

УДК 539.3

А. А. ПОДДУБНЫЙ, кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель; В. А. ГОРДОН, доктор технических наук, Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева

**ДИНАМИКА КОНСТРУКТИВНО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ
«БАЛКА – ОСНОВАНИЕ» ПРИ ВНЕЗАПНОМ ОБРАЗОВАНИИ ТРЕЩИНЫ**

Рассматривается математическая модель динамического процесса в нагруженной балке Эйлера – Бернулли на упругом основании Винклера при внезапном образовании дефекта балки в виде открытой поперечной трещины. Получены зависимости, связывающие параметры напряженно-деформированного состояния балки с глубиной и локализацией трещины при заданных геометрических и механических характеристиках системы «балка – основание».

Введение. Внезапно образующаяся трещина в несущей статическую нагрузку балке, опирающейся на упругое основание, приводит к снижению общей жёсткости системы «балка – основание» и нарушению статического равновесия. Балка приходит в движение, в ходе которого перераспределяются и растут деформации и напряжения. При этом возможны нарушения работы системы, потеря несущей способности, частичное или полное разрушение. Целью данной работы является постановка и аналитическое решение проблемы возбуждения колебаний и их последствий в статически нагруженной системе «балка – основание», причиной которых явилось внезапное образование трещины, то есть внезапное изменение физической и расчётной схем.

В связи с практической важностью аналитических, численных и экспериментальных исследований по динамике несущих систем с трещинами полученные решения являются актуальными и интенсивно развивающимися. Образование дефекта типа трещины в структурном элементе ведёт к снижению жёсткости и, как следствие, к снижению собственных частот колебаний. Кроме того, может измениться характер распределения масс и демпфирующих свойств конструкции.

Постановка задачи.

1 Статическая задача изгиба защемленной по концам балки, опертой на упругое основание Винклера и нагруженной распределенной нагрузкой.

Упругая балка Бернулли – Эйлера с изгибной жесткостью EI опирается по всей длине L на упругое основание Винклера с коэффициентом жесткости K, защемлена по концам [1–3].

На внешние слои балки действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q и реакция основания.

В безразмерных переменных и параметрах

$$\xi = \frac{x}{L}; w_{st} = \frac{v}{L}; \bar{q} = \frac{qL^3}{EI}; \alpha = \sqrt[4]{\frac{KL^4}{4EI}}$$

статический изгиб балки определяется функцией [15]

$$w_{st} = \frac{\bar{q}}{4\alpha^4} (1 - K_4(\alpha\xi)) + w_0'' K_2(\alpha\xi) + w_0'' K_1(\alpha\xi), \quad (1)$$

где $K_i = K_i(\alpha\xi)$ ($i = 1...4$) – функции Крылова вида

$$K_1(\alpha\xi) = \frac{\sin\alpha\xi \cdot \operatorname{ch}\alpha\xi - \cos\alpha\xi \cdot \operatorname{sh}\alpha\xi}{4\alpha^3}$$

$$K_2 = K_1'; K_3 = K_2'; K_4 = K_3'; K_4' = -4\alpha^4 K_1;$$

$w_0''; w_0'''$ – начальные параметры (соответственно безразмерные изгибающий момент и поперечная сила в начале координат $\xi = 0$.) Начальные параметры w_0 и w_0' – соответственно прогиб и угол поворота сечения при $\xi = 0$ согласно условию задачи равны нулю.

Удовлетворяя условиям задачи на конце балки $\xi = 1$,

$$w_{st}(1) = w_{st}'(1) = 0, \quad (2)$$

найдем неизвестные параметры w_0'' и w_0''' из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} w_0'' K_2(\alpha) + w_0''' K_1(\alpha) = \frac{\bar{q}}{4\alpha^4} (K_4(\alpha) - 1); \\ w_0'' K_3(\alpha) + w_0''' K_2(\alpha) = -\bar{q} K_1(\alpha). \end{cases}$$

На рисунке 1 приводятся эпюры безразмерных статических прогибов $w_{st}(\xi)$ (1) и изгибающих моментов $w_{st}''(\xi)$ для следующих исходных данных:

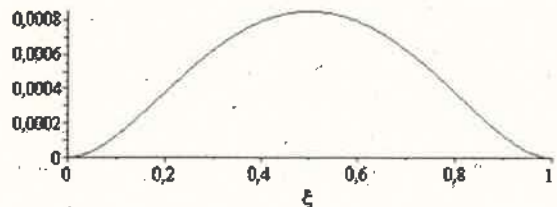
1) балка: материал – бетон, $E = 3,5 \cdot 10^{10}$ Н/м²; длина $L = 6,7$ м; поперечное сечение – прямоугольник с шириной $B = 0,25$ м и высотой $h = 0,18$ м; площадь $A = 0,045$ м²; осевой момент инерции $I = 1,125 \cdot 10^{-4}$ м⁴;

