};\ 0<x<\pi,\ \ t>0. \tag{4.60}$$

$$v(x,0)=-f_2(x),\ \frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=-\omega f_1(x),\ \ 0\le x\le\pi, \tag{4.61}$$

$$v(0,t)=0,\ \ v(\pi,t)=0,\ \ t\ge 0. \tag{4.62}$$

Решение краевой (4.60)−(4.62) задачи дается рядом (4.13) ($l=\pi$)

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos nt+B_n\sin nt\right)\sin nx. \tag{4.63}$$

Используя начальные условия (4.61), по формулам (4.15) вычисляем коэффициенты ряда (4.63).

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-f_2(x)\right)\sin nxdx=-\frac{2}{\pi\sin\pi\omega}\int_0^{\pi}\sin\omega x\sin nxdx=$$

$$=-\frac{1}{\pi\sin\pi\omega}\int_0^{\pi}\left(\cos(\omega-n)x-\cos(\omega+n)x\right)dx=\frac{2}{\pi}\frac{n(-1)^n}{n^2-\omega^2}.$$

$$B_n=\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\left(-\omega f_1(x)\right)\sin nxdx=-\frac{2\omega}{\pi n}\int_0^{\pi}\left(\cos\omega x-\frac{\cos\pi\omega}{\sin\pi\omega}\sin\omega x\right)\sin nxdx=$$

$$=-\frac{2\omega}{\pi n}\left(\int_0^{\pi}\cos\omega x\sin nxdx-\frac{\cos\pi\omega}{\sin\pi\omega}\int_0^{\pi}\sin\omega x\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{2\omega}{\pi}\frac{1}{\omega^2-n^2}=-\frac{2\omega}{\pi}\frac{1}{n^2-\omega^2}.$$

Подставляем найденные коэффициенты A_n, B_n в ряд (4.63) и находим решение краевой задачи (4.60)–(4.62)

$$v(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2-\omega^2}\left(n(-1)^n\cos nt-\omega\sin nt\right), \tag{4.64}$$

где $\omega\neq n$.

Подставив найденные функции (4.57), (4.59), (4.64) в равенство (4.54), получаем решение исходной краевой задачи с неоднородными граничными условиями

$$u(x,t)=\frac{\sin\omega(\pi-x)}{\sin\pi\omega}\sin\omega t+\frac{\sin\omega x}{\sin\pi\omega}\cos\omega t+$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2-\omega^2}\left(n(-1)^n\cos nt-\omega\sin nt\right).$$

4.1.3 Решение 2-й краевой задачи

Рассмотрим продольные колебания стержня со свободными концами при заданных начальных условиях. В этом случае мы приходим ко 2-й краевой задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ \ 0<x<l,\ \ t>0, \tag{4.65}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi(x),\ \ 0\le x\le l \tag{4.66}$$

с однородными краевыми условиями 2-го типа

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\ \ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0,\ \ 0\le t\le l. \tag{4.67}$$

Аналогично краевой задаче 1-го рода, решение краевой задачи (4.65)–(4.67) ищем методом разделения переменных, т.е. в виде $u(x,t)=T(t)X(x)$. Собственные значения и собственные функции находим из решения краевой задачи вида (в соответствии с краевыми условиями (4.67))

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\quad X'(0)=X'(l)=0.$$

Собственные значения $\lambda_0=1,\quad \lambda_n=\dfrac{\pi n}{l}$ $(n=1,2,\dots)$ отвечают собственным функциям $X_0(x)=1,\quad X_n(x)=\cos\dfrac{\pi nx}{l}$. Соответственно, для функций $T(t)$ получаем уравнения вида

$$T_0''(t)=0,\ T_n''(t)+(a\lambda_n)^2 T_n(t)=0,$$

решения которых

$$T_0(t)=A_0+B_0 t,\ T_n(t)=A_n\cos\frac{\pi ant}{l}+B_n\sin\frac{\pi ant}{l}.$$

Таким образом, решение 2-й краевой задачи ищем в виде ряда

$$u(x,t)=T_0(t)X_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=$$

$$=A_0+B_0 t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi ant}{l}+B_n\sin\frac{\pi ant}{l}\right)\cos\frac{\pi nx}{l}. \qquad (4.68)$$

Из начальных условий (4.66) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{\pi nx}{l}=\varphi(x), \\ B_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi an}{l}B_n\cos\frac{\pi nx}{l}=\psi(x), \end{cases}$$

которая позволяет найти коэффициенты ряда (4.68)

$$A_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)dx,\ A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$B_0=\frac{1}{l}\int_0^l\psi(x)dx,\ B_n=\frac{2}{\pi an}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx. \qquad (4.69)$$

Таким образом, полученные нами равенства (4.68), (4.69) дают решение однородной краевой задачи 2-го рода.

Рассмотрим также продольные колебания стержня, когда на его концы действуют силы $F_1(t)$ и $F_2(t)$. В этом случае краевые задачи имеют вид

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{F_1(t)}{ES},\ \ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{F_2(t)}{ES}.$$

В этом случае мы приходим к краевой задаче 2-го рода с неоднородными краевыми условиями. Введем функции $\mu_1(t)=-\dfrac{F_1(t)}{ES}$, $\mu_2(t)=\dfrac{F_2(t)}{ES}$. Тогда краевая задача принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ 0<x<l,\ \ t>0, \tag{4.70}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\ \ 0\le x\le l, \tag{4.71}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\mu_1(t),\ \ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\mu_2(t). \tag{4.72}$$

Решение задачи (4.70)−(4.72) ищем в виде суммы двух функций

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \tag{4.73}$$

где функция $w(x,t)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}=\mu_1(t),\ \ \frac{\partial w(l,t)}{\partial x}=\mu_2(t). \tag{4.74}$$

Функцию $w(x,t)$ представим в виде

$$w(x,t)=\left(\alpha_1x^2+\beta_1x\right)\mu_1(t)+\left(\alpha_2x^2+\beta_2x\right)\mu_2(t). \tag{4.75}$$

Из краевых условий (4.74) получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2=\mu_1,\\ (2\alpha_1l+\beta_1)\mu_1+(2\alpha_2l+\beta_2)\mu_2=\mu_2,\end{cases}$$

решения которой $\alpha_1 = -\frac{1}{2l}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2l}$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$.

Подставив найденные коэффициенты в формулу (4.75), находим функцию

$$w(x,t) = \left(x - \frac{1}{2l}x^2 \right)\mu_1(t) + \frac{1}{2l}x^2\mu_2(t). \qquad (4.76)$$

Далее находим условия краевой задачи для функции $v(x,t)$. Подставляем функцию $w(x,t)$ (4.76) и равенство (4.73) в уравнение (4.70) и получаем уравнение для функции $v(x,t)$, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left(x - \frac{x^2}{2l} \right)\mu_1''(t) + \frac{x^2}{2l}\mu_2''(t) = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{l}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right) \right).$$

Из начальных условий (4.71) находим

$$v(x,0) = \varphi(x) - w(x,0) = \varphi(x) - \left(x - \frac{1}{2l}x^2 \right)\mu_1(0) - \frac{1}{2l}x^2\mu_2(0),$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \left(x - \frac{1}{2l}x^2 \right)\mu_1'(0) - \frac{1}{2l}x^2\mu_2'(0).$$

Таким образом, функция $v(x,t)$ является решением следующей неоднородной краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t), \; 0 < x < l, \; t > 0,$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - \left(x - \frac{1}{2l}x^2 \right)\mu_1(0) - \frac{1}{2l}x^2\mu_2(0), \; 0 \le x \le l,$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \left(x - \frac{1}{2l}x^2 \right)\mu_1'(0) - \frac{1}{2l}x^2\mu_2'(0),$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = 0.$$

Для функции $v(x,t)$ мы получаем краевую задачу с однородными краевыми условиями, однако волновое уравнение для функции $v(x,t)$ становится неоднородным.

4.2 Решение краевых задач для уравнений параболического типа

Совершенно аналогичным образом метод разделения переменных можно применять для решения уравнений параболического типа. Рассмотрим однородный стержень ($0 \le x \le l$), боковая поверхность которого теплоизолирована. Начальная температура стержня $u(x,0)=\varphi(x)$, концы стержня поддерживаются при нулевой температуре. Найти распределение температуры в стержне при $t>0$.

Так как температура концов стержня нулевая, то мы приходим к однородной краевой задаче 1-го рода для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ 0<x<l,\ \ t>0, \tag{4.77}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ 0\le x\le l, \tag{4.78}$$

$$u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0. \tag{4.79}$$

Уравнение (4.77) решаем методом разделения переменных, поэтому решение будет иметь вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x). \tag{4.80}$$

Собственные значения λ_n и отвечающие им собственные функции $X_n(x)$ 1-й краевой задачи даются формулами (4.9), (4.10). Для функции $T_n(t)$ получаем дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dT_n(t)}{dt}=-(a\lambda_n)^2T_n(t),$$

общее решение которого имеет вид

$$T_n(t)=A_ne^{-(a\lambda_n)^2t}=A_n\exp\left(-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2t\right).$$

Подставив функцию $T_n(t)$ в равенство (4.80), находим решение уравнения (4.77) в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-(a\lambda_n)^2 t}\sin\lambda_n x=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \exp\left(-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{\pi n x}{l}. \quad (4.81)$$

Коэффициенты ряда A_n находим из начального условия (4.78), получаем

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n x}{l},$$

тогда

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \quad (4.82)$$

Таким образом, полученные нами равенства (4.81), (4.82) дают решение 1-й однородной краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Если на концах стержня поддерживается заданная температура (в общем случае зависящая от времени), т.е. краевые условия имеют вид $u(0,t)=u_1(t)$, $u(l,t)=u_2(t)$, мы приходим к краевой задаче 1-го рода с неоднородными краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<l,\ t>0, \quad (4.83)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le l, \quad (4.84)$$

$$u(0,t)=u_1(t),\ u(l,t)=u_2(t). \quad (4.85)$$

Решение краевой задачи (4.83)−(4.85) ищем в виде суммы двух функций (формула (4.51))

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)=v(x,t)+\left(1-\frac{x}{l}\right)u_1(t)+\frac{x}{l}u_2(t). \quad (4.86)$$

При этом для функции $v(x,t)$ мы получаем однородную краевую задачу. Подставив функцию (4.86) в уравнение (4.83), находим уравнение для функции $v(x,t)$, которое имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1'(t)+\frac{x}{l}\mu_2'(t)=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

начальное условие для функции $v(x,t)$ получим из уравнения (4.84)

$$v(x,0)+\left(1-\frac{x}{l}\right)u_1(0)+\frac{x}{l}u_2(0)=\varphi(x).$$

Окончательно краевая задача для функции $v(x,t)$ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\left(1-\frac{x}{l}\right)u_1'(t)-\frac{x}{l}u_2'(t),\ \ 0<x<l,\ \ t>0,$$

$$v(x,0)=\varphi(x)-\left(1-\frac{x}{l}\right)u_1(0)-\frac{x}{l}u_2(0),\ \ 0\le x\le l,$$

$$v(0,t)=0,\ \ v(l,t)=0,\ t\ge 0.$$

Рассмотрим задачу, когда на концах стержня $x=0$ и $x=l$, начиная с момента времени $t=0$, поддерживаются тепловые потоки $q_1(t)$ и $q_2(t)$ соответственно. В этом случае краевые условия принимают вид

$$-kS\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=q_1(t),\ \ kS\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=q_2(t),$$

где $S-$ площадь поперечного сечения стержня.

Пусть начальная температура стержня $u(x,0)=\varphi(x)$. Для определения температуры в стержне при $t>0$ мы приходим к необходимости решения краевой задачи 2-го рода:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ 0<x<l,\ \ t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ 0\le x\le l,$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=Q_1(t),\ \ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=Q_2(t),\ \ t\ge 0,$$

где мы ввели функции $Q_1(t)=-\dfrac{q_1(t)}{kS},\ \ Q_2(t)=\dfrac{q_2(t)}{kS}.$

Если концы стержня теплоизолированы, то мы приходим к задаче с однородными краевыми условиями

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0.$$

Уравнение (4.77) описывает распределение температуры в стержне с теплоизолированной боковой поверхностью. Получим уравнение теплопроводности для случая, когда на боковой поверхности стержня происходит теплообмен со средой, имеющей температуру $u_0(t)$. При выводе уравнения теплопроводности для одномерного стержня будем рассматривать простейшую ситуацию, когда все коэффициенты задачи являются постоянными. Наряду с коэффициентом теплопроводности материала стержня k введем также коэффициент внешней (конвективной) теплопроводности среды H. Полагаем, что площадь поперечного сечения стержня $S = \mathrm{const},$ периметр поперечного сечения стержня $\delta = \mathrm{const}.$ Объемная плотность источников тепла дается функцией $f(x,t)$.

Выделим в стержне элементарный объем $\Delta v = \Delta x S,$ заключенный между сечениями стержня x и $x + \Delta x.$ За время Δt в элементарный объем Δv приходит количество тепла

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 + Q_{2v}, \tag{4.87}$$

где тепловой поток Q_1 определяется внешними источниками тепла

$$Q_1 = f(x,t) S \Delta x \Delta t,$$

Q_2 − поток тепла через сечения x и $x + \Delta x,$ который определяем по закону Фурье

$$Q_2 = kS\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\Delta t = kS\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x \Delta t,$$

Q_{2v} − приток тепла через боковую поверхность, этот поток по закону Ньютона пропорционален разности температур

$$Q_{2v} = X\delta\big(\mu_0(t) - u(x,t)\big)\Delta x \Delta t.$$

Суммарное количество тепла расходуется на нагревание элементарного объема стержня от температуры $u(x,t)$ до $u(x+\Delta x,t),$ поэтому получаем

$$Q_3 = c\rho S\Big(u\big(x,t+\Delta t\big)-u\big(x,t\big)\Big)\Delta x = c\rho S\,\frac{\partial u\big(x,t\big)}{\partial t}\,\Delta x\Delta t.$$

Подставив найденные величины тепловых потоков в равенство (4.87) и сокращая полученное равенство на $\Delta x\Delta t,$ получаем уравнение теплопроводности вида

$$c\rho S\,\frac{\partial u\big(x,t\big)}{\partial t} = kS\,\frac{\partial^2 u\big(x,t\big)}{\partial x^2} - X\delta\Big(u\big(x,t\big)-u_0\big(t\big)\Big)+f\big(x,t\big)S$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h\Big(u-u_0\big(t\big)\Big)+F\big(x,t\big),$$

где мы ввели коэффициент теплообмена $h = \dfrac{X\delta}{c\rho S}$ на боковой поверхности стержня.

Пример 4.4. Найти температуру стержня, на концах которого $x=0$ и $x=l$ поддерживаются постоянные тепловые потоки $q_1 = \text{const}$ и $q_2 = \text{const}$ соответственно. На боковой поверхности стержня происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру. Начальная температура стержня $u\big(x,0\big)=0.$

Для определения температуры стержня мы получаем краевую задачу 2-го рода со стационарными неоднородностями в краевых условиях

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu,\;\; 0<x<l,\;\; t>0, \tag{4.88}$$

$$u\big(x,0\big)=\varphi\big(x\big),\;\; 0\le x\le l, \tag{4.89}$$

$$\frac{\partial u\big(0,t\big)}{\partial x} = Q_1 = \text{const},\;\; \frac{\partial u\big(l,t\big)}{\partial x} = Q_2 = \text{const},\;\; t>0. \tag{4.90}$$

Решение поставленной краевой задачи ищем в виде двух функций

$$u\big(x,t\big) = v\big(x,t\big)+F\big(x\big), \tag{4.91}$$

где функция $F\big(x\big)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям (4.90).

Подставляем функцию (4.91) в уравнение (4.88) и получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-hv+\left(a^2F''(x)-hF(x)\right).$$

Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет уравнению

$$a^2F''(x)-hF(x)=0,\ \ F''(x)-\left(\frac{\sqrt{h}}{a}\right)^2F(x)=0. \qquad (4.92)$$

Общее решение уравнения (4.92) имеет вид

$$F(x)=c_1\operatorname{ch}\frac{x\sqrt{h}}{a}+c_2\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{h}}{a}. \qquad (4.93)$$

Из краевых условий $F'(0)=Q_1$ и $F'(l)=Q_2$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} F'(0)=\dfrac{\sqrt{h}}{a}c_2=Q_1, \\ F'(l)=\dfrac{\sqrt{h}}{a}\left(c_1\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}+c_2\operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}\right)=Q_2, \end{cases}$$

из которой находим коэффициенты

$$c_1=\frac{a\left(Q_2-Q_1\operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}\right)}{\sqrt{h}\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}},\ \ c_2=\frac{aQ_1}{\sqrt{h}}.$$

Подставив найденные коэффициенты c_1 и c_2 в равенство (4.93), получаем функцию

$$F(x)=\frac{a\left(Q_2-Q_1\operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}\right)}{\sqrt{h}\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}}\operatorname{ch}\frac{x\sqrt{h}}{a}+\frac{aQ_1}{\sqrt{h}}\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{h}}{a}. \qquad (4.94)$$

Для функции $v(x,t)$ получаем однородную краевую задачу. Из нулевого начального условия (4.89) находим $v(x,0)+F(x)=0$.