2) основание: материал – гравий, коэффициент жесткости $\bar{K} = 7,5 \cdot 10^6$ Н/м³; коэффициент постели $K = \bar{K}B = 1,875 \cdot 10^6$ Н/м³;

3) нагрузка: перпендикулярная оси балки, равномерно распределенная, безразмерной интенсивности $\bar{q} = 1$;

4) обобщенный параметр жесткости системы «балка – основание» $\alpha = 3,976$.

а)



б)

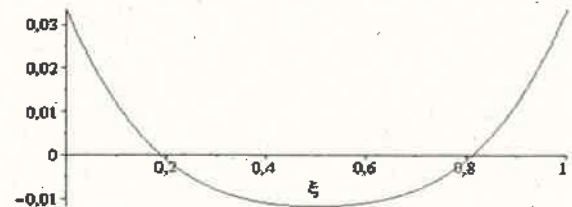


Рисунок 1 – Эпюры статического прогиба (а) и изгибающего момента w_{st}'' (б)

Далее решение статической задачи используется для формулировки начальных условий динамического процесса, вызванного внезапным образованием поперечной трещины в балке и для оценки динамических приращений деформаций и внутренних усилий в поврежденной системе «балка – основание».

Физической моделью балки, опертой на упругое основание и испытывающей изгибные колебания в результате внезапного трещинообразования, считаем конструкцию, которая состоит из двух балочных сегментов (соединены пружиной кручения, расположенной в сечении с трещиной $x = L_1$). Оба сегмента после образования трещины опираются на основание Винклера.

2 Динамическая задача изгибных колебаний балки, опертой на основание Винклера, возникающих после внезапного образования открытой поперечной трещины.

Поперечные перемещения $v_i = v_i(\xi_i, \tau)$ ($i = 1 \dots 2$) сечений сегментов определяются решением уравнений вынужденных колебаний сегментов:

$$\frac{\partial w_{i, \text{вн}}}{\partial \xi_i^4} + 4\alpha^4 \left(w_{i, \text{вн}} + \frac{\partial w_{i, \text{вн}}}{\partial \tau^2} \right) = \bar{q};$$

$$\xi_i = \frac{x_i}{L}; w_{i, \text{вн}} = \frac{v_i}{L}; \tau = \omega_0 t; \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho A}},$$

где x_i, ξ_i – осевая размерная и безразмерная координаты; $v_i, w_{i, \text{вн}}$ – размерный и безразмерный прогиб сечения ξ_i ; t, τ – размерное и безразмерное время; ρ – плотность материала балки; ω_0 – условная частота – параметр системы «балка – основание», имеющий размерность частоты.

2.1 Собственные изгибные колебания балки с открытой поперечной трещиной.

Поскольку сегменты поврежденной балки, образующиеся после внезапного образования трещины, отличаются только длиной: 1-й сегмент – длиной $v = L_1/L$, 2-й сегмент – длиной $(1-v)$, уравнение их собственных колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^4 w_{i, \text{вн}}}{\partial \xi_i^4} + 4\alpha^4 \left(w_{i, \text{вн}} + \frac{\partial^4 w_{i, \text{вн}}}{\partial \tau^2} \right) = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (2.2) ищем, полагая колебания гармоническими и разделяя переменные представлением

$$w_{i, \text{вн}}(\xi_i, \tau) = \bar{W}_i(\xi_i) \sin \bar{\omega} \tau, \quad (5)$$

где $\bar{\omega}$ – искомая относительная частота, отнесенная к относительной условной частоте, $\bar{\omega} = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0}$, $\bar{\omega}_0$ – искомая

частота, отнесенная к эталонной частоте, $\bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\omega_3}$,

$\omega_3 = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$; $\omega_0 = \frac{\omega_0}{\omega_3}$ – условная частота, отнесенная к

ω_3 . Далее в качестве обобщенной жесткости системы «балка – основание» удобно использовать безразмер-

ную условную частоту $\bar{\omega}_0$ вместо параметра α , они связаны между собой соотношением

$$4\alpha^4 = \frac{\omega_0^2}{EI/L^4 \rho A} = \left(\frac{\omega_0}{\omega_3} \right)^2 = \bar{\omega}_0^2.$$