Тогда

$$v(x,0)=-F(x)=c_1=\frac{a\left(Q_1\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}-Q_2\right)}{\sqrt{h}\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{h}}{a}}\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}-\frac{aQ_1}{\sqrt{h}}\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{h}}{a}.$$

Таким образом, краевая задача для функции $v(x,t)$ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-hv,\ \ 0<x<l,\ \ t>0, \qquad (4.95)$$

$$v(x,0)=\frac{a\left(Q_1\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}-Q_2\right)}{\sqrt{h}\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{h}}{a}}\operatorname{ch}\frac{x\sqrt{h}}{a}-\frac{aQ_1}{\sqrt{h}}\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{h}}{a},\ \ 0\le x\le l, \qquad (4.96)$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x}=0,\ \ \frac{\partial v(l,t)}{\partial x}=0,\ \ t\ge 0. \qquad (4.97)$$

Решение уравнения (4.95) ищем методом разделения переменных в виде ряда по собственной функции 2-й краевой задачи $X_0(x)=1$, $X_n(x)=\cos\frac{\pi nx}{l}$, $n=1,2,\ldots$, т.е. в виде

$$v(x,t)=T_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{\pi nx}{l}. \qquad (4.98)$$

Подставив функцию (4.98) в уравнение (4.95), находим уравнения для функций $T_0(t)$, $T_n(t)$ ($n=1,2,\ \ldots$):

$$\frac{dT_0(t)}{dt}=-hT_0(t),\ \ \frac{dT_n(t)}{dt}=-\left(\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2+h\right)T_n(t),$$

интегрируя которые, получаем функции

$$T_0(t)=A_0e^{-ht},\ \ T_n(t)=A_n\exp\left(-\left(\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2+h\right)t\right).$$

Как следствие, функция $v(x,t)$ принимает вид

$$v(x,t)=A_0e^{-ht}+e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{\pi nx}{l}\exp\left(-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2t\right). \qquad (4.99)$$

Коэффициенты A_0, A_n ($n=1,2,\ldots$) находим, используя начальное условие (4.96):

$$A_0=\frac{1}{l}\int_0^l v(x,0)\,dx=\frac{a}{l\sqrt{h}}\left(\frac{a\left(Q_1\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}-Q_2\right)}{\sqrt{h}\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{h}}{a}}\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{h}}{a}\Bigg|_0^l-\frac{aQ_1}{\sqrt{h}}\operatorname{ch}\frac{x\sqrt{h}}{a}\Bigg|_0^l\right)=$$

$$=\frac{a^2}{lh}\left(Q_1\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}-Q_2-Q_1\left(\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}-1\right)\right)=\frac{a^2}{lh}(Q_1-Q_2),$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l v(x,0)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx=$$

$$=\frac{2a}{l\sqrt{h}}\left(\frac{Q_1\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}-Q_2}{\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{h}}{a}}\int_0^l\operatorname{ch}\frac{x\sqrt{h}}{a}\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx-Q_1\int_0^l\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{h}}{a}\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx\right)=$$

$$=\frac{2a}{l\sqrt{h}}\left(\frac{Q_1\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}-Q_2}{\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{h}}{a}}\,\frac{a\sqrt{h}(-1)^n\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{h}}{a}}{h+\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2}-Q_1\frac{a\sqrt{h}\left(\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}(-1)^n-1\right)}{h+\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{2a^2}{l}\frac{1}{h+\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2}\left((-1)^n\left(Q_1\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}-Q_2\right)-Q_1\left((-1)^n\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}-1\right)\right)=$$

$$=\frac{2a^2}{l}\frac{Q_1-Q_2(-1)^n}{h+\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2}.$$

Подставив найденные значения коэффициентов в равенство (4.99), находим решение краевой задачи (4.95)−(4.97):

$$v(x,t)=\frac{a^2}{lh}(Q_1-Q_2)e^{-ht}+\frac{2a^2}{l}e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_1-Q_2(-1)^n}{h+\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2}\cos\frac{\pi nx}{l}e^{-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 t}. \quad (4.100)$$

Решение исходной неоднородной краевой задачи находим, подставляя найденные функции $F(x)$ (4.94), получаем

$$u(x,t)=\frac{a\left(Q_2-Q_1\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}\right)}{\sqrt{h}\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{h}}{a}}\operatorname{ch}\frac{x\sqrt{h}}{a}+\frac{aQ_1}{\sqrt{h}}\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{h}}{a}+\frac{a^2}{lh}(Q_1-Q_2)e^{-ht}+$$

$$+\frac{2a^2}{l}e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_1-Q_2(-1)^n}{h+\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2}\cos\frac{\pi nx}{l}e^{-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 t}.$$

4.3 Упражнения для самостоятельной работы

Упражнение 1. *Найти решения следующих задач.*

1.1. Решить задачу о продольных колебаниях вертикально висящего тяжелого стержня под действием силы тяжести. Конец стержня $x=0$ закреплен, конец стержня $x=l$ свободен.

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{g}{2a^2}x(2l-x)-\frac{16gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi a(2n+1)t}{2l}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}}{(2n+1)^3}.$$

Указание. Краевая задача имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g$, где g – ускорение силы тяжести. Граничные условия $u(0,t)=0$, $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0$. Начальные условия $u(x,0)=0$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$.

1.2. Найти решение задачи о поперечных колебаниях закрепленной на концах струны под действием силы тяжести.

Ответ: $u(x,t)=\frac{g}{2a^2}x(l-x)$.

Указание. Краевая задача имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g$. Граничные условия $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$. Начальные условия $u(x,0)=0$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $0<x<l$, $t>0$.

1.3. Рассмотреть продольные колебания тяжелого стержня с учетом силы сопротивления среды. Сила сопротивления среды, действующая на единицу массы стержня $F_c(x,t)=-2\nu\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, где $\nu=\mathrm{const}$.

Ответ: $u(x,t)=\frac{g}{2a^2}x(2l-x)-\frac{16gl^2}{\pi^3a^2}e^{-\nu t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\omega_n t+\frac{\nu}{\omega_n}\sin\omega_n t}{(2n+1)^3}\times$

$\times\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}$, где частоты $\omega_n=\sqrt{\frac{\pi^2a^2(2n+1)^2}{4l^2}-\nu^2}$.

Указание. Краевая задача имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\nu\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g$. Граничные условия $u(0,t)=0$, $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0$. Начальные условия $u(x,0)=0$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$.

1.4. Найти решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bx(x-l),\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0.$$

Начальные условия $u(x,0)=0$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $0<x<l$, $t>0$.

Ответ: $u(x,t)=\frac{1}{6}bx(lx^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}l^3)+v(x,t)$, где

$$v(x,t)=\frac{8bl^4}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^5}\cos\frac{\pi(2k+1)t}{l}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}.$$

Указание. Решение краевой задачи ищем в виде $u(x,t)=v(x,t)+F(x)$, где функция $F(x)$ является решением уравнения $F''(x)+bx(x-l)=0$, $F(0)=F(l)=0$.

Упражнение 2. *Найти решение краевых задач для волнового уравнения.*

2.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A\sin\dfrac{\pi a t}{l}\sin\dfrac{\pi x}{l}$, $\quad u(0,t)=0$, $\quad u(l,t)=0$.

Начальные условия $u(x,0)=\sin\dfrac{\pi x}{l}+\sin\dfrac{2\pi x}{l}$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{Al}{2\pi a}\left(\cos\dfrac{\pi a t}{l}+\dfrac{l}{\pi a}\sin\dfrac{\pi a t}{l}-t\cos\dfrac{\pi a t}{l}\right)\sin\dfrac{\pi x}{l}+$

$+\dfrac{Al}{2\pi a}\cos\dfrac{2\pi a t}{l}\sin\dfrac{2\pi x}{l}$.

2.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{-t}\sin\dfrac{\pi a t}{2l}\cos\dfrac{\pi x}{2l}$, $\quad \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0$, $\quad u(l,t)=0$.

Начальные условия $u(x,0)=0$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $0<x<l$, $t>0$.

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{1}{1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\left(\frac{\pi a}{l}(e^{-t}-1)\cos\frac{\pi a t}{2l}+(e^{-t}+1)\sin\frac{\pi a t}{2l}\right)\cos\frac{\pi x}{2l}.$$

2.3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\sin t$, $u(\pi,t)=\sin 2t$. Начальные условия $u(x,0)=0$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $0<x<\pi$, $t>0$.

Ответ: $u(x,t)=\sin x\sin t+\cos 2x\sin 2t+v(x,t)$, где

$$v(x,t)=\frac{16}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n+1)(-1)^n}{16-(2n+1)^2}-\frac{1}{4-(2n+1)^2}\right)\cos\frac{(2n+1)x}{2}\sin\frac{(2n+1)t}{2}.$$

Указание. Решение краевой задачи искать в виде $u(x,t)=f_1(x)\sin t+f_2(x)\sin 2t+v(x,t)$, где функция $f_1(x)$ – решение граничной задачи $f_1''(x)+f_1(x)=0$, $f_1'(0)=1$, $f_1(\pi)=0$, функция $f_2(x)$ – решение граничной задачи $f_2''(x)+4f_2(x)=0$, $f_2'(0)=0$, $f_2(\pi)=1$.

2.4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(0,t)=t^2$, $u(\pi,t)=t^3$. Начальные условия $u(x,0)=\sin x$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $0<x<\pi$, $t>0$.

Ответ:

$u(x,t)=\left(1-\dfrac{x}{\pi}\right)t^2+\dfrac{x}{\pi}t^3+v(x,t)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(t^2-(-1)^n t^3)\sin nx+v(x,t)$, где

$$v(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(3(-1)^n t-1+\cos nt-\frac{3(-1)^n}{n}\sin nt\right)\sin nx.$$

2.5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(0,t)=t$, $\dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=t^2$. Начальные условия $u(x,0)=0$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $0<x<\pi$, $t>0$.

Ответ: $u(x,t)=t(xt+1)+\dfrac{1}{3}x(x^2-3\pi^2)+v(x,t)$, где

$$v(x,t)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\left(\frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)t}{2}-\sin\frac{(2n+1)t}{2}\right)\sin\frac{(2n+1)x}{2}.$$

2.6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x(x-\pi)\sin t$, $u(0,t)=0$, $u(\pi,t)=0$. Начальные условия $u(x,0)=0$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $0<x<\pi$, $t>0$.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{4}{\pi}(t\cos t-\sin t)\sin x-\dfrac{2}{\pi}\sin t\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k+1)x}{k(k+1)(2k+1)^3}+$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)t\sin(2k+1)x}{k(k+1)(2k+1)^4}.$$

2.7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b^2u$, $u(0,t)=A=\text{const}$, $u(l,t)=B=\text{const}$. Начальные условия $u(x,0)=\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $0<x<l$, $t>0$.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{bl}{a}}\left(A\operatorname{sh}\dfrac{b(l-x)}{a}+B\operatorname{sh}\dfrac{bx}{a}\right)+v(x,t)$, где

$$v(x,t)=\frac{2\pi a^2}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(B(-1)^n-A)}{\left(\dfrac{\pi an}{l}\right)^2+b^2}\cos\left(t\sqrt{\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2+b^2}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Указание. Решение задачи искать в виде $u(x,t)=F(x)+v(x,t)$, где функция $F(x)$ – решение граничной задачи $a^2F''(x)-b^2F(x)=0$, $F(0)=A$, $F(l)=B$.

Упражнение 3. *Найти решение краевой задачи* $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+A\cos\omega t$, $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0$ $u(l,t)=0$. Начальные условия $u(x,0)=\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $0<x<l$, $t>0$.

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{A}{\omega^2}\left(\frac{\cos\dfrac{\omega x}{a}}{\cos\dfrac{\omega l}{a}}-1\right)+\frac{4A}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\dfrac{\pi a(2n+1)t}{2l}}{(2n+1)\left(\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2-\dfrac{\pi^2(2n+1)^2}{4l^2}\right)}\times$$

$$\times\cos\frac{\pi(2n+1)x}{2l}.$$

Указание. Решение задачи искать в виде $u(x,t)=f(x)\cos\omega t+v(x,t)$, где функция $f(x)$ является решением граничной задачи $a^2f''(x)+\omega^2f(x)+A=0$, $f'(0)=0$, $f(l)=0$.

Упражнение 4. *Найти решение задачи о поперечных колебаниях закрепленной на концах* $x=0$ *и* $x=l$ *струны под действием непрерывно распределенной силы с линейной плотностью* $f(x,t)=$ $=\rho F_0 x\sin\omega t$.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{F_0}{\omega^2\sin\dfrac{\omega l}{a}}\left(l\sin\dfrac{\omega x}{a}-x\sin\dfrac{\omega l}{a}\right)\sin\omega t+$

$$+\frac{2F_0\omega l^4}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi ant}{l}}{(\pi n)^2\left((\pi an)^2-(\omega l)^2\right)}\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Указание. Краевая задача имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F_0 x\sin\omega t$, $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$. Начальные условия $u(x,0)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $0<x<l$, $t>0$.

Упражнение 5. *Найти распределение температуры в стержне* ($0\le x\le l$)*, концы которого поддерживаются при постоянных температурах* $u(0,t)=u_1=\text{const}$, $u(l,t)=u_2=\text{const}$. *Начальная температура стержня* $u(x,0)=u_0=\text{const}$. *Теплообмен на боковой поверхности стержня отсутствует.*

Ответ: $u(x,t)=u_1+(u_2-u_1)\frac{x}{l}+v(x,t)$, где

$$v(x,t)=\frac{4(u_0-u_1)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}\exp\left(-\frac{\pi^2a^2(2k+1)^2t}{l^2}\right)+$$

$$+\frac{2(u_2-u_1)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi nx}{l}\exp\left(-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 t\right).$$

Указание. Решение краевой задачи искать в виде $u(x,t)=\omega(x)+v(x,t)$, где функция $\omega(x)$ является решением граничной задачи $\omega''(x)=0$, $\omega(0)=u_1$, $\omega(l)=u_2$.

Упражнение 6. *Найти распределение температуры в стержне* ($0\le x\le l$)*, на боковой поверхности которого происходит теплообмен со средой, имеющей постоянную температуру* u_0. *На концах стержня поддерживается нулевая температура, начальная температура стержня также нулевая.*

Ответ:

$$u(x,t)=u_0-\frac{u_0}{\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{h}}{a}}\left(\left(1-\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}\right)\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{h}}{a}+\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{h}}{a}\operatorname{ch}\frac{x\sqrt{h}}{a}\right)-$$

$$-\frac{4u_0hl^2}{\pi}e^{-ht}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l}}{(2k+1)(\pi^2a^2(2k+1)^2+hl^2)}e^{-\left(\frac{\pi a(2k+1)}{l}\right)^2 t}.$$

Указание. Краевая задача имеет вид $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h(u-u_0)$, $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$, $u(x,0)=0$, $0<x<l$, $t>0$. Решение задачи искать в виде $u(x,t)=F(x)+v(x,t)$, где функция $F(x)$ является решением граничной задачи $a^2F''(x)-hF(x)+hu_0=0$, $F(0)=F(l)=0$.

Упражнение 7. *Найти решение краевой задачи*
$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-hu$, $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=Q=\mathrm{const}$, $u(l,t)=0$, $u(x,0)=0$, $0<x<l$, $t>0$.

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{aQ}{\sqrt{h}\,\mathrm{ch}\frac{l\sqrt{h}}{a}}\mathrm{sh}\frac{(x-l)\sqrt{h}}{a}+\frac{2Qa^2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi(2n+1)x}{2l}}{\frac{(\pi a)^2}{4l^2}(2n+1)^2+h}\times$$

$$\times\exp\left(-\left(\frac{(\pi a)^2}{4l^2}(2n+1)^2+h\right)t\right).$$

5 ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА ФУРЬЕ. ДВУМЕРНЫЕ И ТРЕХМЕРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

5.1 Метод Фурье (общий подход)

В этом разделе мы дадим изложение метода Фурье в его наиболее общей постановке для решения краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов, не приводя строгих доказательств полученных результатов.

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u,\ \ 0<x<l, t>0, \tag{5.1}$$

где $p(x), p'(x), q(x), \rho(x)$ – непрерывные функции при $0\le x\le l,$ причем $p(x)>0, q(x)\ge 0, \rho(x)>0.$

Требуется найти решение уравнения (5.1), удовлетворяющее однородным краевым условиям

$$\alpha_1 u(0,t)+\beta_1\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0, \alpha_2 u(l,t)+\beta_2\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0, \tag{5.2}$$

где $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2=\text{const},$ причем $\alpha_1^2+\beta_1^2\ne 0,$ $\alpha_2^2+\beta_2^2=0,$ и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\ \ 0\le x\le l. \tag{5.3}$$

Будем искать решение уравнения (5.1) в виде произведения двух функций

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{5.4}$$

Тогда, подставив функцию (5.4) в уравнение (5.1), получаем

$$\rho(x)X(x)T''(t)=T(t)\frac{\partial}{\partial x}(p(x)X'(x))-q(x)X(x)T(t),$$

или, разделив переменные, приходим к уравнению

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}(p(x)X'(x))-q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{5.5}$$

Левая часть уравнения (5.5) зависит только от x, а правая − только от t, поэтому равенство возможно лишь тогда, когда обе дроби в уравнении (5.5) будут равны постоянной. Обозначим эту постоянную (константу разделения) через λ. Тогда из равенства (5.5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t)+\lambda T(t)=0, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(p(x)X'(x))+(\lambda\rho(x)-q(x))X(x)=0. \tag{5.7}$$

При этом, чтобы получить нетривиальные решения уравнения (5.1) вида (5.4), удовлетворяющие краевым условиям (5.2), необходимо, чтобы функция $X(x)$ удовлетворяла краевым условиям

$$\alpha_1X(0)+\beta_1X'(0)=0, \alpha_2X(l)+\beta_2X'(l)=0. \tag{5.8}$$

Таким образом, приходим к так называемой задаче Штурма − Лиувилля о собственных значениях: найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (5.7), удовлетворяющие краевым условиям (5.8). Те значения параметра λ, при которых краевая задача (5.7)–(5.8) имеет нетривиальное решение, называются собственными значениями, а сами эти решения – собственными функциями, отвечающими данному собственному значению.

Перечислим некоторые общие свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма − Лиувилля.

1 Всякому собственному значению соответствует только одна линейно независимая собственная функция.

2 Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны с весом $\rho(x)$, то есть

$$\int_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x)dx=0\ (n\neq m). \tag{5.9}$$

В равенстве (5.9) $X_n(x)$ – собственная функция, отвечающая собственному значению λ_n, а $X_m(x)$ – собственному значению λ_m.

3 Все собственные значения задачи Штурма − Лиувилля (5.7)–(5.8) вещественны.

4 При выполнении условий $p(x)>0, q(x)\ge 0, \rho(x)>0,$ а также при выполнении условия

$$p(l)X_k(l)X_k'(l)-p(0)X_k(0)X_k'(0)\le 0,$$

где $X_k(x)$ – собственная функция, отвечающая собственному значению λ_k, все собственные значения задачи Штурма − Лиувилля (5.7)–(5.8) неотрицательны.

Рассмотрим теперь уравнение (5.6). Его общее решение при $\lambda=\lambda_k$ имеет вид

$$T_k(t)=A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+B_k\sin\sqrt{\lambda_k}t,$$

где A_k и B_k – произвольные постоянные.

Таким образом, каждая функция

$$u_k(x,t)=T_k(t)X_k(x)=\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+B_k\sin\sqrt{\lambda_k}t\right)X_k(x)$$

будет решением уравнения (5.1), удовлетворяющим граничным условиям (5.2).

Как следствие, общее решение уравнения (5.1) можно представить в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+B_k\sin\sqrt{\lambda_k}t\right)X_k(x). \qquad (5.10)$$

Коэффициенты A_k и B_k находим, используя начальные условия (5.3)

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kX_k(x), \qquad (5.11)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\sqrt{\lambda_k}X_k(x). \qquad (5.12)$$

Обе части равенства (5.11) умножим на функцию $\rho(x)X_k(x)$ и проинтегрируем на отрезке $x\in[0;l]$. С учетом условия ортогональности собственных функций (5.9) получаем

$$\int_0^l \varphi(x)\rho(x)X_k(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)dx = A_k \|X_k\|^2,$$

где

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx.$$

Число $\|X_k\|$ называется *нормой собственной функции* $X_k(x)$.

Аналогичным образом из равенства (5.12) находим коэффициенты B_k. Таким образом, решение краевой задачи (5.1)–(5.3) для уравнения гиперболического типа дается рядом (5.10), коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$A_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^l \varphi(x)\rho(x)X_k(x)dx, \quad B_k = \frac{1}{\|X_k\|^2\sqrt{\lambda_k}}\int_0^l \psi(x)\rho(x)X_k(x)dx.$$

Совершенно аналогичным образом общая схема метода Фурье реализуется и при решении краевых задач для уравнений параболического типа. Решение краевой задачи для параболического уравнения общего вида

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \ \ 0 < x < l, t > 0$$

с краевыми условиями (5.2) и начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$ $(0 \le x \le l)$ будет иметь вид

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} X_k(x), \tag{5.13}$$

где λ_k и $X_k(x)$ – собственные значения и отвечающие им собственные функции краевой задачи (5.7), (5.8). Коэффициенты ряда (5.13) вычисляются по формуле

$$a_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_k(x)dx. \tag{5.14}$$

5.2 Краевая задача 3-го рода для уравнения теплопроводности

Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями, когда на концах стержня происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру. При такой постановке задачи требуется найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \ 0 < x < l, t > 0, \tag{5.15}$$

удовлетворяющее однородным краевым условиям 3-го типа

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - hu(0,t) = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + hu(l,t) = 0, \tag{5.16}$$

где $h = \frac{\kappa}{ks} -$ коэффициент теплообмена на концах стержня, $\kappa -$ коэффициент теплопроводности среды.

Начальная температура стержня дается функцией $\varphi(x)$, то есть начальное условие для уравнения (5.15) имеет вид

$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l. \tag{5.17}$$

Следуя методу Фурье, нетривиальное решение уравнения (5.15) ищем в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{5.18}$$

Подставив функцию (5.18) в уравнение (5.15) и разделив переменные, получаем

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Поэтому функции $T(t)$ и $X(x)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$T'(t) + (a\lambda)^2 T(t) = 0, \tag{5.19}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{5.20}$$

При этом из равенств (5.16) получаем следующие граничные условия для решений уравнения (5.20):

$$X'(0) - hX(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0. \tag{5.21}$$

Общее решение уравнения (5.20) имеет вид

$$X(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \sin\lambda x. \tag{5.22}$$

Подставив функцию (5.22) в граничные условия (5.21), получим два равенства

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = \lambda c_2 - hc_1 = 0, \\ X'(l) + hX(l) = \lambda(c_2 \cos\lambda l - c_1 \sin\lambda l) + h(c_1 \cos\lambda l + c_2 \sin\lambda l) = 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

Таким образом, коэффициенты c_1 и c_2 являются решениями следующей системы однородных уравнений:

$$\begin{cases} -hc_1 + \lambda c_2 = 0, \\ c_1(h\cos\lambda l - \lambda \sin\lambda l) + c_2(h\sin\lambda l + \lambda\cos\lambda l) = 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Система уравнений (5.24) имеет нетривиальное решение в том случае, когда определитель системы равен нулю. Из этого условия получаем

$$\det\begin{bmatrix} -h & \lambda \\ h\cos\lambda l - \lambda\sin\lambda l & h\sin\lambda l + \lambda\cos\lambda l \end{bmatrix} = -h(h\sin\lambda l + \lambda\cos\lambda l) -$$

$$-\lambda(h\cos\lambda l - \lambda\sin\lambda l) = (\lambda^2 - h^2)\sin\lambda l - 2\lambda h\cos\lambda l = 0.$$

Последнее равенство дает нам характеристическое уравнение исходной краевой задачи. Поэтому собственными значениями краевой задачи 3-го рода будут неотрицательные корни $\lambda = \lambda_n$ уравнения

$$(\lambda_n^2 - h^2)\sin\lambda_n l = 2\lambda_n h\cos\lambda_n l$$

или

$$\mathrm{tg}\lambda_n l = \frac{2\lambda_n h}{\lambda_n^2 - h^2}. \quad (5.25)$$

Из первого равенства системы (5.23) получаем соотношение между коэффициентами при $\lambda = \lambda_n$

$$c_1 = \frac{c_2\lambda_n}{h}.$$

Подставим это соотношение в равенство (5.22), получаем собственную функцию

$$X_n(x) = \frac{c_2}{h}(\lambda_n \cos\lambda_n x + h\sin\lambda_n x).$$

Положим $c_2 = h$ и окончательно собственную функцию $X_n(x)$, отвечающую собственному значению λ_n, представим в следующем виде:

$$X_n(x) = \lambda_n \cos\lambda_n x + h\sin\lambda_n x. \qquad (5.26)$$

Покажем, что для собственных функций вида (5.26) выполняются условия ортогональности вида (5.9). Запишем дифференциальные уравнения для собственных функций X_n и X_m, отвечающих соответственно собственным значениям λ_n и λ_m (подставляем функции X_n и X_m в уравнение (5.20))

$$X_n'' + \lambda_n^2 X_n = 0, \; X_m'' + \lambda_m^2 X_m = 0. \qquad (5.27)$$

Первое уравнение в системе (5.27) умножаем на функцию X_m, второе уравнение – на X_n, интегрируем уравнения на отрезке $x \in [0; l]$, затем из первого уравнения отнимаем второе, получаем

$$\int_0^l X_n'' X_m dx - \int_0^l X_m'' X_n dx + (\lambda_n^2 - \lambda_m^2)\int_0^l X_n X_m dx = 0$$

или

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2)\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \int_0^l (X_n''(x) X_m(x) - X_m''(x) X_n(x)) dx =$$

$$= \int_0^l \frac{d}{dx}(X_n'(x) X_m(x) - X_m'(x) X_n(x)) dx =$$

$$= \left(X_n'(x) X_m(x) - X_m'(x) X_n(x) \right)\Big|_0^l =$$

$$= X_n'(l) X_m(l) - X_m'(l) X_n(l) + X_m'(0) X_n(0) - X_n'(0) X_m(0).$$

Из граничных условий (5.21) получаем следующие равенства:

$$X_n'(l) = -hX_n(l),\; X_m'(l) = -hX_m(l),\; X_n'(0) = hX_n(0),\; X_m'(0) = hX_m(0),$$

используя которые, приходим к результату

$$X_n'(l) X_m(l) - X_m'(l) X_n(l) + X_m'(0) X_n(0) - X_n'(0) X_m(0) =$$
$$= -hX_n(l) X_m(l) + hX_n(l) X_m(l) + hX_m(0) X_n(0) - hX_n(0) X_m(0) = 0.$$

Таким образом, мы пришли к равенству

$$(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx=0.$$

Так как $\lambda_m\neq\lambda_n$, то мы получаем

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx=0,\ (n\neq m),$$

то есть условие ортогональности собственных функций, отвечающих различным собственным значениям, выполняется.

Вычислим квадрат нормы собственной функции (5.26), используя характеристическое уравнение (5.25). Находим

$$\|X_n\|^2=\int_0^l(\lambda_n\cos\lambda_n x+h\sin\lambda_n x)^2dx=\lambda_n^2\int_0^l\cos^2\lambda_n xdx+$$

$$+\ 2\lambda_n h\int_0^l\cos\lambda_n x\sin\lambda_n xdx+h^2\int_0^l\sin^2\lambda_n xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\lambda_n^2\int_0^l(1+\cos 2\lambda_n x)dx+2h\int_0^l\sin\lambda_n xd\sin\lambda_n x+\frac{1}{2}h^2\int_0^l(1-\cos 2\lambda_n x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda_n^2+h^2)l+\frac{1}{4\lambda_n}(\lambda_n^2-h^2)\sin 2\lambda_n l+h\sin^2\lambda_n l.$$

Из уравнения (5.25) находим

$$\mathrm{ctg}\lambda_n l=\frac{\lambda_n^2-h^2}{2\lambda_n h},$$

тогда

$$\sin^2\lambda_n l=\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\lambda_n l}=\frac{1}{1+\dfrac{(\lambda_n^2-h^2)^2}{4\lambda_n^2h^2}}=\frac{4\lambda_n^2h^2}{(\lambda_n^2+h^2)^2},$$

$$\sin 2\lambda_n l=2\sin^2\lambda_n l\cdot\mathrm{ctg}\lambda_n l=\frac{4\lambda_n h(\lambda_n^2-h^2)}{(\lambda_n^2+h^2)^2}.$$

Используя полученные соотношения, для величины $\|X_n\|^2$ окончательно получаем

$$\|X_n\|^2 = \frac{1}{2}(\lambda_n^2 + h^2)l + \frac{h(\lambda_n^2 - h^2)^2}{(\lambda_n^2 + h^2)^2} + \frac{4\lambda_n^2 h^3}{(\lambda_n^2 + h^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda_n^2 + h^2)l + \frac{h}{(\lambda_n^2 + h^2)^2}\Big((\lambda_n^2 - h^2)^2 + 4\lambda_n^2 h^2\Big) = \frac{(\lambda_n^2 + h^2)^2 l + 2h}{2}.$$

Итак, для квадрата нормы собственной функции $X_n(x)$ мы получили следующую величину:

$$\|X_n\|^2 = \frac{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h}{2}. \tag{5.28}$$

Вернемся теперь к уравнению (5.6). При $\lambda = \lambda_n$ общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = A_n e^{-(a\lambda_n)^2 t}. \tag{5.29}$$

Тогда, по формуле (5.13) общей теории метода Фурье находим решение исходной краевой задачи 3-го рода (5.15)–(5.17), с учетом явного вида функций $X_n(x)$ и $T_n(t)$ (формулы (5.26) и (5.29))

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(a\lambda_n)^2 t}(\lambda_n \cos\lambda_n x + h \sin\lambda_n x), \tag{5.30}$$

где коэффициенты A_n вычисляем по формуле (5.14) (с учетом полученного для величины $\|X_n\|^2$ выражения (5.28))

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \varphi(x) X_n(x)\,dx = \\ &= \frac{2}{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h}\int_0^l \varphi(x)(\lambda_n \cos\lambda_n x + h \sin\lambda_n x)\,dx. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Приведем также результаты решения краевой задачи 3-го рода общего вида, с различными коэффициентами теплообмена на концах стержня, то есть мы решаем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ 0 < x < l,\ t > 0 \tag{5.32}$$

с однородными краевыми условиями вида

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - h_1 u(0,t) = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + h_2 u(l,t) = 0 \qquad (5.33)$$

и начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x) \,. \qquad (5.34)$$

В этом случае мы решаем уравнение (5.20) с граничными условиями вида

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \, X'(l) + h_2 X(l) = 0 \,,$$

которые дают следующую систему уравнений на коэффициенты c_1 и c_2 (в общем решении уравнения (5.20) (равенство (5.22)):

$$\begin{cases} -hc_1 + \lambda c_2 = 0, \\ c_1(h_2 \cos\lambda l - \lambda \sin\lambda l) + c_2(h_2 \sin\lambda l + \lambda \cos\lambda l) = 0. \end{cases} \qquad (5.35)$$

Приравняв к нулю определитель системы (5.35), получим характеристическое уравнение

$$\mathrm{tg}\lambda l = \frac{\lambda(h_1 + h_2)}{\lambda_n^2 - h_1 h_2} \,,$$

неотрицательные корни которого $\lambda = \lambda_n$ будут собственными значениями краевой задачи (5.32)–(5.34). Собственное значение λ_n отвечает собственной функции

$$X_n(x) = \lambda_n \cos\lambda_n x + h_1 \sin\lambda_n x \,.$$

Вычислив квадрат нормы этой собственной функции, получим

$$\|X_n\|^2 = \frac{1}{2}(\lambda_n^2 + h_1^2)\left(l + \frac{(h_1 + h_2)(\lambda_n^2 + h_1 h_2)}{(\lambda_n^2 + h_1^2)(\lambda_n^2 + h_2^2)} \right).$$

Таким образом, решение уравнения теплопроводности (5.32) с краевыми условиями 3-го рода (5.33) будет иметь вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(a\lambda_n)^2 t} (\lambda_n \cos\lambda_n x + h_1 \sin\lambda_n x) \,.$$

Коэффициенты A_n с учетом начального условия (5.34) вычисляем по формуле

$$A_n = \frac{2}{(\lambda_n^2 + h_1^2)\left(l + \frac{(h_1 + h_2)(\lambda_n^2 + h_1 h_2)}{(\lambda_n^2 + h_1^2)(\lambda_n^2 + h_2^2)}\right)} \int_0^l \varphi(x)(\lambda_n \cos \lambda_n x + h_1 \sin \lambda_n x) dx .$$

Рассмотрим решение краевой задачи 3-го рода с неоднородными граничными условиями. Пусть на концах стержня происходит теплообмен со средами, температура которых зависит от времени. В этом случае граничные условия (5.33) заменяются граничными условиями вида

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - h_1(u(0,t) - u_1(t)) = 0, \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + h_2(u(l,t) - u_2(t)) = 0,$$

где температуры сред $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – заданные функции. Начальная температура стержня $u(x,0) = \varphi(x)$. Как следствие, мы приходим к необходимости решения неоднородной краевой задачи 3-го рода, которая имеет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \ 0 < x < l, t > 0 \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - h_1 u(0,t) = \mu_1(t), \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + h_2 u(l,t) = \mu_2(t) \tag{5.37}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l . \tag{5.38}$$

При записи граничного условия (5.37) мы ввели функции $-h_1 u_1(t) = \mu_1(t)$ и $h_2 u_2(t) = \mu_2(t)$.