Подстановка представления (5) в уравнение (4) дает уравнение форм собственных колебаний сегментов

$$W_i^{IV} - (\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_0^2) W_i = 0. \quad (6)$$

Применяя к (6) подстановку Эйлера

$$W_i = A e^{r \xi_i},$$

получим характеристическое уравнение

$$r^4 - (\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_0^2) = 0, \quad (7)$$

его корни

$$r_{1,2} = \pm \beta_1; r_{3,4} = \pm i \beta_1; \beta_1 = \sqrt[4]{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_0^2}$$

и функцию прогибов

$$W_i(\beta_1 \xi_i) = W_{0i} R_4(\beta_1 \xi_i) + W'_{0i} R_3(\beta_1 \xi_i) + W''_{0i} R_2(\beta_1 \xi_i) + W'''_{0i} R_1(\beta_1 \xi_i), \quad (8)$$

где

$R_j = R_j(\beta_1 \xi_i)$ ($j = 1 \dots 4$) – функции Крылова вида

$$R_1(\beta_1 \xi_i) = \frac{\text{sh} \beta_1 \xi_i - \sin \beta_1 \xi_i}{2\beta_1^3}; R_2 = R'_1;$$

$$R_3 = R'_2; R_4 = R'_3; R'_4 = \beta_1^4 R_1;$$

$W_{0i}, W'_{0i}, W''_{0i}, W'''_{0i}$ – начальные параметры i -го сегмента ($W_{0i} = W'_{0i} = 0$).

Последовательно дифференцируя прогиб (8), получим остальные кинематические и силовые факторы: угол поворота сечения $W'_i(\beta_1 \xi_i)$, изгибающий момент $W''_i(\beta_1 \xi_i)$, и поперечную силу $W'''_i(\beta_1 \xi_i)$. Теперь состояние произвольного сечения ξ_i сегмента можно представить матричным уравнением

$$\bar{W}_i = V_1(\xi_i) \bar{W}_{0i}, \quad (9)$$

где $\bar{W}_i(\beta_1 \xi_i) = \{ \bar{W}_i(\beta_1 \xi_i) W'_i(\beta_1 \xi_i) W''_i(\beta_1 \xi_i) W'''_i(\beta_1 \xi_i) \}^T$ – вектор состояния произвольного сечения ξ_i i -го сегмента;

$\bar{W}_{0i} = \{ W_{0i} W'_{0i} W''_{0i} W'''_{0i} \}^T$ – вектор начальных параметров i -го сегмента;

$$V_1(\xi_i) = \begin{pmatrix} R_4(\beta_1 \xi_i) & R_3(\beta_1 \xi_i) & R_2(\beta_1 \xi_i) & R_1(\beta_1 \xi_i) \\ \beta_1^4 R_4(\beta_1 \xi_i) & R_4(\beta_1 \xi_i) & R_3(\beta_1 \xi_i) & R_2(\beta_1 \xi_i) \\ \beta_1^4 R_2(\beta_1 \xi_i) & \beta_1^4 R_1(\beta_1 \xi_i) & R_4(\beta_1 \xi_i) & R_4(\beta_1 \xi_i) \\ \beta_1^4 R_3(\beta_1 \xi_i) & \beta_1^4 R_2(\beta_1 \xi_i) & \beta_1^4 R_1(\beta_1 \xi_i) & R_4(\beta_1 \xi_i) \end{pmatrix}$$

является функциональной матрицей влияния начальных параметров i -го сегмента на состояние произвольного сечения ξ_i этого сегмента.

В формулах (8) четыре начальных параметра 2-го сегмента ($W_{02}, W'_{02}, W''_{02}, W'''_{02}$) выражаются из условий сопряжения сегментов через два неизвестных начальных параметра (W'_{01}, W''_{01}) 1-го сегмента. Последние определяются из граничных условий на конце $\xi_2 = 1 - \nu$:

$$W_2(1 - \nu) = W'_2(1 - \nu) = 0. \quad (10)$$

Условия сопряжения сегментов означают непрерывность в сечении с трещиной $\xi_1 = \nu (\xi_2 = 0)$ функций прогибов

$$W_1(\nu) = W_2(0), \quad (11)$$

изгибающих моментов

$$W'_1(\nu) = W'_2(0), \quad (12)$$

и поперечных сил

$$W''_1(\nu) = W''_2(0). \quad (13)$$

Взаимный поворот двух сегментов, соединенных пружиной кручения с жесткостью K_T , вызывает изгибающий момент в сечении $\xi_1 = \nu (\xi_2 = 0)$

$$EIW''_1(\nu) = K_T L (W'_2(0) - W'_1(\nu)). \quad (14)$$

В матричной форме условия сопряжения сегментов (2.9)–(2.12) представляют собой зависимость вектора начальных параметров \bar{W}_{02} 2-го сегмента от вектора состояния $\bar{W}_1(\nu)$ сечения $\xi_1 = \nu$

$$\bar{W}_{02} = E_{12} \bar{W}_1(\nu), \quad (15)$$

$$\text{где } E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \frac{EI}{K_T L}; \quad \bar{W}_1(\nu) = V_1(\nu) \bar{W}_{01}.$$