Будем искать решение уравнения (5.36) в виде суммы двух функций $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$. Функцию $w(x,t)$ возьмем в следующем виде (аналогично решению неоднородной краевой задачи 1-го рода):

$$w(x,t) = (\alpha_1 x + \beta_1)\mu_1(t) + (\alpha_2 x + \beta_2)\mu_2(t) . \tag{5.39}$$

Функция $w(x,t)$ учитывает неоднородность краевых условий (5.37). Поэтому получаем

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x} - h_1 w(0,t) = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 - h_1(\beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_2) =$$

$$= (\alpha_1 - h_1\beta_1)\mu_1 + (\alpha_2 - h_1\beta_2)\mu_2 = \mu_1 .$$

Аналогичным образом на конце $x = l$ приходим к равенству

$$\frac{\partial w(l,t)}{\partial x}+h_2w(l,t)=\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2+h_2((\alpha_1 l+\beta_1)\mu_1+(\alpha_2 l+\beta_2)\mu_2)=$$
$$=(\alpha_1(1+h_2l)+h_2\beta_1)\mu_1+(\alpha_2(1+h_2l)+h_2\beta_2)\mu_2=\mu_2\,.$$

Из этих равенств получаем две системы уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1-h_1\beta_1=1,\\ \alpha_1(1+h_2l)+h_2\beta_1=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha_2-h_1\beta_2=0,\\ \alpha_2(1+h_2l)+h_2\beta_2=1,\end{cases}$$

решая которые, находим требуемые коэффициенты

$$\alpha_1=\frac{h_2}{h_2+h_1(1+h_2l)},\ \beta_1=-\frac{1+h_2l}{h_2+h_1(1+h_2l)},$$
$$\alpha_2=\frac{h_1}{h_2+h_1(1+h_2l)},\ \beta_2=\frac{1+h_2l}{h_2+h_1(1+h_2l)}.$$

Подставляем найденные коэффициенты α_i,β_i $(i=1,2)$ в равенство (5.39) и находим для функции $w(x,t)$ следующую формулу:

$$w(x,t)=\frac{(h_2(x-l)-1)\mu_1(t)+(h_1x+1)\mu_2(t)}{h_2+h_1(1+h_2l)}\,. \tag{5.40}$$

Таким образом, решение неоднородной краевой задачи 3-го рода будет иметь вид

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)\,, \tag{5.41}$$

где функция $w(x,t)$ дается равенством (5.40).

Подставим функцию (5.41) в уравнение (5.36). Так как $\dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}=0$, то получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial w}{\partial t}\,.$$

Найдем начальное условие для функции $v(x,t)$. Из равенства (5.38) получаем

$$u(x, 0) = v(x, 0) + w(x, 0) = \varphi(x),$$

тогда

$$v(x, 0) = \varphi(x) - w(x, 0) =$$

$$= \varphi(x) - \frac{(h_2(x-l)-1)\mu_1(0) + (h_1 x + 1)\mu_2(0)}{h_2 + h_1(1 + h_2 l)}. \qquad (5.42)$$

Таким образом, функция $v(x, t)$ является решением неоднородного уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t),\ 0 < x < l,\ t > 0 \qquad (5.43)$$

с однородными краевыми условиями 3-го рода

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} - h_1 v(0, t) = 0,\ \frac{\partial v(l, t)}{\partial x} + h_2 v(l, t) = 0$$

и начальным условием (5.42).

При записи уравнения (5.43) мы ввели функцию

$$f(x, t) = -\frac{dw(x, t)}{dt} = -\frac{(h_2(x-l)-1)\mu_1'(t) + (h_1 x + 1)\mu_2'(t)}{h_2 + h_1(1 + h_2 l)}.$$

Решение неоднородного уравнения теплопроводности (5.43) несложно найти по аналогии с решениями неоднородных уравнений для 1-й краевой задачи. Рассмотрим сначала уравнение (5.43) с нулевым начальным условием $v(x, 0) = 0$.

Будем искать решение неоднородного уравнения (5.43), разлагая его по собственным функциям однородной краевой задачи 3-го рода, то есть в виде

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)(\lambda_n \cos\lambda_n x + h_1 \sin\lambda_n x). \qquad (5.44)$$

Разложим по собственным функциям $X_n(x) = \lambda_n \cos\lambda_n x + h_1 \sin\lambda_n x$ функцию $f(x, t)$, получаем

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)(\lambda_n \cos\lambda_n x + h_1 \sin\lambda_n x), \qquad (5.45)$$

где коэффициенты $f_n(t)$ имеют вид

$$f_n(t)=\frac{2}{(\lambda_n^2+h_1^2)\left(l+\dfrac{(h_1+h_2)(\lambda_n^2+h_1h_2)}{(\lambda_n^2+h_1^2)(\lambda_n^2+h_2^2)}\right)}\times$$

$$\times\int_0^l f(x,t)(\lambda_n\cos\lambda_n x+h_1\sin\lambda_n x)dx.$$

Подставим функции (5.44) и (5.45) в уравнение (5.43), используя также равенство $X_n''(x)=-\lambda_n^2X_n(x)$, приходим к уравнению следующего вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-(a\lambda_n)^2T_n(t)+f_n(t))X_n(x),$$

из которого получаем требуемое уравнение для функции $T_n(t)$, являющееся обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка

$$T_n'(t)+(a\lambda_n)^2T_n(t)=f_n(t), \tag{5.46}$$

которое решаем с нулевым начальным условием $T_n(0)=0$. Решение уравнения (5.46) находим методом вариации произвольной постоянной, то есть ищем в следующем виде:

$$T_n(t)=c(t)e^{-(a\lambda_n)^2t}. \tag{5.47}$$

Подставив функцию (5.47) в уравнение (5.46), получим

$$c'(t)e^{-(a\lambda_n)^2t}=f_n(t).$$

Интегрируя это уравнение, находим функцию

$$c(t)=\int_0^t f_n(\tau)e^{(a\lambda_n)^2\tau}d\tau+c\ \ (c=\text{const}),$$

подставив которую в равенство (5.47), получаем

$$T_n(t)=e^{-(a\lambda_n)^2t}\left(\int_0^t f_n(\tau)e^{(a\lambda_n)^2\tau}d\tau+c\right).$$

Из начального условия имеем $T_n(0) = c = 0$. Таким образом, для функции $T_n(t)$ окончательно получаем следующее выражение:

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-(a\lambda_n)^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau\,. \qquad (5.48)$$

Подставив функцию (5.48) в равенство (5.41), находим решение неоднородного уравнения (5.43) с нулевым начальным условием (обозначим это решение $\bar{v}(x,t)$)

$$\bar{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau) e^{-(a\lambda_n)^2(t-\tau)} d\tau(\lambda_n \cos\lambda_n x + h_1 \sin\lambda_n x)\,. \qquad (5.49)$$

Решение однородной краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\, 0 < x < l,\, t > 0$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} - h_1 v(0,t) = 0,\, \frac{\partial v(l,t)}{\partial x} + h_2 v(l,t) = 0$$

с начальным условием (5.42) имеет вид (обозначим это решение через $v_0(x,t)$)

$$v_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(a\lambda_n)^2 t}(\lambda_n \cos\lambda_n x + h_1 \sin\lambda_n x)\,, \qquad (5.50)$$

где коэффициенты A_n имеют вид

$$A_n = \frac{2}{(\lambda_n^2 + h_1^2)\left(l + \dfrac{(h_1+h_2)(\lambda_n^2 + h_1 h_2)}{(\lambda_n^2 + h_1^2)(\lambda_n^2 + h_2^2)}\right)} \int_0^l (v(x,0) - w(x,0))(\lambda_n \cos\lambda_n x +$$

$$+ h_1 \sin\lambda_n x)dx.$$

Суммируя полученные функции (5.49), (5.50), находим решение однородной краевой задачи 3-го рода для неоднородного уравнения теплопроводности (5.43) с начальным условием (5.42), которое принимает вид

$$v(x,t) = \bar{v}(x,t) + v_0(x,t)\,. \qquad (5.51)$$

Подставляем полученные функции (5.40), (5.51) в равенство (5.41), находим решение неоднородной краевой задачи 3-го рода (5.36)–(5.38).

Пример 5.1. Найти решение неоднородной краевой задачи 3-го рода для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0 \tag{5.52}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - hu(0,t) = -hu_1 = \text{const},$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + hu(l,t) = hu_2 = \text{const}. \tag{5.53}$$

Начальное условие нулевое, то есть $u(x,0) = 0$.

Решение. Решение краевой задачи со стационарными неоднородностями ищем в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = v(x,t) + F(x). \tag{5.54}$$

Подставляя функцию (5.54) в уравнение (5.52), получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 F''(x).$$

Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет уравнению $F''(x) = 0$ и неоднородным граничным условиям (5.53)

$$F'(0) - hF(0) = -hu_1, F'(l) + hF(l) = hu_2. \tag{5.55}$$

Решение уравнения

$$F''(x) = 0$$

имеет вид $F(x) = c_1 x + c_2$, где c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Подставив найденную функцию $F(x)$ в уравнение граничных условий (5.55), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1 - hc_2 = -hu_1, \\ c_1(1 + hl) + hc_2 = hu_2. \end{cases}$$

Решив полученную систему, находим требуемые коэффициенты

$$c_1 = \frac{h(u_2 - u_1)}{2 + hl}, c_2 = \frac{u_2 + u_1(1 + hl)}{2 + hl}.$$

Как следствие, функция $F(x)$ будет иметь вид

$$F(x) = c_1 x + c_2 = \frac{h(u_2 - u_1)x}{2 + hl} + \frac{u_2 + u_1(1 + hl)}{2 + hl} =$$

$$= \frac{h(u_2 - u_1)x + u_2 + u_1(1 + hl)}{2 + hl}. \qquad (5.56)$$

Вернемся к первому слагаемому в равенстве (5.54). Для функции $v(x, t)$ получаем однородную краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0 \qquad (5.57)$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} - hv(0, t) = 0, \frac{\partial v(l, t)}{\partial x} + hv(l, t) = 0. \qquad (5.58)$$

Найдем начальное условие для функции $v(x, t)$. Так как $u(x, 0) = v(x, 0) + F(x) = 0$, то $v(x, 0) = -F(x)$.

Решение краевой задачи (5.57) и (5.58) дается формулой (5.30):

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(a\lambda_n)^2 t} (\lambda_n \cos\lambda_n x + h \sin\lambda_n x).$$

Используя явный вид функции $F(x)$, характеристическое уравнение краевой задачи 3-го рода (5.25) и формулу (5.28) для нормы собственной функции $X_n(x) = \lambda_n \cos\lambda_n x + h \sin\lambda_n x$, вычисляем коэффициенты A_n. Получаем

$$A_n = -\frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l F(x)(\lambda_n \cos\lambda_n x + h \sin\lambda_n x)dx = -\frac{1}{\|X_n\|^2 (2 + hl)} (h(u_2 - u_1) \times$$

$$\times \int_0^l x(\lambda_n \cos\lambda_n x + h \sin\lambda_n x)dx + (u_2 + u_1(1 + hl)) \int_0^l (\lambda_n \cos\lambda_n x + h \sin\lambda_n x)dx).$$

Из характеристического уравнения (5.25) получим

$$\sin\lambda_n l = \frac{2\lambda_n h}{\lambda_n^2 + h^2}, \ \cos\lambda_n l = \frac{\lambda_n^2 - h^2}{\lambda_n^2 + h^2}.$$

С помощью этих равенств вычисляем требуемые интегралы

$$\int_0^l (\lambda_n \cos\lambda_n x + h\sin\lambda_n x)dx = \sin\lambda_n l + \frac{h}{\lambda_n}(1-\cos\lambda_n l) = \frac{2\lambda_n h}{\lambda_n^2 + h^2} +$$

$$+\frac{h}{\lambda_n}(1-\frac{\lambda_n^2 - h^2}{\lambda_n^2 + h^2}) = \frac{2\lambda_n h}{\lambda_n^2 + h^2} + \frac{2h^3}{\lambda_n(\lambda_n^2 + h^2)} = \frac{2h}{\lambda_n}.$$

$$\int_0^l x(\lambda_n \cos\lambda_n x + h\sin\lambda_n x)dx = (x\sin\lambda_n x + \frac{1}{\lambda_n}\cos\lambda_n x)\Big|_0^l -$$

$$-\frac{h}{\lambda_n}(x\cos\lambda_n x - \frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n x)\Big|_0^l = \left(l + \frac{h}{\lambda_n^2}\right)\sin\lambda_n l - \frac{hl}{\lambda_n}\cos\lambda_n l +$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}(\cos\lambda_n l - 1) = \left(l + \frac{h}{\lambda_n^2}\right)\frac{2\lambda_n h}{\lambda_n^2 + h^2} - \frac{hl}{\lambda_n}\frac{\lambda_n^2 - h^2}{\lambda_n^2 + h^2} - \frac{2h^2}{\lambda_n(\lambda_n^2 + h^2)} = \frac{hl}{\lambda_n}.$$

Подставляя полученные величины интегралов в равенство для коэффициента A_n, находим

$$A_n = -\frac{1}{\|X_n\|^2(2+hl)}\left(h(u_2 - u_1)\frac{hl}{\lambda_n} + (u_2 + u_1(1+hl)\frac{2h}{\lambda_n}\right) =$$

$$= -\frac{h(u_1 + u_2)}{\lambda_n \|X_n\|^2} = -\frac{2h(u_1 + u_2)}{\lambda_n(l(\lambda_n^2 + h^2) + 2h)}.$$

Как следствие, с учетом явного выражения для коэффициентов A_n, функция $v(x,t)$ окончательно приводится к виду

$$v(x,t) = -2h(u_1 + u_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\cos\lambda_n x + h\sin\lambda_n x}{\lambda_n(l(\lambda_n^2 + h^2) + 2h)}e^{-(a\lambda_n)^2 t}. \qquad (5.59)$$

Представим функцию $F(x)$ в равенстве (5.56) в следующем виде:

$$F(x) = \frac{u_2(1+hx) + u_1(1+hl-hx)}{2+hl} = \frac{u_2(1+hx) + u_1(1+h(l-x))}{2+hl}.$$

Подставляем эту функцию в равенство (5.54) и находим решение исходной краевой задачи (5.52), (5.53)

$$u(x,t) = \frac{u_2(1+hx) + u_1(1+h(l-x))}{2+hl} + v(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ дается равенством (5.59).

5.3 Двумерные и трехмерные краевые задачи

В этом разделе мы рассмотрим метод Фурье применительно к многомерным задачам для простейших ситуаций, не требующих применения различных видов специальных функций.

Колебания прямоугольной мембраны

Рассмотрим мембрану прямоугольной формы, длины сторон мембраны l_1 и l_2, мембрана жестко закреплена по всему периметру. Опишем процесс малых поперечных колебаний такой мембраны, вызванных начальным отклонением мембраны и начальной скоростью.

Мы будем решать двумерное волновое уравнение для прямоугольной области. Краевая задача имеет следующий вид. Ищется решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\, 0 < x < l_1,\ \ 0 < y < l_2,\, t > 0, \tag{5.60}$$

граничные условия, заданные на контуре прямоугольника, имеют вид

$$u(0, y, t) = u(l_1, y, t) = 0,\, u(x, 0, t) = u(x, l_2, t) = 0\,, \tag{5.61}$$

начальные условия, возбуждающие колебания мембраны

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y)\,. \tag{5.62}$$

Решение краевой задачи (5.60)–(5.62) будем искать методом разделения переменных в следующем виде:

$$u(x, y, t) = T(t)V(x, y)\,. \tag{5.63}$$

Подставляя функцию (5.63) в уравнение (5.60), получаем

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\lambda^2 = \text{const}.$$

Из этого уравнения следует уравнение для функции $T(t)$

$$T''(t) + (a\lambda)^2 T(t) = 0\,, \tag{5.64}$$

и задача на собственные значения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda^2 V = 0, 0 < x < l_1,\ \ 0 < y < l_2, \\ V(0, y) = V(l_1, y) = 0, V(x, 0) = V(x, l_2) = 0. \end{cases} \tag{5.65}$$

Решение граничной задачи (5.65) также будем искать методом разделения переменных. Полагаем $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Подставив эту функцию в уравнение краевой задачи (5.65), получаем две идентичные краевые задачи 1-го рода, на которые распадается краевая задача (5.65):

$$\begin{cases} X''(x) + \nu^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(l_1) = 0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(l_2) = 0, \end{cases} \tag{5.66}$$

где собственные значения ν и μ связаны с собственным значением λ соотношением $\lambda^2 = \nu^2 + \mu^2$.