Теперь состояние произвольных сечений обоих сегментов выражается через два начальных параметра 1-го сегмента:

$$\begin{aligned} \bar{W}_1(\xi_1) &= V_1(\beta_1 \xi_1) \bar{W}_{01}, \\ \bar{W}_2(\xi_2) &= V_1(\beta_1 \xi_2) E_{12} V_1(\beta_1 \nu) \bar{W}_{01}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{где } \bar{W}_{01} = \{0 \quad 0 \quad W''_{01} \quad W'''_{01}\}^T.$$

Из уравнения (16) находим прогиб $\bar{W}_2(\xi_2)$ и угол поворота $\bar{W}'_2(\xi_2)$ произвольного сечения ξ_2 2-го сегмента:

$$\begin{aligned} W_2(\beta_1 \xi_2) &= S_{11}(\xi_2) W''_{01} + S_{12}(\xi_2) W'''_{01}; \\ W'_2(\beta_1 \xi_2) &= S_{21}(\xi_2) W''_{01} + S_{22}(\xi_2) W'''_{01}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $S_{11}(\xi_2) = R_4(\beta_1 \xi_2) R_2(\beta_1 \nu) + R_3(\beta_1 \xi_2) R_5(\beta_1 \nu) +$
 $+ R_2(\beta_1 \xi_2) R_4(\beta_1 \nu) + \beta_1^4 R_1(\beta_1 \xi_2) R_1(\beta_1 \nu);$

$$S_{12}(\xi_2) = R_4(\beta_1 \xi_2) R_1(\beta_1 \nu) + R_3(\beta_1 \xi_2) R_6(\beta_1 \nu) +$$

$$+ R_2(\beta_1 \xi_2) R_3(\beta_1 \nu) + R_1(\beta_1 \xi_2) R_4(\beta_1 \nu);$$

$$S_{21}(\xi_2) = \beta_1^4 (R_1(\beta_1 \xi_2) R_2(\beta_1 \nu) + R_2(\beta_1 \xi_2) R_1(\beta_1 \nu)) +$$

$$+ R_4(\beta_1 \xi_2) R_5(\beta_1 \nu) + \beta_1^4 R_3(\beta_1 \xi_2) R_4(\beta_1 \nu);$$

$$S_{22}(\xi_2) = \beta_1^4 R_1(\beta_1 \xi_2) R_1(\beta_1 \nu) + R_1(\beta_1 \xi_2) R_6(\beta_1 \nu) +$$

$$+ R_3(\beta_1 \xi_2) R_3(\beta_1 \nu) + R_2(\beta_1 \xi_2) R_4(\beta_1 \nu);$$

$$R_5 = R_3(\beta_1 \nu) + \Theta R_4(\beta_1 \nu);$$

$$R_6 = R_2(\beta_1 \nu) + \Theta R_3(\beta_1 \nu).$$

Удовлетворяя граничным условиям (10), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных начальных параметров W''_{01} и W'''_{01} :

$$\begin{cases} S_{11}(1 - \nu) W''_{01} + S_{12}(1 - \nu) W'''_{01} = 0; \\ S_{21}(1 - \nu) W''_{01} + S_{22}(1 - \nu) W'''_{01} = 0. \end{cases}$$

Приравняв определитель этой системы к нулю, получим частотное уравнение

$$S_{11}(1 - \nu) S_{22}(1 - \nu) - S_{12}(1 - \nu) S_{21}(1 - \nu) = 0. \quad (18)$$

Частотное уравнение (18), получаемое для принятой модели балки с дефектом в виде поперечной трещины, содержит два параметра, характеризующих дефект: без-

размерную локальную гибкость $\Theta = \frac{EI}{K_T L}$ в сечении с трещиной и локализацию трещины $\nu = \frac{L_1}{L}$. В работах

[16, 17] жесткость пружины кручения K_T предлагается

рассчитывать по формуле $K_T = \frac{1}{c}$, $c = \frac{5,346}{EI} J(\chi)$,

где функция $J = J(\chi)$ относительной глубины трещи-

ны $\chi = \frac{a}{h}$ имеет вид

$$J(\chi) = 1,86\chi^2 - 3,55\chi^3 + 16,37\chi^4 - 37,23\chi^5 + 76,8\chi^6 -$$

$$- 126,5\chi^7 + 172\chi^8 - 143\chi^9 + 44,05\chi^{10}.$$

Тогда гибкость Θ определяется формулой

$$\Theta = 5,346 J(\chi) \frac{h}{L}, \quad (19)$$

где $\frac{h}{L}$ — удлинение балки.