Для краевых задач (5.66) собственные значения и отвечающие им собственные функции имеют вид

$$\begin{gathered} \nu_n = \frac{\pi n}{l_1}, X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l_1}, n = 1, 2, \dots, \\ \mu_m = \frac{\pi m}{l_2}, Y_m(y) = \sin\frac{\pi m y}{l_2}, m = 1, 2, \dots . \end{gathered} \tag{5.67}$$

Но тогда задача на собственные значения (5.66) имеет следующее решение:

$$\lambda_{nm}^2 = \left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2, n, m = 1, 2, \dots, \tag{5.68}$$

причем каждому собственному значению λ_{nm} будет отвечать собственная функция (подставляем полученные собственные функции (5.67))

$$V_{nm}(x, y) = X_n(x)Y_m(y) = \sin\frac{\pi n x}{l_1}\sin\frac{\pi m y}{l_2}. \tag{5.69}$$

Подставив полученные собственные значения λ_{nm} в уравнение (5.64), получаем решения этого уравнения:

$$T_{nm}(t) = A_{nm}\cos\omega_{nm}t + B_{nm}\sin\omega_{nm}t\,, \qquad (5.70)$$

где при записи функции $T_{nm}(t)$ мы ввели собственные частоты колебаний мембраны

$$\omega_{nm} = a\lambda_{nm} = a\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2}\,.$$

Перемножая функции (5.69), (5.70), находим частное решение уравнения (5.60), отвечающее собственному значению λ_{nm} (5.68):

$$u_{nm}(x, y, t) = T_{nm}(t)X_n(x)Y_m(y) = (A_{nm}\cos\omega_{nm}t + B_{nm}\sin\omega_{nm}t)\times$$
$$\times\sin\frac{\pi nx}{l_1}\sin\frac{\pi my}{l_2}\,.$$

Как следствие, решение исходной краевой задачи (5.60)–(5.62) строим в виде ряда по функциям $u_{nm}(x, y, t)$, получаем

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_{nm}\cos\omega_{nm}t + B_{nm}\sin\omega_{nm}t)\sin\frac{\pi nx}{l_1}\sin\frac{\pi my}{l_2}. \qquad (5.71)$$

Коэффициенты полученного ряда (5.71) найдем исходя из начальных условий (5.62) для функции $u(x, y, t)$. Получаем следующие равенства:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\sin\frac{\pi nx}{l_1}\sin\frac{\pi my}{l_2}\,,$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{nm}B_{nm}\sin\frac{\pi nx}{l_1}\sin\frac{\pi my}{l_2}\,.$$

Эти равенства следует рассматривать как разложение функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в двойные тригонометрические ряды Фурье. Поэтому для коэффициентов A_{nm} и B_{nm} получаем

$$A_{nm} = \frac{4}{l_1 l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\varphi(x, y)\sin\frac{\pi nx}{l_1}\sin\frac{\pi my}{l_2}\,dxdy\,,$$

$$B_{nm} = \frac{4}{\omega_{nm}l_1 l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\psi(x, y)\sin\frac{\pi nx}{l_1}\sin\frac{\pi my}{l_2}\,dxdy\,.$$

Подставив найденные коэффициенты A_{nm} и B_{nm} в равенство (5.71), находим решение исходной двумерной краевой задачи.

Полученное нами решение (5.71), описывающее свободные поперечные колебания мембраны, можно представить в ином виде. Для этого введем коэффициент $\operatorname{tg}\delta_{nm} = \dfrac{B_{nm}}{A_{nm}}$ и преобразуем функцию $T_{nm}(t)$ (5.70) следующим образом:

$$T_{nm}(t) = A_{nm}(\cos\omega_{nm}t + \sin\omega_{nm}t\operatorname{tg}\delta_{nm}) =$$

$$= A_{nm}(\cos\omega_{nm}t + \frac{B_{nm}}{A_{nm}}\sin\omega_{nm}t) = A_{nm}(\cos\omega_{nm}t + \sin\omega_{nm}t\frac{\sin\delta_{nm}}{\cos\delta_{nm}}) =$$

$$= \frac{A_{nm}}{\cos\delta_{nm}}(\cos\omega_{nm}t\cos\delta_{nm} + \sin\omega_{nm}t\sin\delta_{nm}) =$$

$$= \frac{A_{nm}}{\cos\delta_{nm}}\cos(\omega_{nm}t - \delta_{nm}) = \alpha_{nm}\cos(\omega_{nm}t - \delta_{nm}),$$

где $\alpha_{nm} = \sqrt{A_{nm}^2 + B_{nm}^2}$.

Окончательно решение краевой задачи для поперечных колебаний мембраны мы представим в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{nm}\cos(\omega_{nm}t - \delta_{nm})\sin\frac{\pi nx}{l_1}\sin\frac{\pi my}{l_2},$$

где α_{nm} – амплитуды колебаний, а δ_{nm} – начальные фазы колебаний.

Пример 5.2. Рассмотрим поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \le x \le l, 0 \le y \le s$ под действием непрерывно распределенной гармонической силы с плотностью $\rho f(x, y, t) = \rho xy\cos\omega t$, где ρ – поверхностная плотность материала мембраны. Край мембраны $y = s$ свободен, остальные три края мембраны жестко закреплены. Начальные условия для колебаний мембраны берем нулевыми. Таким образом, мы приходим к решению следующей краевой задачи для неоднородного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + xy\cos\omega t, 0 < x < l,\ 0 < y < s, t > 0 \quad (5.72)$$

$$u(0,\, y,\, t) = u(l,\, y,\, t) = 0,\; u(x,\, 0,\, t) = \frac{\partial u(x,\, s,\, t)}{\partial y} = 0\,, \qquad (5.73)$$

$$u(x,\, y,\, 0) = \frac{\partial u(x,\, y,\, 0)}{\partial t} = 0,\, 0 \le x \le l,\;\; 0 \le y \le s\,. \qquad (5.74)$$

Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), 0 < x < l,\;\; 0 < y < s, t > 0$$

с однородными краевыми условиями (5.73). Решение однородного уравнения ищем методом разделения переменных $u(x,\, y,\, t) = T(t)X(x)Y(y)$. В силу краевых условий (5.73) для функции $X(x)$ получаем краевую заду 1-го рода

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,\; X(0) = X(l) = 0\,.$$

Собственные значения 1-й краевой задачи $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{l}$, собственные функции $X_n(x) = \sin\dfrac{\pi n x}{l}$, где $n = 1, 2, \ldots$.

Для функции $Y(y)$ получаем смешанную краевую задачу

$$Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0, Y(0) = Y'(s) = 0\,.$$

Собственные значения этой краевой задачи $\mu_m = \dfrac{\pi(2m+1)}{2s}$, отвечающие им собственные функции

$$Y_m(y) = \sin\mu_m(y) = \sin\frac{\pi(2m+1)y}{2s} \;\text{ где }\; m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поэтому решение неоднородного уравнения (5.72) ищем, разлагая функцию $u(x,\, y,\, t)$ по собственным функциям краевой задачи (5.73), то есть в виде

$$u(x,\, y,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}(x,\, y,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_{nm}(t)\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi(2m+1)y}{2s}\,. \qquad (5.75)$$

Из (5.75) получаем

$$\frac{\partial^2 u_{nm}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_{nm}}{\partial y^2}=-\left(\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2+\frac{\pi^2(2m+1)^2}{4s^2}\right)u_{nm}(x,y,t)=$$
$$=-(\pi\omega_{nm})^2 u_{nm}(x,y,t),$$
где мы ввели частоты колебаний
$$\omega_{nm}=\sqrt{\left(\frac{n}{l}\right)^2+\frac{(2m+1)^2}{4s^2}}\,.$$
Тогда
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(\pi\omega_{nm})^2 u_{nm}(x,y,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(\pi\omega_{nm})^2\times$$
$$\times T_{nm}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi(2m+1)y}{2s}\,. \qquad (5.76)$$

Далее разлагаем функцию $f(x,y,t)$ в двойной ряд Фурье:
$$f(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}f_{nm}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi(2m+1)y}{2s}\,, \qquad (5.77)$$

где коэффициенты $f_{nm}(t)$ равны
$$f_{nm}(t)=\left(\frac{2}{l}\frac{2}{s}\int_0^l x\sin\frac{\pi nx}{l}dx\int_0^s y\sin\frac{\pi(2m+1)y}{2s}dy\right)\cos\omega t=$$
$$=\left[\frac{2}{l}\left(-\frac{l}{\pi n}\right)\left(x\cos\frac{\pi nx}{l}-\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l}\right)\Bigg|_0^l\cdot\frac{2}{s}\left(-\frac{2s}{\pi(2m+1)}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(y\cos\frac{\pi(2m+1)y}{2s}-\frac{2s}{\pi(2m+1)}\sin\frac{\pi(2m+1)y}{2s}\right|_0^s\right]\cos\omega t=$$
$$=\frac{2l(-1)^{n+1}}{\pi n}\frac{8s(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2}\cos\omega t=$$
$$=\frac{16sl}{\pi^3}\frac{(-1)^{n+m+1}}{n(2m+1)^2}\cos\omega t=A_{nm}\cos\omega t\,. \qquad (5.78)$$

Подставляя равенства (5.75)−(5.77) в неоднородное уравнение (5.72), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(T''_{nm}(t)+(a\pi\omega_{nm})^2 T_{nm}(t))\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi(2m+1)y}{2s}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f_{nm}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi(2m+1)y}{2s}.$$

Приравнивая коэффициенты рядов Фурье в обеих частях уравнения, приходим к уравнению

$$T''_{nm}(t)+(a\pi\omega_{nm})^2 T_{nm}(t)= f_{nm}(t)$$

или с учетом равенства (5.78)

$$T''_{nm}(t)+(a\pi\omega_{nm})^2 T_{nm}(t)=A_{nm}\cos\omega t\,. \tag{5.79}$$

Из начальных условий (5.74) находим $T_{nm}(0)=T'_{nm}(0)=0$.

Общее решение уравнения (5.79) имеет вид

$$T_{nm}(t)=a_{nm}\cos a\pi\omega_{nm}t+b_{nm}\sin a\pi\omega_{nm}t+\frac{A_{nm}\cos\omega t}{(a\pi\omega_{nm})^2-\omega^2}. \tag{5.80}$$

Из нулевых начальных условий находим

$$a_{nm}=-\frac{A_{nm}}{(a\pi\omega_{nm})^2-\omega^2},\, b_{nm}=0\,.$$

Подставляем эти коэффициенты в равенство (5.80), получаем функцию

$$T_{nm}(t)=\frac{A_{nm}(\cos\omega t-\cos a\pi\omega_{nm}t)}{(a\pi\omega_{nm})^2-\omega^2}$$

или с учетом явного вида коэффициентов A_{nm} (равенство (5.78)) окончательно находим

$$T_{nm}(t)=\frac{16ls}{\pi^3}\frac{(-1)^{n+m+1}(\cos\omega t-\cos a\pi\omega_{nm}t)}{n(2m+1)^2((a\pi\omega_{nm})^2-\omega^2)}\,. \tag{5.81}$$

Подставив функцию (5.81) в равенство (5.75), получаем решение краевой задачи (5.72)–(5.74) для неоднородного волнового уравнения

$$u(x,y,t)=\frac{16ls}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m+1}(\cos\omega t-\cos a\pi\omega_{nm}t)}{n(2m+1)^2((a\pi\omega_{nm})^2-\omega^2)}\sin\frac{\pi nx}{l}\times$$
$$\times\sin\frac{\pi(2m+1)y}{2s}.$$

Пример 5.3. Начальная температура бесконечно прямоугольного стержня $0\le x\le l, 0\le y\le s, -\infty\le z\le\infty$ является произвольной функцией $\varphi(x,y)$. Определить температуру в стержне, если на поверхности $x=l, 0<y<s$ происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру, поверхность $y=0, 0<x<l$ – теплоизолирована, а остальная поверхность стержня поддерживается при нулевой температуре.

Решение. Так как температура стержня не зависит от координаты z, то приходим к двумерной краевой задаче для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), 0<x<l,\ 0<y<s, t>0, \tag{5.82}$$

$$\begin{cases} u(0,y,t)=0, \dfrac{\partial u(l,y,t)}{\partial x}+hu(l,y,t)=0, 0<y<s, t>0 \\ (h-\text{ коэффициент теплообмена со средой}), \\ \dfrac{\partial u(x,0,t)}{\partial y}=0,\ u(x,s,t)=0, 0<x<l,\ t>0, \end{cases} \tag{5.83}$$

начальное условие

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y). \tag{5.84}$$

Как и для двумерного волнового уравнения, решение уравнения теплопроводности ищем методом разделения переменных, то есть берем в виде $u(x,y,t)=T(t)X(x)Y(y)$. Подставив функцию $u(x,y,t)$ в уравнение (5.82) и разделив переменные, получаем уравнение вида

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=a^2\left(\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}\right). \tag{5.85}$$

Вводим константы разделения и получаем две краевых задачи. Краевая задача для функции $X(x)$ имеет вид

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\ X(0)=0,\ X'(l)+hX(l)=0\,. \qquad (5.86)$$

Из краевых условий находим собственные значения краевой задачи (5.86), которые являются положительными корнями характеристического уравнения

$$\operatorname{tg}\lambda_n l=-\frac{\lambda_n}{h}\text{, где } n=1,2,\ldots. \qquad (5.87)$$

Собственные значения $\lambda=\lambda_n$ отвечают собственным функциям $X_n(x)=\sin\lambda_n x$. Используя характеристическое уравнение (5.87), находим норму собственных функций $X_n(x)$, получаем

$$\|X_n\|^2=\int_0^l \sin^2\lambda_n x dx=\frac{1}{2}\left(l-\frac{\sin 2\lambda_n l}{2\lambda_n}\right)=\frac{1}{2}\left(l-\frac{\cos^2\lambda_n l\ \operatorname{tg}\lambda_n l}{\lambda_n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(l+\frac{h}{\lambda_n^2+h^2}\right)=\frac{l(\lambda_n^2+h^2)+h}{2(\lambda_n^2+h^2)}.$$

Далее рассматриваем краевую задачу для функции $Y(y)$. Эта задача имеет вид

$$Y''(y)+\mu^2 Y(y)=0, Y'(0)=0, Y(s)=0\,. \qquad (5.88)$$

Собственные значения краевой задачи (5.88) $\mu_m=\dfrac{\pi(2m+1)y}{2s}$, $m=0,1,2,\ldots$. Собственное значение $\mu=\mu_m$ отвечает собственной функции $Y_m(y)=\cos\mu_m y=\cos\dfrac{\pi(2m+1)y}{2s}$, для которой $\|Y_m\|^2=\dfrac{s}{2}$.

Как следствие, решение уравнения (5.82) будет иметь вид

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}T_{nm}(t)\sin\lambda_n x\cos\mu_m y=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}T_{nm}(t)\sin\lambda_n x\cos\frac{\pi(2m+1)y}{2s}. \qquad (5.89)$$

Подставив константы разделения $\lambda^2=\lambda_n^2, \mu^2=\mu_m^2$ в уравнение (5.85), находим уравнение для функции $T_{nm}(t)$, получаем

$$\frac{dT_{nm}(t)}{dt} = -a^2(\lambda_n^2 + \mu_m^2)T_{nm}(t) .$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$T_{nm}(t) = A_{nm}e^{-a^2(\lambda_n^2+\mu_m^2)t} .$$

Подставив найденную функцию $T_{nm}(t)$ в равенство (5.89), находим решение исходной краевой задачи (5.82)–(5.84)

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}e^{-a^2(\lambda_n^2+\mu_m^2)t}\sin\lambda_n x\cos\mu_m y . \tag{5.90}$$

Коэффициенты A_{nm} находим из начального условия (5.84)

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}\sin\lambda_n x\cos\mu_m y ,$$

которое представляет собой двойной ряд Фурье для функции $\varphi(x, y)$. Поэтому из последнего равенства получаем

$$A_{nm} = \frac{1}{\|X_n\|^2}\frac{1}{\|Y_m\|^2}\int_0^l\int_0^s \varphi(x, y)\sin\lambda_n x\cos\mu_m y dxdy =$$

$$= \frac{4}{s}\frac{\lambda_n^2 + h^2}{l(\lambda_n^2 + h^2) + h}\int_0^l\int_0^s \varphi(x, y)\sin\lambda_n x\cos\frac{\pi(2m+1)y}{2s}dxdy . \tag{5.91}$$

Рассмотрим случай, когда начальная температура стержня $u(x, y, 0) = u_0 = \text{const}$. По формуле (5.91) вычисляем коэффициенты A_{nm} (при вычислении используем характеристическое уравнение (5.87)):

$$A_{nm} = \frac{4u_0}{s}\frac{\lambda_n^2 + h^2}{l(\lambda_n^2 + h^2) + h}\int_0^l \sin\lambda_n xdx\int_0^s \cos\frac{\pi(2m+1)y}{2s}dy =$$

$$= \frac{4u_0}{s}\frac{\lambda_n^2 + h^2}{l(\lambda_n^2 + h^2) + h}\left(\frac{1-\cos\lambda_n l}{\lambda_n}\right)\left(\frac{2s\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi m\right)}{2m+1}\right) =$$

$$=\frac{8u_0}{\pi}\frac{(-1)^m\sqrt{\lambda_n^2+h^2}\,(\sqrt{\lambda_n^2+h^2}-h)}{\lambda_n(2m+1)(l(\lambda_n^2+h^2)+h)}=$$

$$=\frac{8u_0}{\pi}\frac{(-1)^m\lambda_n\sqrt{\lambda_n^2+h^2}}{(2m+1)(l(\lambda_n^2+h^2)+h)(\sqrt{\lambda_n^2+h^2}+h)}\,.$$

Подставив найденные коэффициенты A_{nm} в равенство (5.90), находим решение краевой задачи (5.82), (5.83) с начальным условием $u(x, y, 0)=u_0$

$$u(x, y, t)==\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\lambda_n\sqrt{\lambda_n^2+h^2}\sin\lambda_n x\cos\dfrac{\pi(2m+1)y}{2s}}{(2m+1)(l(\lambda_n^2+h^2)+h)(\sqrt{\lambda_n^2+h^2}+h)}\times$$

$$\times\exp\left(-a^2\left(\lambda_n^2+\frac{\pi^2(2m+1)^2}{4s^2}\right)t\right).$$

Аналогичным образом метод Фурье будет работать при решении краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов в трехмерных областях, границы которых задаются параллелепипедом.

Рассмотрим также простейшие краевые задачи для областей со сферической симметрией, то есть областей, представляющих собой шар или шаровой слой. Ограничимся задачами теплопроводности.

Рассмотрим нагрев однородного шара. Оператор Лапласа в сферических координатах был получен во второй главе (уравнение (2.23)), поэтому уравнение теплопроводности в сферических координатах будет иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Мы рассмотрим случай, когда начальная температура шара равна $\varphi(\tau)$. В этом случае температура шара будет функцией только координаты τ, и уравнение теплопроводности существенно упрощается, принимая следующий вид (в операторе Лапласа остается только радиальная часть):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \qquad (5.92)$$

Уравнение (5.92) допускает дальнейшее упрощение. Введем функцию $v(r,t)=ru(r,t)$, тогда

$$r\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial r}-u,\ r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-2\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Подставляем эти равенства в уравнение (5.92) и получаем (для суммы слагаемых в правой части уравнения)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-u\right)=$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-u\right)+\frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-u\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

Поэтому уравнение (5.92) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,t)}{\partial t}=\frac{a^2}{r}\frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial r^2},\ \text{или}\ \frac{\partial v(r,t)}{\partial r}=a^2\frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial r^2}.$$

То есть для функции $v(r,t)$ мы получаем простое одномерное (по переменной r) уравнение теплопроводности. Начальное условие для функции $v(r,t)$ имеет вид

$$v(r,0)=ru(r,0)=r\varphi(r).$$

Пример 5.4. Найти распределение температуры в шаровом слое ($R_1<r<R_2$). На сферах, ограничивающих шаровой слой, поддерживается нулевая температура, начальная температура в шаровом слое $u(r,0)=\varphi(r)$, где $\varphi(r)$ − произвольная функция. Переходим к функции $v(r,t)$ через равенство $u(r,t)=\dfrac{v(r,t)}{r}$. Для функции $v(r,t)$ по-

лучаем краевую задачу 1-го рода с однородными краевыми условиями

$$\frac{\partial v(r,t)}{\partial r} = a^2 \frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial r^2},\ R_1 < r < R_2,\ t > 0\,, \tag{5.93}$$

$$v(R_1, t) = v(R_2, t) = 0,\ t > 0\,, \tag{5.94}$$

$$v(r, 0) = r\varphi(r),\ R_1 \le r \le R_2\,. \tag{5.95}$$

Решение уравнения (5.93) находим методом Фурье, то есть в виде $v(r,t) = V(r)T(t)$. Функция $V(r)$ имеет вид

$$V(r) = c_1 \cos\lambda r + c_2 \sin\lambda r\,.$$

Для выполнения краевых условий (5.94) получаем систему однородных уравнений

$$\begin{cases} c_1 \cos\lambda R_1 + c_2 \sin\lambda R_1 = 0, \\ c_1 \cos\lambda R_2 + c_2 \sin\lambda R_2 = 0. \end{cases}$$

Условие существования нетривиального решения полученной системы дает собственные значения краевой задачи

$$\det\begin{bmatrix} \cos\lambda R_1 & \sin\lambda R_1 \\ \cos\lambda R_2 & \sin\lambda R_2 \end{bmatrix} = \sin\lambda R_2 \cos\lambda R_1 - \cos\lambda R_2 \sin\lambda R_1 =$$
$$= \sin\lambda(R_2 - R_1) = 0\,,$$

тогда $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{R_2 - R_1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Собственную функцию $V_n(r)$, отвечающую собственному значению λ_n, возьмем в виде

$$V_n(r) = \sin\lambda_n R_2 \cos\lambda_n r - \cos\lambda_n R_2 \sin\lambda_n r =$$
$$= \sin\lambda_n (R_2 - r) = \sin\frac{\pi n(R_2 - r)}{R_2 - R_1}\,.$$

Таким образом, решение уравнения (5.93), удовлетворяющее поставленным однородным краевым условиям (5.94), будет иметь вид

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(a\lambda_n)^2 t} \sin\lambda_n (R_2 - r)\,. \tag{5.96}$$

Коэффициенты A_n находим из начального условия (5.95). Норма собственной функции $V_n(r)$ равна

$$\|V_n\|^2 = \int_{R_1}^{R_2} \sin^2 \lambda_n (R_2 - r) dr = \int_{R_1}^{R_2} \sin^2 \frac{\pi n (R_2 - r)}{R_2 - R_1} dr =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n (R_2 - r)}{R_2 - R_1}\right) d(R_2 - r) = \frac{1}{2}(R_2 - R_1) + \frac{1}{2} \frac{R_2 - R_1}{\pi n} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi n (R_2 - r)}{R_2 - R_1}\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{2}(R_2 - R_1) .$$

Поэтому для коэффициентов A_n получаем равенство

$$A_n = \frac{2}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} r\varphi(r) \sin \lambda_n (R_2 - r) dr .$$

Подставив найденные коэффициенты A_n в формулу (5.96), находим функцию $v(r, t)$, получаем

$$v(r, t) = \frac{2}{R_2 - R_1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(a\lambda_n)^2 t} \sin \lambda_n (R_2 - r) \int_{R_1}^{R_2} r\varphi(r) \sin \lambda_n (R_2 - r) dr .$$

Поэтому распределение температуры в шаровом слое будет иметь следующий вид:

$$u(r, t) = \frac{2}{(R_2 - R_1)\tau} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(a\lambda_n)^2 t} \sin \lambda_n (R_2 - \tau) \int_{R_1}^{R_2} \tau\varphi(\tau) \sin \lambda_n (R_2 - r) dr =$$

$$= \frac{2}{(R_2 - R_1) r} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n (R_2 - r)}{R_2 - R_1} \exp\left(-\left(\frac{\pi a n}{R_2 - R_1}\right)^2 t\right) \times$$

$$\times \int_{R_1}^{R_2} r\varphi(r) \sin \frac{\pi n (R_2 - r)}{R_2 - R_1} dr .$$

Рассмотрим простейший случай, когда начальная температура шарового слоя постоянна, то есть $u(r, 0) = u_0 = \mathrm{const}$, тогда $v(r, 0) = u_0 r$, и для коэффициентов A_n получаем

$$A_n=\frac{2u_0}{R_2-R_1}\int_{R_1}^{R_2} r\sin\lambda_n(R_2-r)dr=\frac{2u_0}{R_2-R_1}\left(\sin\lambda_n R_2\int_{R_1}^{R_2} r\cos\lambda_n r dr-\right.$$

$$\left.-\cos\lambda_n R_2\int_{R_1}^{R_2} r\sin\lambda_n r dr\right)=\frac{2u_0}{(R_2-R_1)\lambda_n}\left(\sin\lambda_n R_2(\tau\sin\lambda_n r+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_n}\cos\lambda_n r)\Big|_{R_1}^{R_2}+\cos\lambda_n R_2+(r\cos\lambda_n r-\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n r)\Big|_{R_1}^{R_2}\right)=$$

$$=\frac{2u_0}{(R_2-R_1)\lambda_n}\left(\sin\lambda_n R_2(R_2\sin\lambda_n R_2-R_1\sin\lambda_n R_1+\right.$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}(\cos\lambda_n R_2-\cos\lambda_n R_1))+\cos\lambda_n R_2(R_2\cos\lambda_n R_2-R_1\cos\lambda_n R_1)-$$

$$\left.-\frac{1}{\lambda_n}(\sin\lambda_n R_2-\sin\lambda_n R_1)\right)=\frac{2u_0}{(R_2-R_1)\lambda_n}\left(R_2-R_1\cos\lambda_n(R_2-R_1)\right)=$$

$$=\frac{2u_0}{\pi}\frac{R_2-R_1(-1)^n}{n}.$$

Подставляем найденные коэффициенты A_n в равенство (5.96) и находим функцию $v(r,t)$, а затем распределение температуры в шаровом слое:

$$u(r,t)=\frac{2u_0}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_2-R_1(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi n(R_2-r)}{R_2-R_1}\exp\left(-\left(\frac{\pi a n}{R_2-R_1}\right)^2 t\right).$$

5.4 Упражнения для самостоятельной работы

Упражнение 1. *Найти решение следующих краевых задач для уравнения теплопроводности.*

1.1. $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h(u-u_0)$, где $u_0=\text{const}$. Граничные условия $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+Hu(l,t)=0$. Начальное условие $u(x,0)=0$, $0<x<l$.

Ответ: $$u(x,t)=u_0\frac{\dfrac{\sqrt{h}}{a}\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}+H\left(\operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}-\operatorname{ch}\dfrac{x\sqrt{h}}{a}\right)}{\dfrac{\sqrt{h}}{a}\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}+H\operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}}+v(x,t),$$ где

$$v(x,t)=-2hHu_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\lambda_n^2+H^2}\cos\lambda_n x}{\lambda_n(l(\lambda_n^2+H^2)+H((a\lambda_n)^2+h)}e^{-((a\lambda_n)^2+h)t},$$ λ_n – положительные корни характеристического уравнения $\lambda_n\operatorname{tg}\lambda_n l=H$.

1.2. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-hu$, $u(0,t)=u_1=\text{const}$, $\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}+Hu(l,t)=0$. Начальное условие $u(x,0)=0$, $0<x<l$.

Ответ: $$u(x,t)=u_1\frac{\dfrac{\sqrt{h}}{a}\operatorname{ch}\dfrac{(l-x)\sqrt{h}}{a}+H\operatorname{sh}\dfrac{(l-x)\sqrt{h}}{a}}{\dfrac{\sqrt{h}}{a}\operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}+H\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}}+v(x,t),$$ где

$$v(x,t)=-2a^2u_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n(\lambda_n^2+H^2)\sin\lambda_n x}{(l(\lambda_n^2+H^2)+H((a\lambda_n)^2+h)}e^{-((a\lambda_n)^2+h)t},$$ λ_n – положительные корни характеристического уравнения $H\operatorname{tg}\lambda_n l=-\lambda_n$.

Упражнение 2. *Найти распределение температуры в шаровом слое $R_1\le r\le R_2$ с центром в начале координат. На поверхностях сфер, ограничивающих шаровой слой, поддерживаются постоянные температуры, начальная температура нулевая.*

Ответ: $$u(r,t)=\frac{R_2u_2(r-R_1)+R_1u_1(R_2-r)}{(R_2-R_1)r}+\frac{v_0(r,t)}{r},$$ где

$$v_0(r,t)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_1u_1(-1)^nR_2u_2}{n}\sin\frac{\pi n(R_2-r)}{R_2-R_1}\exp\left(-\left(\frac{\pi an}{R_2-R_1}\right)^2t\right).$$

Указание. Краевая задача имеет вид

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$, $R_1\le r\le R_2$, $t>0$, граничные условия $u(R_1,t)=u_1=\text{const}$, $u(R_2,t)=u_2=\text{const}$, начальное условие $u(r,0)=0$.

Упражнение 3. Найти распределение температуры в кубе $0 \le x, y, z \le l$ с теплоизолированной боковой поверхностью. Начальная температура $u_0 = \mathrm{const}$. На всех поверхностных гранях куба поддерживается нулевая температура.

Ответ:

$$u(x, y, z, t) = \frac{64u_0}{\pi^3} \sum_{k, m, n=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi(2k+1)x}{l} \sin\frac{\pi(2m+1)y}{l} \sin\frac{\pi(2n+1)z}{l}}{(2k+1)(2m+1)(2n+1)} e^{-\omega_{kmn}t} ,$$

где $\omega_{kmn} = \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \left((2k+1)^2 + (2m+1)^2 + (2n+1)^2\right)$.

Указание. Краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \ 0 \le x, y, z \le l, \ t > 0,$$

$$u(0, y, z, t) = u(l, y, z, t) = 0, \ 0 < y, z < l, \ t > 0,$$

$$u(x, 0, z, t) = u(x, l, z, t) = 0, \ 0 < x, z < l, \ t > 0,$$

$$u(x, y, 0, t) = u(x, y, l, t) = 0, \ 0 < x, y < l, \ t > 0,$$

$$u(x, y, z, 0) = u_0 = \mathrm{const}, \ 0 < x, y, z < l .$$

Упражнение 4. *Определить поперечные колебания прямоугольной мембраны* $0 \le x \le l$, $0 \le y \le p$ *с жестко закрепленными краями (сопротивлением среды пренебрегаем) под действием непрерывно распределенной по мембране силы с плотностью* $f(x, y, t) = \rho e^{-t} x \sin\frac{2\pi y}{p}$. *Начальные условия нулевые.*

Ответ: $u(x, y, t) = \frac{2l}{\pi} \sin\frac{2\pi y}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k((\pi a\omega_k)^2 + 1)} \sin\frac{\pi k x}{l} \times$

$\times \left(e^{-t} - \cos \pi a\omega_k t + \frac{1}{\pi a\omega_k} \sin \pi a\omega_k t \right)$, где частоты $\omega_k = \sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{4}{p^2}}$.

Указание. Краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + e^{-t} x \sin\frac{2\pi y}{p}, u(0, y, t) = u(l, y, t) = 0$$

$u(x,0,t)=u(x,\ p,t)=0$, $t>0$, $u(x,y,0)=\dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0$, $0<x<l$,
$0<y<p$.

Упражнение 5. *Найти решение следующих краевых задач.*

5.1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, $0<x<\pi$, $0<y<\pi$, $t>0$,

$u(0,y,t)=\dfrac{\partial u(\pi,y,t)}{\partial x}=u(x,0,t)=\dfrac{\partial u(x,\pi,t)}{\partial y}=0$, $u(x,y,0)=Axy$,

$\dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0$, $0<x<\pi$, $0<y<\pi$.

Ответ:

$$u(x,y,t)=\frac{64A}{\pi^2}\sum_{k,\,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{(2n+1)^2(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)x}{2}\sin\frac{(2n+1)y}{2}\times$$
$$\times\cos\left(at\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}\right).$$

5.2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, $0<x<\pi$, $0<y<\pi$, $t>0$,

$u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0$,

$u(x,y,0)=Axy(x-\pi)(y-\pi)$, $\dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0$.

Ответ: $u(x,y,t)=\dfrac{16A}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k,\,n=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x\sin(2k+1)y}{(2k+1)^3(2n+1)^3}\times$

$$\times\cos\left(at\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}\right).$$

6 МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

6.1 Интегральное преобразование Фурье

Напомним основные свойства интегрального преобразования Фурье. Если функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ удовлетворяет определенным условиям, то справедлива интегральная формула Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega(x-z)} dz.$$

Назовем Фурье-образом функции $f(x)$ функцию

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

В силу интегральной формулы Фурье функция $f(x)$ может быть восстановлена с помощью формулы

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Переход от функции $f(x)$ к Фурье-образу $F(\omega)$ называется *интегральным преобразованием Фурье*, а переход от Фурье-образа $F(\omega)$ к функции $f(x)$ называется *обратным преобразованием Фурье*. Для интегрального преобразования Фурье мы будем употреблять следующую символическую запись: $f(x) \div F(\omega)$, т.е. функции $f(x)$ ставится в соответствие ее Фурье-образ $F(\omega)$.