Численные результаты.

Результаты расчетов двух первых относительных частот $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1(\chi, \nu)$ и $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_2(\chi, \nu)$ собственных изгибных колебаний балки как функций относительной

глубины трещины $\chi = \frac{a}{h}$ и относительного расстояния

ν сечения с трещиной от левой заделки по модели (19) приведены на рисунке 2. Расчеты проводились для бал-

ки удлинения $\frac{h}{L} = \frac{0,18}{6,7} = 0,027$ и обобщенной жесткости системы «балка – основание» $\alpha = 3,976$.

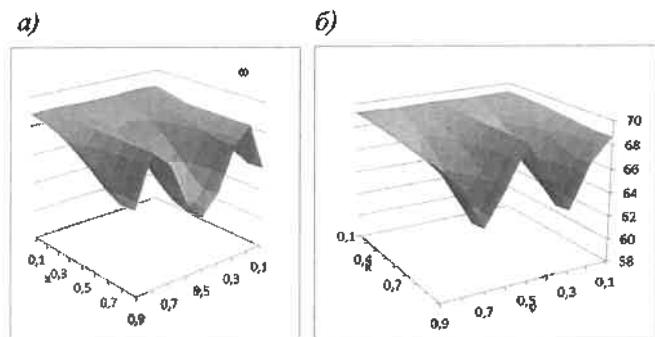


Рисунок 2 – Графики функций $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_1(\chi, \nu)$ (а) и $\tilde{y}_2 = \tilde{y}_2(\chi, \nu)$ (б)

Ввиду симметрии условий опирания оба графика симметричны относительно середины балки (плоскость $\nu = 0,5$). Анализ графиков приводит к следующим выводам:

- наличие трещины в балке снижает первые две собственные частоты по сравнению с частотами бездефектной балки;
- снижение частот тем больше, чем глубже трещины, однако имеются сечения, образование трещины в которых практически не влияет на частоту. Это сечения $\nu = 0,25; 0,75$ для первой частоты и сечения $\nu = 0; 0,5; 1$ – для второй;

Получено 31.03.2021

A. A. Poddubny, V. A. Gordon. Dynamics of a structurally nonlinear "beam – base" system with sudden formation of cracks.

A mathematical model of the dynamic process in a loaded Euler – Bernoulli beam on an elastic Winkler foundation is considered, with a sudden formation of a beam defect in the form of an open transverse crack. Relationships are obtained that connect the parameters of the stress-strain state of the beam with the depth and localization of the crack for given geometric and mechanical characteristics of the "beam – base" system.

– снижение первой частоты интенсивнее при приближении трещины к середине балки, снижение второй частоты – при приближении к опоре.

Вывод. Построена математическая модель динамики конструктивно нелинейной системы взаимодействующих балки и основания. Разработан аналитический метод расчёта характеристик динамического процесса, инициируемого трещинообразованием, внезапно изменяющим расчётную схему конструкции. Метод связывает уровни динамических приращений деформаций и внутренних усилий с характеристиками дефекта – глубиной и локализацией трещины. Результаты работы позволяют использовать полученные методики в справочных данных для принятия конкретных конструктивно-технологических решений, для выработки норм и стандартов на проектирование, возведение и эксплуатацию конструкций и сооружений.

Список литературы

- 1 Поддубный, А. А. Определение динамических догрузений стержня, вызванных внезапной осадкой части основания Пастернака при перемещении шагающих робототехнических комплексов / А. А. Поддубный, В. А. Гордон // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2021. – № 2(43). – С. 47–50.
- 2 Poddubny, A. A. Dynamic Loading of the Rod at a Sudden Change of Elastic Foundation Structure / A. A. Poddubny, V. A. Gordon // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2021. – Vol. 1079. – P. 1–18.
- 3 Гордон, В. А. Собственные изгибные колебания балки, частично опертой на основание Пастернака / В. А. Гордон, Г. А. Семенова // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2020. – № 1 (339). – С. 34–42.