В дальнейшем нас будет интересовать функция двух переменных $u(x,t)$, для которой мы будем осуществлять преобразование Фурье по переменной x, т.е. функции $u(x,t)$ ставится в соответствие Фурье-образ $U(\omega,t)$ по формуле

$$U(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx. \tag{6.1}$$

Обратное преобразование Фурье, т.е. нахождение функции $u(x,t)$ по ее известному Фурье-образу $U(\omega,t)$ мы будем осуществлять по формуле

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega. \tag{6.2}$$

Основными свойствами преобразования Фурье являются:

Свойство 1 (линейность преобразования Фурье).
Если $u(x,t)\div U(\omega,t)$, $v(x,t)\div V(\omega,t)$, то

$$c_1u(x,t)+c_2v(x,t)\div c_1U(\omega,t)+c_2V(\omega,t),$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Свойство 2 (преобразование Фурье для частных производных).
Если $u(x,t)\div U(\omega,t)$, то

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\div i\omega U(\omega,t),\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\div(i\omega)^2U(\omega,t),\ \ldots,$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\div\frac{dU(\omega,t)}{dt},\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\div\frac{d^2U(\omega,t)}{dt^2},\ \ldots.$$

Как следует из свойства 2, под действием преобразования Фурье операция дифференцирования по переменной x заменяется умножением. Это позволит нам свести решение задачи Коши для уравнения теплопроводности к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

Если функция $u(x,t)$ задана на полупрямой $(0<x<+\infty)$, то можно ввести косинус-образ Фурье

$$U_l(\omega,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u(x,t)\cos\omega x dx,$$

переход от которого к функции-оригиналу $u(x,t)$ осуществляется через обратное косинус-преобразование Фурье по формуле

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U_l(\omega,t)\cos\omega x d\omega,$$

и синус-образ Фурье

$$U_s(\omega,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)\sin\omega x dx, \qquad (6.3)$$

переход от которого к оригиналу $u(x,t)$ осуществляется по формуле

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U_s(\omega,t)\sin\omega x d\omega. \qquad (6.4)$$

6.2 Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

Используя интегральное преобразование Фурье (6.1), найдем решение задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ -\infty<x<+\infty,\ t\geq 0, \qquad (6.5)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty. \qquad (6.6)$$

По формуле (6.1) вводим Фурье-образ функции $u(x,t)$, а Фурье-образ функции $\varphi(x)$, входящей в начальное условие, получаем

$$U(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}dx,$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-i\omega x}dx.$$

Заметим, что начальное условие для Фурье-образа $U(\omega,t)$ будет иметь вид

$$U(\omega,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,0)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-i\omega x}dx=F(\omega).$$

Так как по свойству 2 Фурье-образ 2-й производной

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \div (i\omega)^2 U(\omega,t) = -\omega^2 U(\omega,t),$$

то переходя к Фурье-образам в обеих частях уравнения (6.5), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dU(\omega,t)}{dt} = -a^2\omega^2 U(\omega,t), \text{ где } U(\omega,0) = F(\omega).$$

Решение задачи Коши для этого уравнения имеет вид

$$U(\omega,t) = F(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}.$$

По формуле (6.2) осуществляем обратное преобразование Фурье, находим функцию-оригинал $u(x,t)$, отвечающую полученному Фурье-образу $U(\omega,t)$. В процессе дальнейших вычислений мы будем использовать известный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 z^2}\cos\beta z dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right), \tag{6.7}$$

формулу Эйлера $e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x$, а также свойство четность-нечетность подынтегральной функции. Находим

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)e^{i\omega(x-z)}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)dz\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t}\left(\cos\omega(x-z) + i\sin\omega(x-z)\right)d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)dz\int_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t}\cos\omega(x-z)d\omega = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4\alpha^2 t^2}\right)dz.$$

Таким образом, решение однородного уравнения теплопроводности на бесконечной прямой с начальным условием (6.6) имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4\alpha^2t^2}\right)dz. \qquad (6.8)$$

Аналогичным образом ищется решение неоднородного уравнения теплопроводности. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\ -\infty<x<+\infty,\ t\ge 0 \qquad (6.9)$$

с нулевым начальным условием $u(x,0)=0.$

Введем Фурье-образ для функции $f(x,t)$ по переменной x:

$$F(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)e^{-i\omega x}dx.$$

Переходим к Фурье-образам в обеих частях уравнения (6.9), получаем следующую задачу Коши:

$$\frac{dU(\omega,t)}{dt}=-a^2\omega^2U(\omega,t)+F(\omega,t),\ U(\omega,0)=0. \qquad (6.10)$$

Полученное неоднородное уравнение решаем методом вариации произвольной постоянной

$$U(\omega,t)=c(t)e^{-a^2\omega^2t}.$$

Подставляем функцию $U(\omega,t)$ в уравнение (6.10) и находим

$$c'(t)=F(\omega,t)e^{a^2\omega^2t},$$

тогда

$$c(t)=\int_0^t F(\omega,\tau)e^{a^2\omega^2\tau}d\tau+c,\ \text{где}\ c=\text{const}.$$

Из начального условия имеем $U(\omega,0)=c(0)=c=0.$ Поэтому для Фурье-образа $U(\omega,t)$ получаем

$$U(\omega,t)=e^{-a^2\omega^2\tau}\int_0^t F(\omega,\tau)e^{a^2\omega^2\tau}d\tau=\int_0^t F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau.$$

Подставляем в это соотношение Фурье-образ

$$F(\omega,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z,\tau)e^{-i\omega z}dz$$

и приходим к требуемому выражению

$$U(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t} e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} f(z,\tau)e^{-i\omega z}dz.$$

Далее по формуле (6.2) находим функцию-оригинал

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{t}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} f(z,\tau)dz\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}e^{i\omega(x-z)}d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{t}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} f(z,\tau)dz\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\cos(x-z)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z,\tau)\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4\alpha^2(t-\tau)}\right)dz.$$

Итак, решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности (6.9) с нулевым начальным условием имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z,\tau)\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)dz. \qquad (6.11)$$

Пример 6.1. Найти решение уравнения теплопроводности

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $-\infty<x<+\infty$, $t>0$

с начальным условием $u(x,0)=e^{-x^2}$.

Решение уравнения теплопроводности находим по формуле (6.8). Подставляем функцию $\varphi(x)=e^{-x^2}$ и получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}}dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\left(\frac{(z-x)^2}{4t}+z^2\right)\right)dz.$$

Выделим полный квадрат по переменной z, выполнив следующие преобразования:

$$\frac{(z-x)^2}{4t}+z^2=\frac{z^2-2zx+x^2}{4t}+z^2=\frac{1+4t}{4t}z^2-\frac{-2zx}{4t}+\frac{x^2}{4t}=$$

$$=\left(\frac{z\sqrt{1+4t}}{2\sqrt{t}}-\frac{x}{2\sqrt{t(1+4t)}}\right)^2+\frac{x^2}{4t}-\frac{x^2}{4t(1+4t)}=y^2+\frac{x^2}{1+4t},$$

где мы ввели переменную

$$y=\frac{z\sqrt{1+4t}}{2\sqrt{t}}-\frac{x}{2\sqrt{t(1+4t)}},\quad -\infty<y<+\infty.$$

Переходим к интегрированию по переменной y. Так как

$$dz=\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{(1+4t)}}dy,$$

то получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{(1+4t)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\left(y^2+\frac{x^2}{1+4t}\right)\right)dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(1+4t)}}e^{-\frac{x^2}{1+4t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$$

При получении последнего результата мы использовали известный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$.

Итак, решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с данным начальным условием имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right).$$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2\cos t,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0,$ начальное условие $u(x,0)=0.$

Решение неоднородного уравнения теплопроводности находим по формуле (6.11), где $f(x,t)=x^2\cos t$. Получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\cos\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}z^2\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4(t-\tau)}\right)dz. \qquad (6.12)$$

Во внутреннем интеграле переходим к новой переменной

$$y=\frac{z-x}{2\sqrt{t-\tau}}\quad(-\infty<y<+\infty),\ \text{тогда}$$

$$z=x+2y\sqrt{t-\tau},\ dz=2\sqrt{t-\tau}dy,$$

и для внутреннего интеграла получаем результат

$$\int_{-\infty}^{+\infty}z^2\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4(t-\tau)}\right)dz=2\sqrt{t-\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x+2y\sqrt{t-\tau}\right)^2e^{-y^2}dy=$$

$$=2\sqrt{t-\tau}\left(x^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy+4x\sqrt{t-\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}ye^{-y^2}dy+4(t-\tau)\int_{-\infty}^{+\infty}y^2e^{-y^2}dy\right)=$$

$$=2\sqrt{t-\tau}\left(x^2\sqrt{\pi}+4(t-\tau)\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=2\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}\left(x^2+2(t-\tau)\right).$$

Второй интеграл в сумме интегралов зануляется из-за нечетности подынтегральной функции, также при вычислении мы использовали известный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}y^2e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Подставляем найденный интеграл по переменной z в равенство (6.12) и находим решение уравнения теплопроводности:

$$u(x,t)=\int_0^t\frac{\cos\tau}{\sqrt{t-\tau}}\sqrt{t-\tau}\left(x^2+2(t-\tau)\right)d\tau=\left(x^2+2t\right)\int_0^t\cos\tau d\tau-2\int_0^t\tau\cos\tau d\tau=$$

$$=\left(x^2+2t\right)\sin t-t\sin t-(\cos t-1)=1-\cos t+\left(x^2+t\right)\sin t.$$

6.3 Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с двумя и тремя пространственными переменными

Метод интегрального преобразования Фурье легко обобщается для решения уравнения теплопроводности с двумя или тремя пространственными переменными. Рассмотрим решение задачи Коши для двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)+g(x,y,t),$$

$$-\infty<x,y<+\infty,\ t\geq 0 \qquad (6.13)$$

с нулевым начальным условием $u(x,y,0)=0$.

Введем двумерный Фурье-образ для функции $u(x,y,t)$, осуществив преобразование Фурье по обоим пространственным переменным

$$U(\omega_1,\omega_2,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int u(x,y,t)e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)}dxdy. \qquad (6.14)$$

Обратное преобразование Фурье, т.е. переход от Фурье-образа (6.14) к исходной функции-оригиналу $u(x,y,t)$, будем делать по формуле

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}U(\omega_1,\omega_2,t)e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y)}d\omega_1 d\omega_2. \qquad (6.15)$$

Продифференцируем обе части равенства (6.15) по переменной x (дифференцирование по x вносим под знак интеграла, рассматривая дифференцирование по x как по параметру):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}-\omega_1^{\,2}\upsilon(\omega_1,\omega_2,t)e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y)}d\omega_1 d\omega_2\ ,$$

т.е. получаем Фурье-образ для второй производной

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \square\ -\omega_1^{\,2}U(\omega_1,\omega_2,t).$$

Аналогичным образом, дважды дифференцируя обе части равенства (6.15) по переменной y, приходим к соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Box -\omega_2{}^2 U(\omega_1, \omega_2, t).$$

Введём также Фурье-образ для функции $g(x, y, t)$ аналогично формуле (6.14):

$$G(\omega_1, \omega_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y, t) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 \eta)} dxdy$$

и переходим к Фурье-образам в обеих частях уравнения (6.13), получаем

$$\frac{dU(\omega_1, \omega_2, t)}{dt} = -a^2 (\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2) U(\omega_1, \omega_2, t) + G(\omega_1, \omega_2, t),$$

где $U(\omega_1, \omega_2, 0) = 0.$

Решив полученное уравнение методом вариации произвольной постоянной, с учётом нулевого начального условия, находим требуемый Фурье-образ:

$$U(\omega_1, \omega_2, t) = \int_0^t G(\omega_1, \omega_2, \tau) e^{-a^2(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2)(t-\tau)} d\tau.$$

По формуле (6.15) осуществляем обратное преобразование Фурье:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega_1, \omega_2, \tau) e^{-a^2(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2)(t-\tau)} e^{i(\omega_1 x + \omega_2 \eta)} d\omega_1 d\omega_2.$$

Подставим в это равенство Фурье-образ

$$G(\omega_1, \omega_2, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta, \tau) e^{-i(\omega_1 \xi + \omega_2 \eta)} d\xi d\eta$$

и находим решение уравнения теплопроводности

$$u(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^t d\tau \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta \int \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2)(t-\tau)} e^{-i(\omega_1 \xi y + \omega_2 \eta)} \times$$
$$\times e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 \eta)} d\omega_1 d\omega_2 =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^t d\tau \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta, \tau) d\xi dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \omega_1{}^2 (t-\tau)} e^{i\omega_1(x-\xi)} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \omega_2{}^2 (t-\tau)} e^{i\omega_2(y-\eta)} d\omega_2 =$$

= (интегрирование по переменным ω_1 и ω_2 распадается на два независимых интеграла, поэтому дальнейшие вычисления аналогичны одномерному уравнению теплопроводности) =

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^t d\tau\iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi,\eta,\tau)d\xi dy\cdot\int_0^{+\infty} e^{-a^2\omega_1^2(t-\tau)}\cos\omega_1(x-\xi)d\omega_1\cdot\int_0^{+\infty} e^{-a^2\omega_2^2(t-\tau)}\cos\omega_2(y-\eta)d\omega_2=$$

$$=\frac{1}{4a^2\pi}\int_0^t d\tau\iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi,\eta,\tau)\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\cdot\exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\cdot d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{4a^2\pi}\int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi,\eta,\tau)\cdot\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\cdot\exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\cdot d\xi d\eta.$$

Итак, решение двумерного неоднородного уравнения теплопроводности (6.13) имеет вид

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4a^2\pi}\int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi,\eta,\tau)\cdot\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\cdot d\xi d\eta. \quad (6.16)$$

Аналогичным образом решается задача Каши для двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);-\infty<x,y<+\infty,\ t>0$$

с начальным условием $u(x,y,0)=\varphi(x,y)$.

Применение преобразования Фурье (6.14) приводит к результату

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4a^2\pi t}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)\cdot\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2 t}\right)d\xi d\eta. \quad (6.17)$$

Решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+g(x,y,t);-\infty<x,y<+\infty,\ t>0$$

с начальным условием $u(x,y,0)=\varphi(x,y)$ находим по принципу суперпозиции решений, суммируя решения, даваемые формулами (6.16) и (6.17).

Пример 6.2. Найти решение задачи Коши для двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);-\infty<x,y<+\infty,\ t>0,$$

где $u(x,y,0)=\cos x\sin y.$

Решение находим по формуле (6.17):

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4a^2\pi t}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\xi\sin y\cdot\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{4a^2t}\right)d\xi dy=$$

$$=\frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\xi\cdot e^{\frac{-(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin\xi\cdot e^{\frac{-(\eta-y)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Вычисляем каждый из интегралов (в процессе вычислений используем интеграл (6.7)):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\xi\cdot e^{\frac{-(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi=\left(\xi=2az_1\sqrt{t}+x;-\infty<z_1<+\infty\right)=$$

$$=2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(2az_1\sqrt{t}+x)\cdot e^{-z_1^2}dz_1=2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\cos(2az_1\sqrt{t})\cdot\cos x-\sin(2az_1\sqrt{t})\sin x)\cdot e^{-z_1^2}dz_1=$$

$$=4a\sqrt{t}\cos x\int\limits_{0}^{+\infty}(\cos(2az_1\sqrt{t})\cdot e^{-z_1^2}dz_1=2a\sqrt{\pi t}\cos x\cdot e^{-a^2t};$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin\xi\cdot e^{\frac{(\eta-y)^2}{4a^2t}}d\xi=\left(y=2az_2\sqrt{t}+y;-\infty<z_2<+\infty\right)=$$

$$=2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(2az_2\sqrt{t}+y)\cdot e^{-z_2^2}dz_2=2a\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(2az_2\sqrt{t})\cdot\cos y+\cos(2az_2\sqrt{t})\sin y)\cdot e^{-z_2^2}dz_2=$$

$$=4a\sqrt{t}\sin y\int\limits_{0}^{+\infty}(\cos(2az_2\sqrt{t})\cdot e^{-z_2^2}dz_2=2a\sqrt{\pi t}\sin y\cdot e^{-a^2t}.$$

Как следствие, решение задачи, с учётом полученных интегралов, будет иметь вид

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4a^2\pi t}\cdot 2a\sqrt{\pi t}\cos x\cdot e^{-a^2t}\cdot 2a\sqrt{\pi t}\sin y\cdot e^{-a^2t}=\cos x\sin y\cdot e^{-2a^2t}.$$

Совершенно аналогичным образом метод интегрального преобразования Фурье обобщается на случай решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с тремя пространственными переменными.

Для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right);-\infty<x,y,z<+\infty,\ t>0$$

с начальным условием $u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)$ мы введём преобразование Фурье по каждой из пространственных переменных

$$U(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int u(x,y,z,t)e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}dxdydz,$$

$$F\left(\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \varphi(x,y,z)e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}dxdydz.$$

Дальнейшие вычисления аналогичны случаю уравнения с двумя пространственными переменными, поэтому сразу приводим результат. Решение уравнения теплопроводности для трёхмерного случая будет иметь вид

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{8a^3\sqrt{(\pi t)^3}}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\varphi(\xi,\eta,\zeta)\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2t}\right)d\xi d\eta d\zeta.$$

6.4 Краевые задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой

Рассмотрим решение 1-й краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2};0<x<+\infty,\ t>0. \tag{6.18}$$

Краевое условие на конце $x=0$ имеет вид $u\left(0,t\right)=\mu\left(t\right)$, начальное условие $u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right)$.

Краевую задачу 1-го рода будем решать методом синус-преобразования Фурье (в этом случае удовлетворяется однородное краевое условие 1-го рода $u(0,t)=0$). По формуле (6.3) вводим синус-образы Фурье:

$$U_s(\omega,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)\sin\omega x dx,$$

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty y(x)\sin\omega x dx.$$

Найдём синус-образ Фурье 2-й производной функции $u(x,t)$. При решении уравнения (6.18) полагаем, что функция $u(x,t)$ и её производная $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ являются ограниченными при $x\to+\infty$, т.е. выполняются соотношения

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,t)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0.$$

Тогда получаем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\sin\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin\omega x d\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\sin\omega x\right)-0-\omega\int_0^\infty\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\cos\omega x dx=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega\int_0^\infty\cos\omega x du(x,t)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega\left(\lim_{x\to+\infty}\left(u(x,t)\cos\omega x\right)-u(0,t)+\omega\int_0^\infty u(x,t)\sin\omega x dx\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega\mu(t)-\omega^2U_s(\omega,t).$$

Начальное условие для синус-образа Фурье

$$U_s(\omega,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\varphi(x)\sin\omega x dx=F_s(\omega).$$

Далее переходим к синус-образам в обеих частях уравнения и получаем задачу Коши вида

$$\frac{\partial U_s(\omega,t)}{\partial t} = -a^2\omega^2 U_s(\omega,t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2\omega\mu(t), \text{ где } U_s(\omega,0) = F_s(\omega).$$

Решаем уравнение методом вариации произвольной постоянной, т.е. ищем решение в виде

$$U_s(\omega,t) = C(t)e^{-a^2\omega^2 t}.$$

Подставим эту форму решения в уравнение, находим функцию

$$C(t) = C + \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2\omega \int_0^t \mu(\tau) e^{a^2\omega^2\tau} d\tau, \text{ где } C = \text{const}.$$

Поэтому синус-образ Фурье равен

$$U_s(\omega,t) = Ce^{-a^2\omega^2 t} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2\omega \int_0^t \mu(\tau) e^{-a^2\omega^2(t-\tau)} d\tau.$$

Начальное условие даёт

$$U_s(\omega,0) = C = F_s(\omega).$$

Как следствие, окончательно получаем

$$U_s(\omega,t) = F_s(\omega)e^{-a^2\omega^2 t} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2\omega \int_0^t \mu(\tau) e^{-a^2\omega^2(t-\tau)} d\tau.$$

По формуле (6.4) обращаем синус-преобразование Фурье и находим решение краевой задачи

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\omega) e^{-a^2\omega^2 t} \sin\omega x d\omega + \frac{2}{\pi} a^2 \int_0^t \mu(\tau) d\tau \int_0^\infty \omega \sin\omega x \cdot e^{-a^2\omega^2(t-\tau)} d\omega.$$

Находим функцию-оригинал, отвечающую первому слагаемому

$$u_1(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\omega) e^{-a^2\omega^2 t} \sin\omega x d\omega = \frac{2}{\pi} a^2 \int_0^\infty \varphi(z) dz \int_0^\infty e^{-a^2\omega^2 t} \sin\omega z \sin\omega x d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(z) dz \int_0^\infty e^{-a^2\omega^2 t} \left(\cos\omega(z-x) - \cos\omega(z+x)\right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(z) dz \left(\int_0^\infty e^{-a^2\omega^2 t} \cos\omega(z-x) d\omega - \int_0^\infty e^{-a^2\omega^2 t} \cos\omega(z+x) d\omega \right) =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(z)\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\left(\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}\right)\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \varphi(z)\left(\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}\right)\right)dz.$$

Функция-оригинал, отвечающая второму слагаемому,

$$u_2(x,t)=\frac{2}{\pi}a^2\int_0^t \mu(\tau)d\tau\int_0^\infty \omega\sin\omega x e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\omega.$$

Вычисляем интеграл по переменной ω:

$$\int_0^\infty \omega\sin\omega x e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\omega=-\frac{1}{2a^2(t-\tau)}\int_0^\infty \omega\sin\omega x d e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}=$$

$$=-\frac{1}{2a^2(t-\tau)}\left(\sin\omega x e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\Big|_0^\infty - x\int_0^\infty e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\cos\omega x d\omega\right)=$$

= (внеинтегральное слагаемое зануляется на пределах интегирования) =

$$=\frac{x}{2a^2(t-\tau)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)=\frac{x\sqrt{\pi}}{4a^3\sqrt{(t-\tau)^3}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right).$$

Окончательно получаем

$$u_2(x,t)=\frac{2}{\pi}a^2\frac{x\sqrt{\pi}}{4a^3}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau=$$

$$=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Суммируем функции-оригиналы $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ и находим решение 1-й краевой задачи для уравнения (6.18):

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \varphi(z)\left(\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}\right)\right)dz+$$

$$+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^3}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Далее рассмотрим 2-ю краевую задачу для уравнения вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-hu(x,t)+f(x,t)\ ;0<x<+\infty;\ t>0, \qquad (6.19)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0;\ t>0, \qquad (6.20)$$

начальное условие $u(x,0)=0.$

Для решения 2-й краевой задачи используем косинус-преобразование Фурье. Вводим косинус-образ функции $u(x,t)$

$$U_c(\omega,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)\cos\omega x dx,$$

обращение преобразования Фурье имеет вид

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U_c(\omega,t)\cos\omega x d\omega. \qquad (6.21)$$

Продифференцируем обе части равенства (6.21) по x:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (-\omega U_c(\omega,t))\sin\omega x d\omega,$$

тогда получаем $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0$, т.е. выполняется краевое условие (6.20).

Продифференцировав равенство (6.21) по x дважды, находим для косинус-образа Фурье 2-й производной:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ \square\ -\omega^2 U_c(\omega,t).$$

Переходим с учетом этого равенства к Фурье-образам в обеих частях уравнения (6.19), получаем уравнение

$$\frac{dU_c(\omega,t)}{dt}=-(a^2\omega^2+h)U_c(\omega,t)+F_c(\omega,t),$$

где $F_c(\omega,t)$ – косинус-образ Фурье функции $f(x,t)$.

Решаем это уравнение с начальным условием $U_c(\omega,0)=0.$ Решение уравнения имеет вид

$$U_c(\omega,t)=\int_0^t F_c(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}e^{-h(t-\tau)}d\tau.$$

По формуле (6.21) обращаем преобразование Фурье

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-h(t-\tau)}d\tau\int_0^\infty F_c(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\cos\omega x d\omega. \qquad (6.22)$$

Подставляем в равенство (6.22) косинус-образ

$$F_c(\omega,\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(z,\tau)\cos\omega z dz$$

и находим решение уравнения (6.19):

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^t e^{-h(t-\tau)}d\tau\int_0^\infty f(z,\tau)dz\int_0^\infty e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\cos\omega z\cos\omega x d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^t e^{-h(t-\tau)}d\tau\int_0^\infty f(z,\tau)dz\int_0^\infty e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}(\cos\omega(z-x)+\cos\omega(z+x))d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^t e^{-h(t-\tau)}d\tau\int_0^\infty f(z,\tau)dz\left(\int_0^\infty e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\cos\omega(z-x)d\omega+\int_0^\infty e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}\cos\omega(z+x)d\omega\right)=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\int_0^\infty f(z,\tau)\left(\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)+\exp\left(-\frac{(z+x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right)dz.$$

Таким образом, решение однородной краевой задачи 2-го рода для уравнения (6.19) имеет вид

$$u(x,t)=\frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{h\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\int_0^\infty f(z,\tau)\left(\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)+\exp\left(-\frac{(z+x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right)dz.$$

6.5 Упражнения для самостоятельной работы

Упражнение 1. *Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.*

1.1. $4\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=e^{2x-x^2},\ -\infty<x<+\infty,\ t>0$

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{2x^2+t(4x+1)+3t^2}{2\sqrt{(1+t)^5}}\exp\left(\dfrac{2x-x^2+t}{1+t}\right).$

1.2. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=\sin xe^{-x^2},\ -\infty<x<+\infty,\ t>0$

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4t}}\sin\dfrac{x}{\sqrt{1+4t}}\exp\left(-\dfrac{x^2+t}{1+4t}\right).$

1.3. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin t,\ u(x,0)=0,\ -\infty<x<+\infty,\ t>0$

Ответ: $u(x,t)=1-\cos t.$

1.4. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\sin t,\ u(x,0)=0,\ -\infty<x<+\infty,\ t>0$

Ответ: $u(x,t)=x(1-\cos t).$

Упражнение 2. *Найти решение уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ -\infty<x<+\infty,\ t>0,$$

начальное распределение температуры $u(x,0)=\varphi(x)$.

2.1. $\varphi(x)=\begin{cases}u_0=\text{const}, -l\le x\le l,\\ 0,\ x\in(-\infty;-l)\cup(l;+\infty).\end{cases}$

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{u_0}{2}\left(\Phi\left(\dfrac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\dfrac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right),$ где

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}dy$$ = интеграл Лапласа.

2.2. $\varphi(x)=\begin{cases} u_0\left(1+\dfrac{x}{l}\right), -l\le x\le 0,\\ u_0\left(1-\dfrac{x}{l}\right),\ 0<x\le l, \end{cases}$ $\varphi(x)=0,\ x\in(-\infty;-l)\cup(l;+\infty)$

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left(\left(1+\frac{x}{l}\right)\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right)-\frac{2x}{l}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)-\left(1-\frac{x}{l}\right)\Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right)+$$

$$+\frac{u_0 a}{l}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left(e^{-\frac{(x+l)}{4a^2-t}}-2e^{-\frac{x}{4a^2-t}}+e^{-\frac{(x-l)}{4a^2-t}}\right).$$

2.3. $\varphi(x)=\begin{cases} u_1,\ x<0,\\ u_2,\ x\ge 0. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{u_1+u_2}{2}+\dfrac{u_2-u_1}{2}\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$

Упражнение 3. *Найти решение уравнения теплопроводности с двумя и тремя пространственными переменными.*

3.1. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+e^t,\ -\infty<x,y<+\infty,\ t>0,$

$u(x,y,0)=\cos x\cos y,\ -\infty<x,y<+\infty.$

Ответ: $u(x,y,t)=e^t-1+\cos x\cos y e^{-2a^2t}.$

3.2. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos t,\ -\infty<x,y<+\infty,\ t>0,$

$u(x,y,0)=xye^{-\left(x^2+y^2\right)},\ -\infty<x,y<+\infty.$

Ответ: $u(x,y,t)=\sin t+\dfrac{xy}{(1+4t)^3}\exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{1+4t}\right).$

3.3. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sin t\sin x\sin y,\;\; -\infty<x,y<+\infty\,,\;\; t>0,$

$u(x,y,0)=1,\;\; -\infty<x,y<+\infty.$

Ответ: $u(x,y,t)=1+\dfrac{1}{5}\sin x\sin y\left(e^{-2t}+2\sin t-\cos t\right).$

3.4. $2\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\;\; -\infty<x,y<+\infty\,,\;\; t>0,$

$u(x,y,0)=\cos xy,\;\; -\infty<x,y<+\infty.$

Ответ: $u(x,y,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cos\dfrac{xy}{1+t^2}\exp\left(-\dfrac{\left(x^2+y^2\right)t}{2\left(1+t^2\right)}\right).$

3.5. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+t\cos x,\;\; -\infty<x,y<+\infty\,,\;\; t>0,$

$u(x,y,0)=\cos y\cos z,\;\; -\infty<x,y,z<+\infty.$

Ответ: $u(x,y,t)=\dfrac{1}{4}\cos x\left(e^{-2t}-1+2t\right)+\cos y\cos z e^{-4t}.$

Упражнение 4. *Найти решение следующих краевых задач.*

4.1. $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\;\; 0<x,t<+\infty\,,$

$u(0,t)=0,\;\; t\geq 0,\;\; u(x,0)=0,\;\; 0<x<+\infty.$

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t\dfrac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}f(z,\tau)\left(\exp\left(-\dfrac{(z-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)-\right.$

$\left.-\exp\left(-\dfrac{(z+x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right)dz.$

4.2. $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\;\; 0<x,t<+\infty\,,$

$\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\mu(t),\;\; t\geq 0,\;\; u(x,0)=\varphi(x),\;\; 0\leq x<+\infty.$

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\varphi(z)\left(\exp\left(-\dfrac{(z-x)^2}{4a^2t}\right)+\exp\left(-\dfrac{(z+x)^2}{4a^2t}\right)\right)dz-$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t}\frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau.$$

4.3. $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\ \ 0<x,t<+\infty,$

$$u(0,t)=0,\ \ t\ge 0,\ \ u(x,0)=\begin{cases}u_0=\text{const},\ 0<x<1,\\ 0,\ 1<x<+\infty.\end{cases}$$

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{u_0}{2}\left(\Phi\left(\dfrac{x+1}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\dfrac{x-1}{2a\sqrt{t}}\right)\right).$

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

Перечень «табличных» интегралов

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

$$\int a^{x}\cos bx\,dx=\frac{a^{x}(b\sin bx+\ln a\cdot\cos bx)}{\ln^2 a+b^2}$$

$$\int a^{x}\sin bx\,dx=\frac{a^{x}(\ln a\cdot\sin bx-b\cos bx)}{\ln^2 a+b^2}$$

$$\int x\cos bx\,dx=\frac{1}{b}\left(x\sin bx+\frac{1}{b}\cos bx\right)$$

$$\int x\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}\left(x\cos bx-\frac{1}{b}\sin bx\right)$$

$$\int x^2\cos bx\,dx=\frac{1}{b}\left(x^2\sin bx+\frac{2}{b}x\cos bx-\frac{2}{b^2}\sin bx\right)$$

$$\int x^2\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}\left(x^2\cos bx-\frac{2}{b}x\sin bx-\frac{2}{b^2}\cos bx\right)$$

$$\int\cos\alpha x\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\right)dx$$

$$\int\sin\alpha x\sin\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right)dx$$

$$\int\sin\alpha x\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)x\right)dx$$

$$\int\operatorname{ch}ax\cos bx\,dx=\frac{a\operatorname{sh}ax\cos bx+b\operatorname{ch}ax\sin bx}{a^2+b^2}$$

$$\int \operatorname{sh} ax \cos bx dx = \frac{a \operatorname{ch} ax \cos bx + b \operatorname{sh} ax \sin bx}{a^2 + b^2}$$

$$\int \operatorname{ch} ax \sin bx dx = \frac{a \operatorname{sh} ax \sin bx - b \operatorname{ch} ax \cos bx}{a^2 + b^2}$$

$$\int \operatorname{sh} ax \sin bx dx = \frac{a \operatorname{ch} ax \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cos bx}{a^2 + b^2}$$

$$\int a^{kx} \cos bx dx = \frac{a^{kx}(b \sin bx + k \ln a \cdot \cos bx)}{(k \ln a)^2 + b^2}$$

$$\int a^{kx} \sin bx dx = \frac{a^{kx}(k \ln a \cdot \sin bx - b \cos bx)}{(k \ln a)^2 + b^2}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Арсенин, В. Я.** Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1984. – 384 с.

2 **Свешников, А. Г.** Лекции по математической физике / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов. – М. : Наука, 2004. – 416 с.

3 **Егоров, А. А.** Практикум по методам математической физики: в 2 ч. Ч. 1. / А. А. Егоров, И. В. Рыбаченко. – Минск : БГУ, 2013. – 115 с.

4 **Егоров, А. А.** Практикум по методам математической физики: в 2 ч. Ч. 2. / А. А. Егоров, И. В. Рыбаченко. – Минск : БГУ, 2014. – 119 с.

5 **Смирнов, М. М.** Задачи по уравнения математической физики / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 1975. – 128 с.

6 **Бицадзе, А. В.** Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. – М. : Наука, 1977. – 224 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ДУДКО Сергей Алексеевич
ДЕРГАЧЁВА Ирина Михайловна
ПРОКОПЕНКО Алла Ивановна

ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебно-методическое пособие

Редактор Я. А. Васькевич
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 28.12.2022 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 11,86. Уч.-изд. л. 7,96. Тираж 100 экз.
Зак № 2901. Изд № 46.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель