МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Ю.Н. Черемных

МИКРОЭКОНОМИКА
ПРОДВИНУТЫЙ УРОВЕНЬ

УЧЕБНИК

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Ю.Н. Черемных

МИКРОЭКОНОМИКА
Продвинутый уровень

Учебник

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям

МОСКВА
ИНФРА-М
2008

УДК 330(075.8)
ББК 65.012.2я73
Ч00

Ч00 **Черемных Ю.Н.** Микроэкономика. Продвинутый уровень: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 844 с. – (Учебники экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова).

ISBN 978-5-16-002041-9

Учебник включает темы курса «Микроэкономика. Продвинутый уровень», для анализа которых используется разнообразный математический аппарат. Главы учебника заканчиваются учебно-методическими материалами, включающими вопросы, упражнения и задачи для самоконтроля, а также вопросы и задачи, которые могут служить ориентирами при составлении преподавателями контрольных работ.

Для студентов бакалавриата, магистратуры и аспирантов экономических факультетов университетов и экономических вузов.

Подготовлено при содействии НФПК – Национального фонда подготовки кадров в рамках Программы «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в вузах» Инновационного проекта развития образования.

ББК 65.012.2я73

ISBN 978-5-16-002041-9

250-летию
Московского Государственного
Университета им. М.В. Ломоносова
посвящается

Уважаемый читатель!

Настоящий учебник выходит в рамках серии «Учебники экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова», венчающей многолетние усилия коллектива факультета по обновлению содержания и структуры университетского экономического образования.

Переход страны к рынку потребовал пересмотра профессии экономиста, освоения и применения невостребованных ранее знаний, известных, может быть, лишь ограниченному кругу критиков «буржуазной» экономической мысли.

Для обогащения содержания экономического образования путем включения в него новых экономических дисциплин и обновления ряда традиционных нужно было переобучить преподавателей и решить проблему учебников. Первые попытки включения в учебные планы новых дисциплин показали невозможность этого в рамках одной ступени, поэтому, обновляя содержание, пришлось попутно решать проблему перевода обучения на двухступенчатую систему.

Истекшие 10 с небольшим лет — это годы освоения технологии двухступенчатого образования «бакалавр–магистр», которое факультет осуществляет без параллельной подготовки специалистов. Присоединение страны к Болонскому процессу сделало этот переход необратимым.

Все эти годы велась переподготовка преподавательского корпуса: благодаря программам международного сотрудничества около 160 преподавателей факультета в среднем не меньше двух раз стажировались в лучших зарубежных университетах.

Что касается учебников, то первые годы приходилось использовать лучшие зарубежные учебники, многие из которых были переведены преподавателями на русский язык. Сейчас пришло время готовить качественные отечественные учебники. Преподавательский корпус имеет возможность создавать оригинальные учебники и учебные пособия, подготовленные с учетом опыта преподавания и дифференцированные по уровню подготовки слушателей (учебники для программ бакалавров и учебники для программ магистров).

Решению этой задачи способствовало и участие факультета в Инновационном проекте Министерства образования РФ, финансируемом Всемирным банком. Непосредственным исполнителем проекта стал Национальный фонд подготовки кадров.

Благодаря этому проекту факультет в течение трех лет осуществил свой проект «Совершенствование высшего экономического образования в МГУ», в результате чего преподаватели экономического факультета подготовили 74 учебника и учебных пособий по основным дисциплинам, формирующим профессии экономистов и менеджеров.

Мы считаем, что данные учебники в полной мере отражают наиболее важные достижения университетской экономической мысли, необходимые для полноценной подготовки экономистов и управленцев высшего звена.

Сейчас на экономическом факультете МГУ обучается более 3000 студентов, факультет располагает самой большой в стране магистратурой по экономике, наибольшим числом аспирантов по экономическим специальностям. Образовательное «поле» насчитывает более 300 общих дисциплин и специальных курсов. Часть общих курсов представлена в данной серии учебников.

Коллектив факультета с благодарностью примет замечания и предложения относительно улучшения предложенной серии учебников.

В.П. Колесов

декан экономического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова
профессор, доктор экономических наук

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник «Микроэкономика. Продвинутый уровень» подготовлен на базе курса «Микроэкономика – 3», который автор читал более 10 лет студентам 1-го курса Школы магистров экономического факультета МГУ. При подготовке курса «Микроэкономика – 3» и учебника «Микроэкономика. Продвинутый уровень» автор использовал опыт преподавания курса «Экономико-математическое моделирование», который (под разными названиями) он читал более 20 лет студентам отделения «Планирование и экономическая кибернетика», а позже студентам отделения «Математическая экономика» экономического факультета МГУ, опыт преподавания западными авторами курса микроэкономики продвинутого уровня, который был аккумулирован в объемных томах с разными названиями – от микроэкономики до микроэкономической теории, результаты и методические приемы, локализованные в многочисленных позициях списков литературы к главам настоящего учебника.

Некоторые разделы (в частности, версии теорем об огибающих в теории потребления и производства) продвинутого курса по микроэкономике читались автором в курсе «Микроэкономика – 2» студентам Школы бакалавров экономического факультета МГУ. Эти разделы, естественно, были включены в настоящий учебник «Микроэкономика. Продвинутый уровень».

Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность:

Национальному фонду подготовки кадров (НФПК) за предоставленную возможность для подготовки настоящего учебника «Микроэкономика. Продвинутый уровень»;

профессору В.П. Колесову – руководителю-координатору Проекта НФПК «Обновление университетского экономического образования» и доценту В.Х. Эченике – заместителю руководителя-координатора Проекта НФПК «Обновление университетского экономического образования» за постоянное внимание и помощь в преодолении принципиальных проблем, которые возникали в процессе подготовки учебника, и поддержку его автора; рецензенту НФПК за положительную оценку в целом учебника «Микроэкономика. Продвинутый уровень» и за глубокие критические замечания и корректно сформулированные рекомендации, учет которых позволил, по мнению автора, значительно поднять уровень подачи материала учебника для его читателей;

коллегам по кафедре «Математические методы анализа экономики» экономического факультета МГУ профессору М.В. Грачевой и доценту В.А. Чахоян за постоянную поддержку и понимание необходимости преодоления неизбежных организационных и профессиональных проблем;

сотрудникам группы реализации Проекта НФПК «Обновление университетского экономического образования»: менеджерам Проекта М.Е. Ульяновой, Е.Ю. Архиповой и секретарю Проекта О.Г. Корягиной за постоянное внимание и помощь в преодолении текущих проблем, которые возникали в процессе подготовки учебника;

директору издательства «ТЕИС» экономического факультета МГУ Т.А. Фомичевой за неоценимую помощь при решении технических проблем при подготовке материала настоящего учебника к печати;

Р.С. Хромченко, И.А. Алешковскому, М.Г. Башковой, С. Иванову, И.В. Сметаниной, Р.Д. Соломатиной, А.В. Федорец за большой труд по компьютерному набору рукописного материала учебника и его верстке;

О. Степановой, М. Ковалевой, И. Левиной, Н. Овчинниковой, Е. Голентовской, Б. Яценко – бывшим студентам экономического факультета МГУ за возможность использовать превосходно сделанные ими записи лекций автора по курсам «Микроэкономика – 2» и «Микроэкономика – 3»;

А. Андрияшину, Е. Авилову, А. Бланк, А. Бондареву, М. Додловой, Е. Ефремовой, О. Колобаевой, К. Лядской, А. Окатенко, А. Пановой, А. Панферову, А. Салимову, А. Тимошенкову, М. Худалову, А. Шишкину – бывшим студентам факультета экономики Государственного университета – Высшей школы экономики за возможность использовать подготовленные ими материалы докладов, которые ими были сделаны в рамках курса лекций «Современные микроэкономические проблемы»;

З.А. Басыровой – редактору Издательского Дома «ИНФРА-М» за ценные замечания, учет которых позволил существенно улучшить подачу материала читателям настоящей книги, и Л.С. Куликовой – корректору Издательского Дома «ИНФРА-М».

ВВЕДЕНИЕ

Во многих странах Запада и в России принято преподавать микроэкономику в виде комплекса трех учебных дисциплин: «Микроэкономика. Вводный уровень» (аналог: «Микроэкономика – 1»), «Микроэкономика. Промежуточный уровень» (аналог: «Микроэкономика – 2»), «Микроэкономика. Продвинутый уровень» (аналог: «Микроэкономика – 3).

На каждом уровне (кроме вводного) расширяется и углубляется поле содержательных областей предыдущего уровня, повышается интенсивность подачи материала, привлекается более сложный математический инструментарий. В связи с этим имеют место пересечения теоретических положений и практических приложений, хотя повышение интенсивности подачи материала может достаточно сильно деформировать тот или иной раздел микроэкономики так, что он станет мало похожим на себя в курсе предыдущего уровня.

Курсы микроэкономики вводного и промежуточного уровней являются фундаментальными составляющими системы экономических курсов для студентов-экономистов бакалавриата. В этих курсах часто даются только принципиальные ответы на вопросы экономической теории и хозяйственной практики и не всегда принципы доводятся до их реализации. Например, задача максимизации прибыли фирмы является теоретической моделью широкого класса задач рационального поведения реальной фирмы на рынке. Теория чистой конкуренции аналогична теории идеального газа в физике, благодаря которой реальные газы изучаются не столько сами по себе, а скорее с точки зрения того, насколько они похожи на идеальный газ. В микроэкономике различные рыночные структуры также часто рассматриваются с точки зрения степени их сходства или различия с чистой конкуренцией, а не сами по себе.

На курсы микроэкономики вводного и промежуточного уровней опираются такие более специальные дисциплины, как «Теория фирмы», «Теория отраслевых рынков», которые в свое время постепенно отпочковывались от дисциплины «Микроэкономика».

Курсы микроэкономики вводного и промежуточного уровней читаются раньше, чем теория игр и дифференциальные уравнения, которые используются для описания и анализа многих микроэкономических проблем.

Курс микроэкономики продвинутого уровня также является фундаментальной составляющей системы экономических курсов для студентов-экономистов магистратуры. В отличие от курсов микроэкономики вводного и промежуточного уровней курс микроэкономики продвинутого уровня читается после ряда более специальных экономических курсов («Теория фирмы», «Теория отраслевых рынков»), а также после теории игр и дифференциальных уравнений, читаемых в бакалавриате.

Отмеченные обстоятельства являются причиной необходимости корректировки содержательной проблематики курса микроэкономики продвинутого уровня за счет ее расширения и более широкого и глубокого привлечения математического инструментария.

Особенность курса «Микроэкономика. Продвинутый уровень» заключается прежде всего в достаточно высоком научном уровне подачи материала, наличии проблемных содержательных областей и привлечении серьезного математического аппарата — естественно, там, где он необходим.

В частности, интенсивность подачи материала теории потребления и теории производства повышается благодаря их расширению за счет использования версий теорем об огибающей, которые представляют собой выражения частных производных по параметрам оптимальных значений экстремальных задач рационального поведения потребителя и фирмы в условиях чистой конкуренции. В теории производственных функций на основании решения дифференциального уравнения демонстрируется появление производственной функции с постоянной эластичностью замены ресурсов — одной из важных производственных функций для теоретических построений и практических приложений и одной из тех производственных функций, которые были получены в результате теоретических построений, а не с помощью эмпирического «нащупывания», как это было, например, с производственной функцией Кобба — Дугласа. В теории экономического равновесия интенсивность подачи материала повышается за счет подробного описания производственной сферы и сферы потребления модели статического равновесия Эрроу — Дебре и за счет модели динамического равновесия.

Проблемные содержательные области в настоящем учебнике локализованы в главе 18 «Специальные микроэкономические проблемы».

Применяемый в учебнике математический аппарат отличается значительным разнообразием. Помимо результатов математического анализа (классические методы оптимизации, элементы теории устойчивости по Ляпунову решений систем дифференциальных уравнений), активно используются некоторые результаты выпуклого анализа, матричной алгебры, относящиеся к квадратным матрицам с неотрицательными элементами вне главной диагонали, теории биматричных игр, теории оптимального управления.

Подчеркнем, что первостепенной проблематикой в курсе микроэкономики продвинутого уровня является содержательная теоретическая (в основном) и прикладная проблематика. Математический аппарат (который может использоваться на достаточно высоком уровне) играет роль вспомогательного инструментария, предназначенного обслуживать «основное производство», т.е. содержательную проблематику. В связи с этим обстоятельством курс микроэкономики продвинутого уровня отличается от микроэкономического раздела курса математической экономики, в котором математические методы (наряду с содержательными задачами) представляют предмет самостоятельного исследования.

Под влиянием многих факторов (прежде всего такого, как научно-технологический прогресс) содержательные области микроэкономики активно меняются во времени, стимулируя корректировку и частичное элиминирование используемых и появление новых модельных построений. Так, в задачах долговременного и среднесрочного перспективного или ретроспективного анализа (в отличие от статических задач) понятие потребительского набора может оказаться малосодержательным в связи с быстрым обновлением потребительских характеристик продуктов, с интенсивным уходом с рынков одних продуктов и появлением других. Достаточно упомянуть персональные компьютеры, мобильные средства связи, потребительские характеристики которых активно растут параллельно со снижением их рыночных цен.

Аналогичным является положение с пониманием конфигурации ресурсов, характер поведения которых может сильно меняться во времени в связи с повышением, например, их производительности. В частности, много проблем возникает с описанием и анализом дистанционной формы организации труда, когда не работник перемещается в пространстве для соединения со своим рабочим местом, а рабочее место, например автоматизированное рабочее место на базе персонального компьютера, перемещается по месту жительства работника. Косвенным эффектом такого преобразования взаимосвязи между работником и его рабочим местом является, в частности, уменьшение нагрузки на общественный транспорт или на личный транспорт.

Востребованность математических методов и средств, используемых для решения микроэкономических задач, также меняется во времени. После Второй мировой войны для решения прикладных и теоретических задач активно использовалось линейное и выпуклое программирование. В настоящее время, особенно в области теоретических исследований, доля линейного программирования уменьшается, зато доля теории игр увеличивается.

Благодаря интенсивному развитию вычислительной техники резко возросла доля инструментальных методов эффективного решения экономических задач, что, в свою очередь, привело к повышению доли вычислимых микроэкономических моделей в общей массе всех математических моделей микроэкономики.

Глава 1

ТЕОРИЯ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ НА РЫНКЕ

1.1. Решение задачи максимизации функции полезности при бюджетном ограничении методом Лагранжа. Локальное рыночное равновесие потребителя. Функции спроса по Маршаллу (по Вальрасу), косвенная функция полезности и их свойства

1.1.1. Теория потребления изучает поведение потребителя на рынке. Потребитель характеризуется функцией полезности и доходом, который он готов потратить на приобретение продуктов, а рынок – потребительскими наборами и ценами (ценой на единицу каждого продукта). Все величины имеют одну и ту же временну́ю «привязку». Они постоянны в течение некоторого фиксированного периода времени (само время предполагается дискретным).

Потребитель ведет себя *рационально*, если он максимизирует функцию полезности при бюджетном ограничении. Поведение потребителя может быть описано в *вербальной* форме: максимизация полезности, если хватит содержимого кошелька; в виде задачи на условный максимум (Задача I) в *аналитической* форме:

$$U(x_1, x_2) \to (\max), \tag{1.1.1}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M - \tag{1.1.2}$$

и в *геометрической* форме (рис. 1.1).

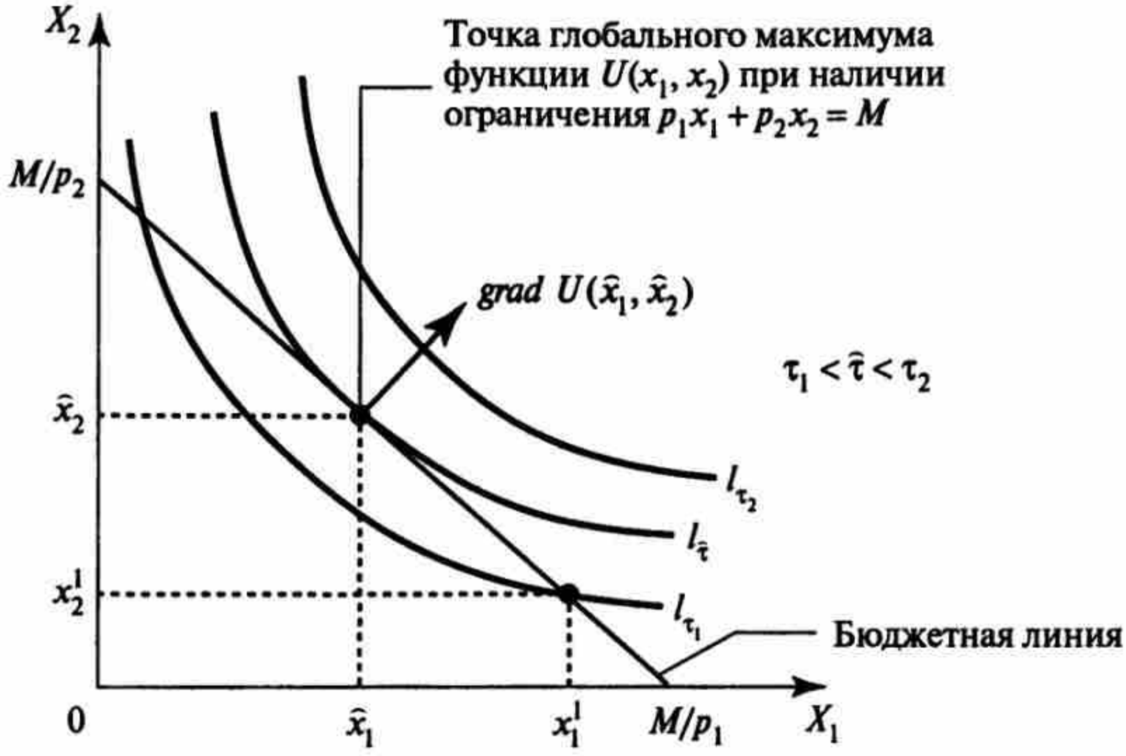


Рис. 1.1

Отметим, что здесь и далее под максимумом понимается глобальный максимум, если нет специальной оговорки.

Рассмотрим линии безразличия (например, линии l_{τ_1}, $l_{\hat{\tau}}$), которые имеют общие точки с бюджетной прямой. Двигаясь по линиям безразличия на «северо-восток» до упора, выбираем линию безразличия $l_{\hat{\tau}}$, которая имеет с бюджетной прямой точку касания $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Это означает, что потребитель выбирает потребительский набор $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, который называется ***локальным рыночным равновесием потребителя*** (ЛРРП). При этом его функция полезности $U(x_1, x_2)$ достигает своего условного максимума $\hat{\tau} = \hat{U}$. Рисунок 1.1 демонстрирует, что $U(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{\tau} > \tau_1 = U(x_1^1, x_2^1)$, где (x_1^1, x_2^1) – любая точка бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = M$, отличная от точки $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Картина взаимного расположения линий безразличия и бюджетной прямой на рис. 1.1 типична для задач экономической теории. Представленные на рис. 1.1 линии безразличия являются строго выпуклыми к точке О. В частности, если линия безразличия $l_{\hat{\tau}}$ строго выпукла, то точка $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ ее касания с бюджетной прямой является единственной. Если линия безразличия $l_{\hat{\tau}}$ выпукла, но не строго выпукла к точке О, точка $\hat{x}$ касания может быть не единственной.

1.1.2. Потребитель достиг определенного уровня полезности $U(x_1, x_2) = \breve{U}$. Как выйти на этот уровень полезности с наименьшими расходами? (*Вербальная* форма задачи минимизации расхода при фиксированном уровне полезности.) *Аналитическая* форма задачи минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности имеет вид задачи на условный минимум (Задача II):

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M \to (\min), \tag{1.1.3}$$

$$U(x_1, x_2) = \breve{U}. \tag{1.1.4}$$

Геометрическая форма задачи минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности представлена на рис. 1.2. Отметим, что здесь и далее под минимумом понимается глобальный минимум, если нет специальной оговорки.

По бюджетным линиям следует идти на «юго-запад» до упора. Упор будет в точке касания $\breve{x} = (\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ бюджетной прямой и линии безразличия $l_{\breve{U}}$.

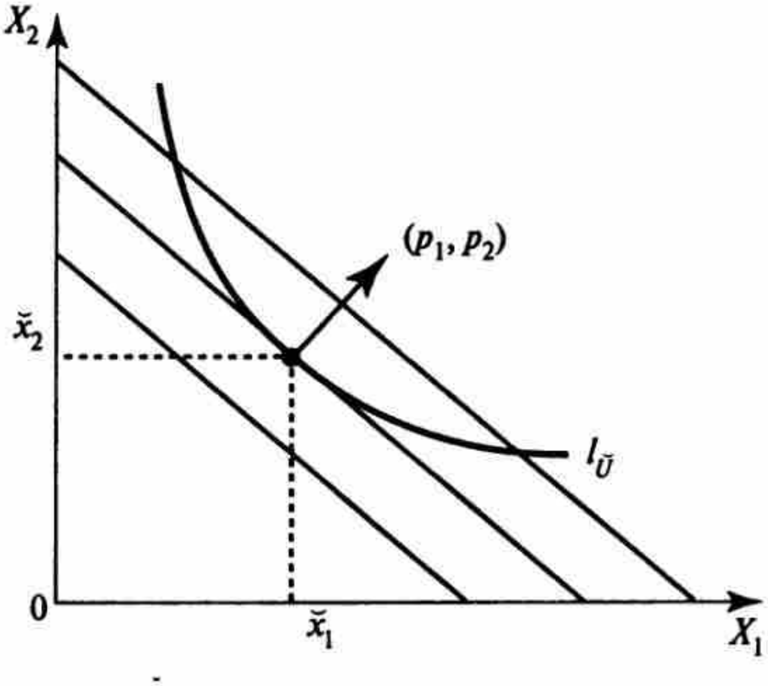


Рис. 1.2

Задачи I и II называют совместными. Их можно обобщить в виде пары задач:

Задача Ia:

$$U(x_1, x_2) \to (\max), \tag{1.1.5}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le M, \tag{1.1.6}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0; \tag{1.1.7}$$

Задача IIа:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M \to (\min), \tag{1.1.8}$$

$$U(x_1, x_2) \geq \breve{U}, \tag{1.1.9}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{1.1.10}$$

Формально Задачи Iа и IIа – это задачи математического программирования. Задачи I и II, как уже отмечалось, – задачи на условный экстремум.

Задачи I и Iа, II и IIа разные, но ответы у них одинаковые (если $\hat{x}_1 > 0, \hat{x}_2 > 0, \breve{x}_1 > 0, \breve{x}_2 > 0$).

1.1.3. Для задачи (1.1.1), (1.1.2) на условный экстремум функция Лагранжа имеет следующий вид:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2).$$

Выпишем условия первого порядка локального экстремума функции (1.1.1) при наличии ограничения (1.1.2):

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0, \\ \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0, \\ M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \end{gathered} \tag{1.1.11}$$

Получили систему (1.1.11) из трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, λ. Решение системы (1.1.11) называется критической точкой функции Лагранжа

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda}) \tag{1.1.12}$$

Критическая точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$ называется длинной точкой. Критическая точка без последней координаты $\hat{\lambda}$, т.е. $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, называется короткой точкой. Точки локального условного экстремума задачи (1.1.1), (1.1.2) следует искать только среди коротких точек $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, в которых локальный условный экстремум может быть, а может его и не быть. В связи с тем что функция полезности – это функция, которая обладает рядом специальных свойств:

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} \geq 0, \quad \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} \geq 0,$$

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0,$$

у системы (1.1.11) существует обязательно единственное решение $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$, т.е. существует только одна критическая точка функции Лагранжа, а следовательно, только одна короткая точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, и эта точка – не только точка локального, а также глобального максимума функции (1.1.1) при наличии ограничения (1.1.2). Это можно доказать с помощью условий второго порядка локального экстремума функции (1.1.1) при наличии ограничения (1.1.2) и с использованием условия строгой выпуклости вверх функции (1.1.1).

Функции

$$\hat{x}_1 = D_1(p_1, p_2, M) \tag{1.1.13}$$

$$\hat{x}_2 = D_2(p_1, p_2, M) \tag{1.1.14}$$

называются *функциями* спроса *по Маршаллу* (*по Вальрасу*) на первый и второй продукты со стороны потребителя. Очевидно, что $\hat{\lambda} = D_3(p_1, p_2, M)$.

Функция $U(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = U[D_1(p_1, p_2, M), D_2(p_1, p_2, M)] = v(p_1, p_2, M)$ называется *косвенной (неявной) функцией полезности* параметров p_1, p_2, M; выражение $v(p_1, p_2, M)$ есть максимум функции полезности.

Функции спроса $D_i(p_1, p_2, M)$, $i = 1, 2$ однородны нулевой степени по всем переменным, т.е. для любого числа $\gamma > 0$

$$D_i(p_1, p_2, M) = D_i(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot M) = \hat{x}_i, \quad i = 1, 2.$$

Для доказательства перепишем задачу (1.1.1), (1.1.2) следующим образом:

$$U(x_1, x_2) \to (\max), \tag{1.1.1}$$

$$\gamma \cdot p_1 x_1, \gamma \cdot p_2 x_2 = \gamma \cdot M, \tag{1.1.15}$$

$$0 < \gamma \in E_1.$$

Задачи (1.1.1), (1.1.2) и (1.1.1), (1.1.15) одинаковы и имеют одно и то же решение $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Задача (1.1.1), (1.1.2) имеет ответ (1.1.13), (1.1.14), а задача (1.1.1), (1.1.15) имеет ответ $\hat{x}_1 = D_1(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot M)$, $\hat{x}_2 = D_2(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot M)M$.

Следовательно,

$$D_1(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot M) = D_1(p_1, p_2, M), \tag{1.1.16}$$

$$D_2(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot M) = D_2(p_1, p_2, M), \tag{1.1.17}$$

т.е. функции спроса $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ однородны нулевой степени по всем переменным p_1, p_2, M.

1.1.4. Свойства косвенной функции полезности $v(p_1, p_2, M)$

1. Косвенная функция полезности $v(p_1, p_2, M)$ является однородной функцией нулевой степени по всем переменным p_1, p_2, M:

$$v(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot M) = U[D_1(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot M), D_2(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot M)] =$$

$$= U[D_1(p_1, p_2, M), D_2(p_1, p_2, M)] = v(p_1, p_2, M).$$

2. $M \uparrow\uparrow \Rightarrow v(p_1, p_2, M) \uparrow\uparrow$ (рис. 1.3) ($\uparrow$ – символ возрастания, $\uparrow\uparrow$ – символ строгого возрастания).

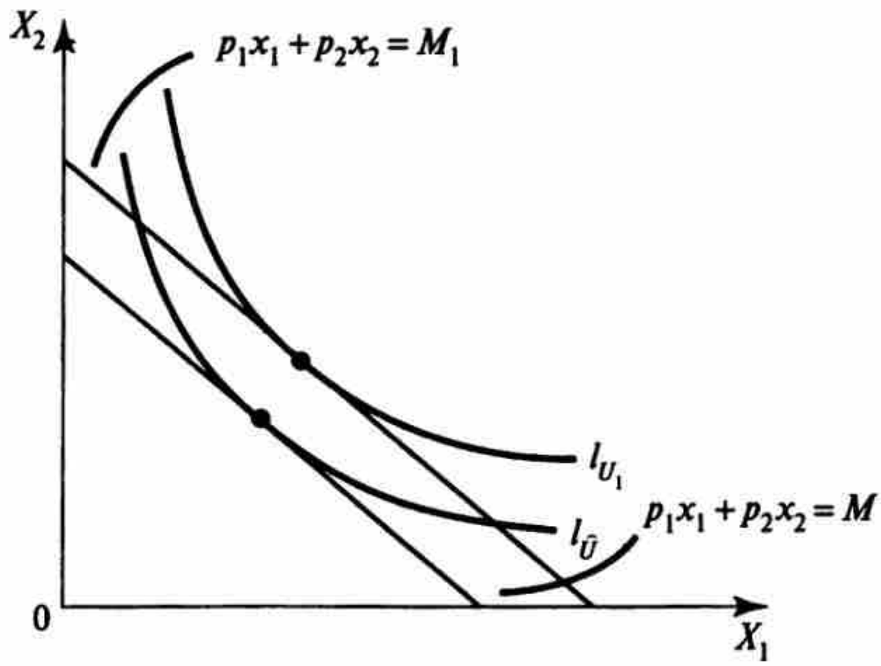


Рис. 1.3

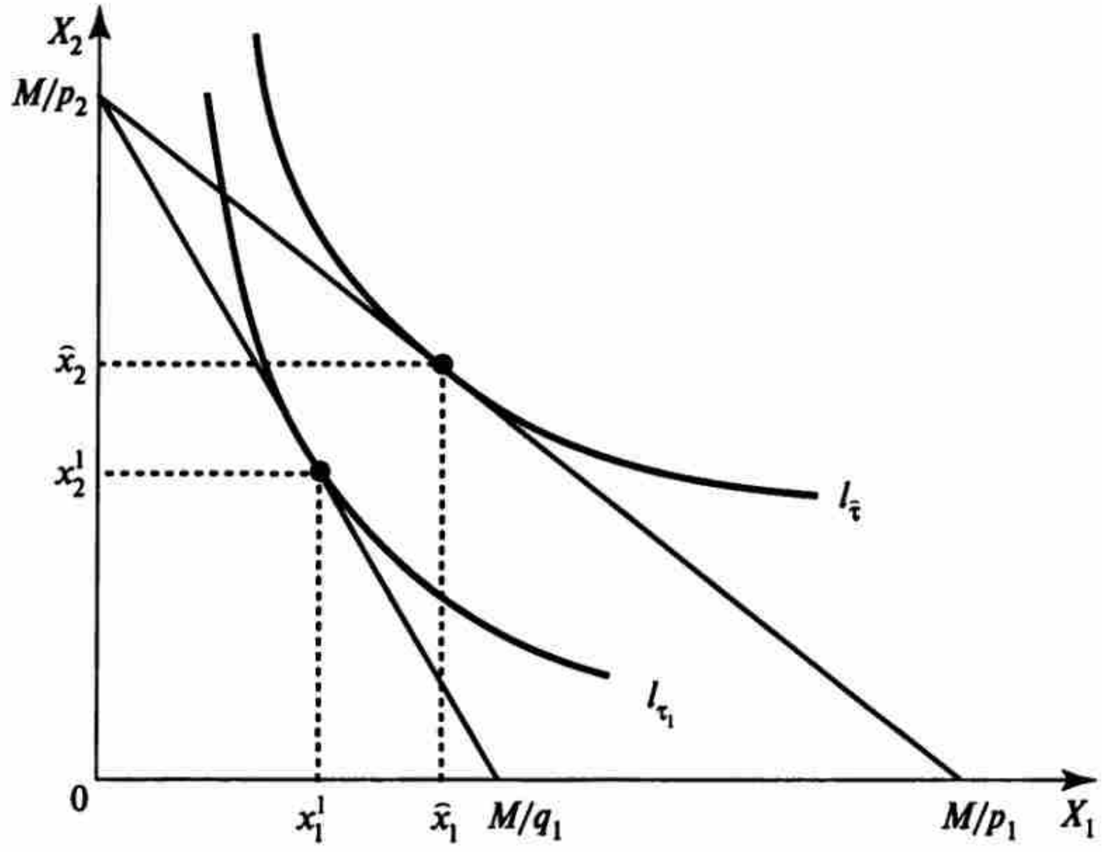


Рис. 1.4

Если $M_1 > M$, то $v(p_1, p_2, M) > v(p_1, p_2, M_1)$, ибо бюджетная прямая $p_1x_1 + p_2x_2 = M_1$ расположена северо-восточнее бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = M$, и следовательно, линия безразличия l_{U_1} расположена северо-восточнее линии безразличия $l_{\hat{U}}$, откуда вытекает неравенство $U(p_1, p_2, M) = U_1 > \hat{U} = U(p_1, p_2, M_1)$ (см. рис. 1.3). Строгое доказательство следует из утверждения 1.2.1 параграфа 1.2.

3. $p_1 \uparrow\uparrow \Rightarrow v(p_1, p_2, M) \downarrow\downarrow$ (рис. 1.4), $p_2 \uparrow\uparrow \Rightarrow v(p_1, p_2, M) \downarrow\downarrow$. Если $q_1 > p_1$, то $\tau_1 = v(q_1, p_2, M) < v(p_1, p_2, M) = \hat{\tau}$ ($\downarrow$ – символ убывания, $\downarrow\downarrow$ – символ строгого убывания).

Строгое доказательство следует из утверждения 1.2.2 параграфа 1.2.

4. Рассмотрим множество Q, которое обладает следующим свойством: $Q_\tau = \{(p_1, p_2) \mid v(p_1, p_2, M) \geq \tau\}$. Если множество Q_τ не пусто, то оно выпукло.

5. Если $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $M > 0$, то косвенная функция полезности $v(p_1, p_2, M)$ непрерывная по всем переменным (p_1, p_2, M). Доказательства свойств 4, 5 необязательны и поэтому не приводятся.

1.1.5. Все построение этого и остальных параграфов главы 1 естественным образом переносится на случай произвольного $n > 2$. В частности, Задачи I′ и II′ имеют следующие формулировки:

Задача I′:

$U(x_1, x_2, ..., x_n) \to (\max)$,

$p_1 x_1 + ... + p_n x_n = M$;

Задача II′:

$p_1 x_1 + ... + p_n x_n = M \to (\min)$,

$U(x_1, x_2, ..., x_n) = \breve{\tau}$.

Функции спроса по Маршаллу (Вальрасу) имеют вид

$$\hat{x}_1 = D_1(p_1, ..., p_n, M), ..., \hat{x}_n = D_n(p_1, ..., p_n, M).$$

1.2. Предельная полезность по доходу и предельная полезность по цене продукта (тождество Роя). Значение этих выражений для решения теоретических и прикладных задач потребительского поведения на рынке

1.2.1. Утверждение 1.2.1 (о предельной полезности по доходу)

Предельная полезность по доходу равна множителю $\hat{\lambda}$ Лагранжа:

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial M} = \hat{\lambda}. \qquad (1.2.1)$$

Доказательство утверждения 1.2.1

Пусть $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$ – решение задачи Лагранжа, т.е.

$$\frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial \hat{x}_1} = \hat{\lambda} \cdot p_1, \qquad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial \hat{x}_2} = \hat{\lambda} \cdot p_2. \qquad (1.2.3)$$

Равенство

$$M = p_1 \cdot D_1(p_1, p_2, M) + p_2 \cdot D_2(p_1, p_2, M) \qquad (1.2.4)$$

является тождеством по p_1, p_2, M, поэтому

$$1 = \frac{dM}{dM} = p_1 \cdot \frac{\partial D_1(p_1, p_2, M)}{\partial M} + p_2 \cdot \frac{\partial D_2(p_1, p_2, M)}{\partial M}. \qquad (1.2.5)$$

Имеем

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial M} = \frac{\partial U[D_1(p_1, p_2, M), D_2(p_1, p_2, M)]}{\partial M} =$$

$$= \frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial D_1(p_1, p_2, M)}{\partial M} + \frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial D_2(p_1, p_2, M)}{\partial M} = \xrightarrow{(1.2.2),(1.2.3)}$$

$$= \hat{\lambda} p_1 \cdot \frac{\partial D_1(p_1, p_2, M)}{\partial M} + \hat{\lambda} p_2 \cdot \frac{\partial D_2(p_1, p_2, M)}{\partial M} = \xrightarrow{(1.2.5)} = \hat{\lambda} \frac{\partial M}{\partial M} = \hat{\lambda}.$$

Утверждение 1.2.1 доказано.

Отметим, что $v(p_1, p_2, M) = U(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \max U(x_1, x_2)$ при наличии ограничения $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$, тогда на основании (1.2.1) имеем

$$\frac{\partial \max U(x_1, x_2)}{\partial M} = \hat{\lambda},$$

т.е. производная глобального максимума функции полезности по параметру M равна $\hat{\lambda}$.

Утверждение 1.2.1 позволяет оценить новый max $U(x_1, x_2)$ функции полезности, который получается при относительно малом ΔM изменении дохода (при этом новую задачу на условный максимум

$U(x_1, x_2) \to \max,$

$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M + \Delta M$

решать не следует):

$$\hat{\lambda} = \frac{\partial U(p_1, p_2, M)}{\partial M} \approx \frac{v(p_1, p_2, M + \Delta M) - v(p_1, p_2, M)}{\Delta M}, \text{ откуда}$$

$v(p_1, p_2, M + \Delta M) \approx v(p_1, p_2, M) + \hat{\lambda} \cdot \Delta M$, т.е.

$$\max_{p_1 x_1 + p_2 x_2 = M + \Delta M} U(x_1, x_2) \approx \max_{p_1 x_1 + p_2 x_2 = M} U(x_1, x_2) + \hat{\lambda} \cdot \Delta M,$$

что важно с теоретической и практической точек зрения.

Если функция полезности $U(x_1, x_2)$ выпукла вверх, то множитель Лагранжа $\hat{\lambda}$ скорее мал (является «моськой»), чем велик (т.е. не «слон»). В связи с этим последнее приближенное равенство означает, что для заметного увеличения уровня полезности следует значительно увеличить объем расхода потребителя.

Косвенная функция полезности $v(p_1, p_2, M)$ по определению есть $\max U(x_1, x_2)$ при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = M$, т.е. косвенная функция полезности – это функция параметров p_1, p_2, M Задачи I на условный экстремум (см. в параграфе 1.1 Задачу (1.1.1) – (1.1.2)). Утверждение 1.2.1 – это утверждение о том, что частная производная условного максимума $v(p_1, p_2, M)$ целевой функции $U(x_1, x_2)$ по параметру M равна $\hat{\lambda}$.

В приведенных ниже утверждениях 1.2.2 (утверждениях 1.4.1, 1.4.2) также фигурируют частные производные условного максимума функции $U(x_1, x_2)$ (условного минимума функции $p_1x_1 + p_2x_2$) по параметрам p_1, p_2, M (по параметрам p_1, p_2, $\breve{U}$).

Теоремы о частных производных экстремальных значений целевых функций различных экстремальных задач по параметрам этих задач называются *теоремами об огибающей*. Приведенное здесь утверждение 1.2.1 и приводимые далее утверждения 1.2.2, 1.4.1 и 1.4.2 представляют собой частные версии теорем об огибающей в случае, когда специальное ограничение или целевая функция являются линейными по переменным экстремальной задачи.

1.2.2. **Утверждение 1.2.2** (тождество Роя)

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial p_i} = -\hat{x}_i \cdot \hat{\lambda}, \quad i = 1, 2, \tag{1.2.6}$$

$$\left(\frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial p_i} = -\hat{x}_i \frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial M}\right). \tag{1.2.7}$$

Мерой изменения значения косвенной функции полезности в связи с изменением цены p_i является произведение $(-\hat{x}_i \cdot \hat{\lambda})$, $i = 1, 2$.

Доказательство утверждения 1.2.2

Пусть $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$ – решение задачи Лагранжа, т.е.

$$\frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_1} = \hat{\lambda} \cdot p_1, \quad \frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_2} = \hat{\lambda} \cdot p_2.$$

Из тождества (1.2.4) следует, что

$$0 = \frac{\partial M}{\partial p_1} = D_1(p_1, p_2, M) + p_1 \cdot \frac{\partial D_1(p_1, p_2, M)}{\partial p_1} + p_2 \cdot \frac{\partial D_2(p_1, p_2, M)}{\partial p_1}, \tag{1.2.8}$$

аналогично

$$0 = \frac{\partial M}{\partial p_2} = D_2(p_1, p_2, M) + p_2 \cdot \frac{\partial D_2(p_1, p_2, M)}{\partial p_2} + p_1 \cdot \frac{\partial D_1(p_1, p_2, M)}{\partial p_2}. \tag{1.2.9}$$

Имеем

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial p_1} = \frac{\partial U[D_1(p_1, p_2, M),\ D_2(p_1, p_2, M)]}{\partial p_1}$$

$$= \frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial D_1(p_1, p_2, M)}{\partial p_1} + \frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial D_2(p_1, p_2, M)}{\partial p_1} = \xrightarrow{(1.2.2),\ (1.2.3)}$$

$$= \hat{\lambda} \cdot \left[p_1 \cdot \frac{\partial D_1(p_1, p_2, M)}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial D_2(p_1, p_2, M)}{\partial p_1} \right] = -\hat{\lambda} \cdot D_1(p_1, p_2, M) = -\hat{\lambda} \cdot x_1.$$

Аналогично

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial p_2} = -\hat{\lambda} \cdot x_2.$$

Отметим, что $\hat{\lambda} = \frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial M}$ (см. (1.2.1)).

Утверждение 1.2.2 доказано.

Поскольку $v(p_1, p_2, M) = U(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \max U(x_1, x_2)$ при наличии ограничения $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$, постольку имеем $\frac{\partial \max U(x_1, x_2)}{\partial p_1} = -\hat{\lambda} \cdot \hat{x}_1$, т.е. производная глобального максимума функции полезности по параметру p_1 равна $-\hat{\lambda} \cdot \hat{x}_1$.

Утверждение 1.2.2 позволяет оценить новый max $U(x_1, x_2)$ функции полезности, который получается при относительно малом Δp_1 изменении цены p_1 (при этом новую задачу на условный максимум

$$U(x_1, x_2) \to \max,$$

$$(p_1 + \Delta p_1) \cdot x_1 + p_2 x_2 = M$$

решать не следует):

$$-\hat{x}_1 \cdot \hat{\lambda} = \frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial p_1} \approx \frac{v(p_1 + \Delta p_1, p_2, M) - v(p_1, p_2, M)}{\Delta p_1},$$

откуда

$$v(p_1 + \Delta p_1, p_2, M) \approx v(p_1, p_2, M) - \hat{x}_1 \cdot \hat{\lambda} \cdot \Delta p_1, \text{ т.е.}$$

$$\max_{(p_1 + \Delta p_1) x_1 + p_2 x_2 = M} U(x_1, x_2) \approx \max_{p_1 x_1 + p_2 x_2 = M} U(x_1, x_2) - \hat{x}_1 \cdot \hat{\lambda} \cdot \Delta p_1,$$

что важно с теоретической и практической точек зрения.

1.2.3. Утверждения 1.2.1 и 1.2.2 при $n > 2$ имеют вид

$$\frac{\partial v(p_1, \ldots, p_n, M)}{\partial M} = \hat{\lambda},$$

$$\frac{\partial v(p_1, \ldots, p_n, M)}{\partial p_1} = -\hat{x}_1 \hat{\lambda},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial v(p_1, \ldots, p_n, M)}{\partial p_n} = -\hat{x}_n \hat{\lambda}.$$

1.3. Решение задачи минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности методом Лагранжа. Функции спроса по Хиксу (функции компенсированного спроса), функция расходов и их свойства

1.3.1. Решим задачу (1.1.3), (1.1.4) (см. параграф 1.1) методом Лагранжа:

Функция Лагранжа задачи (1.1.3), (1.1.4) имеет вид

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(\breve{U} - U(x_1, x_2)). \qquad (1.3.1)$$

Выписываем условия первого порядка для функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$:

$$p_1 - \lambda \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \qquad (1.3.2)$$

$$p_2 - \lambda \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0, \qquad (1.3.3)$$

$$\breve{U} - U(x_1, x_2) = 0. \qquad (1.3.4)$$

Получим систему трех уравнений (1.3.2), (1.3.3), (1.3.4) с тремя неизвестными x_1, x_2, λ. Решение системы (1.3.2), (1.3.3), (1.3.4) $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ называется критической точкой функции Лагранжа (1.3.1). Критическая точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ называется длинной точкой. Критическая точка без последней координаты $\breve{\lambda}$, т.е. $\breve{x} = (\breve{x}_1, \breve{x}_2)$, называется короткой точкой.

Если $U = U(x_1, x_2)$ – функция полезности, то система (1.3.2), (1.3.3), (1.3.4) имеет единственное решение $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ и точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ есть точка глобального минимума задачи (1.1.3), (1.1.4) (см. параграф 1.1). Имеем ситуацию, аналогичную задаче (1.1.1), (1.1.2) (см. параграф 1.1).

Функции

$$\breve{x}_1 = H_1(p_1, p_2, \breve{U}), \tag{1.3.5}$$

$$\breve{x}_2 = H_2(p_1, p_2, \breve{U}) \tag{1.3.6}$$

называются *функциями спроса по Хиксу* (*функциями компенсированного спроса*) на первый и второй продукты со стороны потребителя. Очевидно, $\breve{\lambda} = H_3(p_1, p_2, \breve{U})$.

Функции спроса $\breve{x}_1 = H_1(p_1, p_2, \breve{U})$, $\breve{x}_2 = H_2(p_1, p_2, \breve{U})$ по Хиксу подставляем в целевую функцию $\breve{M} = m(p_1, p_2, \breve{U}) = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2 = p_1H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + p_2H_2(p_1, p_2, \breve{U})$ и получим функцию $m(p_1, p_2, \breve{U})$, которая называется *функцией расходов*. Она зависит от $p_1, p_2, \breve{U}$ и явно не зависит от потребительского набора.

Функция спроса $H_i(p_1, p_2, \breve{U})$, $i = 1, 2$ однородна нулевой степени по переменным p_1 и p_2, т.е. для любого числа $\gamma > 0$

$$H_i(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U}) = H_i(p_1, p_2, \breve{U}), \quad i = 1, 2.$$

Для доказательства перепишем задачу (1.1.3), (1.1.4) (см. параграф 1.1) следующим образом (число $\gamma > 0$):

$$\gamma \cdot p_1x_1 + \gamma \cdot p_2x_2 = \gamma \cdot M \to \min, \tag{1.3.7}$$

$$U(x_1, x_2) = \breve{U}. \tag{1.3.8}$$

Задачи (1.3.7), (1.3.8) и (1.1.3), (1.1.4) (см. параграф 1.1) одинаковые и имеют одно и то же решение $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$. Задача (1.1.3), (1.1.4) (см параграф 1.1) имеет ответ (1.3.5), (1.3.6). Задача (1.3.7), (1.3.8) имеет ответ $\breve{x}_1 = H_1(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U})$, $\breve{x}_2 = H_2(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U})$.

Следовательно,

$$H_1(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U}) = H_1(p_1, p_2, \breve{U}), \tag{1.3.9}$$

$$H_2(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U}) = H_2(p_1, p_2, \breve{U}). \tag{1.3.10}$$

т.е. функции спроса $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ однородны нулевой степени по переменным p_1 и p_2.

1.3.2. Свойства функции расходов

1. Функция расходов $m(p_1, p_2, \breve{U})$ однородна первой степени по переменным p_1 и p_2.

Имеем

$$m(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, U) = \gamma \cdot p_1 \cdot H_1(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U}) + \gamma \cdot p_2 \cdot H_2(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U}) =$$
$$= \gamma \cdot [p_1 \cdot H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + p_2 \cdot H_2(p_1, p_2, \breve{U})] = \gamma \cdot m(p_1, p_2, \breve{U}).$$

2. Если $\breve{U} \uparrow\uparrow \Rightarrow m(p_1, p_2, \breve{U}) \uparrow\uparrow$,

$p_1 \uparrow\uparrow \Rightarrow m(p_1, p_2, \breve{U}) \uparrow\uparrow$,

$p_2 \uparrow\uparrow \Rightarrow m(p_1, p_2, \breve{U}) \uparrow\uparrow$.

Доказательства следуют из утверждений 1.4.1 и 1.4.2 параграфа 1.4.

3. Функция расходов выпуклая вверх по переменным p_1 и p_2 (рис. 1.5):

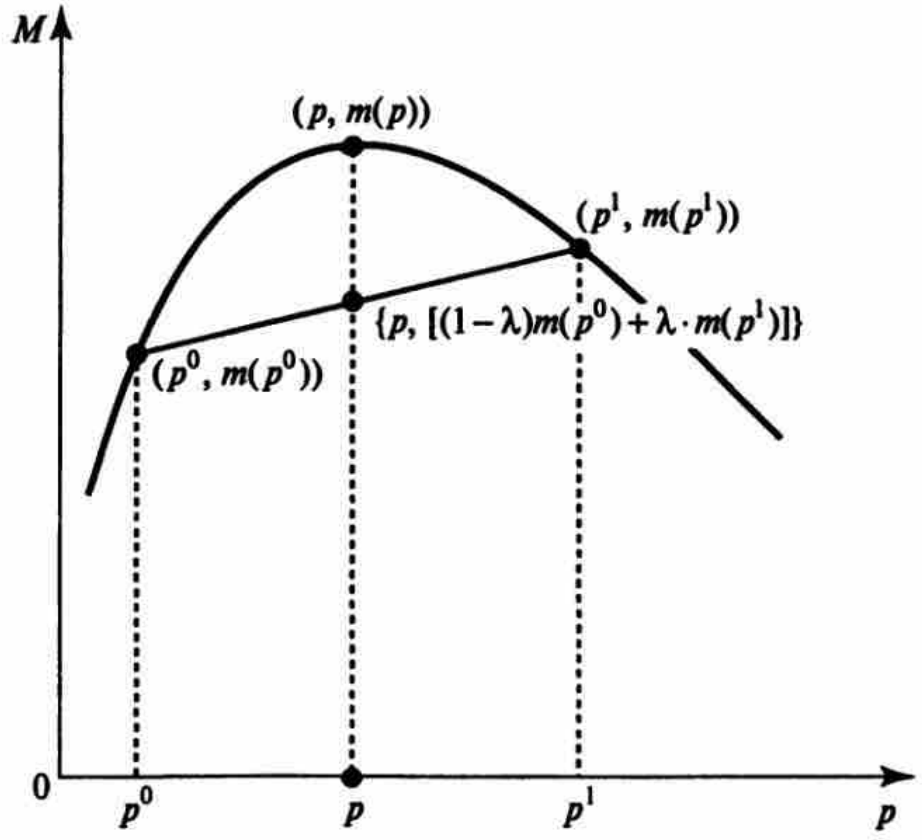


Рис. 1.5

$m[(1-\lambda) \cdot p^0 + \lambda \cdot p^1)] \geq (1-\lambda)m(p^0) + \lambda \cdot m(p^1)$ для любого числа $0 \leq \lambda \leq 1$ и любых векторов $p^0 \geq 0$, $p^1 \geq 0$.

4. $p_1 > 0, p_2 > 0, U > 0$ — функция спроса по Хиксу и функция расходов непрерывны.

Доказательство свойства 4 является необязательным и поэтому не приводится.

Докажем свойство 3.

Число λ удовлетворяет неравенствам $0 \le \lambda \le 1$, векторы $p^0 \ge 0$, $p^1 \ge 0$. Имеем $m(p_1^0, p_2^0, \breve{U}) = p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0 = \min(p_1^0 x_1 + p_2^0 x_2)$ при условии, что $U(x_1, x_2, \breve{U}) = \breve{U}$. Аналогично $m(p_1^1, p_2^1, \breve{U}) = p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 = \min(p_1^1 x_1 + p_2^1 x_2)$ при условии, что $U(x_1, x_2, \breve{U}) = \breve{U}$. Положим $\overline{p} = (1-\lambda)\cdot p^0 + \lambda \cdot p^1 \left[\overline{p}_1 = (1-\lambda)\cdot p_1^0 + \lambda \cdot p_1^1, \overline{p}_2 = (1-\lambda)\cdot p_2^0 + \lambda \cdot p_2^1\right]$. Имеем $M(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{U}) = \overline{p}_1\overline{x}_1 + \overline{p}_2\overline{x}_2 = \min(\overline{p}_1 x_1 + \overline{p}_2 x_2)$ при условии, что $U(x_1, x_2, \breve{U}) = \breve{U}$.

Имеем следующую цепочку равенств и неравенств:

$$m(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \breve{U}) = \overline{p}\cdot\overline{x} = \overline{p}_1\overline{x}_1 + \overline{p}_2\overline{x}_2 = ((1-\lambda)\cdot p_1^0 + \lambda\cdot p_1^1)\overline{x}_1 +$$
$$+(1-\lambda)\cdot p_2^0 + \lambda\cdot p_2^1)\overline{x}_2 = (1-\lambda)(p_1^0\overline{x}_1 + p_2^0\overline{x}_2) + \lambda(p_1^1\overline{x}_1 + p_2^1\overline{x}_2) =$$
$$= (1-\lambda)p^0\overline{x} + \lambda\cdot p^1\overline{x} \ge (1-\lambda)p^0 x^0 + \lambda\cdot p^1 x^1 =$$
$$= (1-\lambda)\cdot m(p_1^0, p_2^0, \breve{U}) + \lambda\cdot m(p_1^1, p_2^1, \breve{U}),$$

откуда следует, что функция расходов $m(p_1, p_2, \breve{U})$ выпукла вверх по переменным p_1 и p_2.

Свойство 3 доказано.

При $n > 2$ функции спроса по Хиксу имеют вид

$\breve{x}_1 = H_1(p_1, \ldots, p_n, U), \ldots, \breve{x}_n = H_n(p_1, \ldots, p_n, U)$.

1.4. Предельный расход по полезности и предельный расход по цене продукта (лемма Шепарда). Значение этих выражений для решения теоретических и прикладных задач потребительского выбора

1.4.1. Утверждение 1.4.1 (о предельном расходе по полезности)

Предельный расход по полезности равен множителю Лагранжа:

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} = \breve{\lambda}. \qquad (1.4.1)$$

Доказательство утверждения 1.4.1

Пусть $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ – решение задачи (1.1.3), (1.1.4) на условный экстремум, тогда имеем тождества по $\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda}$:

$$p_1 = \breve{\lambda} \cdot \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1}, \tag{1.4.2}$$

$$p_2 = \breve{\lambda} \cdot \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2}. \tag{1.4.3}$$

Равенство

$$\breve{U} = U[H_1(p_1, p_2, \breve{U}), H_2(p_1, p_2, \breve{U})] \tag{1.4.4}$$

является тождеством по $p_1, p_2, \breve{U}$, поэтому

$$1 = \frac{\partial \breve{U}}{\partial \breve{U}} = \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial \breve{U}} + \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial \breve{U}}. \tag{1.4.5}$$

Имеем

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} = \frac{\partial}{\partial \breve{U}}(p_1 H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + p_2 H_2(p_1, p_2, \breve{U})) =$$

$$= p_1 \cdot \frac{\partial H_1(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} + p_2 \cdot \frac{\partial H_2(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} = \xrightarrow{(1.4.2),\ (1.4.3)}$$

$$= \breve{\lambda} \cdot \left(\frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial H_1(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} + \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial H_2(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} \right) =$$

$$= \xrightarrow{(1.4.5)} \breve{\lambda}.$$

Утверждение 1.4.1 доказано.

Отметим, что $m(p_1, p_2, \breve{U}) = p_1 \breve{x}_1 + p_2 \breve{x}_2 = \min\limits_{U(x_1, x_2) = \breve{U}} (p_1 x_1 + p_2 x_2)$, тогда на основании (1.4.1) имеем $\dfrac{\partial \min(p_1 x_1 + p_2 x_2)}{\partial \breve{U}} = \breve{\lambda}$, т.е. производная глобального минимального расхода по полезности $\breve{U}$ равна множителю Лагранжа $\breve{\lambda}$.

Утверждение 1.4.1 позволяет оценить новый $\min(p_1 x_1 + p_2 x_2)$ расхода, который получается при относительно малом $\Delta\breve{U}$ изменении уровня полезности (при этом новую задачу на условный минимум

$p_1 x_1 + p_2 x_2 \to (\min)$,

$U(x_1, x_2) = \breve{U}$

решать не следует):

$$\breve{\lambda} = \frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} \approx \frac{m(p_1, p_2, \breve{U} + \Delta\breve{U}) - m(p_1, p_2, \breve{U})}{\Delta\breve{U}},$$

откуда вытекает, что

$$m(p_1, p_2, \breve{U} + \Delta\breve{U}) \approx m(p_1, p_2, \breve{U}) + \breve{\lambda} \cdot \Delta\breve{U}, \text{ т.е.}$$

$$\min_{U(x_1, x_2)=\breve{U}+\Delta\breve{U}} (p_1x_1 + p_2x_2) \approx \min_{U(x_1, x_2)=\breve{U}} (p_1x_1 + p_2x_2) + \breve{\lambda} \cdot \Delta\breve{U},$$

что важно с теоретической и прикладной точек зрения.

Если функция полезности $U(x_1, x_2)$ выпукла вверх, то множитель Лагранжа $\breve{\lambda}$ скорее велик (является «слоном») чем мал (т.е. не «моська»). В связи с этим последнее приближенное равенство содержательно означает, что при увеличении уровня полезности, скажем, на одну единицу, потребителю требуется значительно увеличить расход.

1.4.2. Утверждение 1.4.2 (лемма Шепарда)

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_1} = \breve{x}_1, \tag{1.4.6}$$

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_2} = \breve{x}_2. \tag{1.4.7}$$

Доказательство утверждения 1.4.2

Из (1.4.4) следует, что

$$0 = \frac{\partial \breve{U}}{\partial p_1} = \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial p_1} + \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial p_1}. \tag{1.4.8}$$

Имеем

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}[p_1 \cdot H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + p_2 \cdot H_2(p_1, p_2, \breve{U})] =$$

$$= H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + p_1 \frac{\partial H_1(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H_2(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_1} = \xrightarrow{(1.4.2),\,(1.4.3)}$$

$$= H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + \breve{\lambda} \cdot \left(\frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial p_1} + \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial p_2} \right) =$$

$$= \xrightarrow{(1.4.8)} H_1(p_1, p_2, \breve{U}) = \breve{x}_1.$$

Равенство (1.4.7) получается аналогично.

Утверждение 1.4.2 доказано.

Утверждение 1.4.2 позволяет оценить новый $\min(p_1x_1 + p_2x_2)$ расхода, который при относительно малом Δp_1 изменении цены p_1 (при этом новую задачу на условный минимум

$$(p_1 + \Delta p_1)x_1 + p_2x_2 \to (\min),$$

$$U(x_1, x_2) = \breve{U}$$

решать не следует) имеет вид

$$\breve{x}_1 = \frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_1} \approx \frac{m(p_1 + \Delta p_1, p_2, \breve{U}) - m(p_1, p_2, \breve{U})}{\Delta p_1},$$

откуда следует, что

$$m(p_1 + \Delta p_1, p_2, \breve{U}) \approx m(p_1, p_2, \breve{U}) + \breve{x}_1 \Delta p_1, \text{ т.е.}$$

$$\min_{U(x_1,x_2)=\breve{U}} [(p_1 + \Delta p_1)x_1 + p_2x_2] \approx \min_{U(x_1,x_2)=\breve{U}} [p_1x_1 + p_2x_2] + \breve{x}_1 \Delta p_1,$$

что важно с теоретической и практической точек зрения.

Утверждения 1.4.1 и 1.4.2. при $n > 2$ имеют вид

$$\frac{\partial m(p_1, \ldots, p_n, \breve{U})}{\partial \breve{U}} = \breve{\lambda},$$

$$\frac{\partial m(p_1, \ldots, p_n, \breve{U})}{\partial p_1} = \breve{x}_1, \ \ldots, \ \frac{\partial m(p_1, \ldots, p_n, \breve{U})}{\partial p_n} = \hat{x}_n.$$

1.5. Взаимосвязь между решением задач максимизации функции полезности и минимизации расходов. Вывод уравнений Слуцкого. Уравнения Слуцкого в эластичностях

1.5.1

Задача максимизации функции полезности имеет вид:	Задача минимизации расходов:
$U(x_1, x_2) \to (\max)$, (1.5.1)	$p_1x_1 + p_2x_2 = M \to (\min)$, (1.5.3)
$p_1x_1 + p_2x_2 = M.$ (1.5.2)	$\breve{U} = U(x_1, x_2).$ (1.5.4)
Вектор $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ – ее максимальное решение,	Вектор $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ – ее минимальное решение,
$\hat{x}_1 = D_1(p_1, p_2, M)$,	$\breve{x}_1 = H_1(p_1, p_2, \breve{U})$,
$\hat{x}_2 = D_2(p_1, p_2, M)$,	$\breve{x}_2 = H_2(p_1, p_2, \breve{U})$,
$\hat{U} = U(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = v(p_1, p_2, M)$. (рис. 1.6)	$m(p_1, p_2, \breve{U}) = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2$.

Положим в (1.5.2) $M = m(p_1, p_2, \breve{U})$, тогда, очевидно,

$$D_1(p_1, p_2, m(p_1, p_2, \breve{U})) = H_1(p_1, p_2, \breve{U}), \tag{1.5.5}$$

$$D_2(p_1, p_2, m(p_1, p_2, \breve{U})) = H_2(p_1, p_2, \breve{U}), \tag{1.5.6}$$

$$\hat{U} = \breve{U}.$$

Использовав теорему о частных производных сложной функции, получим

$$\frac{\partial H_i(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j} = \frac{\partial D_i(p_1, p_2, m(p_1, p_2, \breve{U}))}{\partial p_j} + \\ + \frac{\partial D_i(p_1, p_2, m(p_1, p_2, \breve{U}))}{\partial M} \cdot \frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j} \tag{1.5.7}$$

(здесь $i, j = 1, 2$).

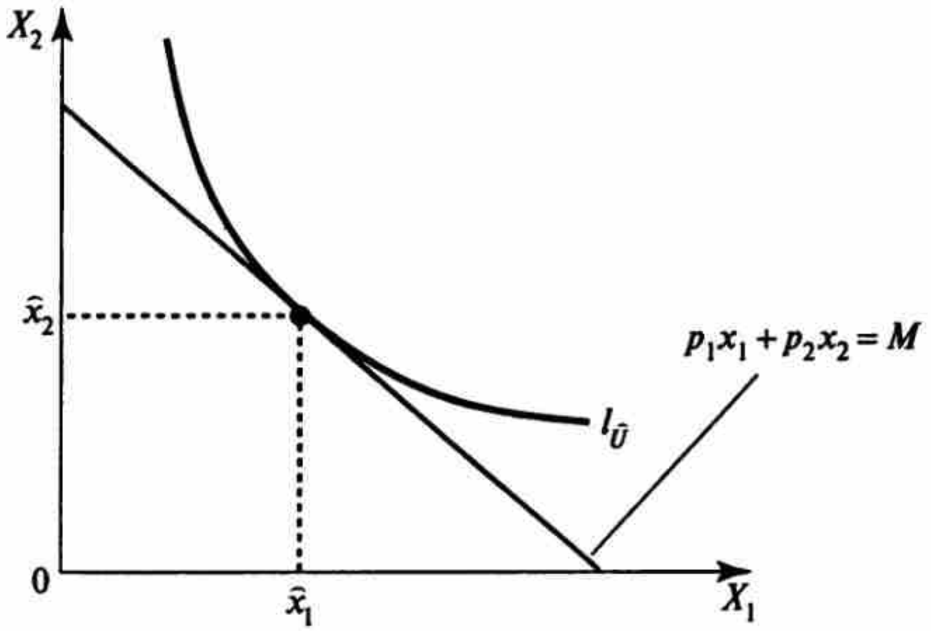


Рис. 1.6

Подставив в (1.5.7) $\dfrac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j} = H_j(p_1, p_2, \breve{U})$ (лемма Шепарда – см. параграф 1.4), получим уравнение (точнее, первую версию уравнений) Слуцкого:

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j} + D_j \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M}, \quad i, j = 1, 2$$

(в общем случае $i, j = 1, \ldots, n$). (1.5.8)

В уравнении (1.5.8) вместо H_j фигурирует D_j, ибо они равны (см. (1.5.5), (1.5.6)).

По лемме Шепарда (см. параграф 1.4)

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_i} = H_i(p_1, p_2, \breve{U}),\ i, j = 1,\ 2\ \text{(в общем случае } i, j = 1,\ \ldots,\ n),$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial H_i(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j}.$$

В связи с тем, что

$$\frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_i \partial p_j},$$

имеем

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} + D_j \frac{\partial D_i}{\partial M} = \frac{\partial H_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_i \partial p_j} =$$

$$= \frac{\partial H_j}{\partial p_i} = \frac{\partial D_j}{\partial p_i} + D_i \cdot \frac{\partial D_j}{\partial M},\ \text{ т.е.}$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} + D_j \frac{\partial D_i}{\partial M} = \frac{\partial D_j}{\partial p_i} + D_i \cdot \frac{\partial D_j}{\partial M}, \tag{1.5.9}$$

$$i, j = 1,\ 2\ \text{ (в общем случае } i, j = 1,\ \ldots,\ n).$$

Выражение (1.5.9) – это вторая версия уравнений Слуцкого.

1.5.2. Матрица из вторых частных производных $\dfrac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j \partial p_i}$ называется матрицей Слуцкого.

Из математического анализа известно, что для выпуклости (вверх) функции $m(p_1, p_2, \breve{U})$ расходов необходимо и достаточно, чтобы матрица Слуцкого была неположительно определенной. Это эквивалентно тому, что квадратичная форма, соответствующая матрице Слуцкого, была неположительно определенной. Поскольку функция $m(p_1, p_2, \breve{U})$ расходов выпукла вверх по переменным p_1 и p_2 (см. параграф 1.3), постольку матрица Слуцкого неположительно определена, откуда следует, что все элементы ее главной диагонали неположительны:

$$\frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j^2} \le 0 \ (<0), \quad j = 1,\ 2,$$

или

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_i} \le 0 \ (<0), \quad i = 1,\ 2 \ \text{(в общем случае } i = 1,\ \ldots,\ n),$$

т.е. с точки зрения функций спроса по Хиксу все продукты обыкновенные и продуктов Гиффена у этих функций не бывает.

1.5.3. Уравнение Слуцкого

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{\partial H_i}{\partial p_j} - D_j \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M}$$

после деления на $D_i = H_i$ и умножения на p_j перепишется так:

$$\frac{p_j}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{p_j}{H_i} \cdot \frac{\partial H_i}{\partial p_j} - \frac{p_j}{D_i} \cdot D_j \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M}.$$

Преобразовав последнее слагаемое

$$\frac{p_j}{D_i} \cdot D_j \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M} = \frac{M}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M} \cdot \frac{p_j D_j}{M},$$

получим следующее уравнение:

$$\frac{p_j}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{p_j}{H_i} \cdot \frac{\partial H_i}{\partial p_j} - \frac{M}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M} \cdot \frac{p_j D_j}{M}, \qquad (1.5.10)$$

где $\frac{p_j}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial p_j}$ – перекрестная эластичность $E_j(D_i)$ спроса (по Маршаллу) на i-й продукт по цене p_j j-го продукта (если $i = j$, получаем обычную эластичность спроса (по Маршаллу) на i-й продукт по цене p_i);

$\frac{p_j}{H_i} \cdot \frac{\partial H_i}{\partial p_j}$ – перекрестная эластичность $E_j(H_i)$ спроса (по Хиксу) на i-й продукт по цене p_j j-го продукта (если $i = j$, получаем обычную эластичность спроса (по Хиксу) на i-й продукт по цене p_i);

$\frac{M}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M}$ – эластичность $E_M(D_i)$ спроса по доходу;

$\frac{p_j D_j}{M}$ – доля ρ_j дохода M потребителя, который он тратит на приобретение j-го продукта.

Таким образом, получено уравнение (точнее уравнения) Слуцкого в эластичностях:

$$E_j(D_i) = E_j(H_i) - E_M(D_i) \cdot \rho_j, \quad i, j = 1, 2 \tag{1.5.11}$$

(в общем случае $i, j = 1, \ldots, n$)

1.6. Оценка изменения благосостояния потребителя. Эквивалентная и компенсирующая вариации дохода

1.6.1. Уравнение бюджетной плоскости $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = M_1$ можно переписать так: $p_1x_1 + y = M_1$, где $y = p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$ – количество *композитного продукта* (товара). Первый продукт приобретается в количестве x_1 по цене p_1.

При цене p_1 на первый продукт потребитель выбирает набор $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, y^{(1)})$, т.е. потребитель тратит на приобретение первого продукта $p_1x_1^{(1)}$ руб. и $y^{(1)}$ руб. на приобретение остальных продуктов. $x^{(1)}$ – точка касания линии безразличия $l_{U^{(1)}}$ и бюджетной прямой I ($p_1x_1 + y = M_1$) (рис. 1.7).

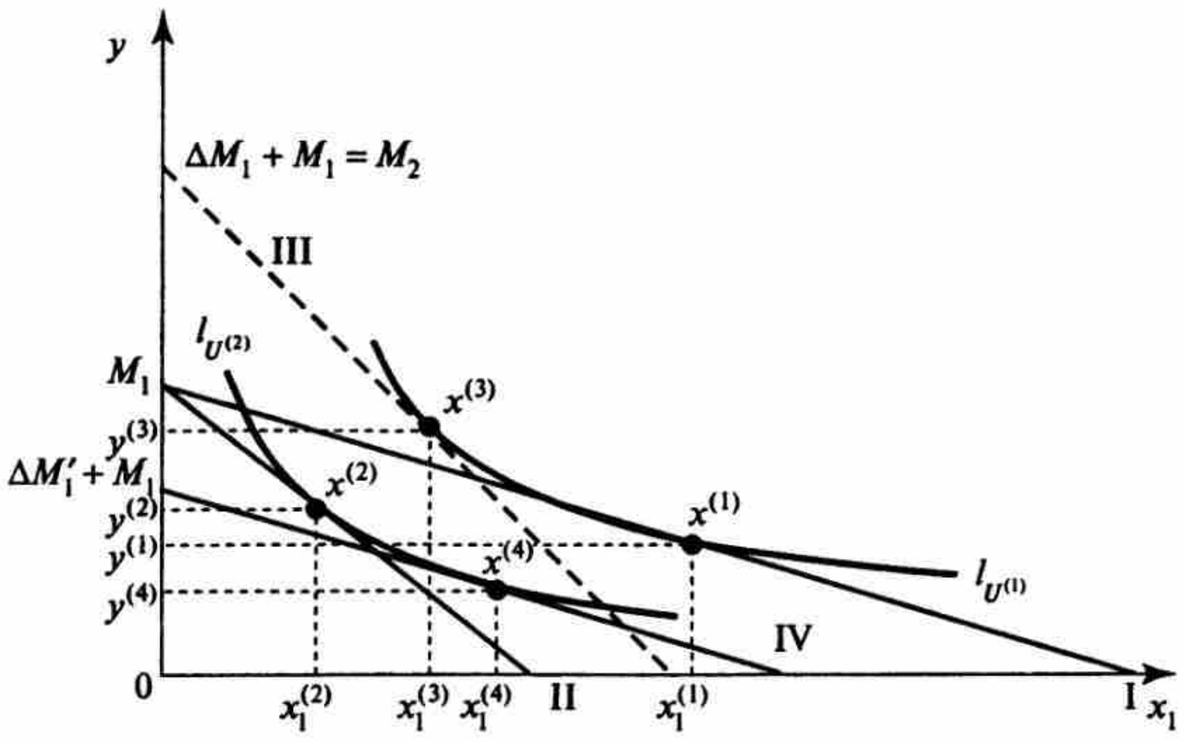


Рис. 1.7

Если цена p_1 на первый продукт выросла и стала равной q_1 ($q_1 > p_1$), бюджетная прямая I перейдет в бюджетную прямую II. В этом случае потребитель выберет набор $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, y^{(2)})$, который изображается точкой касания $x^{(2)}$ линии безразличия $l_{U^{(2)}}$ и бюджетной прямой II ($q_1x_1 + y = M_1$). Очевидно, $U^{(2)} < U^{(1)}$, т.е. уровень $U^{(1)}$ полезности потребителя (удовлетворение потребительских амбиций) снизится до уровня $U^{(2)}$.

Определим величину ΔM_1, на которую следует увеличить номинальный доход M_1 потребителя, чтобы потребитель вернулся на прежний уровень $U^{(1)}$, т.е. прежний реальный доход по Хиксу.

Для этого следует переместить бюджетную прямую II параллельно самой себе на «северо-восток» так, чтобы она перешла в положение III. Бюджетная прямая III ($q_1x_1 + y = M_1 + \Delta M_1$, $\Delta M_1 > 0$, если цена p_1 растет) касается линии безразличия $l_{U^{(1)}}$ в точке $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, y^{(2)})$ и параллельна бюджетной прямой II.

Величина ΔM_1 и есть *компенсирующая вариация дохода* (CV), ибо она показывает, на какую величину следует изменить (увеличить) номинальный доход M_1, чтобы компенсировать потерю реального дохода потребителя в связи с повышением цены p_1 на первый продукт.

Критерием того, что потребителю вернули его реальный доход, является то, что потребитель вернулся на прежний уровень $U^{(1)}$ полезности (уровень удовлетворения потребительских амбиций).

В связи с повышением цены p_1 на первый продукт переход из точки $x^{(1)}$ в точку $x^{(3)}$ отражает простой эффект (эффект замены – ЭЗ), вызванный изменением только одного параметра (цены p_1) и сохранением неизменным другого параметра (реального дохода потребителя). Переход из точки $x^{(3)}$ в точку $x^{(2)}$ отражает простой эффект (эффект дохода – ЭД), вызванный изменением только одного параметра (дохода, который изменяется с величины $M_1 + \Delta M_1$ до величины M_1) и сохранением неизменным другого параметра (цены p_1). Переход из точки $x^{(1)}$ в точку $x^{(2)}$ отражает сложный (составной) эффект (общий эффект – ОЭ), вызванный изменением двух параметров (цены p_1 и реального дохода потребителя), т.е. имеем для первого продукта (*прямые*) эффекты – общий (ОЭ), замены (ЭЗ) и дохода (ЭД):

$$\text{ОЭ} = \text{ЭЗ} + \text{ЭД},$$

где $\text{ОЭ} = x_1^{(2)} - x_1^{(1)}$; $\text{ЭЗ} = x_1^{(3)} - x_1^{(1)}$; $\text{ЭД} = x_1^{(2)} - x_1^{(3)}$ (см. рис. 1.7).

Для другого продукта (в данном случае композитного) имеем (*перекрестные*) эффекты – общий (ОЭ′), замены (ЭЗ′) и дохода (ЭД′):

$$ОЭ' = ЭЗ' + ЭД',$$

где $ОЭ' = y^{(2)} - y^{(1)}$; $ЭЗ' = y^{(3)} - y^{(1)}$; $ЭД' = y^{(2)} - y^{(3)}$ (см. рис. 1.7).

Формула ОЭ = ЭЗ + ЭД наглядно интерпретирует уравнение Слуцкого

$$\underset{(ОЭ)}{\frac{\partial D_1}{\partial p_1}} = \underset{(ЭЗ)}{\frac{\partial H_1}{\partial p_1}} - \underset{(ЭД)}{D_1 \frac{\partial D_1}{\partial M}}.$$

Формула ОЭ′ = ЭЗ′ + ЭД′ наглядно интерпретирует уравнение Слуцкого

$$\underset{(ОЭ')}{\frac{\partial D_2}{\partial p_1}} = \underset{(ЭЗ')}{\frac{\partial H_2}{\partial p_1}} - \underset{(ЭД')}{D_1 \frac{\partial D_2}{\partial M}}.$$

Напомним (см. рис. 1.7), что если $x_1^{(2)} < x_1^{(3)}$, то первый продукт является нормальным; если $x_1^{(2)} > x_1^{(3)}$, то первый продукт – продукт низкого качества; если $x_1^{(2)} < x_1^{(1)}$, то первый продукт обыкновенный; если $x_1^{(2)} > x_1^{(1)}$, то первый продукт – продукт Гиффена.

1.6.2. При повышении цены p_1 снижается реальный доход потребителя. Определим величину $\Delta M_1'$, на которую снизится номинальный доход потребителя так, чтобы при неизменной цене p_1 потребитель остался на новом уровне $U^{(2)}$ полезности ($U^{(2)} < U^{(1)}$).

Для этого следует переместить бюджетную прямую I на «юго-запад» так, чтобы она перешла в положение IV. Бюджетная прямая IV ($p_1x_1 + y = M_1 + \Delta M_1'$, $\Delta M_1' < 0$, если цена p_1 растет) касается линии безразличия $l_{U^{(2)}}$ в точке $x^{(4)} = (x_1^{(4)}, y^{(4)})$ и параллельна бюджетной прямой I.

Величина $\Delta M_1'$ – *эквивалентная вариация дохода* (*EV*), ибо она показывает, на какую величину следует изменить (уменьшить) номинальный доход M_1, чтобы потребитель остался на новом уровне $U^{(2)}$ полезности без повышения цены p_1.

1.7. Об использовании результатов социологических обследований для оценки параметров функций полезности социальных групп

В теории потребления один потребитель взаимодействует с рынком потребительских товаров. Потребитель оставляет на рынке свой доход в обмен на потребительский набор, который он выбирает. Выбираемый потребительский набор максимизирует функцию полезности. Если она есть, то задача выбора представляет собой достаточно простую задачу на условный максимум с линейным ограничением в виде равенства. Оценивать параметры полезности реального индивидуума практически невозможно.

Однако под потребителем не обязательно следует понимать конкретного индивидуума. Под потребителем можно понимать домашнее хозяйство и даже отдельную социальную группу (например, молодежь региона, пенсионеры региона, жители городов и поселков региона, сельские жители региона и т.п. В роли региона может выступать целая страна). Оценка параметров функций полезности отдельных социальных групп позволяет использовать эти функции в конкретных расчетах по оценке потребительского поведения этих групп.

Для оценки параметров функций полезности социальных групп можно использовать оценки сдвигов предпочтений этих групп. Для оценки сдвигов предпочтений можно использовать результаты социологических обследований представителей социальных групп на основании специально подготовленных анкет. После обработки на ПЭВМ результатов социологических обследований появляются данные о сдвигах групповых предпочтений. Оценки сдвигов групповых предпочтений позволяют провести операцию интегрирования этих сдвигов и получить явное выражение функции полезности социальной группы.

Таким образом, обработанные данные результатов социологических обследований могут быть использованы при формировании модельной информации. Следовательно, экономические задачи можно решать с использованием не только математических методов, но и методов прикладной социологии.

Вопросы для самоконтроля к главе 1

1. Как формулируется задача максимизации функции полезности потребителя при бюджетном ограничении (приведите три постановки) и ее обобщение в форме задачи математического программирования?
2. Как формулируется задача минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности (приведите три постановки) и ее обобщение в форме задачи математического программирования?
3. Что представляют собой метод Лагранжа решения задачи максимизации функции полезности потребителя при бюджетном ограничении, локальное рыночное равновесие потребителя (ЛРРП) и его геометрическая характеристика?
4. Что такое функция спроса по Маршаллу на продукт со стороны потребителя и косвенная функция полезности? Сформулируйте свойства этих функций.
5. Чему равна предельная полезность по доходу?
6. Чему равна предельная полезность по цене продукта (тождество Роя)?
7. Что представляет собой метод Лагранжа решения задачи минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности? Что такое геометрическая интерпретация этого решения?
8. Что такое функция спроса по Хиксу на продукт со стороны потребителя и его функция расходов? Сформулируйте свойства этих функций.
9. Чему равен предельный расход по полезности?
10. Чему равен предельный расход по цене продукта (лемма Шепарда)?
11. Как выглядит первая версия уравнений Слуцкого? Приведите вывод первой версии уравнений Слуцкого.
12. Что представляет собой наглядная геометрическая интерпретация первой версии уравнений Слуцкого?
13. Что такое матрица Слуцкого и вторая версия уравнений Слуцкого?
14. Как выписываются уравнения Слуцкого в эластичностях?
15. Что такое эквивалентная вариация дохода и ее геометрическая интерпретация?
16. Что такое компенсирующая вариация дохода и ее геометрическая интерпретация?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 1

1. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{1/4} \cdot x_2^{1/4}$. Цены продуктов соответственно равны $p_1 = 8$, $p_2 = 2$, доход потребителя $M = 64$:
   а) найдите методом Лагранжа локальное рыночное равновесие потребителя (ЛРРП): $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ и множитель Лагранжа $\hat{\lambda}$;

б) постройте точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ на плоскости Ox_1x_2;
в) напишите уравнение и постройте (используя не менее трех точек) линию безразличия, содержащую точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
г) напишите уравнение и постройте данную бюджетную прямую;
д) найдите и постройте grad $U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, выходящий из точки $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
е) постройте вектор цен (p_1, p_2), выходящий из точки $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
ж) дайте геометрическую интерпретацию множителю Лагранжа $\hat{\lambda}$.

2. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2}$. Цены продуктов соответственно равны $p_1 = 4, p_2 = 1$. Уровень полезности $\breve{U} = 8$:
   а) найдите методом Лагранжа потребительский набор $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$, который минимизирует функцию расходов потребителя, а также множитель Лагранжа $\breve{\lambda}$;
   б) постройте на плоскости Ox_1x_2 точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$;
   в) напишите уравнение и постройте, использовав не менее трех точек, линию безразличия потребителя, содержащую точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$;
   г) напишите уравнение и постройте линию минимального расхода;
   д) найдите и постройте grad $U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$, выходящий из точки $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$;
   е) постройте вектор цен (p_1, p_2), выходящий из точки $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$;
   ж) дайте геометрическую интерпретацию множителю Лагранжа $\breve{\lambda}$.

3. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{1/3} \cdot x_2^{1/4}$. Найдите эластичность по p_1 максимума функции полезности $\hat{U}$ при заданном бюджетном ограничении $p_1x_1 + p_2x_2 = M$.

4. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/4}$. Цены на продукты соответственно равны p_1 и p_2, доход потребителя равен M:
   а) найдите функции спроса (по Маршаллу) на первый и второй продукты;
   б) выпишите косвенную функцию полезности.

5. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{1/4} \cdot x_2^{2/3}$. Цены на продукты соответственно равны p_1 и p_2, уровень полезности потребителя равен $\breve{U}$:
   а) найдите функции спроса (по Хиксу) на первый и второй продукты.
   б) выпишите функцию расходов.

6. Косвенная функция полезности $v(p_1, p_2, M)$ имеет вид $v(p_1, p_2, M) = \dfrac{M^{13/15}}{p_1^{1/5} \cdot p_2^{2/3}}$. Выпишите функцию $\hat{x}_1 D_2(p_1, p_2, M)$ спроса на второй продукт.

7. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Цены на единицы первого и второго продукта соответственно равны $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, доход равен $M = 24$. Цена на первый продукт повысилась и стала равной $q_1 = 8$. Найдите эквивалентную вариацию дохода.

8. $\left[\dfrac{\partial m(p_1, p_2, M)}{\partial p_i}\right]$ – предельный расход по цене p_i i-го продукта ($i = 1, 2$):
   а) равен множителю Лагранжа задачи минимизации расхода при фиксированном уровне $\breve{U}$ полезности;
   б) пропорционален предельному расходу по полезности;
   в) равен предельному расходу по полезности;
   г) равен величине $\breve{x}_i = \breve{x}_i(p_1, p_2, \breve{U})$ спроса по Хиксу на i-й продукт;
   д) ответы а)–г) не верны.

9. Функция расходов $m(p_1, p_2, \breve{U})$ как функция цен p_1 и p_2 на продукты и фиксированного уровня $\breve{U}$ полезности:
   а) однородна нулевой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$;
   б) однородна первой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$;
   в) однородна нулевой степени относительно всех переменных $p_1, p_2, \breve{U}$;
   г) не имеет однозначной характеристики относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$.

10. $\left[\dfrac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial p_i}\right]$ – предельная полезность по цене p_i i-го продукта ($i = 1, 2$):
   а) равна значению $\hat{x}_i$ функции спроса по Маршаллу на i-й продукт;
   б) пропорциональна значению $\hat{x}_i$;
   в) равна значению $\breve{x}_i$ функции спроса по Хиксу на i-й продукт;
   г) пропорциональна значению $\breve{x}_i$ функции спроса по Хиксу на i-й продукт;
   д) ответы а)–г) не верны.

11. Косвенная функция полезности $v(p_1, p_2, M)$:
   а) однородна нулевой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты (при фиксированном доходе M);
   б) однородна первой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты (при фиксированном доходе M);
   в) однородна нулевой степени по всем переменным p_1, p_2, M;
   г) однородна первой степени по всем переменным p_1, p_2, M;
   д) ответы а)–г) не верны.

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 1

1. Укажите неверный ответ.

   Предельный расход по полезности $\left[\dfrac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}}\right]$:

   а) равен множителю Лагранжа задачи максимизации полезности при бюджетном ограничении;

   б) равен множителю Лагранжа задачи минимизации расхода при фиксированном уровне полезности.

2. Функция спроса по Хиксу $\breve{x}_1 = \breve{x}_1(p_1, p_2, \breve{U})$ на первый продукт:

   а) однородна нулевой степени относительно всех переменных $p_1, p_2, \breve{U}$;

   б) однородна первой степени относительно всех переменных $p_1, p_2, \breve{U}$;

   в) однородна нулевой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты;

   г) однородна нулевой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты;

   д) не допускает однозначной характеристики относительно своих переменных.

3. Предельная полезность по доходу $\left[\dfrac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial M}\right]$:

   а) равна отношению величины $\hat{x}_i$ спроса по Маршаллу на i-й продукт к предельной полезности по цене p_i i-го продукта;

   б) пропорциональна отношению величины $\hat{x}_i$ спроса по Маршаллу на i-й продукт к предельной полезности по цене p_i i-го продукта;

   в) равна отношению предельной полезности по цене p_i i-го продукта к величине $\hat{x}_i$ спроса по Маршаллу на i-й продукт;

   г) пропорциональна отношению предельной полезности по цене p_i i-го продукта к величине $\hat{x}_i$ спроса по Маршаллу на i-й продукт;

   д) ответы а)–г) не верны.

4. Функция $\hat{x}_1 = \hat{x}_1(p_1, p_2, M)$ спроса по Маршаллу на первый продукт:

   а) однородна нулевой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты (при фиксированном доходе M);

   б) однородна нулевой степени по всем переменным p_1, p_2, V;

   в) однородна первой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты (при фиксированном доходе M);

   г) однородна первой степени по всем переменным;

   д) ответы а)–г) не верны.

5. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/4}$. Найдите эластичность по p_1 максимума функции полезности $\widehat{U}$ при заданном бюджетном ограничении $p_1x_1 + p_2x_2 = M$.

6. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{3/4} \cdot x_2^{1/5}$. Цены на продукты соответственно p_1 и p_2, доход потребителя равен M:
   а) выпишите функции спроса (по Маршаллу) на первый и второй продукты;
   б) выпишите косвенную функцию полезности.

7. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/4}$. Цены на продукты соответственно равны p_1 и p_2, уровень полезности потребителя равен $\widehat{U}$:
   а) выпишите функции спроса (по Хиксу) на первый и второй продукты;
   б) выпишите функцию расходов.

8. Косвенная функция полезности имеет вид $v(p_1, p_2, M) = \dfrac{M^{11/12}}{p_1^{1/4} \cdot p_1^{2/3}}$.

   Выпишите функцию спроса $\hat{x}_1 = \hat{x}_2(p_1, p_2, M)$ по Маршаллу на первый продукт.

9. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2}$. Цены на единицы первого и второго продуктов соответственно равны $p_1 = 9, p_2 = 4$, доход равен $M = 12$. Цена на первый продукт повысилась и стала равной $q_1 = 16$. Найдите компенсирующую вариацию дохода.

10. Постройте пример функции $f(x_1, x_2)$ такой, что ее линия уровня касается в единственной точке $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = M$ и эта точка не является точкой условного локального экстремума функции $f(x_1, x_2)$ при наличии ограничения $p_1x_1 + p_2x_2 = M$. (Этот пример нетипичен для микроэкономики.)

11. Постройте пример функции $f(x_1, x_2)$ такой, что ее линия уровня касается в единственной точке $\breve{x} = (\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ прямой и эта точка не является точкой условного локального экстремума функции $p_1x_1 + p_2x_2 = M$ при наличии ограничения $f(x_1, x_2) = \breve{f}$. (Этот пример нетипичен для микроэкономики.)

Глава 2

ТЕОРИЯ ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ-БЕЗРАЗЛИЧИЯ

2.1. Понятие отношений предпочтения, безразличия и отношения предпочтения-безразличия

2.1.1. Если потребитель предпочитает потребительский набор $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$ потребительскому набору $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ (т.е. из двух *разных* предлагаемых потребителю наборов x^1 и x^0 он обязательно выберет набор x^1), то говорят, что на потребительских наборах x^1 и x^0 задано *отношение* (сильного) *предпочтения*, что записывается символически так: $x^1 \succ x^0$.

Очевидно, отношение предпочтения не обладает свойством рефлексивности: $x \succ x$.

Если из двух потребительских наборов x^1 и x^0 потребителю все равно, какой набор выбирать, то говорят, что на потребительских наборах x^1 и x^0 задано *отношение безразличия*, что записывается так: $x^1 \sim x^0$.

Очевидно, отношение безразличия есть *отношение эквивалентности*, т.е. бинарное отношение, обладающее свойствами *рефлексивности* ($x \sim x$), *симметричности* ($x^1 \sim x^0 \Rightarrow x^0 \sim x^1$) и *транзитивности* ($x^0 \sim x^1, x^1 \sim x^2 \Rightarrow x^0 \sim x^2$).

2.1.2. Если потребительский набор x^1 предпочитается или безразличен для потребительского набора x^0, то говорят, что на потребительских наборах x^1 и x^0 задано *отношение предпочтения-безразличия*, что символически записывается так: ($x^1 \succeq x^0$).

Отношение предпочтения-безразличия есть *отношение порядка*, т.е. такое бинарное отношение, которое обладает свойствами *рефлексивности* ($x \succeq x$), *антисимметричности* ($x^1 \succeq x^0, x^0 \succeq x^1 \Rightarrow x^1 \sim x^0$), *транзитивности* ($x^2 \succeq x^1, x^1 \succeq x^0 \Rightarrow x^2 \succeq x^0$).

Функция полезности задает отношение предпочтения-безразличия следующим образом: $U(x^1) \geq U(x^0) \Leftrightarrow x^1 \succeq x^0$. Более конкретно: $U(x^1) = U(x^0) \Leftrightarrow x^1 \sim x^0$, $U(x^1) > U(x^0) \Leftrightarrow x^1 \succ x^0$.

Карта линий безразличия индуцирует класс функций полезности, замкнутый относительно монотонного преобразования. Карта линий безразличия задает отношение предпочтения-безразличия следующим образом: если потребительский набор x^1 принадлежит поверхности (линии при $n = 2$) безразличия l^1, расположенной строго «северо-восточнее» поверхности (линии) безразличия l^0, которой принадлежит потребительский набор x^0, то естественно, что $x^1 \succ x^0$. Если потребительские наборы x^1 и x^0 принадлежат одной поверхности (линии) безразличия, то $x^1 \sim x^0$.

Ниже (см. параграф 2.4) будет показано, что есть пример отношения предпочтения-безразличия, для которого нельзя построить функцию полезности (карту линий безразличия), которая бы индуцировала это отношение предпочтения-безразличия.

Таким образом, теория отношения предпочтения-безразличия есть *третья теория* (после двух теорий – теории количественной полезности и теории порядковой полезности) предпочтения потребителя, и эта теория представляет собой более общую конструкцию по сравнению с теориями количественной полезности и теории порядковой полезности.

2.2. Свойства и предположения отношения предпочтения-безразличия

2.2.1. В параграфе 2.1 уже отмечалось, что отношения предпочтения-безразличия обладают свойствами:

1) *рефлексивности*;
2) *антисимметричности*;
3) *транзитивности*.

Отношение предпочтения-безразличия обладает еще рядом свойств. Следующие свойства – это:

4) *полнота* (для любой пары x^1 и x^0 потребительских наборов справедливо одно из двух отношений $x^1 \succeq x^0$, $x^0 \succeq x^1$ или оба вместе (последнее означает, что $x^1 \sim x^0$)).

Свойство полноты означает, что множество *всех* потребительских наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, таких, что $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, является *вполне* упорядоченным множеством по отношению предпочтения-безразличия $\succeq$ (напомним, что по отношению $\geq$, которое для n-мерных векторов понимается покоординатно, множество потребительских наборов является только *частично* упорядоченным множеством).

2.2.2. Прежде чем переходить к другим свойствам отношения предпочтения-безразличия $\succeq$, определим три понятия.

Множество $B(x^0)$ всех потребительских наборов x ($x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$), предпочитаемых или безразличных набору x^0, называется *хорошим* множеством для набора x^0, т.е.

$$B(x^0) = \{x \mid x \succeq x^0\}.$$

Множество $W(x^0)$ всех потребительских наборов x, которым набор x^0 предпочитается или безразличен, называется *плохим* множеством для набора x^0, т.е.

$$W(x^0) = \{x \mid x^0 \succeq x\}.$$

Множество $I(x^0)$ всех потребительских наборов x, безразличных набору x^0, называется множеством *безразличия* для набора x^0, т.е.

$$L(x^0) = I(x^0) = \{x \mid x \sim x^0\}.$$

Неравенство $x_1 \geq x^0$ для n-мерных векторов x^1 и x^0 понимается покоординатно ($x_1^1 \geq x_1^0, \ldots, x_n^1 \geq x_n^0$), неравенство $x^1 \underset{(\neq)}{\geq} x^0$ означает, что справедливо неравенство $x^1 \geq x^0$ и хотя бы для одной координаты i_0 справедливо строгое неравенство $x_{i_0}^1 > x_{i_0}^0$;

5) *ненасыщаемость* (из $x^1 \underset{(\neq)}{\geq} x^0$ следует, что $x^1 \succ x^0$, рис. 2.1).

Обратное ($x^1 \succ x^0 \Rightarrow x^1 \geq x^0$), очевидно, не имеет места (см. рис. 2.1, на котором $\bar{x}^1 \succ \bar{x}^0$, однако неверно, что $\bar{x}^1 \geq \bar{x}^0$, ибо для них $\bar{x}_1^1 < x_1^0$, $\bar{x}_2^1 > \bar{x}_2^0$). На рис. 2.2 представлен фрагмент карты линий безразличия. Здесь $x^2 \succ x^1 \succ x^0$, однако $x^1 \underset{(\neq)}{\geq} x^2$ и $x^1 \underset{(\neq)}{\geq} x^0$. Рисунок 2.2 показывает, что свойство ненасыщаемости справедливо не всегда, поэтому далее предполагается, что свойство ненасыщаемости имеет место, и случаи, аналогичные представленному на рис. 2.2, не рассматриваются.

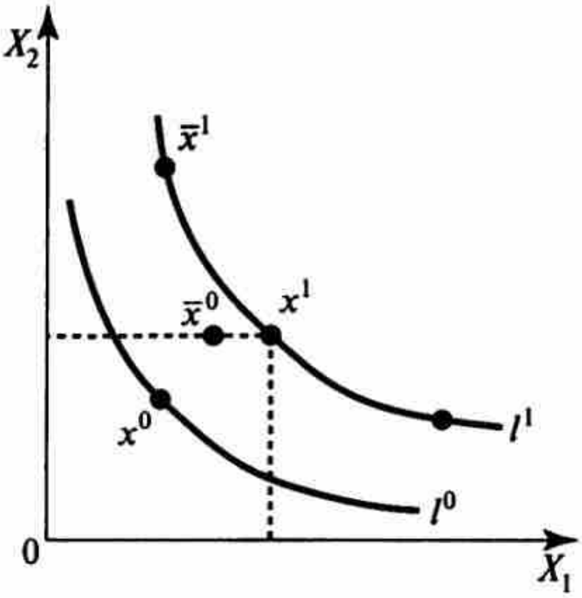


Рис. 2.1

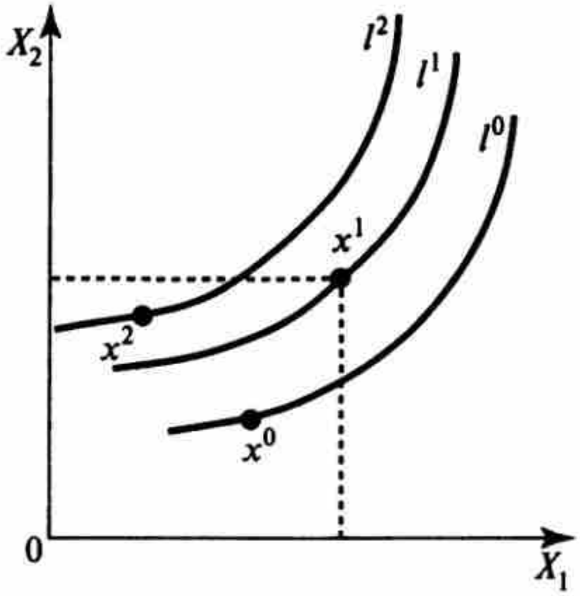


Рис. 2.2

2.2.3. Далее все рассуждения проводятся при условии, что справедливы свойства:

6) *непрерывности* множеств безразличия $I(x^0)$ (что эквивалентно предположению о замкнутости множеств $B(x^0)$ и $W(x^0)$ или открытости множеств $B^0(x^0) = \{x \mid x \succ x^0\}$, $W(x^0) = \{x \mid x^0 \succ x\}$);

7) *строгой выпуклости* (для любого потребительского набора x^0 множество $B(x^0)$ строго выпукло);

8) *гладкости функции полезности*, если функция полезности включается в рассмотрение.

Отметим, что отношения предпочтения, безразличия и предпочтения-безразличия были определены исходя из наглядных экономических соображений (см. параграф 2.1). Тогда свойства 1)–5) выводятся из этих определений. Свойства 6)–7), по существу, являются дополнительными предположениями. Можно эту наивную схему обернуть, превратить ее в аксиоматическое определение отношения предпочтения-безразличия следующим образом: бинарное отношение на множестве потребительских наборов называется отношением предпочтения-безразличия, если для него имеют место аксиомы 1)–8). Отметим, что при таком подходе свойства 1)–8) берутся в качестве (исходных) аксиом – (исходных) предположений.

2.3. Взаимосвязь между отношением предпочтения-безразличия и функцией полезности

2.3.1. В параграфе 2.1 отмечалось, что функция полезности индуцирует отношение предпочтения-безразличия. Покажем, что отношение предпочтения-безразличия, для которого выполнены свойства 1)–6) (см. параграф 2.2), определяет однозначно функцию полезности $U(x_1, \ldots, x_n)$. В этом построении одним из основных является свойство 6) о непрерывности и свойство 5) о ненасыщаемости. Подробное построение проведем для случая $n = 2$.

Построим множество $I(x^0)$ безразличия потребительского набора x^0 (рис. 2.3).

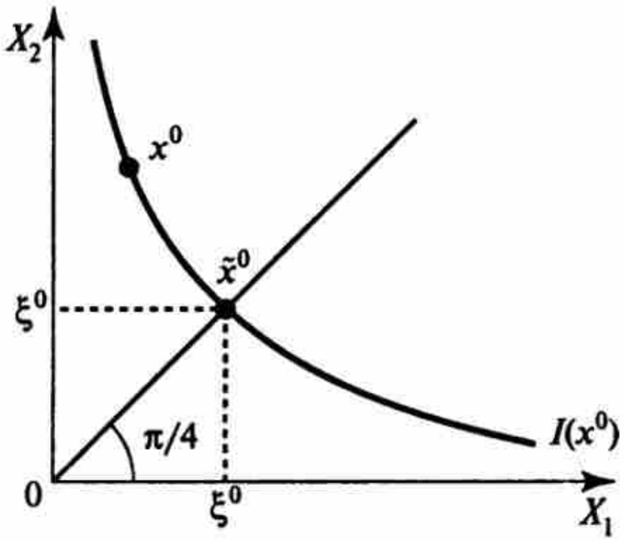


Рис. 2.3

Согласно свойству 6) множество $I(x^0)$ непрерывно (т.е. не имеет «дыр»), поэтому его обязательно пересечет в точке $\tilde{x}^0 = (\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0)$ ($\tilde{x}_1^0 = \tilde{x}_2^0 = \xi^0$) прямая, которая выходит из точки O под углом $\pi/4$ (45°). Положим $U(x^0) = U(\tilde{x}^0) = \xi$, т.е. частное значение $U(x^0)$ функции полезности $U(x)$ на потребительском наборе x^0 определяется так: если $\xi e \sim x^0$ (вектор $e = (1,1)$), то $U(x^0) = \xi$.

2.3.2. Покажем, что определенная в разделе 2.3.1 функция $U(x)$ есть функция полезности, т.е. докажем, что она непрерывна и

$$U(x^1) \geq U(x^0) \Leftrightarrow x^1 \succeq x^0. \qquad (2.3.1)$$

Сначала докажем, что из $x^1 \succeq x^0$ следует $U(x^1) \geq U(x^0)$.

Пусть $x^1 \succeq x^0$ и $x^1 \sim \xi^1 e$, $x^0 \sim \xi^0 e$. По свойству транзитивности из $\xi^1 e \sim x^1$, $x^1 \succeq x^0$ следует, что $\xi^1 e \succeq x^0$; по свойству транзитивности из $\xi^1 e \succeq x^0$ и $x^0 \sim \xi^0 e$ следует, что $\xi^1 e \succeq \xi^0 e$, т.е. $\xi^1 \geq \xi^0$ (ибо $e = (1,1)$), откуда вытекает на основании определения функции $U(x)$, что $U(x^1) \geq U(x^0)$.

Докажем, что из $U(x^1) \geq U(x^0)$ следует $x^1 \succeq x^0$.

Пусть $x^0 \succ x^1$. Тогда по свойству транзитивности из $x^0 \succ x^1$ и $x^0 \sim \xi^0 e$ следует, что $\xi^0 e \succ x^1$. Аналогично по свойству транзитивности из $\xi^0 e \succ x^1$ и $x^1 \sim \xi^1 e$ следует, что $\xi^0 e \succ \xi^1 e$, т.е. $U(x^0) = \xi^0 > \xi^1 = U(x^1)$, а это противоречит условию, что $U(x^1) \geq U(x^0)$. Следовательно, $x^1 \succeq x^0$.

Для доказательства непрерывности функции $U(x)$ используем понятие *отделимых множеств*. Два множества M_1 и M_2 отделимы, если ни одна точка одного из множеств не является граничной точкой другого множества. Очевидно, множества $B^0(x^0)$ и $W^0(x^0)$ отделимы.

Для непрерывности функции $U(x)$ ($x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$) необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары U_1, U_2 подмножеств значений функции $U(x)$ имела место отделимость их полных прообразов $M_1 = \{x \mid U(x) \in U_1\}$ и $M_2 = \{x \mid U(x) \in U_2\}$ в случае отделимости самих множеств U_1 и U_2.

Пусть x^0 — потребительский набор и $U(x^0)$ — частное значение функции полезности. Пусть $U_1 = [\breve{U}, U(x^0))$ и $U_2 = (U(x^0), \hat{U}]$, где числа $\breve{U} < U(x^0)$ и $U(x^0) < \hat{U}$ произвольны и достаточно близки к числу $U(x^0)$. Множества U_1 и U_2 отделимы. Множество $M_1 = \{x \mid U(x) \in U_1\} \subseteq W^0(x^0)$ и $M_2 = \{x \mid U(x) \in U_2\} \subseteq B^0(x^0)$. Множества $B^0(x^0)$ и $W^0(x^0)$ расположены по разные стороны от множества безразличия $I(x^0)$, поэтому они отделимы. Значит, отделимы множества M_1 и M_2. Поскольку потребительский набор x^0 был выбран произвольно, непрерывность функции $U(x)$ доказана.

В случае произвольного $n > 2$ функция $U(x)$ определяется чуть сложнее, а доказательства связки (2.3.1) и непрерывности функции $U(x)$ почти дословно повторяют только что приведенные доказательства.

Непрерывность функции полезности можно доказать, не используя свойство 5) о ненасыщаемости, с использованием неэлементарных математических средств (результат Ж. Дебре 50-х годов XX в.).

2.4. Лексикографическое упорядочение как пример отношения предпочтения-безразличия, для которого нельзя построить функцию полезности

2.4.1. Лексикографическое упорядочение (ЛГУ) n-мерных векторов аналогично упорядочению студентов (школьников) в группе по алфавиту: Александров, Афанасьев, Белоусов, Блинов, Васильев, Власов и т.д.

Если $x_1^1 > x_1^0$, то вектор $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ лексикографически предпочитается вектору $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, что символически записывается так: $x^1 \underset{(l)}{\succeq} x^0$.

Если $x_1^1 = x_1^0$ и $x_2^1 > x_2^0$, то $x^1 \underset{(l)}{\succeq} x^0$ и т.д.

ЛГУ обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности, полноты, ненасыщаемости. Однако ЛГУ не удовлетворяет предположению 6) о непрерывности. Для этого покажем (достаточно рассмотреть случай $n = 2$), что множества $B(x^0)$ и $W(x^0)$ не являются замкнутыми.

На рис. 2.4 хорошее множество $B(x^0)$ есть подмножество первой четверти ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) координатной плоскости Ox_1x_2, содержаще вертикальный луч с началом в точке $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, множество точек оси Ox_1 таких, что $x_1 > x_1^0$, и полуплоскость $x_1 > x_1^0$ (см. рис. 2.4). Точки (x_1^0, x_2), $0 \leq x_2 < x_2^0$ не принадлежат множеству $B(x^0)$, т.е. множество $B(x^0)$ не является замкнутым. На рис 2.4 плохое множество $W(x^0)$ есть подмножество первой четверти ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) координатной плоскости Ox_1x_2, содержащее отрезок $\{(x_1^0, x_2) \mid 0 \leq x_2 < x_2^0\}$, множество точек оси Ox_1 таких, что $0 \leq x_1 \leq x_1^0$, и полосу $\{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 < x_1^0, x_2 > 0\}$ т.е. множество $W(x^0)$ не является замкнутым.

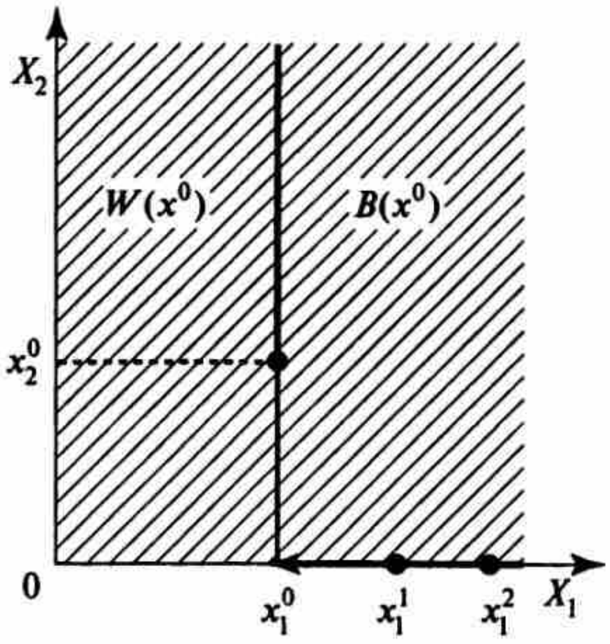


Рис. 2.4

2.4.2. Покажем, что для ЛГУ не существует функции полезности $U(x)$.

Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Предположим, что функция полезности $U(x_1, x_2)$ существует. Пусть функция $U(x_1, x_2)$ строго возрастает с ростом вектора $x = (x_1, x_2)$, т.е. из $x'' \underset{(\neq)}{\geq} x'$ следует, что $U(x'') > U(x')$. Очевидно, точка $(x_1^1, 0) \underset{(l)}{\succeq} (x_1^0, x_2^0)$, если $x_1^1 > x_1^0$. Функция $U(x_1^1, x_2)$ строго возрастает с ростом x_2. Из того, что $x_1^2 > x_1^1$, следует, что $U(x_1^2, 0) > U(x_1^1, x_2)$ для любого $x_2 \geq 0$. Поэтому с ростом x_2 график функции $U(x_1^1, x_2)$ ограничен сверху прямой $U = U(x_1^2, 0)$ и в силу своего строгого возрастания имеет горизонтальную асимптоту U_1^* (рис. 2.5). Таким образом, точке x_1^1 $(x_1^1 > x_1^0)$ ставится в соответствие полупромежуток $[(U(x_1^1, 0); U_1^*)$. Аналогично точке x_1^2 $(x_1^2 > x_1^1)$ ставится в соответствие другой полупромежуток $[(U(x_1^2, 0); U_2^*)$. Полупромежутки $[(U(x_1^1, 0); U_1^*)$, $[(U(x_1^2, 0); U_2^*)$ не имеют общих точек. Точек на полуоси $x_1 > x_1^0$ континуум, а попарно пересекающихся полупромежутков $[(U(x_1, 0); U^*)$ может быть не более чем счетное множество. Пришли к противоречию. Следовательно, функции $U(x_1, x_2)$ полезности для ЛГУ не существует.

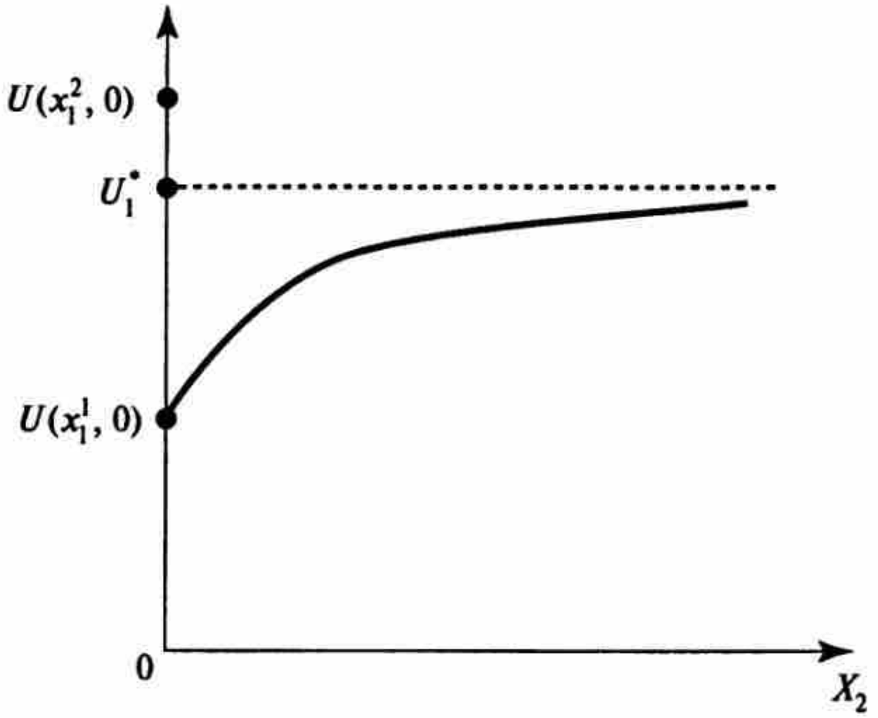


Рис. 2.5

Вопросы для самоконтроля к главе 2

Что представляет собой отношение предпочтения-безразличия, задаваемое функцией полезности?
Что представляет собой отношение предпочтения-безразличия, задаваемое картой поверхностей (линий) безразличия?
Что такое отношение эквивалентности, отношение порядка?
Как формулируются свойства отношения предпочтения-безразличия (рефлексивность, антисимметричность, транзитивность, полнота, ненасыщаемость, гладкость, непрерывность, выпуклость)?
Как формулируются определения «хорошего», «плохого» множеств, множества безразличия в пространстве потребительских наборов?
Что такое лексикографическое упорядочение (ЛГУ)? Показать, что ЛГУ – пример отношения предпочтения-безразличия. Что представляют собой множества безразличия, хорошие и плохие множества ЛГУ?
Как строится функция полезности для отношения предпочтения-безразличия, обладающего свойством непрерывности?
В каком отношении находятся понятия ЛГУ и функции полезности?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 2

Докажите, что отношение безразличия есть отношение эквивалентности.
Докажите, что отношение предпочтения-безразличия есть отношение порядка.

3. Приведите аналитический пример функции полезности, для которой не выполнено свойство ненасыщаемости.
4. Приведите аналитический пример функции полезности, для которой существует хорошее множество, не являющееся строго выпуклым.

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 2

1. Теории количественной полезности (ТКП), порядковой полезности (ТПП), отношения предпочтения-безразличия (ТОПБ) по уровню общности (в порядке возрастания) следует расположить следующим образом:
   а) ТОПБ, ТКП, ТПП;
   б) ТОПБ, ТПП, ТКП;
   в) ТКП, ТОПБ, ТПП;
   г) ТКП, ТПП, ТОПБ;
   д) ТПП, ТКП, ТОПБ.
2. Отношение предпочтения обладает свойством:
   а) рефлексивности;
   б) антисимметричности;
   в) транзитивности;
   г) ненасыщаемости;
   д) полноты.
3. Отношение безразличия обладает свойством:
   а) полноты;
   б) ненасыщаемости;
   в) антисимметричности;
   г) рефлексивности;
   д) ответы а)–б) не верны.
4. Множество безразличия:
   а) представляет собой собственное подмножество границы хорошего множества;
   б) содержит в качестве собственного подмножества границу хорошего множества;
   в) представляет собой общую границу хорошего и плохого множеств;
   г) представляет собой собственное подмножество границы плохого множества;
   д) ответы а)–г) не верны.
5. Множество безразличия ЛГУ ($n = 2$) представляет собой:
   а) линию на плоскости Ox_1x_2;
   б) точку на плоскости Ox_1x_2;

в) двумерное множество на плоскости Ox_1x_2;
г) не существует понятия множества безразличия для ЛГУ;
д) ответы а)–г) не верны.

6. Для ЛГУ выпишите уравнение функции спроса на первый продукт ($n = 2$) или докажите, что такой функции не существует.

7. Докажите, что в предположении о непрерывности множества безразличия при ($n = 2$) прямая $x_2 = k \cdot x_1$ обязательно пересечет множество безразличия ($0 < k < \infty$).

Глава 3

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЫЯВЛЕННЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

3.1. Предпосылки теории выявленных предпочтений

3.1.1. В связи с тем что не вполне ясны экономические основы понятия полезности и функции полезности, в экономической теории неоднократно предпринимались попытки уточнить эти понятия именно с экономической точки зрения. Так, после теории количественной полезности, в которой основным понятием является функция полезности, была предложена теория порядковой полезности, в которой, по существу, основное понятие – это карта поверхностей (линий) безразличия, на основании которой функция полезности восстанавливается с точностью до монотонного преобразования. Эти две теории обобщает теория отношения предпочтения-безразличия, в которой был построен пример лексикографического упорядочения, для которого не существует функции полезности.

В этих трех теориях существенным является то обстоятельство, что отношение предпочтения задается независимо от *рыночной ситуации*, т.е. независимо от рыночных цен $p_1, ..., p_n$ на продукты и от дохода M, с которым потребитель выходит на рынок.

В теории выявленных предпочтений отношение предпочтения уже связано с рыночными ценами $p_1, ..., p_n$ на продукты и зависит от них.

Теория выявленных предпочтений опирается на следующие предпосылки.

1. Потребитель, приобретая на рынке потребительский набор $x^1 = (x_1^1, ..., x_n^1)$, обязательно тратит весь свой доход, т.е. $p^1x^1 = M^1$

(пара, состоящая из вектора цен $p^1 = (p_1^1, ..., p_n^1)$ и дохода M^1, как уже отмечалось выше, называется рыночной ситуацией).

2. Выбор потребителя является единственным, т.е. $x^1 = (x_1^1, ..., x_n^1)$ – единственный потребительский набор такой, что $p^1x^1 = M^1$ (предпосылка о строгой выпуклости предпочтений потребителя).

3. Если выбран потребительский набор x^1, то он определяет единственным образом (с точностью до положительного множителя) рыночную ситуацию, т.е. $x^1 \Rightarrow (\gamma \cdot p^1, \gamma \cdot M^1)$ так, что $\gamma \cdot p^1x^1 = \gamma \cdot M^1$.

Предпосылка 2 может быть ослаблена (это ослабление далее специально оговаривается), что означает возможность использования нестрого выпуклых предпочтений потребителя.

3.1.2. Говорят, что потребительский набор $x^1 = (x_1^1, ..., x_n^1)$ *прямо выявленно* (т.е. *явно*) *предпочитается* потребительскому набору $x^2 = (x_1^2, ..., x_n^2)$, если $p^1x^1 \geq p^1x^2$, где $p^1x^1 = M^1$ и (p^1, M^1) – некоторая (вполне определенная) рыночная ситуация. Символика $x^1 \succ^* x^2$.

Содержательно прямое выявленное предпочтение набора x^1 набору x^2 означает, что из двух потребительских наборов x^1 и x^2 потребитель выбрал именно набор x^1, а набор x^2 не выбрал, т.е. потребитель выбирает самый дорогой потребительский набор x^1, а среди самых дорогих единственный (рис. 3.1, на котором потребительский набор x^1 обязательно расположен на северо-восточной границе AB бюджетного множества OAB, которое соответствует рыночной ситуации p^1, M^1, а потребительские наборы x^2, которым прямо выявленно предпочитается потребительский набор x^1, могут располагаться на северо-восточной границе AB бюджетного множества OAB или внутри него).

Обратим внимание на то, что прямое выявленное предпочтение $x^1 \succ^* x^2$ означает, что потребительские наборы x^1 и x^2 сопоставляются в ценах p^1 рыночной ситуации (p^1, M^1), соответствующей набору x^1, и что сопоставляются только доступные потребителю наборы x^1 и x^2. Если один из двух потребительских наборов потребителю недоступен, то он может быть как более, так и менее предпочтительным потребителю, чем доступный потребительский набор. В связи с возможностью неоднозначного ответа такие пары потребительских наборов не сопоставляются. Далее отношение прямого выявленного предпочтения обобщается на совокупности, содержащие более двух потребительских наборов.

В случае трех потребительских наборов x^1, x^2, x^3 (рис. 3.2) пусть потребительский набор x^1 расположен на северо-восточной границе AB бюджетного множества OAB, соответствующего рыночной ситуации p^1, M^1; потребительский набор x^2 принадлежит бюджетному множеству OAB, а потребительский набор x^3 принадлежит бюджетному множеству ODF, соответствующему рыночной ситуации p^2, $M^2 = p^2x^2$.

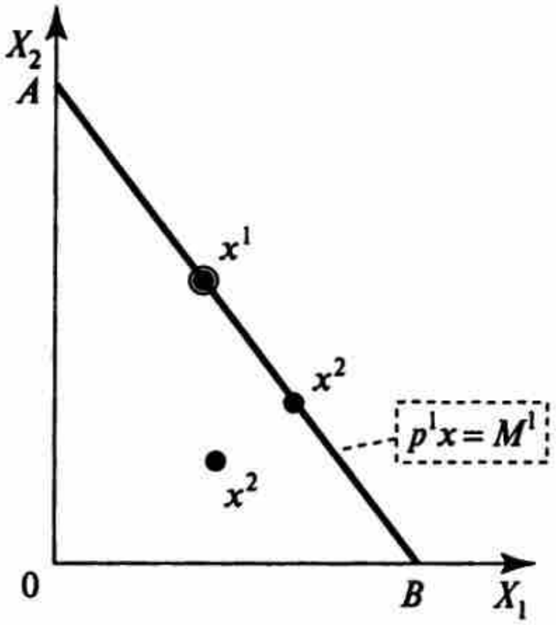


Рис. 3.1

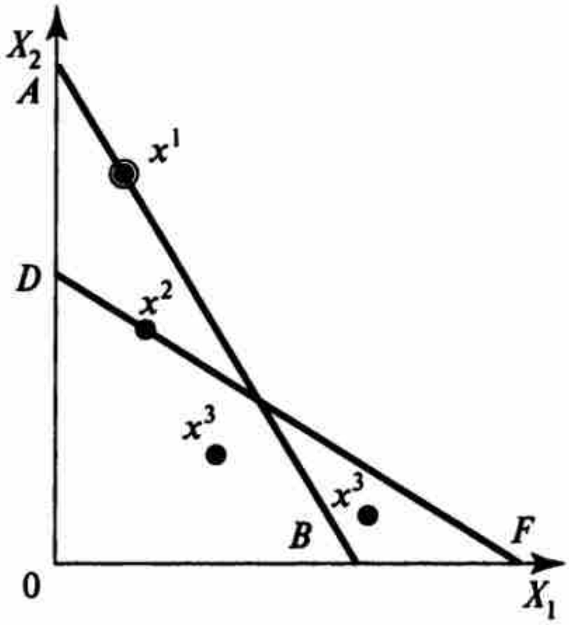


Рис. 3.2

Очевидно,

$p^1x^1 \ge p^1x^2$, $p^2x^2 \ge p^2x^3$, т.е.

$x^1 \succ^* x^2$, $x^2 \succ^* x^3$.

Если потребительский набор x^3 принадлежит бюджетному множеству OAB, то $x^1 \succ^* x^3$ (т.е. потребительский набор x^1 прямо выявленно предпочитается потребительскому набору x^3), если же потребительский набор x^3 не принадлежит бюджетному множеству OAB, то, строго говоря, нельзя писать, что $x^1 \succ^* x^3$. Следовательно, отношение прямого выявленного предпочтения не обладает свойством транзитивности.

3.1.3. Говорят, что потребительский набор x^1 *косвенно выявленно предпочитается* потребительскому набору x^3, если $p^1x^1 \geq p^1x^2$, $p^2x^2 \geq p^2x^3$ и если потребительский набор x^3 не принадлежит бюджетному множеству, соответствующему рыночной ситуации $(p^1, M^1 = p^1x^1)$.

Однако приведенное разделение выявленного предпочтения потребительского набора x^1 потребительскому набору x^3 на прямое и косвенное не вполне конструктивно, ибо часто бывает не ясно, принадлежит потребительский набор x^3 бюджетному множеству, соответствующему рыночной ситуации $(p^1, M^1 = p^1x^1)$, или не принадлежит. В некоторых случаях приходится специально оговаривать, о каком конкретно выявленном предпочтении идет речь (прямом или косвенном).

В дальнейшем вне зависимости от того, принадлежит потребительский набор x^3 бюджетному множеству, соответствующему рыночной ситуации $(p^1, M^1 = p^1x^1)$, или не принадлежит, используется терминология: потребительский набор x^1 выявленно предпочитается потребительскому набору x^3, если $p^1x^1 \geq p^1x^2$, $p^2x^2 \geq p^2x^3$. Символика: $x^1 \succ^* x^3$.

В случае цепочки $x^1, x^2, \ldots, x^k$, содержащей четыре и более потребительских наборов, будем говорить о выявленном предпочтении потребительского набора x^1 потребительскому набору x^k и использовать символику $x^1 \succ^* x^k$.

В случае двух потребительских наборов x^1 и x^2 во фразе «потребительский набор x^1 прямо выявленно предпочитается потребительскому набору x^2» слово «прямо» также будет опускаться.

3.2. Связь теории выявленных предпочтений с теорией линий (поверхностей) безразличия

3.2.1. В теории выявленных предпочтений нет функции полезности и нет линий (поверхностей) безразличия. Однако по результатам наблюдений за поведением потребителя на рынке можно дать качественную оценку характеру поведения линий (поверхностей) безразличия потребителя. Под результатом наблюдения за поведением потребителя на рынке понимается пара, состоящая из вектора цен p и потребительского набора x, который был выбран потребителем при этом векторе цен.

Если при векторе цен p^1 потребитель выбрал набор x^1, а при векторе цен p^2 потребитель выбрал набор x^2, то можно построить объединение $OAGF$ бюджетных множеств Q^1 (OAB) и Q^2 (ODF), соответствующих рыночным ситуациям (p^1, $M^1 = p^1x^1$) и (p^2, $M^2 = = p^2x^2$) (рис. 3.3). Поскольку $p^1x^1 \geq p^1x$ (здесь x «пробегает» множество Q^1) и $p^2x^2 \geq p^2x$ (здесь x «пробегает» множество Q^2), постольку $x^1 \succ^* x^2$, $x^2 \succ^* x^3$ и, следовательно, $x^1 \succ^* x$ для всех x из объединения $OAGF$ бюджетных множеств Q^1 и Q^2.

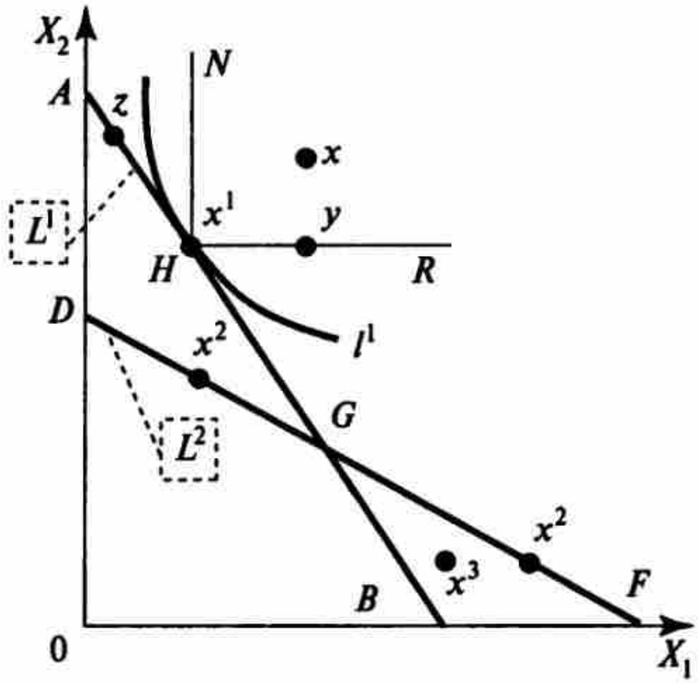


Рис. 3.3

При любом векторе цен p для потребительского набора x из угла x^1NR справедливо неравенство $px \geq px^1$, т.е. для любого потребительского набора x из угла x^1NR справедливо отношение $x \succ^* x^1$.

Из сказанного следует, что если линия безразличия l^1, содержащая потребительский набор x^1, существует, то она должна быть расположена во множествах Ax^1N и FGx^1R, т.е. вне множеств $OAGF$ и x^1NR (см. рис. 3.3). Если бы линия безразличия l^1 имела общую точку, скажем z, со множеством $OAGF$, отличную от точки x^1, то это бы противоречило отношению $x^1 \succ^* z$, ибо на линии безразличия не могут находиться точки, одна из которых предпочитается другой. Аналогичные рассуждения следует провести для точки y множества x^1NR.

3.2.2. Если при изменении цен число наблюдений о выборе потребителя растет, то можно сузить множество, которому принадлежит линия безразличия l^1 индивидуума, содержащая потребительский набор x^1.

Пусть при векторе цен p^4 потребитель выбрал набор x^4 и пусть бюджетная прямая L^4, имеющая уравнение $p^4x = p^4x^4$, содержит потребительский набор x^1 (рис. 3.4). Тогда очевидно, что $p^4x^4 = p^4x^1$ и, следовательно, $x^4 \succ^* x^1$.

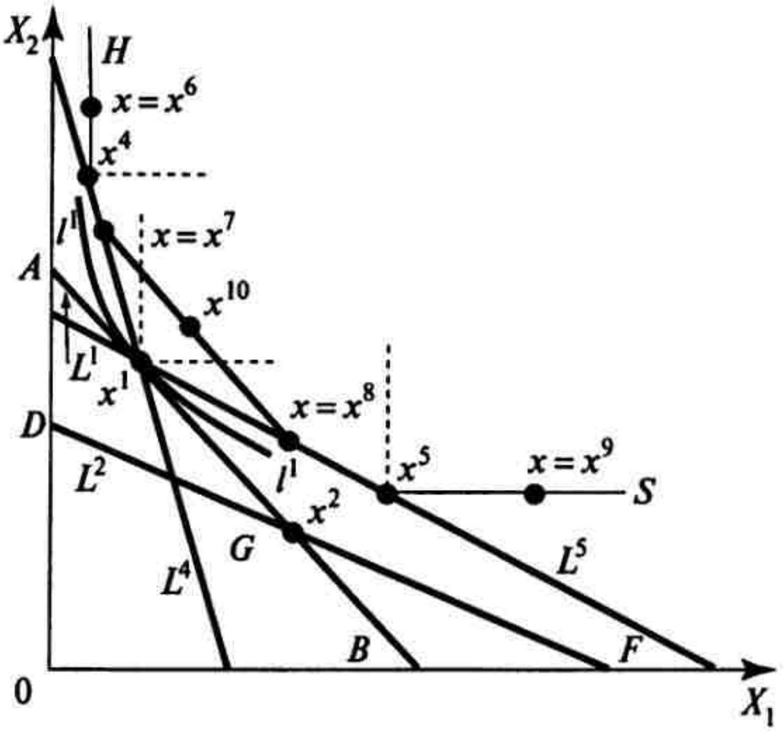


Рис. 3.4

Пусть при векторе цен p^5 потребитель выбрал набор x^5 и пусть бюджетная прямая L^5, имеющая уравнение $p^5x = p^5x^5$, содержит потребительский набор x^1 (см. рис. 3.4). Тогда очевидно, что $p^5x^5 = p^5x^1$ и $x^5 \succ^* x^1$.

Любой потребительский набор x, принадлежащий периферии $Hx^4x^1x^5S$ (см. рис. 3.4), выявленно предпочитается потребительскому набору x^1.

Действительно, если потребительский набор $x = x^6$ расположен на вертикальном луче x^4H, то очевидно, что $p^4x > p^4x^4 = p^4x^1$, откуда вытекает, что $x = x^6 \succ^* x^1$. Если потребительский набор $x = x^7$ находится на отрезке $[x^1; x^4]$ между точками x^1 и x^4, то $x = (1 - \lambda)x^1 + \lambda x^4$, где число $0 < \lambda < 1$. В этом случае $p^4x = (1 - \lambda)p^4x^1 + \lambda p^4x^4 = (1 - \lambda)p^4x^1 + \lambda p^4x^1 = p^4x^1$, откуда следует, что $x = x^7 \succ^* x^1$.

Для потребительских наборов x, расположенных на отрезке $[x^1; x^5]$ и на горизонтальном луче x^5S, рассуждения аналогичны только что проведенным.

Любой потребительский набор $x = x^{10}$, принадлежащий множеству $Hx^4x^1x^5S$, выявленно предпочитается потребительскому набору x^1, т.е. $x^{10} \succ^* x^1$.

Действительно, потребительский набор x^{10} можно представлять в виде выпуклой комбинации двух потребительских наборов, принадлежащих периферии $Hx^4x^1x^5S$.

На рис. 3.4 потребительский набор x^{10} есть выпуклая комбинация потребительских наборов x^7 и x^8, т.е. $x^{10} = (1 - \lambda)x^7 + \lambda x^8$, где число $0 < \lambda < 1$. Имеем $p^4x^{10} = (1 - \lambda)p^4x^7 + \lambda p^4x^7 > (1 - \lambda)p^4x^1 + \lambda p^4x^1 = p^4x^1$, т.е. $x^{10} \succ^* x^1$.

Таким образом, в рассматриваемом случае по результатам четырех наблюдений о выборе потребителем наборов x^1, x^2, x^4, x^5 получаем, что если линия безразличия l^1, содержащая потребительский набор x^1, существует, то она должна быть расположена вне множеств $OAGF$ и $Hx^4x^1x^5S$ (см. рис. 3.4).

Приведенные рассуждения показали, что предпочтения потребителя обладают свойством выпуклости.

Если $x^1 \succ^* x^2$ и если существует карта линий безразличия, то $x^1 \succeq x^2$ (рис. 3.5). Если существует карта линий безразличия, то из $x^1 \succeq x^2$ не следует, вообще говоря, что $x^1 \succ^* x^2$ (рис. 3.6).

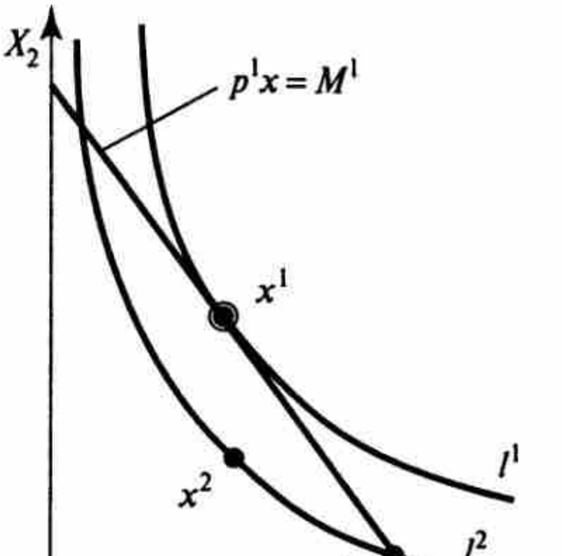


Рис. 3.5

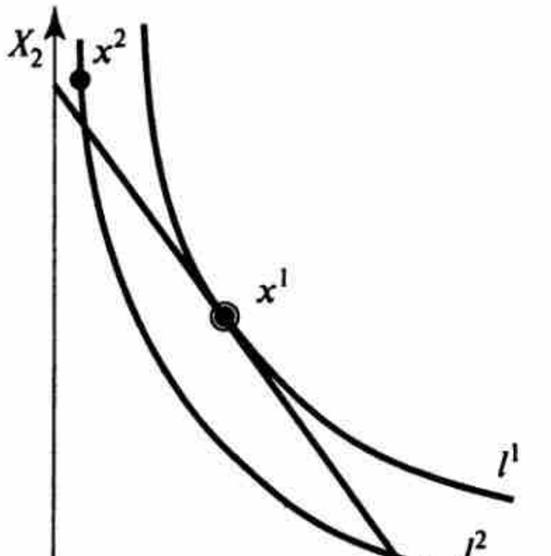


Рис. 3.6

3.3. Слабая и сильная аксиомы выявленных предпочтений

3.3.1. ***Слабая аксиома выявленных предпочтений*** (СлАВП) формулируется так: если $x^1 \succ^* x^2$ и $x^1 \neq x^2$, то неверно, что $x^2 \succ^* x^1$.

Другими словами, если $p^1x^1 \geq p^1x^2$, то $p^2x^2 < p^2x^1$ ($p^2x^2 = M^2$, p^2, M^2 – рыночная ситуация, соответствующая потребительскому набору x^2, если он был бы выбран). Неравенство $p^1x^1 \geq p^1x^2$ (в котором единица в качестве индекса фигурирует 3 раза и левая часть p^1x^1 больше или равна правой p^1x^2) означает, что потребителю доступны оба потребительских набора x^1 и x^2 и из этих наборов потребитель выбирает набор x^1. Неравенство $p^2x^2 < p^2x^1$ означает, что при ценах p^2 потребитель выбрал набор x^2, а набор x^1 потребителю недоступен.

Если СлАВП имеет место, то отношение выявленного предпочтения не обладает свойством симметричности: если $x^1 \succ^* x^2$, то неверно, что $x^2 \succ^* x^1$. Если СлАВП не имеет места, т.е. если существуют одновременно два отношения: $x^1 \succ^* x^2$ и $x^2 \succ^* x^1$, то отношение выявленного предпочтения обладает свойством симметричности.

Рисунок 3.7 иллюстрирует выполнение СлАВП, рис. 3.8 – ситуацию, когда СлАВП не имеет места.

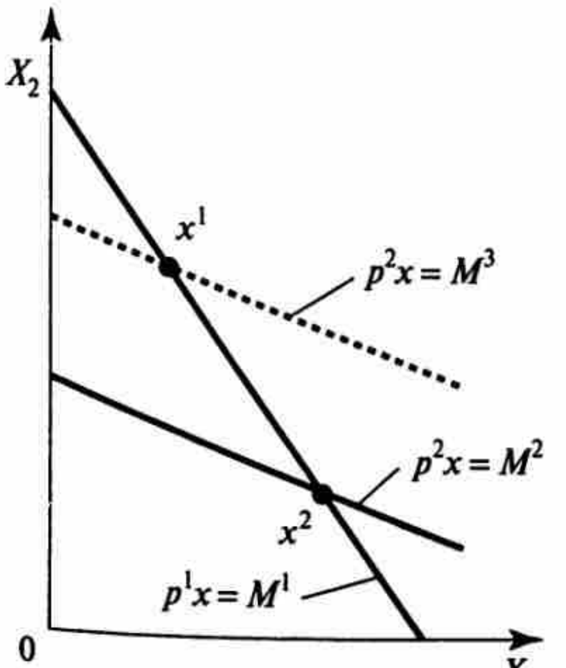


Рис. 3.7

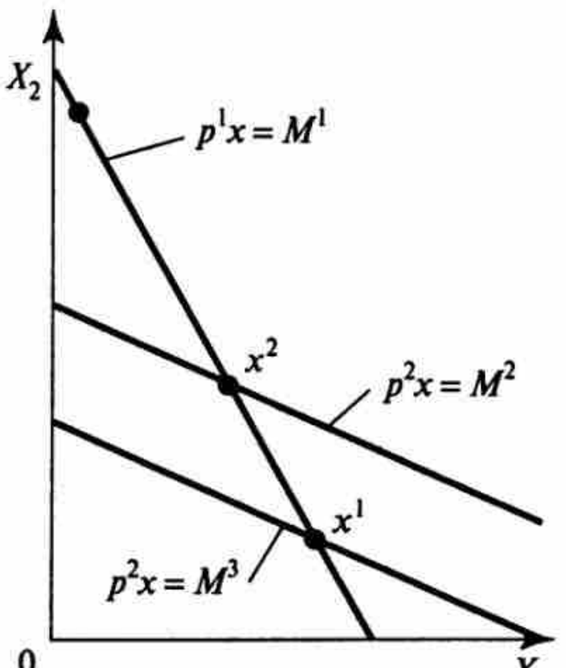


Рис. 3.8

На рис. 3.7 $p^1x^1 = p^1x^2$, т.е. $x^1 \succ^* x^2$, но $M^3 > M^2$, где $M^3 = p^2x^1$, $M^2 = p^2x^2$, т.е. $p^2x^2 < p^2x^1$; таким образом, СлАВП имеет место. На рис. 3.8 $p^1x^1 = p^1x^2$, т.е. $x^1 \succ^* x^2$, но $M^3 < M^2$, где $M^3 = p^2x^1$, $M^2 = p^2x^2$, т.е. $p^2x^2 > p^2x^1$, $x^2 \succ^* x^1$; таким образом, СлАВП не имеет места.

3.3.2. Если существует функция полезности $U(x_1, x_2)$, то потребительский набор $x^1 = (x_1^1; x_2^1)$ – точка касания бюджетной прямой $p^1x = M^1$ ($M^1 = p^1x^1$) и линии безразличия l^1, содержащей точку x^1 (рис. 3.9, на котором представлена ситуация, когда СлАВП имеет место). Линия безразличия l^2, содержащая точку $x^2 = (x_1^2; x_2^2)$, касается бюджетной прямой $p^2x = M^2$ ($M^2 = p^2x^2$). Линия безразличия l^2 расположена «юго-западнее» линии безразличия l^1, что, естественно, согласуется с тем, что $x^1 \succ^* x^2$.

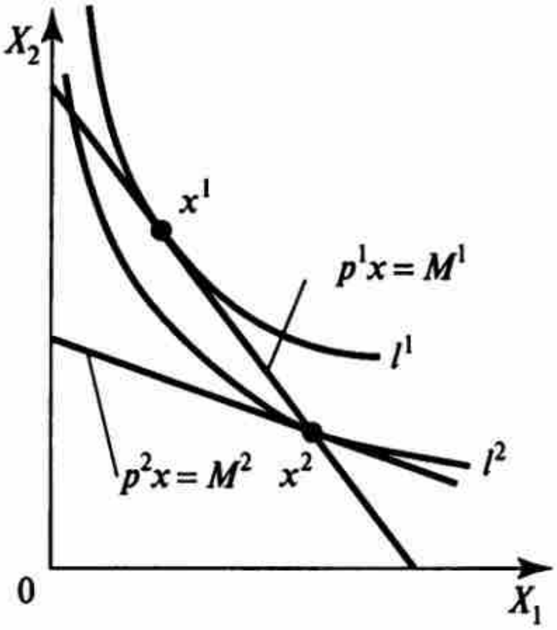


Рис. 3.9

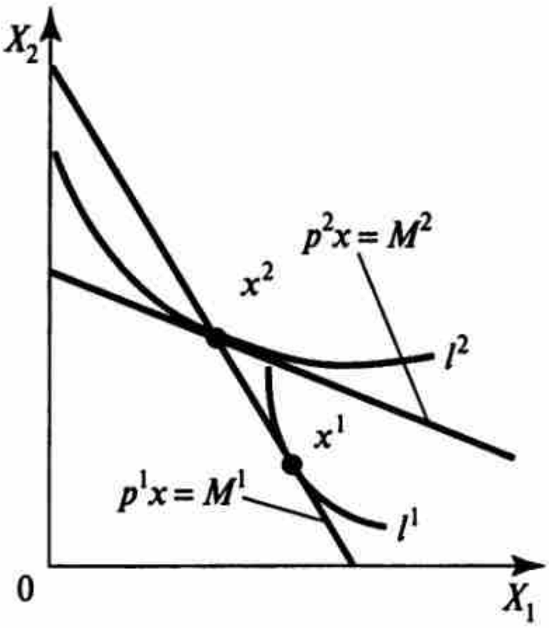


Рис. 3.10

На рис. 3.10, на котором представлена ситуация, когда СлАВП не имеет места, ситуация иная. Здесь, так же как и на рис. 3.9, линия безразличия l^1 касается бюджетной прямой $p^1x = M^1$ в точке x^1, а линия безразличия l^2 касается бюджетной прямой $p^2x = M^2$ в точке x^2. Взаимное расположение линий безразличия l^2 и l^1 свидетельствует о том, что они должны пересечься, а это принципиально невозможно, если, конечно, речь идет о линиях безразличия l^1 и l^2 *одной и той же функции полезности*. Если же линия безразличия l^1 является линией, соответствующей одной функции полезности, а линия безразличия l^2 является линией, соответствующей другой функции полезности, то пересечение таких линий вполне возможно. Следовательно, в случае невыполнения СлАВП единая (для двух наборов x^1 и x^2) функция полезности существовать не может. Остается принять, что переход потребителя от набора x^1 к набору x^2 продиктован изменением его функции полезности. Таким образом, невыполнение СлАВП свидетельствует либо о смене предпочтений потребителя (что выражается формально в изменении его функции полезности), либо в отрицании того факта, что на рынке потребитель ведет себя рационально.

Таким образом, СлАВП является вполне естественной с содержательной экономической точки зрения.

3.3.3. Результаты наблюдений за поведением потребителя на рынке позволяют получить ответ на вопрос, соответствует поведение потребителя на рынке СлАВП или не соответствует. Так, i-е наблюдение за поведением потребителя на рынке фиксирует вектор цен $p^i = (p_1^i, p_2^i)$ и выбранный потребителем набор $x^i = (x_1^i, x_2^i)$. Результаты, скажем, k наблюдений можно представить в виде табл. 3.1.

Таблица 3.1

Номер наблюдения	Цены		Выбираемые потребительские наборы	
	p_1	p_2	x_1	x_2
1	p_1^1	p_2^1	x_1^1	x_2^1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	p_1^i	p_2^i	x_1^i	x_2^i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	p_1^k	p_2^k	x_1^k	x_2^k

Положим $a_{ij} = p_1^i x_1^j + p_2^i x_2^j = p^i x^j$, $i, j = 1, \ldots, k$, т.е. a_{ij} – расход потребителя, если он по ценам $p^i = (p_1^i, p_2^i)$ приобретает набор $x^j = (x_1^j, x_2^j)$.

Элементы a_{ij} табл. 3.2 образуют квадратную матрицу A.

Таблица 3.2

	x^1	$\cdots$	x^i	$\cdots$	x^j	$\cdots$	x^k
p^1	a_{11}	$\cdots$	a_{1i}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1k}
$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...	...	...
p^i	a_{i1}	$\cdots$	a_{ii}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{ik}
$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...	...	...
p^j	a_{j1}	$\cdots$	a_{ji}	$\cdots$	a_{jj}	$\cdots$	a_{jk}
$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...	...	...
p^k	a_{k1}	$\cdots$	a_{ki}	$\cdots$	a_{kj}	$\cdots$	a_{kk}

Элементы i-й строки, $i = 1, \ldots, k$, матрицы A показывают расходы потребителя, которые он имел бы, если бы по ценам $p^i = (p_1^i, p_2^i)$ приобретал последовательно все потребительские наборы $x^1 = (x_1^1, x_2^1), \ldots, x^k = (x_1^k, x_2^k)$, кроме набора $x^i = (x_1^i, x_2^i)$, который был реально выбран потребителем по ценам $p^i = (p_1^i, p_2^i)$. Таким образом, элементы главной диагонали показывают реальные расходы потребителя, который приобретал наборы $x^1 = (x_1^1, x_2^1), \ldots, x^k = (x_1^k, x_2^k)$ соответственно по ценам $p^1 = (p_1^1, p_2^1), \ldots, p^k = (p_1^k, p_2^k)$. Остальные (внедиагональные) элементы показывают гипотетические расходы потребителя, которые он бы имел, приобретая по ценам $p^i = (p_1^i, p_2^i)$ другие наборы $x^j = (x_1^j, x_2^j)$, отличные от выбранного им набора $x^i = (x_1^i, x_2^i)$, т.е. $i \neq j$.

Если $a_{ii} = p_1^i x_1^i + p_2^i x_2^i \geq p_1^i x_1^j + p_2^i x_2^j = a_{ij}$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq i$, то это означает, что набор $x^j = (x_1^j, x_2^j)$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq i$, доступен потребителю, когда он приобретал набор $x^i = (x_1^i, x_2^i)$, и набор $x^i = (x_1^i, x_2^i)$ выявленно предпочитается потребительскому набору $x^j = (x_1^j, x_2^j)$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq i$.

Пометим такой элемент a_{ij} $(a_{ij} \leq a_{ii})$, например, звездочкой и назовем его меченым.

Если $a_{ii} = p_1^i x_1^i + p_2^i x_2^i < p_1^i x_1^j + p_2^i x_2^j = a_{ij}$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq i$, то это означает, что набор $x^j = (x_1^j, x_2^j)$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq i$ недоступен потребителю, когда он приобретал набор $x^i = (x_1^i, x_2^i)$. Поэтому в данном случае ничего нельзя сказать о выявленном предпочтении одного потребительского набора другому (речь идет о наборах x^i и x^j и ценах $p^i = (p_1^i, p_2^i)$).

Используя матрицу A, можно проверить, есть ли нарушения СлАВП, когда рассматриваются пары потребительских наборов, или таких нарушений нет.

Если в матрице A мечеными являются ее элементы a_{ij} и a_{ji}, $i \neq j$, то это означает, что для потребительских наборов x^i и x^j СлАВП не выполняется.

Действительно, поскольку элемент a_{ij} матрицы A меченый, постольку $a_{ii} \geq a_{ij}$, т.е. $p^i x^i \geq p^i x^j$ и, следовательно, $x^i \succ^* x^j$. Поскольку элемент a_{ji} матрицы A меченый, постольку $a_{jj} \geq a_{ji}$, т.е. $p^j x^j \geq p^j x^i$ и, следовательно, $x^j \succ^* x^i$. Одновременное наличие выявленных предпочтений $x^i \succ^* x^j$ и $x^j \succ^* x^i$ означает, что для потребительских наборов x^i и x^j СлАВП не выполняется.

3.3.4. Пример 3.3.1

Результаты трех наблюдений за поведением потребителя на рынке представлены в табл. 3.3 (все числа условные).

Таблица 3.3

Номер наблюдения	Цены		Выбираемые потребительские наборы	
	p_1	p_2	x_1	x_2
1	1	1	2	3
2	3	1	3	1
3	1	2	1	3

В рассматриваемом примере

$a_{11} = p^1 x^1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 5$, $a_{12} = p^1 x^2 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 4$, $a_{13} = p^1 x^3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 4$,

$a_{21} = p^2 x^1 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 9$, $a_{22} = p^2 x^2 = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 10$, $a_{23} = p^2 x^3 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 6$,

$a_{31} = p^3 x^1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$, $a_{32} = p^3 x^2 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$, $a_{33} = p^3 x^3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7$

и матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4^* & 4^* \\ 9^* & 10 & 6^* \\ 8 & 5^* & 7 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$a_{11} = p^1x^1 > p^1x^2 = a_{12} \Rightarrow x^1 \succ^* x^2,$

$a_{22} = p^2x^2 > p^2x^1 = a_{21} \Rightarrow x^2 \succ^* x^1,$

$a_{22} = p^2x^2 > p^2x^3 = a_{23} \Rightarrow x^2 \succ^* x^3,$

$a_{33} = p^3x^3 > p^3x^2 = a_{32} \Rightarrow x^3 \succ^* x^2.$

Таким образом, в рассматриваемом примере СлАВП не выполняется на двух парах потребительских наборов: на паре x^1 и x^2, а также на паре x^2 и x^3. Отсюда следует, что результаты наблюдений за выбором потребителя наборов x^1 и x^2 на рынке не отражают его поведения с устойчивыми предпочтениями, т.е. поведения, когда потребитель выбирает из того, что может себе позволить. Аналогичный вывод справедлив и для пары наборов x^2 и x^3.

На рис. 3.11 представлена геометрическая интерпретация результатов трех наблюдений примера 3.3.1: построены потребительские наборы x^1, x^2, x^3 в виде точек $x^1 = (2, 3)$, $x^2 = (3, 1)$ и $x^3 = (1, 3)$, а также бюджетные прямые $p^1x = M^1 (x_1 + x_2 = 5)$, $p^2x = M^2 (3x_1 + x_2 = 10)$ и $p^3x = M^3 (x_1 + 2x_2 = 7)$.

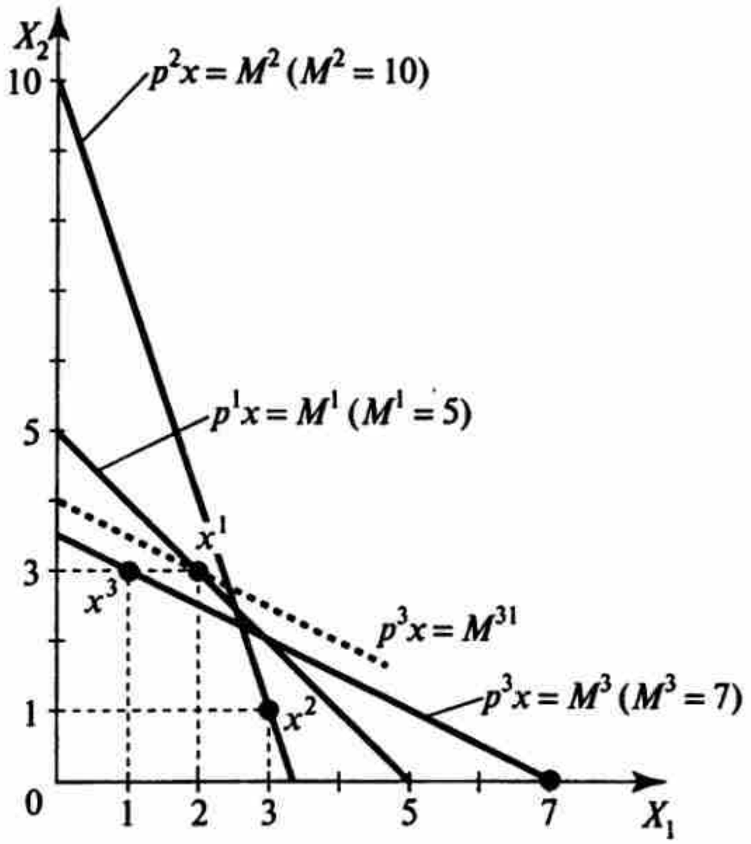


Рис. 3.11

Рисунок 3.11 показывает, что $p^1x^1 > p^1x^2$, т.е. $x^1 \succ^* x^2$, и $p^2x^2 > p^2x^1$, т.е. $x^2 \succ^* x^1$. Рисунок 3.11 геометрически подтверждает полученный ранее аналитический факт ($a_{11} > a_{12}$, $a_{22} > a_{21}$), что для наборов x^1 и x^2 СлАВП не выполняется.

Аналогично рис. 3.11 геометрически подтверждает полученный ранее аналитический факт ($a_{22} > a_{23}$, $a_{33} > a_{32}$), что для наборов x^2 и x^3 СлАВП не выполняется.

3.3.5. ***Сильная аксиома выявленных предпочтений*** **(СиАВП)** ***формулируется так***: если $x^1 \succ^* x^2, x^2 \succ^* x^3, \ldots, x^{k-1} \succ^* x^k$ и $x^1 \neq x^k$, то неверно, что $x^k \succ^* x^1$.

Другими словами, если $p^1x^1 \geq p^1x^2, p^2x^2 \geq p^2x^3, \ldots, p^{k-1}x^{k-1} \geq p^{k-1}x^k$, то $p^kx^k < p^kx^1$. СиАВП включает СлАВП (при $k \neq 2$).

Рисунок 3.11 иллюстрирует выполнение СиАВП (при $k = 3$), рис. 3.12 – ситуацию, когда СиАВП (при $k = 3$) не имеет места. На рис. 3.11 имеем $p^1x^1 > p^1x^2$, $p^2x^2 > p^2x^3$ и $p^3x^3 = M^3 < M^{31} = p^3x^1$. На рис. 3.12 имеем $p^1x^1 = p^1x^2$, $p^2x^2 = p^2x^3$ и $p^3x^3 = M^3 > M^{31} = p^3x^1$. Как уже отмечалось в примере 3.3.1, на рис. 3.11 видно, что для двух пар потребительских наборов x^1, x^2 и x^2, x^3 не имеет места СлАВП. На рис. 3.12 видно, что $p^2x^2 < p^2x^1$ и $p^3x^3 > p^3x^2$, т.е. для пары потребительских наборов x^1, x^2 имеет место СлАВП, а для пары потребительских наборов x_2 и x_3 СлАВП места не имеет.

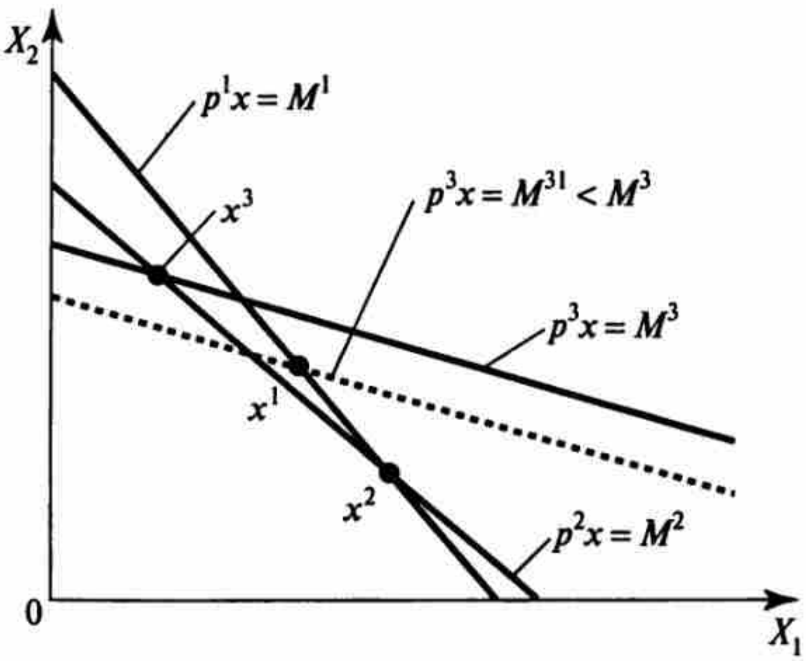


Рис. 3.12

Рисунок 3.13 иллюстрирует выполнение СиАВП и выполнение СлАВП для двух пар потребительских наборов: x^1, x^2 и x^2, x^3. Имеем $p^1x^1 = p^1x^2$, $p^2x^2 = p^2x^3$ и $p^3x^3 = M^3 < M^{31} = p^3x^1$, т.е. для потребительских наборов x^1, x^2, x^3 СиАВП выполняется.

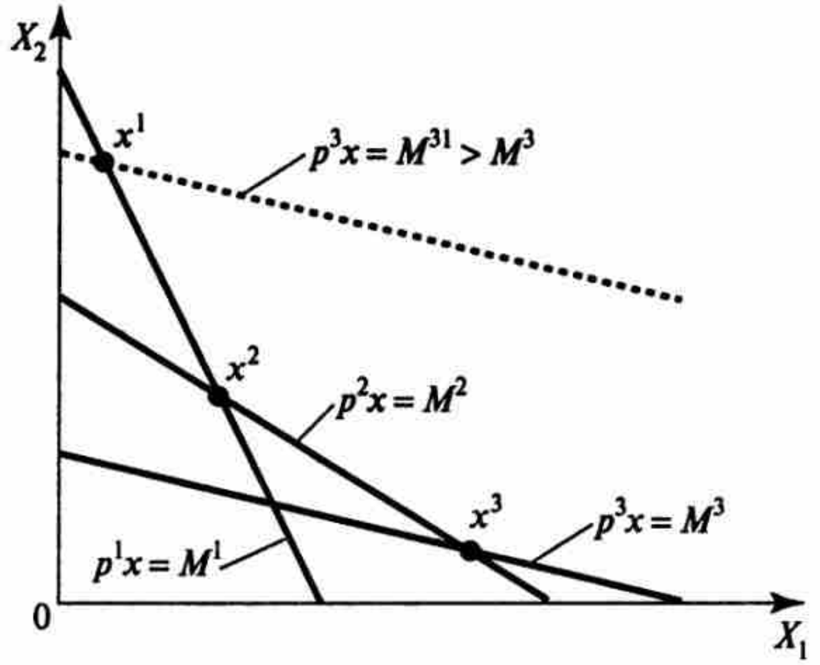


Рис. 3.13

Далее имеем $p^1x^1 = p^2x^2$ и $p^2x^2 < p^2x^1$, т.е. СлАВП для пары потребительских наборов x^1 и x^2 выполняется. Имеем также $p^2x^2 = p^2x^3$ и $p^3x^3 < p^3x^2$, т.е. для пары потребительских наборов x^2 и x^3 СлАВП выполняется.

Рисунок 3.14 иллюстрирует выполнение СлАВП для двух пар потребительских наборов – x^1, x^2 и x^2, x^3 и невыполнение СиАВП для потребительских наборов x^1, x^2, x^3. Имеем $p^1x^1 = p^1x^2$, $p^2x^2 > p^2x^3$ и $p^3x^3 > p^3x^1 = M^{31}$, т.е. СиАВП для потребительских наборов x^1, x^2, x^3 места не имеет. Далее $p^1x^1 = p^1x^2$ и $p^2x^2 < p^2x^1$, т.е. для пары потребительских наборов x^1, x^2 СлАВП выполняется. Для потребительских наборов x_2 и x_3 имеем $p^2x^2 > p^2x^3$ и $p^3x^3 < p^3x^2$, т.е. для них СлАВП выполняется.

Рисунок 3.15 иллюстрирует невыполнение СиАВП для потребительских наборов x^1, x^2, x^3 и невыполнение СлАВП для обеих пар потребительских наборов: x^1, x^2 и x^2, x^3. Имеем $p^1x^1 = p^1x^2$, $p^2x^2 = p^2x^3$, $p^3x^2 > p^3x^1$, $p^2x^2 > p^2x^1$, $p^3x^3 > p^3x^2$.

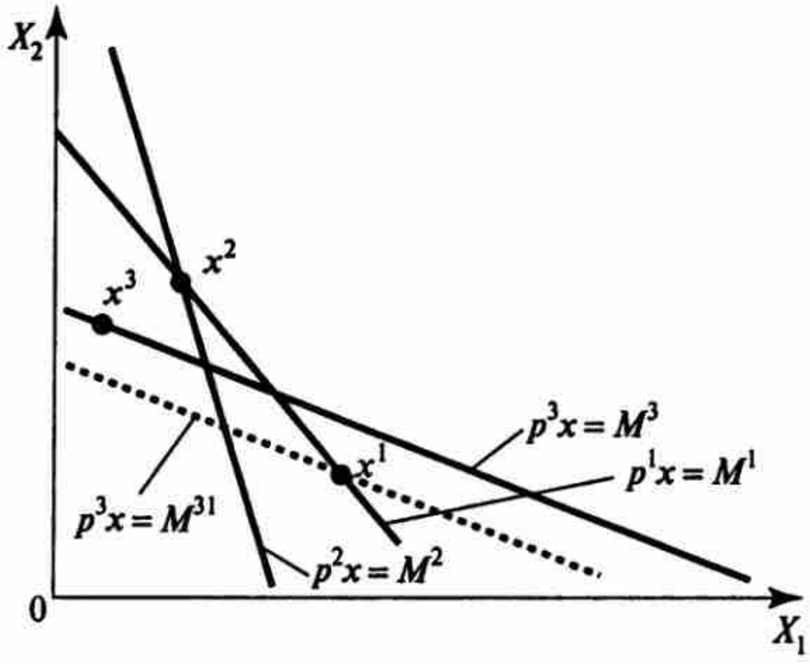


Рис. 3.14

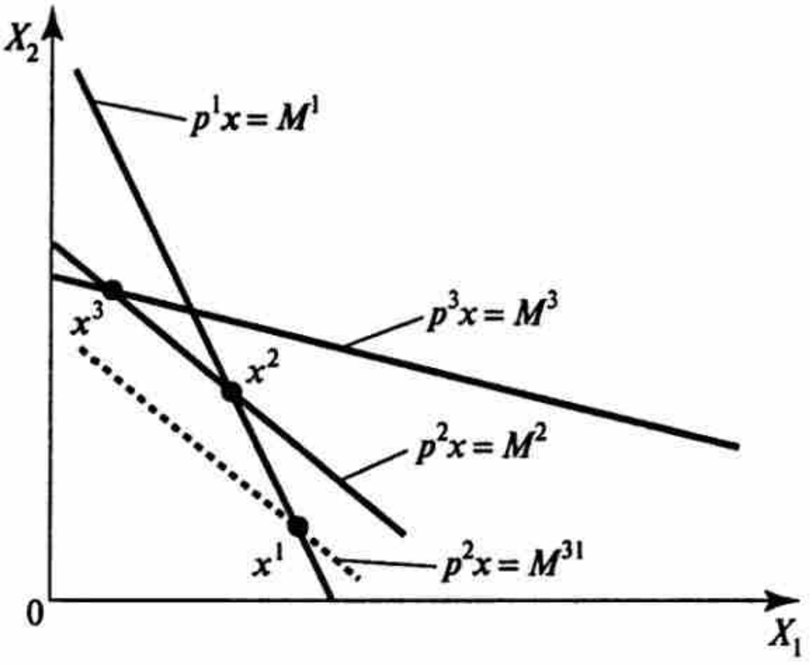


Рис. 3.15

Пример, приведенный на рис. 3.11, показывает, что формально СиАВП имеет место для полного набора векторов x^1, x^2, x^3, однако для поднаборов x^1, x^2 и x^2, x^3 она не имеет места. Если СиАВП не имеет места хотя бы для одного упорядоченного поднабора полного набора векторов x^1, x^2, …, x^k, считается, что СиАВП не имеет места и для полного набора векторов.

3.3.6. Поясним на примере, как с помощью матрицы A, которая построена по результатам наблюдений, определить, выполняется СиАВП для всей совокупности наблюдений или не выполняется.

Пример 3.3.2

Пусть матрица A имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 30 & 20^{*} & 40^{(*)} \\ 31 & 25 & 10^{*} \\ 10^{*} & 20 & 15 \end{pmatrix}.$$

В связи с тем что $a_{11}=p^1x^1=30>20=p^1x^2=a_{12}$, $x^1\succ^* x^2$. Поэтому элемент 20, расположенный в первой строке и втором столбце, является меченым, что показано символом *. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что мечеными являются также элементы 10 (вторая строка и третий столбец) и 10 (третья строка и первый столбец).

В примере 3.3.1 и до сих пор в этом примере 3.3.2 метились только те элементы матрицы A, которые были не больше элементов соответствующих строк, расположенных на главной диагонали матрицы A, что содержательно означало, что речь шла о прямых выявленных предпочтениях. Меченые элементы 20 (первая строка, второй столбец матрицы A) и 10 (вторая строка и третий столбец) означают, что первый набор x^1 косвенно выявленно предпочитается набору x^3, поэтому теперь следует пометить звездочкой (в скобках) элемент 40 (первая строка и третий столбец). Далее сопоставляются между собой любые меченые элементы, причем не важно, есть у звездочек скобки или их нет.

В рассматриваемом примере $x^1\succ^* x^2$ (20^*), $x^2\succ^* x^3$ (10^*), т.е. $x^1\succ^* x^3$ (40^*), а также $x^3\succ^* x^1$ (10^*).

Если бы для потребительских наборов x^1, x^2, x^3 была выполнена СиАВП, то мы должны были иметь отношения $x^1\succ^* x^2$, $x^2\succ^* x^3$ и отрицание отношения $x^3\succ^* x^1$. Однако, как только что мы видели, отношение $x^3\succ^* x^1$ в рассматриваемом примере выполняется, а это означает, что результаты наблюдений за поведением потребителя на рынке несовместимы с основными положениями экономической теории, т.е. мы здесь должны получить вывод, аналогичный выводу примера 3.3.1.

На основе построенной матрицы A прямые выявленные предпочтения одних потребительских наборов другим вычленяются непосредственно, т.е. непосредственно метятся звездочками элементы матрицы A. Вычленение косвенных выявленных предпочтений опирается на вычленение цепочек разной длины, что совсем не просто, если анализируются результаты большого числа наблюдений, т.е. если порядок матрицы A является достаточно большим. На этот счет существуют компьютерные программы, которые вычленяют цепочки, описывающие косвенные выявленные предпочтения на основе прямых выявленных предпочтений.

Если наблюдения за поведением потребителя на рынке осуществлялись на продолжительном временнóм промежутке, то, скорее всего, СиАВП не будет выполняться, ибо потребитель может перейти на другую шкалу предпочтений.

В связи с тем что цепочку, состоящую из k звеньев прямых выявленных предпочтений

$$x^1 \succ^* x^2, x^2 \succ^* x^3, \dots, x^{k-1} \succ^* x^k,$$

можно заменить на цепочку, состоящую из одного звена косвенных выявленных предпочтений

$$x^1 \succ^* x^k,$$

СиАВП можно перефразировать так: если $x^1 \succ^* x^k$ (прямо или косвенно), то неверно, что $x^k \succ^* x^1$.

3.3.7. Отметим, что до этого момента явно или неявно использовалась предпосылка о строгой выпуклости предпочтений потребителя, что означает в случае наличия линий безразличия их строгую выпуклость к точке О и, следовательно, касание бюджетной прямой только в одной точке.

Если отказаться от предпосылки о строгой выпуклости предпочтений потребителя, оставив предпосылку о выпуклости предпочтений потребителя, то от СиАВП можно перейти к *обобщенной аксиоме выявленных предпочтений* (*ОбАВП*), которая формулируется так: если $x^1 \succ^* x^k$ (прямо или косвенно) и $x^1 \neq x^k$, то неверно, что $x^k \succ^* x^1$.

Отношение $x^1 \succ^* x^k$ рассматривается при предпосылке о выпуклости предпочтений потребителя, а отношение $x^k \succ^* x^1$ – при предпосылке о строгой выпуклости предпочтений потребителя.

Имеет место теорема Эфриата.

Теорема Эфриата

Для того чтобы данные о потребительском поведении индивидуума соответствовали ОбАВП, необходимо и достаточно, чтобы в основе потребительского поведения лежали рациональные предпочтения.

Приведем формулировку ослабленной версии теоремы Эфриата:

Пусть потребительские предпочтения индивидуума строго выпуклы, тогда для того, чтобы данные о потребительском поведении индивидуума соответствовали СиАВП, необходимо, чтобы в основе потребительского поведения лежали рациональные предпочтения.

Доказательства этих двух теорем достаточно сложны и поэтому являются необязательными.

Обратная задача теории потребительского спроса и теоремы Эфриата подробно представлены в главе 5 монографии В.К. Горбунова (2004).

3.4. Связь между теорией выявленных предпочтений и индексами цен

3.4.1. Для анализа динамики благосостояния используются индексы цен и дохода, а также индексы объемов. В теории индексов принято сопоставлять величины двух периодов: текущего и базового (базисного). Величины, привязанные к базовому периоду, имеют индекс 0 (или *b*), величины, привязанные к текущему периоду, – индекс 1 (или *t*). Базовый и текущий периоды могут быть, а могут не быть соседними. Обычно в качестве периода берут один год.

Вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ представляет собой потребительский набор (потребительскую корзину), вектор $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – это вектор цен. Далее элементы теории индексов описываются для случая $n = 2$. Общий случай $n \geq 2$ по существу не отличается от случая $n = 2$.

Индекс (номинального) дохода определяется так:

$$I = \frac{p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1}{p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0}.$$

Он показывает, во сколько раз вырос (если $I > 1$) или снизился (если $I < 1$) номинальный доход потребителя в текущем периоде по сравнению с базовым периодом. Индекс номинального дохода сам по себе не может служить показателем динамики реального благосостояния потребителя, ибо номинальный доход может вырасти за счет, например, роста цен.

В индексе цен

$$I_p = \frac{p_1^1 x_1 + p_2^1 x_2}{p_1^0 x_1 + p_2^0 x_2}$$

цены меняются от базового периода к текущему периоду, а потребительский набор $x = (x_1, x_2)$ остается неизменным.

Если потребительский набор берется в базовом периоде, т.е. $x^0 = (x_1^0; x_2^0)$, то имеем *индекс цен Ласпейреса*

$$I_p^{(L)} = \frac{p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0}{p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0};$$

если потребительский набор берется в текущем периоде, т.е. $x^1 = (x_1^1; x_2^1)$, то имеем *индекс цен Пааше*

$$I_p^{(P)} = \frac{p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1}{p_1^0 x_1^1 + p_2^0 x_2^1}.$$

Индекс цен Ласпейреса показывает, во сколько раз выросла стоимость $p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0 = p^1 x^0$ потребительского набора x^0 базового периода в текущих ценах относительно стоимости $p^0 x^0$ этого же потребительского набора x^0 в базовых ценах p^0. Индекс цен Пааше показывает, во сколько раз выросла стоимость $p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 = p^1 x^1$ потребительского набора x^1 текущего периода в текущих ценах относительно стоимости $p^0 x^1$ этого потребительского набора x^1 в базовых ценах p^0. Индексы цен Ласпейреса и Пааше сами по себе не могут служить показателями динамики реального благосостояния, ибо они не привязаны к динамике дохода потребителя. Индексы цен Ласпейреса и Пааше характеризуют динамику цен. Однако оба индекса цен не дают верного представления об изменении цен, ибо не учитывают влияния этого изменения на структуру потребления. Например, если $p_1^1 > p_1^0$, то $x_1^1 < x_1^0$, и наоборот, если $p_1^1 < p_1^0$, то $x_1^1 > x_1^0$. Поэтому индекс цена Ласпейреса $I_p^{(L)}$, в котором в качестве весов фигурируют координаты (x_1^0, x_2^0) потребительского набора x^0, дает преувеличенное представление об изменении цен (от $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$ к $p_1 = (p_1^1, p_2^1)$) в случае их роста и преуменьшенное – в случае их снижения. Индекс цен Пааше $I_p^{(P)}$, в котором в качестве весов фигурируют координаты (x_1^1, x_2^1) потребительского набора x^1, дает преуменьшенное представление об изменении цен в случае их роста и преувеличенное – в случае их снижения.

В *индексе уровня жизни* (*индексе объемов*)

$$I_x = \frac{p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1}{p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0}$$

объемы x_1 и x_2 меняются от базового периода к текущему периоду, а цены p_1 и p_2 остаются неизменными.

Если используются цены $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$ базового периода, то имеем *индекс уровня жизни* (*индекс объемов*) *Ласпейреса*

$$I_x^{(L)} = \frac{p_1^0 x_1^1 + p_2^0 x_2^1}{p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0};$$

если используются цены $p^1 = (p_1^1, p_2^1)$ текущего периода, имеем *индекс уровня жизни* (*индекс объемов*) *Пааше*

$$I_x^{(P)} = \frac{p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1}{p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0}.$$

Индексы уровня жизни (индексы объемов) Ласпейреса и Пааше являются индексами реального дохода потребителя, ибо в этих индексах цены неизменные.

3.4.2. Используем теорию выявленных предпочтений и теорию индексов для оценки динамики благосостояния потребителя при переходе от базового периода к текущему. Если $I_x^{(L)} \le 1$, то $p_1^0 x_1^1 + p_2^0 x_2^1 \le p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0$, что означает, что $x^0 \succ^* x^1$, т.е. потребительский набор x^0 базового периода выявленно предпочитается потребительскому набору x^1 текущего периода, откуда следует, что в базовом периоде благосостояние потребителя лучше, чем в текущем периоде.

Таким образом, неравенство $I_x^{(L)} \le 1$ означает, что при переходе от базового периода к текущему благосостояние потребителя снизилось.

Если $I_x^{(L)} > 1$, то $p_1^0 x_1^1 + p_2^0 x_2^1 > p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0$. Это означает, что в базовом периоде текущий потребительский набор $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$ потребителю недоступен. В теории выявленных предпочтений сопоставляются только доступные потребителю пары наборов. Если среди пары наборов есть недоступный потребителю набор, то эти наборы не сопоставляются, ибо недоступный потребителю набор может быть для потребителя более или менее предпочтительным, чем доступный потребительский набор.

Следовательно, неравенство $I_x^{(L)} > 1$ не дает однозначного ответа о росте или снижении благосостояния при переходе от базового периода к текущему.

Если $I_x^{(P)} \geq 1$, то

$$p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 \geq p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0.$$

Это означает, что $x^1 \succ^* x^0$, т.е. потребительский набор x^1 текущего периода выявленно предпочитается потребительскому набору x^0 базового периода, откуда следует, что в текущем периоде благосостояние потребителя лучше, чем в базовом периоде.

Таким образом, неравенство $I_x^{(P)} \geq 1$ означает, что при переходе от базового периода к текущему благосостояние потребителя выросло.

Если $I_x^{(P)} < 1$, то $p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 < p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0$.

Этот случай аналогичен случаю $I_x^{(L)} > 1$. Здесь нет однозначного ответа о росте или снижении благосостояния потребителя при переходе от базового периода к текущему периоду.

3.4.3. Сопоставим между собой индексы (номинального) дохода и индексы цен Ласпейреса и Пааше.

Если $I \geq I_p^{(L)}$, то $\dfrac{p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1}{p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0} \geq \dfrac{p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0}{p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0}.$

После сокращения на общий знаменатель получаем, что $p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 \geq p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0$. Этот случай уже разобран выше (см. $I_x^{(P)} \geq 1$). Здесь мы имеем $x^1 \succ^* x^0$, т.е. при переходе от базового периода к текущему благосостояние потребителя выросло.

Случай $I < I_p^{(L)}$ сводится к случаю $I_x^{(P)} < 1$, так что здесь нет однозначного ответа о росте или снижении благосостояния потребителя при переходе от базового периода к текущему.

Случаи $I \leq I_p^{(P)}$ и $I > I_p^{(P)}$ вполне аналогичны случаям $I_x^{(L)} \leq 1$ и $I_x^{(L)} > 1$. В случае $I \leq I_p^{(P)}$ благосостояние потребителя в базовом периоде лучше, чем в текущем периоде. В случае $I > I_p^{(P)}$ нет однозначного ответа о росте или снижении благосостояния при переходе от базового периода к текущему.

На практике индексы цен и дохода формируются для страны в целом или для отдельных регионов, поэтому в качестве потребителя должен фигурировать средний потребитель страны или отдельного региона. Потребительский набор среднего потребителя есть потребительская корзина всего населения страны или отдельного региона, поделенная на численность населения страны или отдельного региона.

Вопросы для самоконтроля к главе 3

1. Сформулируйте основные предпосылки теории выявленных предпочтений.
2. Сформулируйте определение выявленного предпочтения (прямого и косвенного).
3. В чем отличие теории выявленных предпочтений от трех других теорий потребительского предпочтения (теории количественной полезности, теории порядковой полезности, теории отношения предпочтения-безразличия)?
4. Что следует понимать под результатом наблюдения за поведением потребителя на рынке?
5. Что представляет собой качественная характеристика линии безразличия с точки зрения теории выявленных предпочтений?
6. Приведите формулировку слабой аксиомы выявленных предпочтений (СлАВП) и ее экономическую и геометрическую интерпретации.
7. Опишите ситуацию, когда СлАВП не имеет места, а также экономическую и геометрическую интерпретации этой ситуации.
8. В чем суть проверки поведения потребителя на рынке на соответствие СлАВП?
9. Приведите формулировку сильной аксиомы выявленных предпочтений (СиАВП) и ее экономическую и геометрическую интерпретации.
10. Опишите ситуацию, когда СиАВП не имеет места, а также экономическую и геометрическую интерпретации.
11. В чем суть проверки поведения потребителя на рынке на соответствие СиАВП?
12. Приведите вторую формулировку сильной аксиомы выявленных предпочтений.
13. Приведите формулировку обобщенной аксиомы выявленных предпочтений.
14. Приведите формулировку теоремы Эфриата и формулировку ее ослабленной версии.
15. Выпишите выражение индекса дохода и дайте ему экономическое толкование.
16. Выпишите выражение индекса цен Ласпейреса и дайте ему экономическое толкование.

17. Выпишите выражение индекса цен Пааше и дайте ему экономическое толкование.
18. Выпишите выражение индекса объемов Ласпейреса и дайте ему экономическое толкование.
19. Выпишите выражение индекса уровня жизни (индекса объемов Пааше) и дайте ему экономическое толкование.
20. Опишите связь теории индексов цен, уровня жизни (объемов) и теории выявленных предпочтений.
21. Опишите связь теории индексов цен и дохода и теории выявленных предпочтений.

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 3

1. Приведите геометрический пример ситуации ($n = 2$), когда цена на первый продукт растет ($p_1^2 > p_1^1, p_2^2 = p_2^1$) и имеет место СлАВП.
2. Приведите геометрический пример ситуации ($n = 2$), когда цены на первый продукт растут ($p_1^3 > p_1^2 > p_1^1, p_2^3 = p_2^2 = p_2^1$) и имеет место СиАВП.
3. Результаты трех наблюдений за поведением потребителя на рынке представлены в табл. 3.4 (все числа условные):

Таблица 3.4

Номер наблюдения	Цены		Выбираемые потребительские наборы	
	p_1	p_2	x_1	x_2
1	2	2	3	4
2	4	1	4	2
3	1	3	2	4

а) постройте матрицу A;
б) проверьте выполнение СлАВП на двух парах потребительских наборов x^1 и x^2, а также x^2 и x^3;
в) проверьте выполнение СиАВП на полном наборе x^1, x^2, x^3;
г) дайте геометрическую интерпретацию результатам трех наблюдений;
д) сопоставьте результаты аналитической и геометрической проверок выполнения СлАВП и СиАВП.

4. Постройте три потребительских набора x^1, x^2 и x^3, такие, что СлАВП для наборов x^1, x^2 не имеет места, СлАВП для наборов x^2, x^3 имеет место, СиАВП для всей совокупности потребительских наборов x^1, x^2, x^3 имеет место (не имеет места).

5. Потребитель расходует весь свой доход на приобретение трех продуктов: G_1, G_2, G_3. В таблице содержатся данные о ценах и объемах потребления каждого продукта в периодах 1, 2, 3.

Период	Объемы продуктов			Цены		
	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2	p_3
1	5	6	7	10	25	30
2	6	5	6	20	50	70
3	6	5	7	30	80	90

Оцените изменения благосостояния потребителя:
а) в период 2 по сравнению с периодом 1;
б) в период 3 по сравнению с периодом 2;
в) в период 3 по сравнению с периодом 1.
Ответы обоснуйте.

6. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^{1/3} \cdot x_2^{2/3}$, где x_1 и x_2 – количества потребляемых продуктов. В базовом периоде потребитель, располагающий доходом $M^0 = 32$ денежных единицы, приобрел $x_2^0 = 10$ при $p_1^0 = 1$. В текущем периоде номинальный доход вырос до $M^1 = 94$ денежных единицы, $x_2^1 = x_2^0 = 10$, $p_1^1 = 2$. Вычислите индекс цен Ласпейреса.

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 3

1. Приведите геометрический пример ситуации ($n = 2$), когда цена на первый продукт растет ($p_1^2 > p_1^1$, $p_2^2 = p_2^1$) и СлАВП не имеет места.
2. Приведите геометрический пример ситуации ($n = 2$), когда цены на первый продукт растут ($p_1^3 > p_1^2 > p_1^1$, $p_2^3 = p_2^2 = p_2^1$) и СлАВП не имеет места.
3. Потребитель расходует весь свой доход на приобретение трех продуктов: G_1, G_2, G_3. В таблице содержатся данные о ценах и объемах потребления каждого продукта в периодах 1, 2, 3.

Период	Объемы продуктов			Цены		
	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2	p_3
1	5	6	7	12	5	15
2	6	7	8	28	15	40
3	8	9	6	25	12	35

Оцените изменения благосостояния потребителя:

а) в период 2 по сравнению с периодом 1;

б) в период 3 по сравнению с периодом 2;

в) в период 3 по сравнению с периодом 1.

Ответы обоснуйте.

4. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^{1/3} \cdot x_2^{2/3}$, где x_1 и x_2 – количества потребляемых продуктов. В базовом периоде потребитель, располагающий доходом $M^0 = 64$ денежных единицы, приобрел $x_2^0 = 20$ при $p_1^0 = 1$. В текущем периоде номинальный доход вырос до $M^1 = 136$ денежных единиц, $x_1^1 = 2$, $x_2^1 = 22$. Вычислите индекс объемов Пааше.

Глава 4

УЧЕТ СВОЙСТВ ПРОДУКТОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ (ТЕОРИЯ ТЕХНОЛОГИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ)

4.1. Продукты и их свойства. Предпосылки о квантифицируемости, аддитивности и однородности свойств

4.1.1. Потребитель выбирает потребительский набор $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ для удовлетворения своих потребительских амбиций. Однако часто потребителя интересуют не столько сами продукты (товары), сколько их свойства (их характеристики), носителями которых являются эти товары. Например, потребитель приобретает телевизор не столько для мебели (хотя и не без этого), сколько для того, чтобы с его помощью получать видео- и аудиоинформацию. Здесь телевизор – это продукт (товар), а информация и мебель – его свойства (его характеристики).

Покупая билет на самолет, потребитель арендует это транспортное средство (наряду с другими пассажирами) для того, чтобы преодолеть определенное расстояние. Здесь самолет – продукт (товар), а преодоление расстояния между городами – свойство (характеристика) данного (и других) транспортного средства.

Свойства (характеристики) продуктов (товаров) более консервативны во времени, чем сами продукты (товары). Информацию в разные эпохи передавали с использованием костров, голубей, радиоприемников, телевизоров. Перемещение в пространстве осуществлялось с помощью лошадей, автомобилей, самолетов и т.п.

Таким образом, естественно рассматривать не только потребительские наборы, но и наборы их свойств (характеристик). Для того чтобы рассматривать наборы свойств, необходимо эти свойства квантифицировать, т.е выявлять. Если свойство (характеристика) не выявляется, оно (она) для моделирования не существует. Таким образом, свойства (характеристики) предметов должны удовлетворять следующим предпосылкам.

1. Свойства (характеристики) квантифицируются, т.е. они выявлены и могут быть описаны не только качественно, но и количественно. Например, в одной единице продукта G_1 содержится α_{11} единиц свойства A_1, α_{21} единиц свойства A_2, …, α_{m1} свойства A_m.

2. Имеет место однородность: если одна единица продукта G_j содержит α_{ij} единиц свойства A_i, то x_j единицы продукта G_j содержат $\alpha_{ij}x_j$ единиц свойства A_i.

3. Имеет место аддитивность: если x_j единиц продукта G_j содержат $\alpha_{ij}x_j$ единиц свойства A_i, а x_k единиц продукта G_k содержат $\alpha_{ik}x_k$ единиц свойства A_i, то x_i единиц продукта G_j и x_k единиц продукта G_k содержат $\alpha_{ij}x_j + \alpha_{ik}x_k$ единиц свойства A_i.

4.1.2. На основании приведенных предпосылок получаем *модель технологии потребления*

$$a_1 = \alpha_{11}x_1 + \quad + \alpha_{1n}x_n, \tag{4.1.1}$$

....

$$a_m = \alpha_{m1}x_1 + \quad + \alpha_{mn}x_n, \tag{4.1.m}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – потребительский набор, а a_1 – количество свойства A_1 в потребительском наборе x; … a_m – количество свойства A_m в потребительском наборе x. По экономическому смыслу все коэффициенты $\alpha_{ij} \geq 0$, все $x_j \geq 0$, все $a_j \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. На основании предпосылок 2 и 3 модель технологии потребления является *линейной.*

Аналогом модели технологии потребления является известная задача о диете, в которой речь идет о потребительском наборе $x = (x_1, \dots, x_n)$ из продуктов $G_1, \dots, G_n$, которые содержат m питательных веществ $A_1, \dots, A_m$. Требуется найти такую диету, которая обеспечивала бы нормы $a_1, \dots, a_m$ питательных веществ $A_1, \dots, A_m$ и которая была бы самой дешевой:

$$\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n \to (\min),$$

$$\alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1n} x_n \geq a_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{m1} x_1 + \ldots + \alpha_{mn} x_n \geq a_m,$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0,$$

где γ_j – цены одной единицы продукта G_j, $j = 1, \ldots, n$;

α_{ij} – количество питательного вещества A_i в одной единице продукта G_j, $i = 1, \ldots, n$.

В задаче о диете питательные вещества являются аналогами свойств в модели технологии потребления.

4.2. Пространство продуктов и их свойств. Свойства продуктов как объект потребительского выбора

4.2.1. Пространство продуктов (потребительских наборов) – это неотрицательный ортант $E_n^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$ n-мерного пространства E_n. Пространство свойств – это неотрицательный ортант $E_m^+ = \{(a_1, \ldots, a_m) \mid a_1 \geq 0, \ldots, a_m \geq 0\}$ m-мерного пространства E_m.

Выражения (4.1.1)–(4.1.m) переводят неотрицательный ортант E_n^+ в конус C, расположенный в неотрицательном ортанте E_m^+. Например, ось $\mathrm{O}x_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \geq 0, x_2 = \ldots = x_n = 0\}$ переходит в луч $\mathrm{O}L_1 = \{(a_1, \ldots, a_m) \mid a_1 = \alpha_{11} x_1, \ldots, a_m = \alpha_{m1} x_1, x_1 \geq 0\}$ неотрицательного ортанта E_m^+, а ось $\mathrm{O}x_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0, x_n \geq 0\}$ – в луч $\mathrm{O}L_n = \{(a_1, \ldots, a_m) \mid a_1 = \alpha_{1n} x_n, \ldots, a_m = \alpha_{mn} x_n, x_n \geq 0\}$. Точка $B_1 = (M/p_1, 0, \ldots, 0)$ бюджетной плоскости $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = M$ переходит в точку $Q_1 = (\alpha_{11} M/p_1, \ldots, \alpha_{m1} M/p_1)$ луча $\mathrm{O}L_1$, ..., точка $B_n = (M/p_n, 0, \ldots, 0)$ переходит в точку $Q_n = (\alpha_{1n} M/p_n, \ldots, \alpha_{mn} M/p_n)$ луча $\mathrm{O}L_n$. Поскольку модель технологии потребления (4.1.1)–(4.1.m) с математической точки зрения есть линейное отображение неотрицательного ортанта E_n^+ в неотрицательный ортант, постольку образом бюджетной плоскости $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = M$ ($x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$) является выпуклая комбинация точек $B_1, \ldots, B_n$ в неотрицательном ортанте E_m^+. Проиллюстрируем переход из пространства продуктов в пространство свойств на примере 4.2.1.

Пример 4.2.1

Цена p_1 одной единицы продукта G_1 равна $p_1 = 4$, цена $p_2 = 3$, цена $p_3 = 7$, доход потребителя равен $M = 12$. В одной единице продукта G_1 имеется 0,4 единицы свойства A_1 и 0,3 единицы свойства A_2, т.е. $\alpha_{11} = 0{,}4$; $\alpha_{21} = 0{,}3$; в одной единице продукта G_2 имеется 0,6 единицы свойства A_1 и 0,8 единицы свойства A_2, т.е. $\alpha_{12} = 0{,}6$; $\alpha_{22} = 0{,}8$; в одной единице продукта G_3 имеется 0,7 единицы свойства A_1 и 0,7 единицы свойства A_2, т.е. $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0{,}7$.

Координаты точек B_1, B_2, B_3 в пространстве продуктов соответственно равны $B_1 = (M/p_1;\ 0;\ 0) = (3;\ 0;\ 0)$, $B_2 = (0;\ M/p_2;\ 0) = (0;\ 4;\ 0)$, $B_3 = (0;\ 0;\ M/p_3) = (0;\ 0;\ ^{12}/_7)$ (рис. 4.1, на котором бюджетная плоскость $4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 12$ изображается треугольником $B_1B_2B_3$).

Модель технологии потребления (4.1.1)–(4.1.m) в этом примере имеет вид ($n = 3$, $m = 2$)

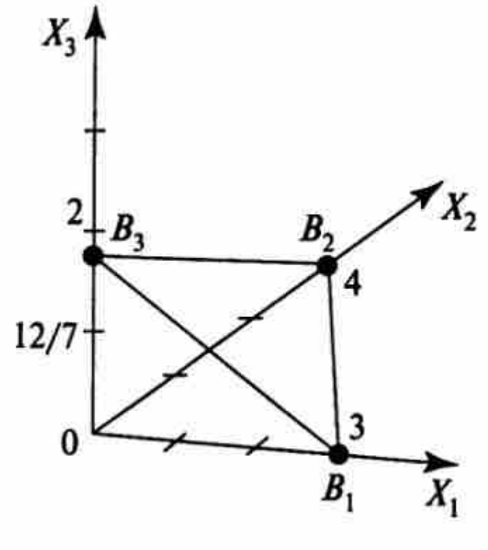


Рис. 4.1

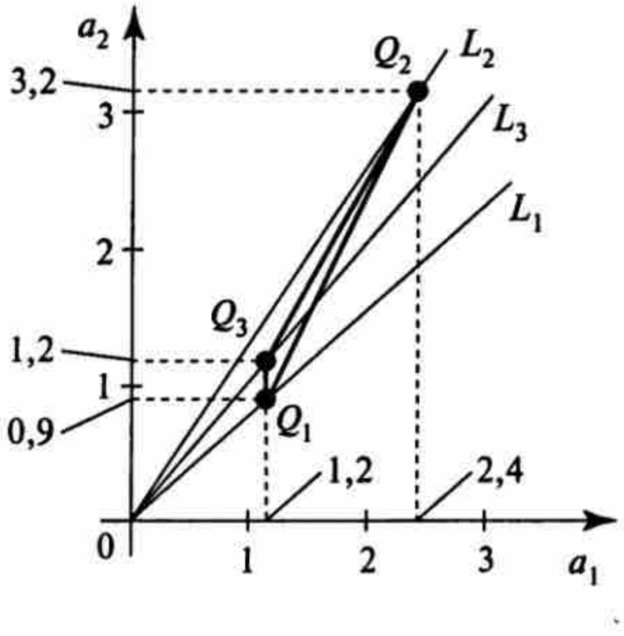


Рис. 4.2

$$a_1 = 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}7x_3,$$

$$a_2 = 0{,}3x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}7x_3.$$

Образом точки $B_1 = (3;\ 0;\ 0)$ является точка $Q_1 = (\alpha_{11}M/p_1,\ \alpha_{21}M/p_1) = (0{,}4 \cdot 3;\ 0{,}3 \cdot 3) = (1{,}2;\ 0{,}9)$, образом точки $B_2 = (0;\ 4;\ 0)$ – точка $Q_2 = (\alpha_{12}M/p_2,\ \alpha_{22}M/p_2) = (0{,}6 \cdot 4;\ 0{,}8 \cdot 4) = (2{,}4;\ 3{,}2)$, образом точки $B_3 = (0;\ 0;\ ^{12}/_7)$ является точка $Q_3 = (\alpha_{13}M/p_3,\ \alpha_{23}M/p_3) =$

$= (0{,}7 \cdot {}^{12}/_7; 0{,}7 \cdot {}^{12}/_7) = (1{,}2; 1{,}2)$ (рис. 4.2, на котором также показаны лучи OL_1, OL_2, OL_3, которые являются образами в пространстве свойств осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 пространства продуктов). Образом бюджетной плоскости $B_1B_2B_3$ в пространстве продуктов является треугольник $Q_1Q_2Q_3$ в пространстве свойств.

Образом бюджетного множества $4x_1 + 3x_2 + 7x_3 \le 12$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$ (множества $OB_1B_2B_3$ – см. рис. 4.1) в пространстве продуктов является выпуклая оболочка точек O, Q_1, Q_2, Q_3 (см. рис. 4.2).

4.2.2. По аналогии с задачей рационального поведения потребителя на рынке

$$U(x_1, \dots, x_n) \to \max \tag{4.2.1}$$

при наличии ограничения

$$p_1x_1 + \dots + p_nx_n \le M, \tag{4.2.2}$$

$$x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \tag{4.2.3}$$

ставится задача выбора оптимальной комбинации свойств $(a_1, \dots, a_m)$ в следующей постановке:

$$W(a_1, \dots, a_m) \to \max \tag{4.2.4}$$

при наличии ограничений (4.1.1)–(4.1.m), а также ограничений (4.2.2) и (4.2.3). Задача выбора оптимальной комбинации свойств сводится к следующей задаче рационального поведения потребителя на рынке (4.2.1)–(4.2.3), в которой

$$\begin{gathered} U(x_1, \dots, x_n) = \\ = W(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + \dots + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n). \end{gathered} \tag{4.2.5}$$

Решив задачу (4.2.1)–(4.2.3), в которой целевая функция $U(x_1, \dots, x_n)$ имеет представление (4.2.5), получим набор $\hat{x} = (\hat{x}, \dots, \hat{x}_n)$, который выбирает потребитель, и по формулам (4.1.1)–(4.1.m) найдем оптимальную комбинацию $(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m)$ свойств.

4.3. Неявные цены свойств и уравнения для их определения

4.3.1. Каждый продукт $G_1, \dots, G_n$ имеет свою цену $p_1, \dots, p_n$. У свойств $A_1, \dots, A_m$ цен нет. Можно поставить вопрос об определении неявных цен $v_1, \dots, v_m$ свойств, которые были бы аналогичны ценам $p_1, \dots, p_m$.

Неявные цены $v_1, \ldots, v_m$ свойств $A_1, \ldots, A_m$ можно определить, используя следующие соображения.

Если $a = (a_1, \ldots, a_m)$, набор свойств потребительского набора $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то естественным должно быть равенство

$$v_1 a_1 + \ldots + v_m a_m = M = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n, \qquad (4.3.1)$$

т.е. общая «стоимость» набора свойств $a = (a_1, \ldots, a_m)$ в неявных ценах $v_1, \ldots, v_m$ должна равняться общей стоимости потребительского набора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в ценах $p_1, \ldots, p_n$, т.е. числу M.

Одна единица первого продукта G_1 имеет представление в виде вектора $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{m1})$, координаты которого равны количествам свойств $(A_1, \ldots, A_m)$, содержащимся в этой единице продукта G_1. Поскольку единица продукта покупается ради приобретения количеств составляющих ее свойств, то естественным должно быть равенство

$$p_1 = v_1 \alpha_{11} + \ldots + v_m \alpha_{m1}. \qquad (4.3.2)$$

Аналогично выписываются равенства

$$\begin{array}{l} p_2 = v_1 \alpha_{12} + \ldots + v_m \alpha_{m2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = v_1 \alpha_{1n} + \ldots + v_m \alpha_{mn}. \end{array} \qquad (4.3.3)$$

Система уравнений (4.3.1), (4.3.2), (4.3.3) для определения неявных цен $v_1, \ldots, v_m$ свойств $A_1, \ldots, A_m$ выписывается как *двойственная* (*сопряженная*) система к системе уравнений

$$\begin{array}{c|l} v_1 & a_1 = \alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1n} x_n, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_m & a_m = \alpha_{m1} x_1 + \ldots + \alpha_{mn} x_n, \\ & M = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \end{array}$$

аналогично тому, как выписывается двойственная (сопряженная) задача к задаче линейного программирования.

Вообще говоря, для системы (4.3.2), (4.3.3) линейных алгебраических уравнений возможны три варианта ее разрешимости: существование единственного решения, существование бесконечного множества решений, полное отсутствие решений. С экономической точки зрения представляет интерес первый вариант, из которого следует наличие единственной системы неявных цен свойств. В случае выполнения третьего варианта система неявных цен свойств не существует. Этот вариант возможен, если цены $p_1, \ldots, p_n$ на продукты не соответствуют распределению свойств по продуктам.

4.3.2. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 4.3.1

Модель технологии потребления имеет вид

$$\begin{array}{c|l} v_1 & a_1 = 0{,}3x_1 + 0{,}3x_2, \end{array} \tag{4.3.4}$$

$$\begin{array}{c|l} v_2 & a_2 = 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2, \end{array} \tag{4.3.5}$$

цены на продукты G_1 и G_2 соответственно равны $p_1 = 12$, $p_2 = 24$, доход потребителя равен $M = 720$. В рассматриваемом примере система уравнений (4.3.2), (4.3.3) имеет вид

$$0{,}3v_1 + 0{,}4v_2 = 12,$$

$$0{,}3v_1 + 0{,}4v_2 = 24.$$

Ее несовместность очевидна.

Отображение (4.3.4), (4.3.5) переводит бюджетную прямую B_1B_2 пространства продуктов (рис. 4.3) в отрезок Q_1Q_2 пространства свойств (рис. 4.4):

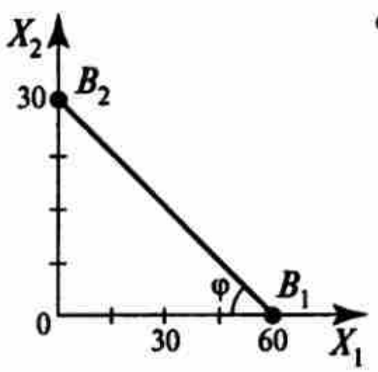


Рис. 4.3

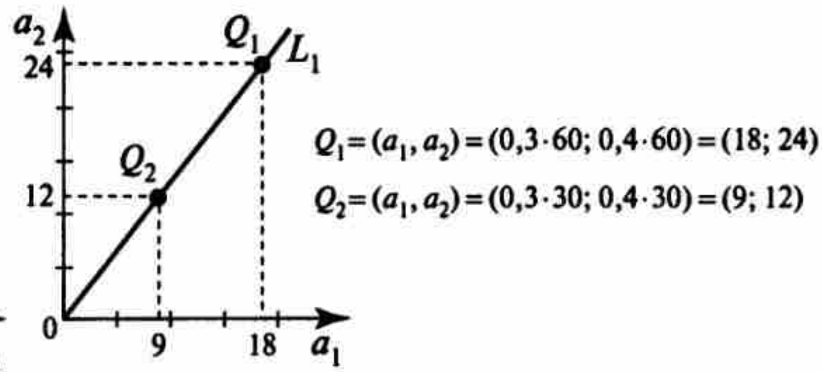


Рис. 4.4

В отличие от цен $p_1, \ldots, p_n$ на продукты $G_1, \ldots, G_n$, которые всегда положительны, неявные цены $v_1, \ldots, v_m$ свойств $A_1, \ldots, A_m$ могут быть и отрицательными. Отрицательная цена v_i свойства A_i свидетельствует о том, что свойство является нежелательным для потребителя (например, наличие никотина в сигарете).

Таким образом, неявные цены свойств (если они существуют) выступают в качестве индикаторов полезности свойств.

Пример 4.3.2

Модель технологии потребления имеет вид

$$v_1 \left| \, a_1 = 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2, \right. \qquad (4.3.6)$$
$$v_2 \left| \, a_2 = 0{,}3x_1 + 0{,}5x_2, \right. \qquad (4.3.7)$$

цены на продукты G_1 и G_2 соответственно равны $p_1 = 4$, $p_2 = 3$, доход потребителя равен $M = 12$. В рассматриваемом примере система уравнений (4.3.2), (4.3.3) для определения неявных цен v_1, v_2 свойств A_1 и A_2 имеет вид

$$0{,}4v_1 + 0{,}3v_2 = 4,$$
$$0{,}6v_1 + 0{,}5v_2 = 3.$$

Непосредственно проверяется, что единственное решение $v^0 = (v_1^0;\ v_2^0)$ этой системы имеет вид $v^0 = (55;\ -60)$.

Отображение переводит бюджетную прямую B_1B_2 пространства продуктов (рис. 4.5) в отрезок Q_1Q_2 пространства свойств (рис. 4.6).

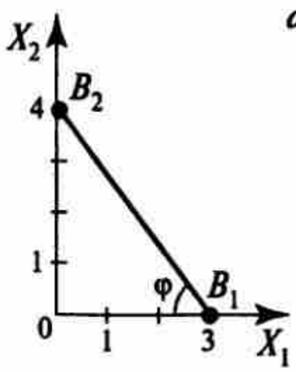
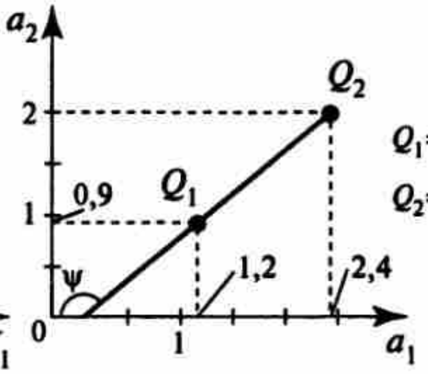


Рис. 4.5



$Q_1 = (a_1, a_2) = (0{,}4 \cdot 3;\ 0{,}3 \cdot 3) = (1{,}2;\ 0{,}9);$

$Q_2 = (a_1, a_2) = (0{,}6 \cdot 4;\ 0{,}5 \cdot 4) = (2{,}4;\ 2)$

Рис. 4.6

При $n = 2$ и $m = 2$ в примере 4.3.3 проиллюстрируем еще одну характеристику неявных цен признаков.

Пример 4.3.3

Продукты G_1 и G_2 имеют цены $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, доход $M = 12$, модель технологии потребления имеет вид

$$v_1 \left| \, a_1 = 0{,}3x_1 + 0{,}5x_2, \right. \qquad (4.3.8)$$
$$v_2 \left| \, a_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2. \right. \qquad (4.3.9)$$

В рассматриваемом примере система уравнений (4.3.2), (4.3.3) имеет вид

$$0{,}3v_1 + 0{,}5v_2 = 3,$$
$$0{,}5v_1 + 0{,}2v_2 = 4.$$

Непосредственно проверяется, что единственное решение $v^0 = (v_1^0; v_2^0)$ этой системы имеет вид $v_0 = ({}^{140}/_{19}; {}^{30}/_{19})$.

Отображение переводит бюджетную прямую B_1B_2 пространства продуктов (рис. 4.7) в отрезок Q_1Q_2 пространства свойств (рис. 4.8):

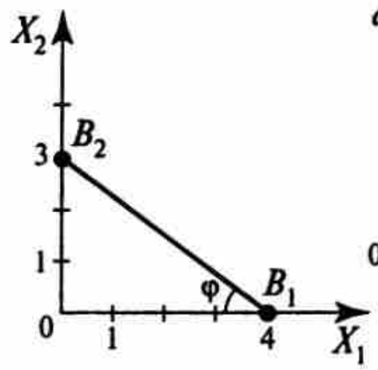
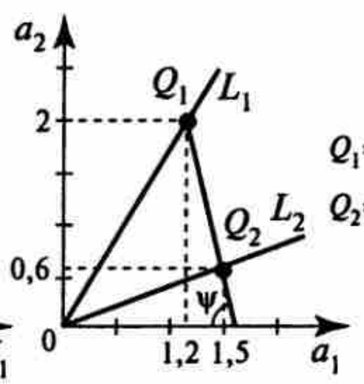


Рис. 4.7



$Q_1 = (a_1, a_2) = (0{,}3 \cdot 4;\ 0{,}5 \cdot 4) = (1{,}2;\ 2)$

$Q_2 = (a_1, a_2) = (0{,}5 \cdot 3;\ 0{,}2 \cdot 3) = (1{,}5;\ 0{,}6)$

Рис. 4.8

Очевидно,

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{3}{4} = \frac{\dfrac{M}{p_2}}{\dfrac{M}{p_1}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Имеем

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{2-0{,}6}{1{,}5-1{,}2} = \frac{1{,}4}{0{,}3} = \frac{14}{3} = \frac{v_1^0}{v_2^0}.$$

Формула $\mathrm{tg}\,\psi = \dfrac{v_1}{v_2}$ имеет место в общем случае, если неявные цены $(v_1^0; v_2^0)$ свойств существует. В частности, в примере 4.3.2

$$\mathrm{tg}\,\psi = -\frac{2-0{,}9}{2{,}4-1{,}2} = -\frac{1{,}1}{1{,}2} = \frac{55}{-60} = \frac{v_1^0}{v_2^0}.$$

Равенство $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{v_1^0}{v_2^0}$ свидетельствует о том, что неявные цены действительно похожи на рыночные цены продуктов (товаров).

4.4. Оценка рыночной перспективы нового продукта

4.4.1. Неявные цены свойств (если они существуют) могут использоваться для оценки рыночной перспективы нового продукта. Проиллюстрируем это использование для случая $n = m = 2$.

Пусть модель технологии потребления имеет вид

$$a_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2,$$

$$a_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2.$$

Цены продуктов G_1 и G_2 соответственно равны p_1 и p_2,доход потребителя равен M. Пусть появляется продукт G_3, в одной единице которого содержится свойство A_1 в количестве α_{13} единиц, а свойство A_2 – в количестве α_{23} единиц. Рыночная цена единицы продукта G_3 предполагается равной p_3.

Требуется оценить рыночную перспективу продукта G_3.

С появлением продукта G_3 модель технологии потребления приобретает вид

$$\begin{array}{c|l} v_1 & a_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\ v_2 & a_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \end{array}$$

а бюджетное ограничение $M = p_1x_1 + p_2x_2$ преобразуется в выражение $M = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$.

С появлением нового продукта G_3 новые свойства не появляются. Для определения неявных цен свойств выписываем систему линейных алгебраических уравнений

$$v_1\alpha_{11} + v_2\alpha_{21} = p_1,$$

$$v_1\alpha_{12} + v_2\alpha_{22} = p_2,$$

$$v_1\alpha_{13} + v_2\alpha_{23} = p_3.$$

Если система из первых двух уравнений имеет решение $v^0 = (v_1^0; v_2^0)$, то полагаем $p_3^0 = v_1^0\alpha_{13} + v_2^0\alpha_{23}$. Если $p_3 > p_3^0$, то продукт G_3 не имеет рыночной перспективы, ибо его цена p_3 слишком высока. Если $p_3 \le p_3^0$, то продукт G_3 имеет рыночную перспективу.

Таким образом, неявные цены свойств позволяют оценить пороговую величину p_3^0 цены продукта G_3.

4.4.2. Пример 4.4.1

Пусть новый продукт G_3 имеет цену $p_3 = 7$ и в одной единице продукта G_3 содержится $\alpha_{13} = 0{,}8$ единицы свойства A_1 и $\alpha_{23} = 0{,}6$ единицы свойства A_2. Оценим рыночную перспективу продукта G_3.

В примере 4.3.2 были найдены неявные цены $v_1^0 = 55$; $v_2^0 = -60$ свойств A_1 и A_2. Найдем пороговую величину

$$p_3^0 = \alpha_{13}v_1^0 + \alpha_{23}v_2^0 = 0{,}8 \cdot 55 - 0{,}6 \cdot 60 = 44 - 36 = 8 > 7 = p_3;$$

из последней цепочки следует, что продукт G_3 имеет рыночную перспективу. Если бы $p_3 = 9$, то тогда продукт G_3 не имел бы рыночной перспективы.

Вопросы для самоконтроля к главе 4

1. Как формулируются предпосылки модели технологии потребления?
2. Представьте модель технологии потребления в аналитической форме. Дайте геометрическую интерпретацию пространства продуктов и пространства свойств.
3. В чем сходство и различие модели технологии потребления и задачи о диете?
4. Как взаимосвязываются продукты, их свойства и фактор времени?
5. Что такое неявная цена свойства (продукта)? Как определяются новые цены свойств продуктов?
6. В чем сходство и различие рыночных цен на продукты (товары) и неявных цен признаков?
7. Как выразить доход потребителя, используя неявные цены свойств?
8. Как используются неявные цены для оценки рыночной перспективы новых продуктов?
9. Какими полезными качествами обладают неявные цены свойств?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 4

1. Цена p_1 одной единицы продукта G_1 равна $p_1 = 10$, цена p_2 одной единицы продукта G_3 равна $p_2 = 15$. Доход потребителя равен $M = 300$. В одной единице продукта G_1 содержится 0,4 единицы свойства A_1 и 0,3 единицы свойства A_2 (т.е. $\alpha_{11} = 0{,}4$; $\alpha_{21} = 0{,}3$). В одной единице продукта G_2 содержится 0,2 единицы свойства A_1 и 0,6 единицы свойства A_2 (т.е. $\alpha_{12} = 0{,}2$; $\alpha_{22} = 0{,}6$):

а) выпишите модель технологии потребления;
б) постройте в пространстве продуктов бюджетную прямую $10x_1 + 15x_2 = 300$ и ее образ в пространстве свойств. Постройте в пространстве свойств образ бюджетного множества $10x_1 + 15x_2 \le \le 300, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$;
в) найдите неявные цены v_1^0 и v_2^0 свойств A_1 и A_2;
г) найдите tgφ в пространстве продуктов и tgψ в пространстве свойств (см. рис. 4.7 и рис. 4.8);
д) оцените рыночную перспективу продукта G_3, если $\alpha_{13} = 0{,}5$; $\alpha_{23} = 0{,}4$; и $p_3 = 13$ ($p_3 = 12$).

Приведите пример модели технологии потребления ($n = 2$; $m = 2$), в которой свойства не имеют неявных цен. Дайте геометрическую интерпретацию образа бюджетной прямой в пространстве свойств.

Приведите примеры модели технологии потребления ($n = 2$; $m = 2$; $n = 3$; $m = 2$), в которых неявные цены свойств не являются однозначными. Дайте геометрическую интерпретацию образа бюджетного множества в пространстве свойств.

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 4

Модель технологии потребления позволяет определить (выберите один вариант):
а) величины свойств, содержащихся в заданном потребительском наборе;
б) потребительский набор, который содержит заданную конфигурацию свойств;
в) неявные цены свойств, если известны рыночные цены товаров;
г) ответы а)—в) не верны.

Неявные цены свойств:
а) существуют и определяются единственным образом по рыночным ценам продуктов;
б) существуют и определяются не единственным образом по заданным ценам продуктов;
в) не существуют при заданных ценах продуктов;
г) возможен только один из трех вышеперечисленных вариантов.

Неявные цены свойств всегда позволяют (укажите неверный ответ):
а) определить рыночные цены продуктов (товаров);
б) оценить уровень полезности свойства для потребителя;
в) определить пороговый уровень цены нового продукта;
г) их использовать в качестве анализа рыночных цен продуктов (товаров) на воображаемом рынке свойств продуктов.

4. Цена p_1 одной единицы продукта G_1 равна $p_1 = 12$, цена p_2 одной единицы продукта G_3 равна $p_2 = 16$. Доход потребителя равен $M = 480$. В одной единице продукта G_1 содержится 0,5 единицы свойства A_1 и 0,2 единицы свойства A_2 (т.е. $\alpha_{11} = 0{,}5$; $\alpha_{21} = 0{,}2$). В одной единице продукта G_2 содержится 0,4 единицы свойства A_1 и 0,3 единицы свойства A_2 (т.е. $\alpha_{12} = 0{,}4$; $\alpha_{22} = 0{,}3$):
   а) выпишите модель технологии потребления;
   б) постройте в пространстве продуктов бюджетную прямую $12x_1 + 16x_2 = 480$ и ее образ в пространстве свойств. Постройте в пространстве свойств образ бюджетного множества $12x_1 + 16x_2 \leq \leq 480$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$;
   в) найдите неявные цены v_1^0 и v_2^0 свойств A_1 и A_2;
   г) найдите $\operatorname{tg}\varphi$ в пространстве продуктов и $\operatorname{tg}\psi$ в пространстве свойств (см. рис. 4.7 и рис. 4.8). Сопоставьте тангенсы с рыночными ценами продуктов (товаров) и с неявными ценами свойств;
   д) при $\alpha_{13} = 0{,}4$; $\alpha_{23} = 0{,}6$ и $p_3 = 15$ постройте в пространстве продуктов бюджетную плоскость $12x_1 + 16x_2 + 15x_3 = 480$ и ее образ в пространстве свойств. Постройте в пространстве свойств образ бюджетного множества $12x_1 + 16x_2 + 15x_3 = 480 \leq 480$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$;
   е) найдите пороговое значение p_3^0 цены нового продукта G_3 и оцените рыночную перспективу этого продукта, используя данные пункта д).

Глава 5

ВЫБОР В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

5.1. Понятия риска и неопределенности

5.1.1. Экономический субъект (индивидуум), принимая то или иное решение, не всегда может одинаково оценить его последствия. Например, приобретая акции некоторой фирмы, индивидуум рассчитывает на получение дивидендов в определенном объеме, исходя из картины текущей экономической конъюнктуры. Однако в будущем конъюнктура может измениться далеко не в лучшую сторону для фирмы, которая вынуждена будет перейти на выплату дивидендов в гораздо меньшем объеме. Не исключен вариант и банкротства фирмы в будущем.

Список примеров, когда экономические субъекты (индивидуумы) должны принимать решения в условиях неопределенности, можно продолжать до бесконечности.

Понятие неопределенности является неоднозначным. Принято говорить собственно о *неопределенности*, если множество вариантов возможных исходов (последствий) принимаемого решения известно, но ни одному из этих вариантов нельзя приписать какую-либо вероятность его появления или хотя бы оценить ее. Если варианты возможных исходов (последствий) характеризуются вероятностями их появления, то говорят о ситуации *риска*.

Здесь приведен один из ранних и простейших вариантов толкования связанных между собой понятий риска и неопределенности, на который далее опирается излагаемый материал. Другие, более продвинутые варианты толкования понятий неопределенности и риска широко представлены в специальной литературе и в этой книге не рассматриваются.

Индивидуум (субъект), который выбирает из нескольких альтернатив, может опираться на объективные вероятности последствий принимаемого решения. Объективные вероятности могут основываться, например, на проведенных статистических исследованиях.

Вероятности могут быть субъективными. Возможна ситуация, когда при подготовке и принятии решения индивидууму приходится учитывать как объективные, так и субъективные вероятности. В дальнейшем под термином «риск» понимается в основном *экономический риск*.

Наиболее важные решения, принимаемые индивидуумом в условиях риска, связаны не столько с покупкой тех или иных потребительских благ (хотя покупка потребительских благ бывает связана с риском, например покупка автомобилей, дорогой бытовой техники, недвижимости), сколько с разумными финансовыми операциями (страхование, покупка и продажа ценных бумаг, выбор пенсионного фонда, выбор валюты для сбережения денег и т.п.). Поэтому в дальнейшем уровень u полезности потребителя будет увязан с его доходом w, который является случайной величиной, т.е. функция $u = u(w)$ полезности потребителя будет функцией только его дохода, а не потребительского набора, как это обычно принято в теории потребления. Вопросы дисконтирования уровня полезности во времени рассматриваться не будут.

Экономический риск представляет собой опасность возникновения неожиданных потерь ожидаемой прибыли или дохода в связи со случайным изменением экономической конъюнктуры. Риск возникает, когда экономическая деятельность осуществляется в ситуации неопределенности из-за информационного дефицита, и по этой причине достижение ожидаемого результата не гарантируется.

Природа риска может быть объективной, субъективной и субъективно-объективной.

Субъективная природа риска проявляется в том, что риск может быть связан с использованием субъективных вероятных оценок выбираемых альтернатив, а также с тем, что разные индивидуумы по-разному относятся к риску. Есть рискофобы (индивидуумы, которые относятся к риску отрицательно, и таких индивидуумов, в том числе среди предпринимателей, большинство), рискофилы (индивидуумы, которые относятся к риску положительно, т.е. любят рисковать) и рисконейтралы (индивидуумы, которые относятся к риску безразлично).

Объективная природа риска проявляется в том, что объективно существует вероятностная сущность многих природных, социальных, технологических явлений, многовариантность материальных и нематериальных отношений между индивидуумами. Ситуация риска часто существует объективно, независимо от того, учитывают ее при принятии решений или не учитывают.

Субъективно-объективная природа риска проявляется в том, что ситуация риска может возникать в результате функционирования процессов субъективного и объективного характера, сочетание которых может быть как управляемым, так и неуправляемым. В качестве примера ситуации субъективно-объективной природы риска можно указать ситуацию использования авиационной техники в условиях джунглей, когда к традиционным объективным факторам риска добавляются субъективные, которые проявляются в том, что крысы могут прогрызть изоляцию проводов, а у пилотов замедляется реакция на те или иные штатные и нештатные ситуации во время взлета или посадки самолета.

5.1.2. В качестве основных причин неопределенности и риска можно отметить следующие.

1. Стихийные бедствия (землетрясения, ураганы, бури, наводнения), а также некоторые природные явления (грозы, град, поздние и ранние заморозки, засуха) могут оказать серьезное отрицательное влияние на результаты предпринимательской или иной деятельности, стать источником неожиданных издержек.

2. Элементы случайности имеют место, когда в условиях, которые мало отличаются друг от друга, одни и те же процессы протекают неодинаково. Из-за этого бывает невозможно однозначно предвидеть появление предполагаемого результата.

Например, невозможно точно предсказать, сколько человек купит билеты на премьеру нового кинофильма. Отмеченное обстоятельство может оказать существенное влияние на принятие решения о выборе того или иного кинотеатра для демонстрации этого фильма.

Не всегда предсказуемое влияние на результаты предпринимательской деятельности оказывают аварии (пожары, взрывы, ядовитые выбросы), выход из строя оборудования, несчастные случаи на производстве и т.п.

Перечисленные случайные события, к сожалению, вполне возможны, несмотря на высокие реальные достижения по их предупреждению.

3. Столкновения противоречивых интересов проявляются на широком поле деятельности индивидуумов: от локальных и глобальных войн до элементарного выяснения отношений между индивидуумами. В результате объявления войны предприниматель может столкнуться с запретом на совершение сделок или экспроприацией активов либо доходов за рубежом.

В конкурентной борьбе могут появиться (проявиться) элементы недобросовестной конкуренции, когда используются такие недозволенные средства, как подкуп должностных лиц, дискредитация конкурента, организация процедуры банкротства конкурента.

В инновационном процессе его разные участники могут занимать различные и даже противоположные позиции. Обычно позицию инициативы занимают разработчики, позицию содействия — проектировщики, позицию бездействия — пользователи. В связи с неизбежной перестройкой технологических процессов, требуемой инновациями, возникают новые организационно-технологические проблемы.

Таким образом, наличие противоборствующих сторон в общественно-экономическом развитии страны вносит в социально-экономическую жизнь элементы неопределенности.

4. Вероятностный характер научно-технологического прогресса (НТП) является очередной причиной появления неопределенности и риска. Заранее трудно, а то и невозможно предсказать с большой точностью появление того или иного открытия, заранее определить конкретные его последствия. Вложения в НТП всегда характеризовались как крайне рискованные. Это с одной стороны. С другой стороны, без этих вложений не были бы реализованы такие достижения НТП, как телекоммуникационные системы, вычислительные системы и т.п.

5. Неполнота, недостаточность информации о том или ином явлении или процессе — следующая причина возникновения неопределенности и риска.

Наличие достаточно полной и правильной информации необходимо для подготовки и принятия решения. Такая информация предполагает осведомленность о наличии и величине спроса на товары и услуги, на капитал, о финансовой устойчивости и платежеспособности будущих партнеров, конкурентов, клиентов, о ценах, курсах, тарифах, о характеристиках оборудования и новой техники и т.п. На практике такая информация бывает разноплановой, подготовленной по не вполне ясным методикам.

Информация может быть искаженной, сфальсифицированной (например, фирма «Майкрософт» в ранний период ее функционирования).

Известны случаи, когда фирмы-лидеры делали объявления о перспективных, но достаточно дорогостоящих проектах, а фирмы-последователи в рамках подражательного поведения вкладывали в эти проекты большие средства, после чего фирмы-лидеры объявляли об ошибочности этих проектов, что приводило к существенному ухудшению положения конкурентов или их разорению.

Таким образом, чем ниже качество информации (независимо от источника ее поступления), необходимой для принятия решений, тем выше риск появления отрицательных последствий такого решения.

Список причин неопределенности и риска можно дополнить такими позициями.

6. Ограниченность ресурсов, необходимых для принятия и реализации решений.

7. Невозможность однозначного понимания объекта, относительно которого должно быть принято решение.

8. Относительная ограниченность сознательной деятельности индивидуумов, наличие существенных различий в социально-психологических установках, стереотипах поведения.

9. Частичное или полное функционирование фирмы в рамках теневого сектора, что приводит к расширению поля ее факторов риска.

10. Необходимость использования новых средств и методов для решения производственных задач при смене модели хозяйствования.

11. Наличие несбалансированности основных компонентов хозяйственного механизма: планирования (стратегического), ценообразования, материально-технического снабжения, денежно-кредитных отношений.

В экономической теории риска анализируются ситуации, связанные с риском, исследуются вопросы количественного измерения риска, формулируются принципы принятия решений в условиях риска. С математической точки зрения многие задачи экономической теории риска сводятся к описанию правил сравнения случайных величин будущих благ (в частности, дохода). При сравнении вероятности распределений необходимо одновременно учитывать как средние значения случайной величины (понимаемые в разных смыслах), так и характеристики разброса (дисперсии, среднеквадратичные отклонения и др.) значений случайных величин относительно средних значений.

5.2. Общие принципы классификации рисков

5.2.1. В экономической литературе нет общепринятой системы классификации рисков и, в частности, хозяйственных рисков. Рассматриваемая ниже классификация рисков охватывает следующие важные элементы: время возникновения рисков, основные факторы возникновения рисков, характер учета рисков, характер последствий, сфера возникновения рисков.

По *времени возникновения* риски распределяются на ретроспективные, текущие и перспективные. Результаты анализа ретроспективных рисков могут помочь в более точном прогнозировании текущих и перспективных рисков.

По *основным факторам возникновения* риски подразделяются на политические и экономические (коммерческие).

Политические риски – риски, появление которых обусловлено теми или иными политическими решениями, оказывающими существенное влияние на экономическую деятельность (повышение пошлин и понижение квот на ввозимые продукты (товары), например актуальное для автопрома современной России значительное повышение пошлин на ввозимые подержанные иномарки, начало военных действий в отдельных регионах страны (Чечня, Югославия, Ирак) и т.п.).

Экономические риски – риски, появление которых обусловлено неблагоприятными изменениями в мировой, национальной или региональной экономиках, в деятельности фирм. В частности, имеются в виду резкие колебания мировых цен на нефть и другие изменения в конъюнктуре рынков товаров, ресурсов, ценных бумаг, несбалансированная ликвидность, когда нет возможности своевременно выполнить платежные обязательства.

Политические и экономические риски на практике могут быть трудноразличимыми. Например, резкие колебания мировых цен на нефть могут быть отнесены к факторам политических и экономических рисков.

По *характеру учета* риски делятся на связанные с деятельностью экономического субъекта (в частности, фирмы). К факторам внешних рисков, естественно, относятся факторы политические, глобальные и макроэкономические, демографические, социальные и т.п.

К внутренним относятся риски, появление которых обусловлено деятельностью самого экономического субъекта (фирмы). На уровень внутренних рисков оказывают влияние уровень управления экономическим субъектом, его экономический потенциал, уровень специализации, техника безопасности.

По *характеру последствий* риски подразделяются на чистые и спекулятивные.

Чистые риски (простые, статические риски) характеризуются тем, что их появление означает потери для хозяйственной деятельности. Причинами чистых рисков могут быть стихийные бедствия, войны, несчастные случаи, преступные действия и т.п.

Спекулятивные риски (коммерческие, динамические риски) характеризуются тем, что их проявление означает не только потери для хозяйственной деятельности, но и дополнительную прибыль к ожидаемому результату. Причинами спекулятивных рисков могут быть изменения валютных курсов, налогового законодательства и т.п.

5.2.2. *Сфера возникновения* рисков – это важный элемент классификации рисков, в основу которого положены сферы экономической деятельности.

Экономическая деятельность охватывает производственную, коммерческую, финансовую, посредническую деятельность и страхование.

В производственной деятельности используются факторы производства (капитал, труд, материалы) и фирмой производится готовая продукция в виде товаров, услуг, информации для продажи на рынке товаров и услуг.

В коммерческой деятельности продаются потребителям готовые товары и услуги, приобретенные у других лиц. Прибыль коммерческой фирмы образуется за счет разницы в ценах продажи и приобретения.

В финансовой деятельности в качестве предмета купли-продажи предпринимателя выступают деньги и ценные бумаги, продаваемые покупателям или предоставляемые ему в кредит.

В посреднической деятельности предприниматель (фирма) не производит и не продает товар, а выступает в роли связующего звена в процессе товарного обмена и в товарно-денежных операциях. За оказание посреднической услуги, которая заключается в сведении заинтересованных в сделке сторон, предприниматель (фирма) получает доход.

Суть страхования в том, что предприниматель (фирма), который называется страховщиком, за определенную сумму, называемую страховым взносом, гарантирует потребителю, называемому страхователем, компенсацию возможной потери (полной или частичной) имущества, ценностей, жизни в результате наличия определенных обстоятельств, т.е. в результате наступления так называемого страхового случая. В связи с тем что вероятность наступления страхового случая относительно мала, оставшаяся часть страховых взносов образует доход страховщика.

В связи с только что описанными сферами экономической деятельности выделяют следующие риски: производственный, коммерческий, финансовый, посреднический и страхования.

Производственный риск связан с невыполнением фирмой своих обязательств по производству товаров и услуг, с нерациональным использованием новых технологий, основного и оборотного производственного капитала, рабочего времени. Причины вышеназванных проблем: снижение объемов производства, например в связи с ростом издержек, низкой дисциплиной поставок, ростом налоговых отчислений.

Коммерческий риск связан с проблемами, возникающими в процессе реализации товаров и услуг, произведенных или закупленных фирмой (предпринимателем). Причинами возникновения таких проблем являются снижение объема реализации в связи с изменением рыночной конъюнктуры, повышение закупочных цен на товары, потери в процессе обращения, повышение издержек обращения и т.п.

Финансовый риск связан с возможностью невыполнения фирмой своих финансовых обязательств. К причинам невыполнения фирмой своих финансовых обязательств относятся: изменение курса национальной валюты и обесценение вследствие этого инвестиционного портфеля фирмы, введение военного положения, возникновение беспорядков и т.п.

Посреднический риск связан с возможностью невыполнения фирмой посреднической услуги, в результате чего посредническая фирма может нести большие потери в связи с неполучением дохода за успешную посредническую услугу. Причины посреднического риска связаны прежде всего с изменением экономической конъюнктуры, когда для одного или сразу для двух сделка может оказаться невыгодной.

Риск страхования – риск наступления страхового случая, когда страховщик обязан выплатить страхователю всю (или часть) страховой суммы. Результатом этого риска являются убытки, вызванные недостаточно квалифицированной страховой деятельностью как на этапе, предшествующем заключению договора страхования, так и на последующих этапах – перестрахование, формирование страховых резервов. Основными причинами риска страхования являются: ошибочно определенные страховые взносы и страховые суммы, войны, стихийные бедствия, беспорядки, которые не были учтены при заключении страхового договора.

5.3. Предпринимательские риски

5.3.1. Структура предпринимательских рисков представлена на рис. 5.1.

Страновые риски связаны с участием предпринимателей (фирм) во внешнеэкономической деятельности. На эти риски влияет политико-экономическая стабильность стран – импортеров и экспортеров. Причинами странового риска могут быть неэффективность государственной и экономической политики, особенности государственного и регионального законодательства, региональные проблемы, поляризация различных социальных групп. На функционирование фирм оказывают влияние (в разной степени) глобальные экономические процессы, торговое и валютное регулирование, квотирование, лицензирование, таможенные пошлины и т.п.

Одним из наиболее авторитетных показателей уровня странового риска является индекс БЕРИ, регулярно публикуемый германской фирмой «БЕРИ» и определяемый группой численностью около 100 экспертов с помощью различных методов экспертных

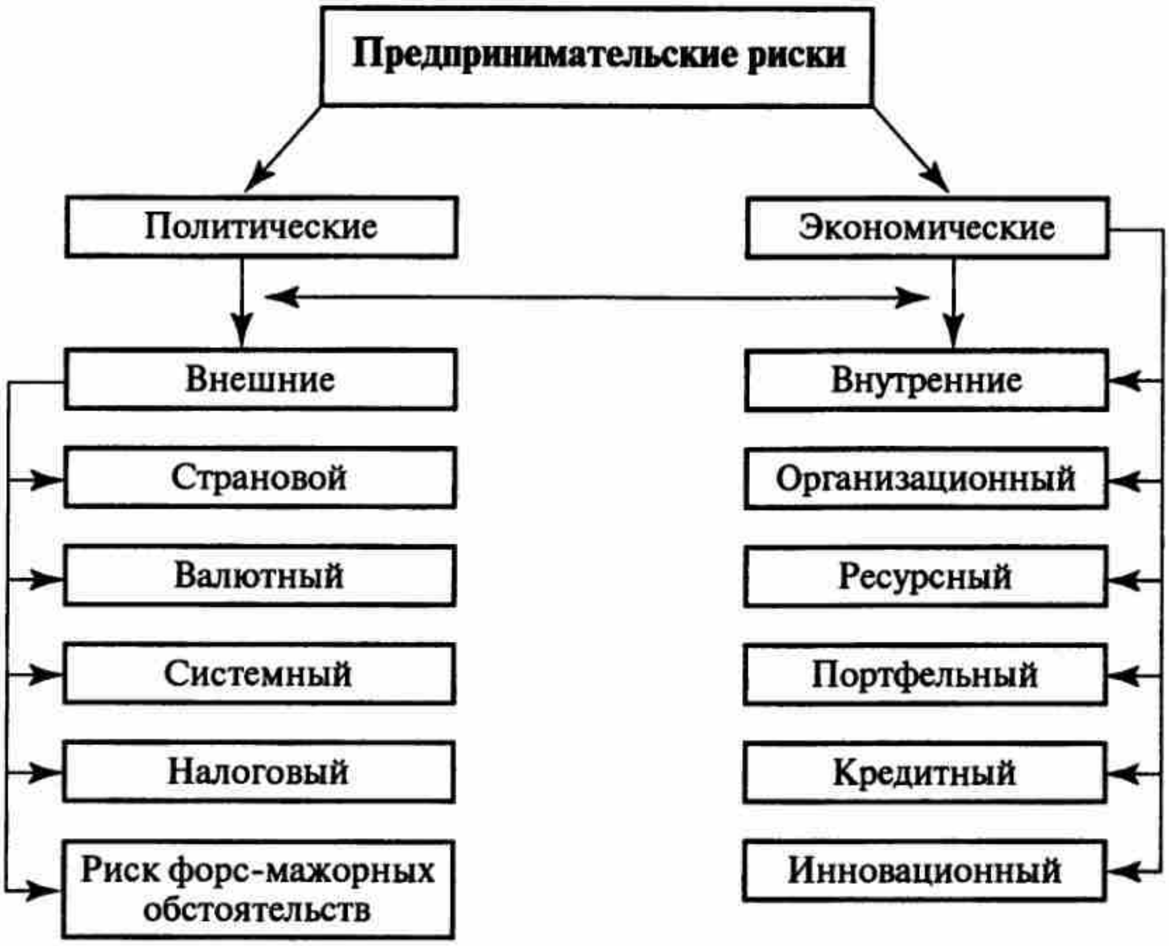


Рис. 5.1

оценок 4 раза в год. В состав анализируемых экспертами частных показателей входят:

1) эффективность национальной экономики, определяемая на основе прогнозируемого среднегодового изменения валового национального продукта (ВНП) страны;

2) уровень политического риска;

3) уровень задолженности, рассчитываемой по данным Мирового банка реконструкции и развития с учетом размера задолженности, качества обслуживания задолженности, объема экспорта, баланса внешнеторгового оборота;

4) доступность банковских кредитов;

5) доступность краткосрочного финансирования;

6) доступность долгосрочного ссудного капитала;

7) вероятность возникновения форс-мажорных обстоятельств;

8) уровень кредитоспособности страны;

9) сумма невыполненных обязательств по выплате внешнего долга.

Результаты проведенного анализа уровня странового риска представляются в виде базы данных, характеризующих оценку степени риска инвестирования и надежности деловых связей различных стран, представленной в виде ранжированного перечня стран с интегральными балльными и частными оценками риска.

Валютные риски связаны с колебанием валютных курсов. Величина валютного риска зависит от потери покупательной способности валюты и поэтому находится в прямой зависимости от продолжительности временнóго промежутка между моментом заключения сделки и моментом платежа. Экспортеры страны несут убытки, если они заключали контракты до падения курса национальной валюты, ибо после падения курса национальной валюты за одну единицу свободно конвертируемой валюты экспортер получает больше единиц национальной валюты, чем до ее падения. С импортерами страны обратная ситуация. Импортеры несут убытки, если они заключали контракты до повышения курса национальной валюты, ибо до повышения курса национальной валюты за одну единицу свободно конвертируемой валюты импортер должен заплатить больше единиц национальной валюты, чем после ее повышения.

Системные риски связаны с тем, в какой сфере функционирует фирма: в сфере белого (прозрачного) бизнеса, в сфере серого (теневого) бизнеса или в сфере черного (криминального) бизнеса.

Если фирма функционирует в сфере белого бизнеса, ее системный риск равен нулю, однако из-за высокого уровня налогового бремени функционирование фирмы становится весьма рискованным предприятием. Если фирма функционирует в сфере серого бизнеса, то она имеет системный риск, величина которого равна вероятности того, что ее теневая деятельность может быть обнаружена. Но зато фирма при этом может получить значительные «налоговые льготы», ибо она уклоняется от уплаты части налогов. Если фирма функционирует в сфере черного бизнеса, то ее положение аналогично фирме, функционирующей в сфере серого бизнеса. Отличие лишь в том, что в последнем случае резко возрастает системный риск и, возможно, фирма будет иметь еще более значительные «налоговые льготы».

Риск форс-мажорных обстоятельств – это риск, связанный со стихийными бедствиями (наводнение, землетрясение, извержение вулканов, ураганы), социально-экономическими потрясениями, вызванными революциями, забастовками, которые препятствуют нормальному функционированию фирм.

В случае форс-мажорных обстоятельств стороны, заключившие сделку до этих обстоятельств, освобождаются от взаимных обязательств по такой сделке согласно статье 79 Конвенции ООН о договорах купли-продажи.

Возмещение потерь, вызванных форс-мажорными обстоятельствами, осуществляют специализированные страховые компании.

5.3.2. В отличие от внешних рисков, которые не зависят от самого предпринимателя (фирмы), внутренние риски в значительной степени зависят от ошибочных решений, принимаемых предпринимателями (руководителями фирм) вследствие их некомпетентности или иных, зависящих от предпринимателей обстоятельств (в качестве примера можно указать привлечение на ответственные должности родственников или знакомых, которые могут на своих рабочих местах пренебрегать интересами фирм, где они работают).

Отметим ряд конкретных причин внутренних рисков фирм: несоответствие уровня профессиональной подготовки руководящего состава фирмы требованиям рабочего места, которое проявляется в принятии ошибочных решений по рациональному распределению ресурсов, по проведению маркетинговой политики, по регулированию финансовых и информационных потоков фирмы, по своевременному адаптированию фирмы к переменам в окружающей рыночной среде.

Рассмотрим более подробно внутренние риски фирмы.

Организационный риск обусловлен недостатками в организации работы фирмы. К причинам организационного риска фирмы относятся:

1) низкий уровень организации:

1.1) ошибки планирования и проектирования;

1.2) недостаток координации работ;

1.3) слабое регулирование;

1.4) нерациональное распределение ограниченных ресурсов;

2) недостатки в организации маркетинговой деятельности:

2.1) неправильный выбор выпускаемой продукции, а это приводит к тому, что продукция не пользуется спросом;

2.2) неправильный выбор рынка сбыта;

2.3) неверное определение емкости рынка;

2.4) неправильная ценовая политика;

3) неустойчивое финансовое положение.

Ресурсный риск имеет следующие причины:

1) отсутствие необходимых резервов по ресурсам в случае изменения рыночной ситуации;

2) дефицит рабочей силы и материалов;

3) срывы поставок;

4) нехватка выпускаемой фирмой продукции.

Портфельный риск состоит в том, что фирма имеет потери по отдельным типам ценных бумаг, а также по всей категории ссуд.

Если у предпринимателя (фирмы) имеются свободные денежные средства, он на эти средства может приобрести различные ценные бумаги, совокупность которых называется портфелем ценных бумаг, или инвестиционным портфелем.

Задача оптимизации инвестиционного портфеля анализируется в параграфе 5.8. Решение этой задачи снижает портфельный риск фирмы до оптимальной величины.

Кредитный риск представляет собой риск невозврата долга, т.е. риск неуплаты заемщиком кредитору основного долга и/или процентов по нему в сроки, установленные кредитным договором.

Причинами кредитного риска являются: недобросовестность заемщика с его попытками намеренного банкротства или другими попытками уклонения от выполнения обязательств по выплате долга, а также с опасностью невольного банкротства из-за того, что расчеты заемщика на получение необходимого дохода не оправдались.

Причинами невольного банкротства могут быть:

1) спад производства и/или спроса на продукцию определенного вида;

2) невыполнение договорных отношений;

3) форс-мажорные обстоятельства.

Кредитный риск зависит от вида предоставляемого кредита, и кредиты различаются:

1) по срокам — кратко-, средне- и долгосрочные;

2) видам обеспечения — обеспеченные, необеспеченные;

3) виду дебитора — промышленные и персональные;

4) направлению использования — промышленные, инвестиционные, на формирование оборотного капитала, сезонные, на

устранение временных трудностей, на операции с ценными бумагами и др.;

5) размеру – мелкие, средние и крупные.

Инновационный риск связан с финансированием и использованием научно-технологического прогресса (НТП). Затраты и результаты НТП растянуты во времени, но их можно предвидеть.

Мировой опыт свидетельствует, что доля получения предполагаемых результатов на стадии фундаментальных исследований не превышает 10%. Доля прикладных научных разработок составляет 80%. В наиболее развитых странах допускается, что при жестком отборе, в ходе которого отвергается 80–90% предложений, из оставшихся проектов, получивших финансирование из инновационных фондов, 15–30% может закончиться неудачей.

Создатели новых технологий и новых видов техники могут двигаться по первому пути медленно и осторожно, с минимальным риском, частично модернизируя действующие технологию и конструкции. С современной точки зрения такой путь бесперспективен, ибо вгоняет экономику в неэффективные расходы.

Создатели новых технологий и новых видов техники могут идти по второму пути, с большим риском, ориентируясь на мировой рынок. Второй путь ведет к созданию принципиально новых технологий.

Вследствие неизбежности инновационного риска на Западе приняты практика безвозмездных пожертвований научно-исследовательским организациям, значительные налоговые льготы и предоставление государственной помощи венчурным фирмам, которые с большим риском занимаются практическим освоением новых технологий.

5.4. Элементы теории полезности Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна

5.4.1. Рассмотрим ряд положений теории полезности Неймана–Моргенштерна. Одним из основных понятий этой теории является лотерея, которая определена ниже.

Пусть имеется два множества символов: множество $x_1, \ldots, x_k$ и множество $p_1, \ldots, p_k$. Символы $x_1, \ldots, x_k$ могут интерпретироваться как некоторые исходы, например выигрыши (доходы) некоторого индивидуума (потребителя) или потребительские наборы, которые может получить (выиграть) индивидуум. Символы $p_1, \dots, p_k$ интерпретируются как вероятности, так что $p_1 \geq 0, \dots, p_k \geq 0$ и $p_1 + \dots + p_k = 1$.

Лотерея L представляет собой вектор (точнее, кортеж), такой, что

$$L = (p_1, x_1;\;\; p_2, x_2;\;\; \dots;\;\; p_k, x_k),$$

или

$$L = (x_1, \dots, x_k;\;\; p_1, \dots, p_k),$$

где p_1 – вероятность наступления исхода x_1, ..., p_k – вероятность наступления исхода x_k. Символы $x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_k$ называются параметрами лотереи L.

Далее для определенности используется термин «потребительский набор», а не термин «исход».

В частности, символ

$$(1, x_1;\;\; 0, x_2;\;\; \dots;\;\; 0, x_k) = (1, x_1)$$

представляет собой лотерею, в которой индивидуум получает (выигрывает) набор x_1 с вероятностью единица, т.е. получает набор x_1 наверняка, а символ

$$(p_1, x_1;\;\; (1-p), x_2)$$

означает лотерею, в которой индивидуум получает набор x_1 с вероятностью p, а набор x_2 – с вероятностью $(1-p)$, где $0 \leq p \leq 1$.

Предполагается, что у индивидуума на множестве возможных лотерей есть отношение $\succeq$ предпочтения-безразличия, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1) аксиома полноты – для любых двух лотерей L_1 и L_2 индивидуум может указать, какое одно из следующих трех отношений выполняется: $L_1 \succ L_2$ (символ $L_1 \succ L_2$ означает, что лотерея L_1 предпочитается лотерее L_2 и лотереи L_1 и L_2 не эквивалентны, т.е. не находятся в отношении безразличия), $L_2 \succ L_1$ (лотерея L_2 предпочитается лотерее L_1 и лотереи L_2 и L_1 не эквивалентны), $L_1 \sim L_2$ (лотереи L_1 и L_2 эквивалентны, т.е. находятся в отношении безразличия. Лотереи L_1 и L_2 находятся по определению в отношении безразличия, если им соответствует одинаковое распределение вероятностей);

2) аксиома рефлексивности – для любой лотереи $L \succeq L$;

3) аксиома транзитивности – для любых лотерей L_1, L_2, L_3 справедлива импликация: если $L_1 \succ L_2$, $L_2 \succ L_3$, то $L_1 \succ L_3$;

4) аксиома монотонности – для любых двух наборов x_1 и x_2, таких, что $x_1 \succ x_2$, имеет место отношение предпочтения

$$(p_1', x_1; (1-p'), x_2) \succ (p_1, x_1; (1-p), x_2)$$

тогда и только тогда, когда $p' > p$. Это содержательно означает, что индивидуум предпочитает с большей вероятностью получить предпочитаемый набор x_1. В частности, $x_1 \succ (p, x_1, (1-p), x_2)$ для всех вероятностей p, $0 < p < 1$, т.е. набор x_1, который индивидуум получает наверняка, предпочитается им любой лотерее, содержащей набор x_1 и набор x_2, который является для индивидуума менее предпочитаемым;

5) аксиома непрерывности – для любых трех наборов x_1, x_2, x_3, таких, что $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, существует вероятность p, $0 < p < 1$, для которой

$$(p, x_1; (1-p), x_3) \sim x_2,$$

что содержательно интерпретируется так: индивидуум не делает различий между лотереей $(p, x_1; (1-p), x_3)$, содержащей наиболее предпочтительный набор x_1 и наименее предпочтительный набор x_3, и определенностью получения набора x_2, занимающего промежуточное положение между наборами x_1 и x_2;

6) аксиома о независимости не связанных между собой альтернатив – для любых двух наборов x_1 и x_2, таких, что $x_1 \sim x_2$, и любого третьего набора x_3 справедливо следующее отношение безразличия:

$$(p, x_1; (1-p), x_3) \sim (p, x_2; (1-p), x_3)$$

для любых p, $0 < p < 1$, что содержательно интерпретируется так: присутствие третьего набора x_3 не нарушает отношение безразличия.

Прежде чем формулировать последнюю (седьмую) аксиому, дадим определение сложной лотереи.

Пусть имеется m (шт.) лотерей

$$L_i = (p_{i1}, x_1;\ \ p_{i2}, x_2;\ \ \ldots,\ \ p_{ik}, x_k),\ \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Сложная лотерея – это такая лотерея

$$L = (q_1, L_1;\ \ q_2, L_2;\ \ \ldots;\ \ q_m, L_m),$$

в которой в качестве исходов (наборов) выступают лотереи $L_1, \ldots, L_m$, в качестве $q_1, \ldots, q_m$ выступают вероятности, где $q_i = 1, \ldots, m$ – вероятность получения индивидуумом лотереи L_i, $q_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $q_1 + \ldots + q_m = 1$;

7) аксиома о приведении сложных лотерей – сложная лотерея L может быть приведена к лотерее с соответствующими вероятностями $r_1, \ldots, r_k$, $r_1 \geq 0, \ldots, r_k \geq 0, r_1 + \ldots + r_k = 1$,

$$L \sim L' = (r_1, x_1;\ r_2, x_2;\ \ldots;\ r_k, x_k),$$

$$r_1 = q_1 p_{11} + \ldots + q_m p_{m1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_k = q_1 p_{1k} + \ldots + q_m p_{mk}.$$

Теория полезности Неймана–Моргенштерна исследует предпочтения на множестве лотерей, удовлетворяющих приведенным выше аксиомам.

5.4.2. Согласно основной теореме теории полезности Неймана–Моргенштерна (при соблюдении всех приведенных аксиом) существует функция полезности, определенная на всех лотереях, которая является однозначной с точностью до монотонного строго возрастающего *линейного* преобразования.

В связи с тем что набор $x = (1, x)$ есть лотерея, функция полезность определена на всех наборах и

$$U(x) > U(y) \Leftrightarrow x \succ y.$$

В общем виде имеем

$$U(p_1, x_1;\ p_2, x_2;\ \ldots;\ p_k, x_k) = p_1 U(x_1) + \ldots + p_k U(x_k),$$

т.е. полезность лотереи $L = (p_1, x_1;\ \ldots;\ p_k, x_k)$ есть математическое ожидание полезности (т.е. ожидаемая полезность), равное взвешенной сумме полезностей $U(x_1), \ldots, U(x_k)$ наборов $x_1, \ldots, x_k$, где в качестве весов выступают вероятности $p_1, \ldots, p_k$ получения индивидуумом этих наборов.

Функция $U(x)$ полезности Неймана–Моргенштерна определяется однозначно с точностью до монотонного строго возрастающего *линейного преобразования*, т.е. функция $aU(x) + b$, $a > 0$ – также функция полезности Неймана–Моргенштерна. Напомним, что классическая функция полезности определяется однозначно с точностью до монотонного строго возрастающего (линейного, а также *нелинейного*) преобразования.

Функцию $U(x)$ полезности Неймана–Моргенштерна можно построить, выбрав произвольным образом числовые значения для двух уровней полезности. Полезности других наборов оцениваются соответствующим взвешиванием вероятностями. Продемонстрируем это. Пусть, например, $x_1 \succ x_2$ и пусть числа $U(x_1)$ и $U(x_2)$ таковые, что $U(x_1) > U(x_2)$ и в остальном произвольны. Для построения значения $U(x_3)$ функции полезности для любого другого набора x_3 взвесим значения полезностей $U(x_1)$ и $U(x_2)$ наборов x_1 и x_2 с помощью вероятностей. Если, например, имеет место цепочка $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, то по аксиоме 5 непрерывности существует вероятность p, такая, что

$$(p, x_1; (1-p), x_2) \sim x_3,$$

поэтому

$$U(x_3) = U(p, x_1; (1-p), x_2) = pU(x_1) + (1-p)U(x_2),$$

ибо, во-первых, значения функции полезности на лотереях, которые находятся в отношении безразличия, являются равными и, во-вторых, полезность лотереи есть математическое ожидание ее полезности.

Если $x_3 \succ x_1$ $(\succ x_2)$, то по аксиоме 5 непрерывности существует вероятность p, такая, что

$$x_1 \sim (p, x_3; (1-p), x_2),$$

откуда

$$U(x_1) = pU(x_3) + (1-p)U(x_2),$$

или

$$U(x_3) = \frac{1}{p}U(x_1) - \frac{(1-p)}{p}U(x_2).$$

Таким образом, выбрав два произвольных числа $U(x_1)$ и $U(x_2)$, мы получим значения $U(x)$ функции полезности Неймана–Моргенштерна для любых наборов x.

На базе основной теоремы теории полезности Неймана–Моргенштерна (теоремы об ожидаемой полезности) формируется правило рационального поведения индивидуума в процессе принятия решения в условиях риска, суть которого (правила) в следующем.

Пусть индивидуум, принимающий решение, должен выбрать одну из m (шт.) стратегий $s_1, \ldots, s_m$, где исходом стратегии s_i является лотерея

$$L_i = (p_{i1}, x_1;\ \ p_{i2}, x_2;\ \ \ldots,\ \ p_{ik}, x_k),\quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

В связи с тем что полезность лотереи L_i оценивается величиной

$$U(L_i) = p_{i1}U(x_{i1}) + \ldots + p_{ik}U(x_{ik}),$$

индивидуум, принимающий решение на основании максимизации полезности, выберет стратегию, которая обеспечивает максимальное значение ожидаемой полезности

$$\max_{s_i} U(L_i) = \max_{s_i}(p_{i1}U(x_{i1}) + \ldots + p_{ik}U(x_{ik})).$$

Если, например, $m = 3$, а $k = 2$, то искомый максимум равен

$$\max_{s_i} U(L_i) =$$

$$= \max(p_{11}U(x_{11}) + p_{12}U(x_{12}), p_{21}U(x_{21}) + p_{22}U(x_{22}), p_{31}U(x_{31}) + p_{32}U(x_{32})),$$

где каждая (из трех) сумма, стоящая в круглых скобках, есть элемент главной диагонали произведения матриц

$$\begin{pmatrix} U(x_{11}) & U(x_{12}) \\ U(x_{21}) & U(x_{22}) \\ U(x_{31}) & U(x_{32}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \end{pmatrix}.$$

5.5. Отношение к риску. Количественные оценки риска

5.5.1. Для описания поведения индивидуума в условиях риска и отношения индивидуума к риску используются понятия ожидаемого дохода и ожидаемой полезности индивидуума.

Пусть индивидуум имеет функцию полезности $u(w)$, где w – величина дохода, а $u(w)$ – уровень полезности индивидуума, если его доход равен w. Пусть p_1 – вероятность реализации варианта $u(w_1)$ (в этом варианте доход величиной w_1 имеет для индивидуума уровень полезности $u(w_1)$), p_2 – вероятность реализации варианта $u(w_2)$, ..., p_k – вероятность реализации варианта $u(w_k)$ ($p_1 + \ldots + p_k = 1$, $p_1 \geq 0, \ldots, p_k \geq 0$), тогда выражение

$$M[u(w)] = p_1u(w_1) + \ldots + p_ku(w_k) \tag{5.5.1}$$

представляет собой ожидаемую полезность (среднюю полезность) рассмотренных вариантов. Выписанная сумма представляет собой *функцию ожидаемой полезности*, или функцию полезности Неймана–Моргенштерна (см. раздел 5.4.2). Здесь и далее M –

символ математического ожидания случайной величины $u(w)$, имеющей следующее распределение вероятностей $p_1, ..., p_k$:

$$\begin{array}{c|c|c} u(w_1) & \dots & u(w_k) \\ \hline p_1 & \dots & p_k \end{array}.$$

Величина $w = p_1w_1 + \dots + p_kw_k$ представляет собой ожидаемый доход, т.е. математическое ожидание величины w, имеющей распределение вероятностей $p_1, ..., p_k$:

$$\begin{array}{c|c|c} w_1 & \dots & w_k \\ \hline p_1 & \dots & p_k \end{array}.$$

Таким образом, ожидаемая полезность есть математическое ожидание $M[u(w)]$ (случайной) полезности $u(w)$, а ожидаемый доход есть математическое ожидание $M[w]$ случайного дохода w.

5.5.2. Рассмотрим функцию полезности $v(w) = a + bu(w)$, где a и $b > 0$ – скалярные параметры. На основании свойства линейности математического ожидания имеем $\mathrm{M}[v(w)] = a + bM[u(w)]$, т.е. обе функции полезности $u(w)$ и $v(w)$ представляют одно и то же отношение предпочтения в условиях риска.

Если функция полезности $u(w)$ выпукла вверх, то при $k = 2$ справедливо неравенство

$$u(p_1w_1 + p_2w_2) \geq p_1u(w_1) + p_2u(w_2) \tag{5.5.2}$$

(при $k > 2$ имеем $u(p_1w_1 + \dots + p_kw_k) \geq p_1u(w_1) + \dots + p_ku(w_k)$).

Левая часть неравенства (5.5.2), очевидно, равна

$$u(p_1w_1 + p_2w_2) = u(M[w]), \tag{5.5.3}$$

где $M[w]$ – математическое ожидание дохода $w = p_1w_1 + p_2w_2$: $M[w] = M[p_1w_1 + p_2w_2]$.

Правая часть равенства (5.5.2) есть математическое ожидание $M[u(w)] = p_1u(w_1) + p_2u(w_2)$ полезности $u(w)$.

Используя равенства (5.5.1), (5.5.3), перепишем неравенство (5.5.2) следующим образом:

$$M[u(w)] \leq u(M[w]). \tag{5.5.4}$$

Неравенство (5.5.4) показывает, что математическое ожидание $M[u(w)]$ (случайной) полезности $u(w)$ дохода $w = p_1w_1 + p_2w_2$ (т.е. полезности в условиях риска) не больше полезности $u(M[w])$ математического ожидания $M[w]$ случайного дохода, которое (математическое ожидание $M[w]$) равно безрисковому доходу w, т.е. $w = M[w] = M[p_1w_1 + p_2w_2]$ (рис. 5.2).

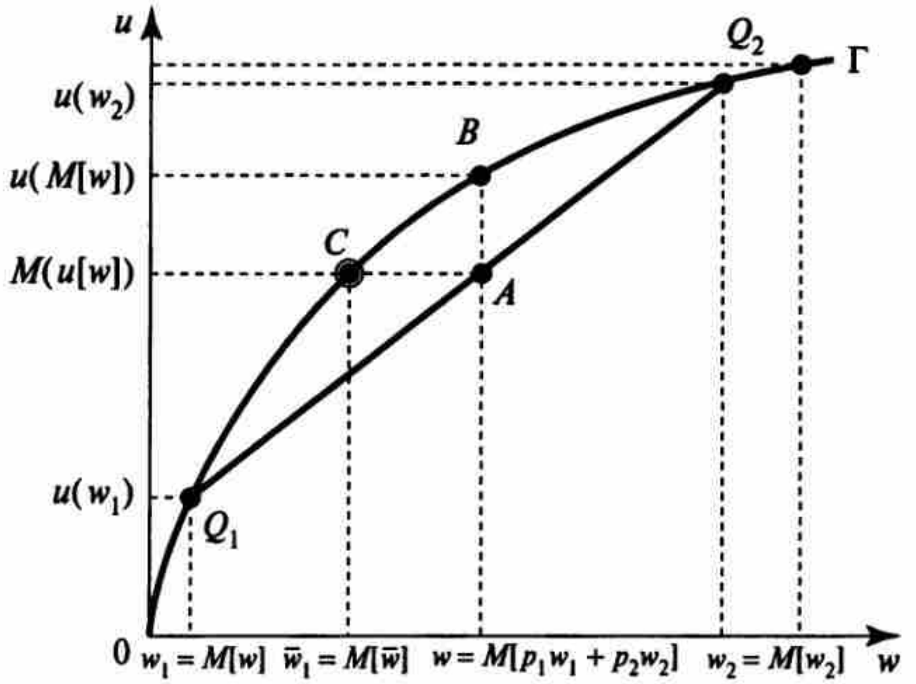


Рис. 5.2

На рис. 5.2 точка $B = (w, u(M[w]) = (M[w], \dot{u}(M[w])$ изображает полезность безрискового дохода w, равного математическому ожиданию $w = M[p_1w_1 + p_2w_2]$ случайного дохода $p_1w_1 + p_2w_2$, точка $A = (w, M[u(w)])$ изображает ожидаемую полезность (т.е. полезность в условиях риска), если вероятность дохода w_1 индивидуума равна p_1, вероятность дохода w_2 индивидуума равна p_2, а ожидаемый доход $p_1w_1 + p_2w_2$ также равен w.

Таким образом, в условиях риска ожидаемая полезность $M[u(w)]$ индивидуума строго меньше полезности $u(M[w])$ индивидуума в условиях отсутствия риска. Откуда следует, что представленная на рис. 5.2 линия есть график функции полезности индивидуума, *не склонного* к риску (т.е. рискофоба).

На рис. 5.2 также видно, что в условиях отсутствия риска полезность u, равная ожидаемой полезности, т.е. $u = M[u(w)]$, достигается при доходе w, равном $w = \bar{w}$. Содержательно это означает, что индивидуум готов потерять часть своего дохода в размере $w - \bar{w} > 0$ для того, чтобы безрисковая ситуация, изображаемая точкой $C = (\bar{w}, M[u(w)])$, была эквивалентна ситуации в условиях риска, изображаемой точкой $A = (w, M[u(w)])$. Отметим, что в обоих случаях полезность одна и та же и равна $M[u(w)]$. Разность $w - \bar{w}$ (равную длине $|CA|_1$ отрезка CA) принято называть *премией за риск*. В случае индивидуума, который не склонен к риску, премия за риск положительна.

Если график Г функции полезности больше похож на прямую (т.е. радиус ее кривизны относительно велик), то премия за риск будет меньше. Если же график Г функции полезности имеет сильное искривление (радиус кривизны относительно мал), то премия за риск будет больше при той же разности $u(M[w]) - M[u(w)]$. Таким образом, степень искривления графика функции полезности характеризует степень неприятия риска индивидуумом.

5.5.3. Если функция полезности $u(w)$ выпукла вниз, то при $k = 2$ справедливо неравенство

$$u(p_1w_1 + p_2w_2) \le p_1u(w_1) + p_2u(w_2)$$

(при $k > 2$ $u(p_1w_1 + \ldots + p_kw_k) \le p_1u(w_1) + \ldots + p_ku(w_k)$).

По аналогии с предыдущим случаем имеем неравенство

$$M[u(w)] \ge u(M[w]),$$

которое означает, что математическое ожидание $M[u(w)]$ полезности $u(w)$ не меньше полезности $u(M[w])$ математического ожидания $M[w]$ случайного дохода w, которое (математическое ожидание $M[w]$) равно безрисковому доходу w, т.е. $w = M[w] = M[p_1w_1 + p_2w_2]$ (рис. 5.3), т.е. представленная на рис. 5.3 линия есть график функции полезности индивидуума, который *склонен* к риску (т.е. рискофила). В этом случае в условиях риска уровень ожидаемой полезности $M[u(w)]$ индивидуума строго выше уровня полезности

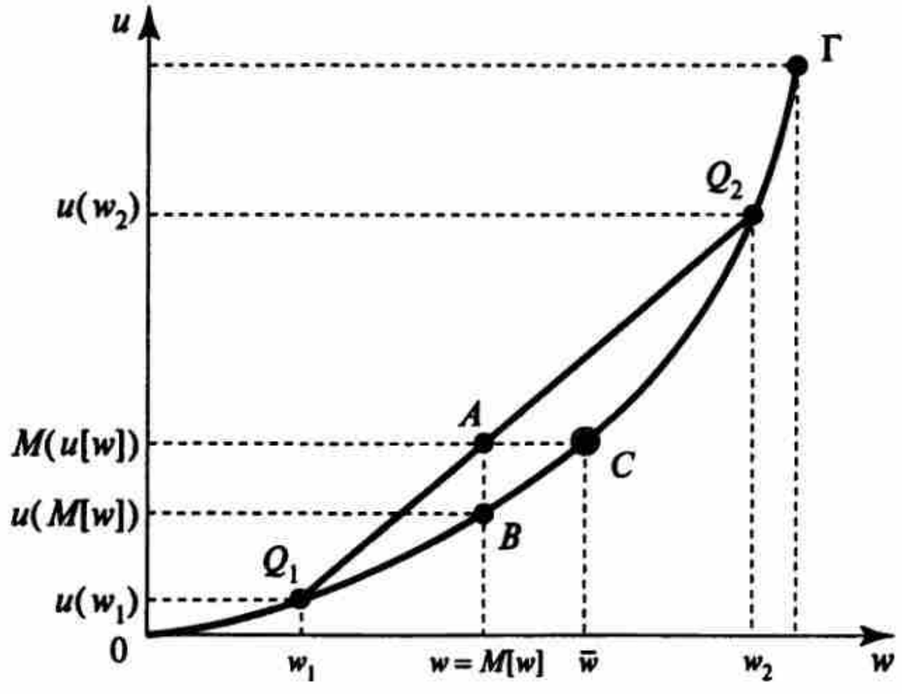


Рис. 5.3

$u(M[w])$ в условиях отсутствия риска (точка A расположена выше точки B, этим точкам соответствует один и тот же доход w). В данном случае премия за риск отрицательна и равна длине $|AC|_1$ отрезка AC, взятой со знаком минус, что содержательно означает, что индивидуум приобретает дополнительный доход в размере $\bar{w} - w > 0$ для того, чтобы для него безрисковая ситуация, изображенная точкой $C = (\bar{w}, M[u(w)])$, была эквивалентна ситуации в условиях риска, изображаемой точкой $A = (w, M[u(w)])$.

5.5.4. Если функция полезности $u(w)$ индивидуума выпукла вверх и вниз (т.е. график есть прямая линия), то при $k = 2$ справедливо равенство

$$u(p_1w_1 + p_2w_2) = p_1u(w_1) + p_2u(w_2)$$

(при $k \geq 2$ $u(p_1w_1 + \ldots + p_kw_k) = p_1u(w_1) + \ldots + p_ku(w_k)$).

В этом случае имеем равенство

$$M[u(w)] = u(M[w]),$$

которое означает, что математическое ожидание $M[u(w)]$ полезности $u(w)$ равно полезности $u(M[w])$ математического ожидания $M[w]$ случайного дохода w, которое (математическое ожидание $M[w]$) равно безрисковому доходу w, т.е. $w = M[w] = M[p_1w_1 + p_2w_2]$ (рис. 5.4). Таким образом, представленная на рис. 5.4 линия есть

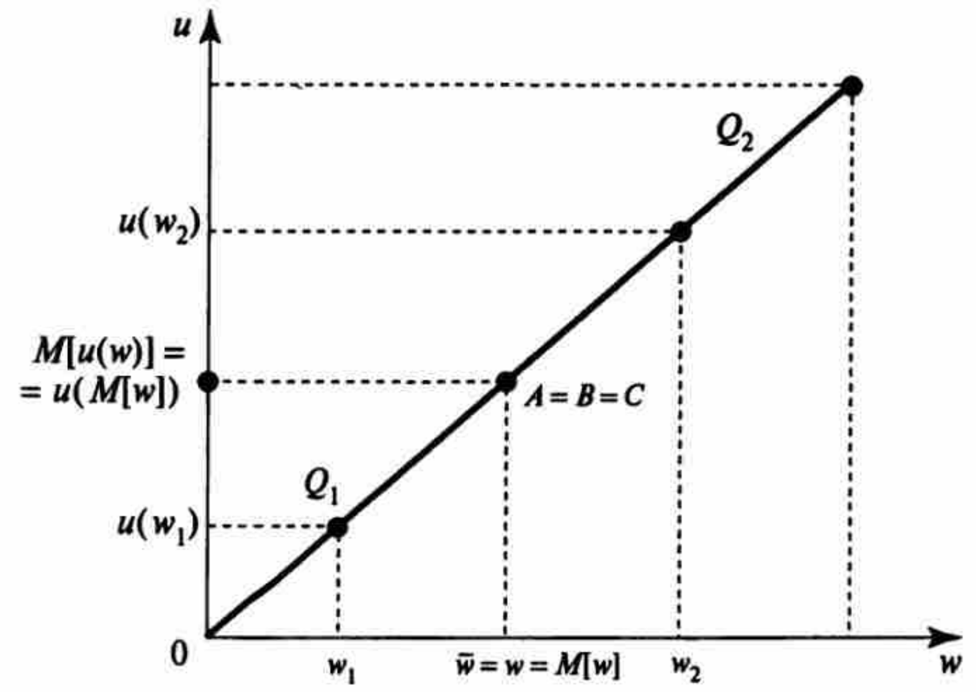


Рис. 5.4

график функции полезности индивидуума, нейтрального к риску (т.е. рисконейтрала). В этом случае, очевидно, премия за риск

$$\bar{w} - w = 0.$$

Для индивидуума, который не склонен к риску (т.е. является рискофобом), функция полезности $u(w)$ от его дохода выпукла вверх (см. рис. 5.2). Для такой функции $u(w)$ ее производные $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$. Это означает, что предельная полезность $u'(w)$ дохода w индивидуума убывает с ростом такого дохода. Интуитивно ясно, что чем график функции $u(w)$ полезности больше похож на отрезок прямой, тем меньше степень неприятия риска со стороны индивидуума. Наоборот, чем сильнее искривлен график функции полезности, тем выше степень неприятия индивидуума к риску. Степень искривления графика функции определяет вторая производная этой функции.

5.5.5. Для построения показателя степени неприятия риска со стороны индивидуума используются меры Эрроу–Пратта, которые определяются так.

Абсолютная и *относительная меры Эрроу–Пратта* для функции полезности $u(w)$ имеют вид

$$AP_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}, \;\; AP_r(w) = wAP_a(w) = -w\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

В связи с тем, что $v'(w) = bu'(w)$, $v''(w) = bu''(w)$ $(v(w) = a + bu(w))$, абсолютная и относительная меры Эрроу–Пратта одни и те же для целого класса функций полезности $v(w) = a + bu(w)$, поэтому эти меры выражают свойства предпочтений индивидуума, а не только описывающих их функций полезности.

Если считать, что уровень полезности $u(w)$ измеряется в ютилях (ю), а доход – в денежных единицах (д.е.), то размерность первой производной $u'(w)$ имеет вид ю/д.е., размерность второй производной $u''(w)$ имеет вид ю/(д.е.)^2, поэтому абсолютная мера Эрроу–Пратта имеет размерность вида 1/д.е., а относительная мера Эрроу–Пратта – безразмерная величина.

Имеем

$$AP_r(w) = -w\frac{u''(w)}{u'(w)} = -\frac{(u'(w))'}{u'(w)} = -\frac{w}{u'}\cdot\frac{du'}{dw} = -E_w(u'),$$

где $E_w(u')$ – эластичность предельной полезности $u'(w)$ по доходу w.

Если индивидуум склонен к риску, то $u''(w) \geq 0$, и если $u'(w) > 0$, то

$$AP_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} \leq 0, \quad AP_r(w) = -w\frac{u''(w)}{u'(w)} \leq 0. \qquad (5.5.5)$$

Точнее, если $u''(w) \geq 0$ и $u'(w) > 0$, то справедливы неравенства (5.5.5).

Если $u''(w) \leq 0$ (означает, что индивидуум не склонен к риску) и если $u'(w) > 0$, то

$$AP_a(w) \geq 0, \quad AP_r(w) \geq 0.$$

Если $u''(w) = 0$, это эквивалентно тому, что индивидуум нейтрален к риску, и если $u'(w) > 0$, то

$$AP_a(w) = 0, \quad AP_r(w) = 0.$$

Меры $AP_a(w)$ и $AP_r(w)$ обладают следующими свойствами.

1. Пусть мера $AP_a(w)$ растет с ростом w, тогда с ростом w безрисковый эквивалент случайного выигрыша убывает, и наоборот.

2. Пусть мера $AP_a(w)$ возрастает с ростом w, тогда с ростом w спрос на рисковый актив убывает (т.е. рисковый актив – товар низкого качества).

Пусть мера $AP_a(w)$ убывает с ростом w, тогда с ростом w спрос на рисковый продукт возрастает (т.е. рисковый актив-товар нормальный).

3. Пусть $AP_a(w)$ убывает, а $AP_r(w)$ возрастает, тогда эластичность спроса на рисковый актив по доходу меньше единицы, т.е. рисковый актив – продукт первой необходимости. Пусть $AP_r(w)$ убывает, тогда эластичность больше единицы (т.е. рисковый актив – предмет роскоши).

Для описания функций полезности $u(w)$, для которых абсолютная и относительная меры $AP_a(w)$ и $AP_r(w)$ постоянны, следует решить обыкновенные дифференциальные уравнения

$$AP_a(w) = \alpha, \quad AP_r(w) = \beta,$$

где α и β – постоянные положительные параметры.

Эти уравнения путем понижения их порядка сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными, которые легко интегрируются.

Общее решение дифференциального уравнения

$$-\frac{u''(w)}{u'(w)} = \alpha$$

имеет вид $u(w) = -C_1 e^{-\alpha w} + C_2$ (проверяется непосредственно). При фиксированных постоянных $\tilde{N}_1$ ($C_1 > 0$) и C_2 функция $u(w)$ строго возрастает и выпукла вверх. Это означает, что индивидуум с функцией полезности $u(w)$ не склонен к риску.

Общее решение дифференциального уравнения

$$-w\frac{u''(w)}{u'(w)}=\beta$$

имеет вид

$$u(w)=C\frac{w^{1-\beta}}{1-\beta}+C_1 \quad (\beta\neq 1),$$

$$u_1(w)=C\ln C_1 w \quad (\beta=1)$$

(проверяется непосредственно).

При фиксированных положительных постоянных C и $\tilde{N}_1$ функции $u(w)$ и $u_1(w)$ строго возрастают и выпуклы вверх, что означает, что индивидуумы с функциями полезности $u(w)$ и $u_1(w)$ не склонны к риску.

5.5.6. Пример.

Пусть функция полезности индивидуума имеет вид

$$u=a\left(\frac{w}{b}\right)^{a},$$

где w – доход индивидуума;

u – уровень полезности индивидуума, которого он достигает, приобретая потребительский набор на сумму, равную его доходу w.

Для этой функции абсолютная и условная меры Эрроу–Пратта имеют вид (проверяется непосредственно)

$$AP_a(w)=-\frac{u''(w)}{u'(w)}=\frac{1-\alpha}{w},\quad AP_r(w)=-w\frac{u''(w)}{u'(w)}=1-\alpha.$$

При $0<\alpha<1$ имеем случай, когда индивидуум не склонен к риску. Очевидно, при этом $AP_a(w)>0$, $AP_r(w)>0$. Чем меньше α (т.е. чем ближе степень α к нулю), тем больше индивидуум не склонен к риску.

Рассматриваемый случай степенной функции полезности наглядно демонстрирует зависимость между отрицательным отношением к риску и относительной мерой Эрроу–Пратта: чем больше индивидуум не склонен к риску, тем ближе к единице относительная мера Эрроу–Пратта.

В частности, при $\alpha = {}^1/_2$ меры Эрроу–Пратта соответственно равны $AP_a(w) = 0{,}5/w$, $AP_r(w) = 0{,}5$, а при $\alpha = {}^1/_6$ они равны $AP_a(w) = 5/6w$, $AP_r(w) = 5/6$.

При $\alpha > 1$ имеем случай, когда индивидуум склонен к риску, при $\alpha = 1$ он к риску нейтрален. При $\alpha > 1$ $AP_a(w) < 0$, $AP_r(w) < 0$, при $\alpha = 1$ $AP_a(w) = 0$, $AP_r(w) = 0$.

Пусть $\alpha = 1/2$, $a = 10$, $b = 60$, $w_1 = 10$, $w_2 = 50$, $p_1 = p_2 = 0{,}5$.

Тогда при безрисковом уровне дохода $w_1 = 10$ ($w_2 = 50$) уровень полезности индивидуума равен

$$u_1 = u(w_1) = 10\left(\frac{10}{60}\right)^{1/2} \cong 4{,}08 \quad \left(u_2 = u(w_2) = 10\left(\frac{50}{60}\right)^{1/2} \cong 9{,}13\right).$$

Равенство $p_1 = p_2 = 0{,}5$ эквивалентно тому, что индивидуум с равными вероятностями выбирает доход $w_1 = 10$ или доход $w_2 = 50$, откуда вытекает, что математическое ожидание дохода индивидуума равно $M[w] = p_1 w_1 + p_2 w_2 = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 50 = 30$.

Полезность математического ожидания дохода $M[w] = 30$ равна

$$u_1 = u(M[w]) = 10\left(\frac{30}{60}\right)^{1/2} \cong 7{,}07,$$

а ожидаемая полезность индивидуума (математическое ожидание полезности) равна

$$M[w] = p_1 u(w_1) + p_2 u(w_2) = 0{,}5u_1 + 0{,}5u_2 \cong 30.$$

Определим безрисковый уровень $\bar{w}$ дохода, при котором полезность равна ожидаемой полезности $M[w]$, из следующего уравнения:

$$M[u] = 10\left(\frac{\bar{w}}{60}\right)^{1/2},$$

откуда получаем, что

$$\bar{w} = 60\left(\frac{M[u]}{10}\right)^2 \cong 26{,}18.$$

Премия за риск в рассматриваемом случае равна

$$M[w] - \bar{w} \cong 30 - 26{,}18 = 3{,}82.$$

т.е. безрисковый доход $\bar{w} \cong 26{,}18$ дает индивидууму полезность, равную ожидаемой полезности $M[u] = p_1 u(w_1) + p_2 u(w_2) \cong 6{,}61$ индивидуума при его случайном доходе с математическим ожиданием $M[w] = p_1 w_1 + p_2 w_2 = 30$. Другими словами, премия за риск равна той части дохода индивидуума, от которой он должен отказаться для того, чтобы ситуация определенности для него была эквивалентна ситуации неопределенности: $M[u] = u(\bar{w})$ (рис. 5.5), на котором представлен случай, когда $\alpha = {}^1/_2$. Линия $OA_1A_5A_3A_2C$ есть график функции полезности $u(w) = 10(w/60)^{1/2}$, точки $A_1 = (w_1, u_1)$, $A_2 = (w_2, u_2)$, $A_3 = (M[w], uM[w])) = (30; 7{,}07)$, $A_4 = (M[w], M[u]) = (30; 6{,}61)$, $A_5 = (\bar{w}, M[u]) = (26{,}18; 6{,}61)$. Длина отрезка A_5A_4, взятая со знаком плюс, равна премии за риск $M[w] - \bar{w} = 30 - 28{,}18 = 3{,}82$).

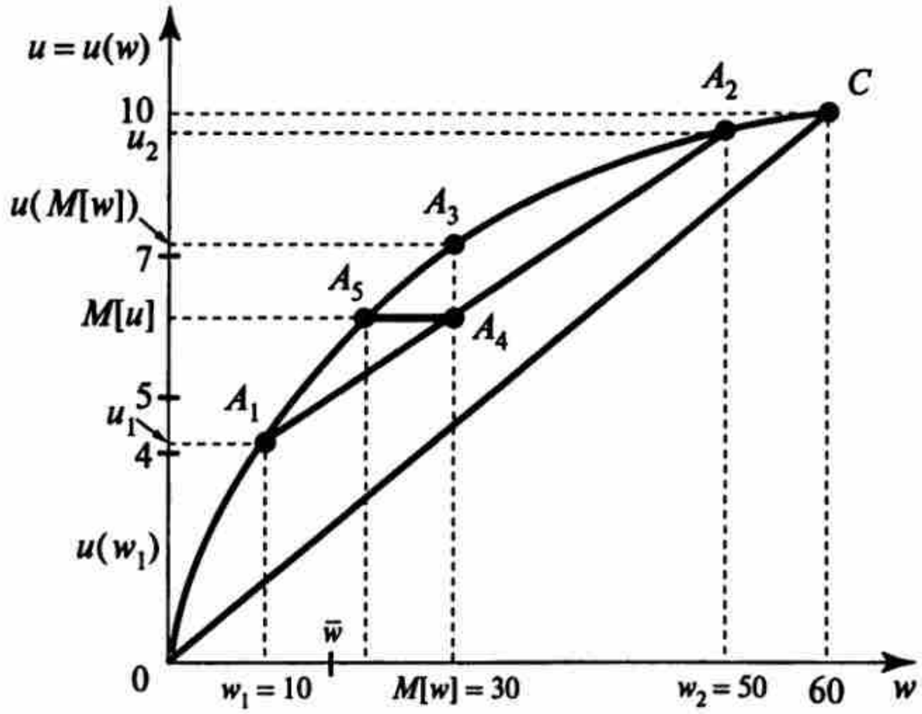


Рис. 5.5

Пусть теперь $\alpha = {}^1/_6$, а остальные величины a, b, w_1, w_2, p_1, p_2 такие же, как в случае, когда $\alpha = {}^1/_2$. В рассматриваемом варианте имеем

$$u_1 = u(w_1) = 10\left(\frac{10}{60}\right)^{1/6} \cong 7{,}42 \quad u_2 = u(w_2) = 10\left(\frac{50}{60}\right)^{1/6} \cong 9{,}7,$$

$$M[w] = p_1 w_1 + p_2 w_2 = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 50 = 30,$$

$$u = u(M[w]) = 10 \cdot \left(\frac{30}{60}\right)^{1/6} \cong 8{,}9,$$

$$M[w] = p_1 u(w_1) + p_2 u(w_2) = 0{,}5u_1 + 0{,}5u_2 \cong 8{,}56,$$

$$\bar{w} = 60\left(\frac{M(u)}{10}\right)^6 \cong 60\left(\frac{8{,}56}{10}\right)^6 = 23{,}59,$$

$$M[w] - \bar{w} \cong 30 - 23{,}59 = 6{,}41.$$

Мы видим, что во втором случае ($\alpha = {}^1/_6$), в котором уровень (степень) неприятия риска индивидуумом значительно выше, чем в первом случае ($\alpha = {}^1/_2$), премия за риск также значительно больше, чем в первом случае (рис. 5.6, на котором линии $OA_1A_5A_3A_2C$ и $OB_1B_5B_3B_2C$ суть графики функций полезности $u(w) = 10(w/60)^{1/2}$ и $u(w) = 10(w/60)^{1/6}$ соответственно). Длины отрезков A_5A_4 и B_5B_4, взятые со знаком плюс, равны соответственно премиям за риск в первом случае ($\alpha = {}^1/_2$) и во втором случае ($\alpha = {}^1/_6$) $|A_5A_4| = 3{,}82$ и $|B_5B_4| = 6{,}41$).

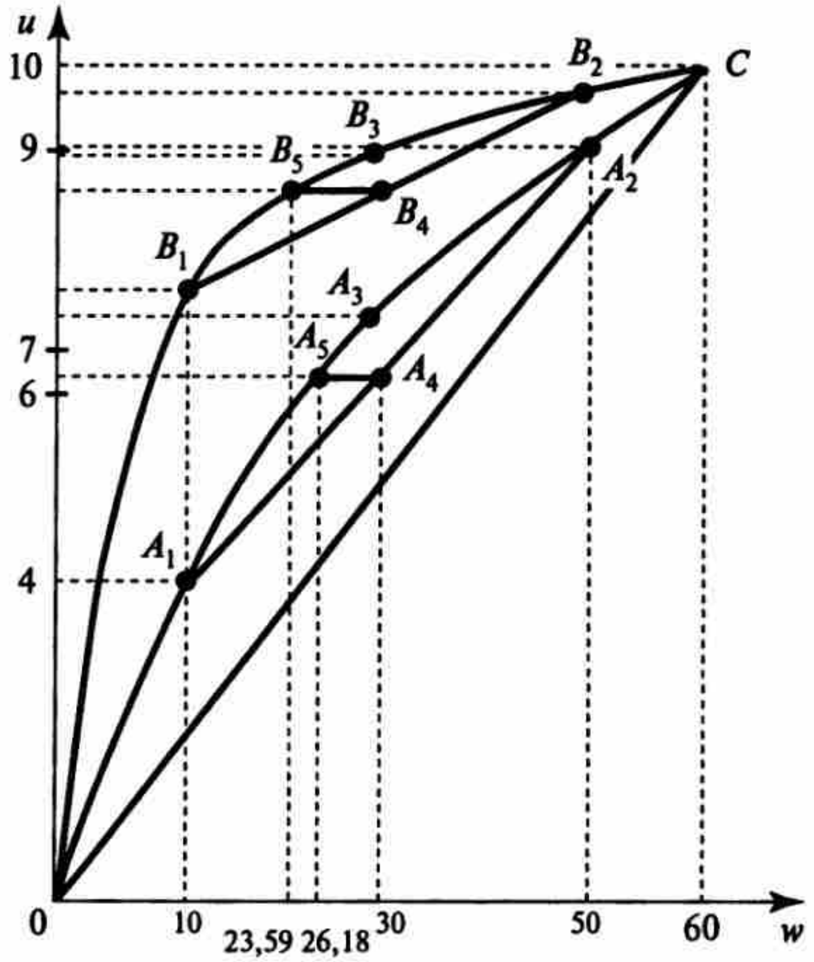


Рис. 5.6

5.6. Шкалы уровней риска

5.6.1. К настоящему времени еще не появились конкретные рекомендации по определению того, насколько «приемлем» тот или иной уровень риска в той или иной конкретной ситуации. В качестве ориентира для выработки таких рекомендаций могут быть использованы шкалы уровней риска, позволяющие классифицировать поведение лиц, которые идут на хозяйственный риск. В литературе отсутствует единый подход к формулировке и критериям оценки шкал риска.

Приведем ряд шкал уровня риска, которые содержатся в учебном пособии В.М. Гранатурова (1999; 2002). Начнем с эмпирической шкалы уровня риска (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Эмпирическая шкала уровней риска

№ п/п	Величина (уровень) риска (вероятность нежелательного результата принятого решения)	Градация риска
1	0,0–0,1	Минимальный риск
2	0,1–0,3	Малый риск
3	0,3–0,4	Средний риск
4	0,4–0,6	Высокий риск
5	0,6–0,8	Максимальный риск
6	0,8–1,0	Критический риск

Первые три градации вероятностей нежелательного результата принятого решения относятся к «нормальному», «разумному» риску, при котором можно принимать обычные хозяйственные (предпринимательские) решения. Принятие хозяйственного решения с большим уровнем риска зависит от склонности к риску лица, принимающего решение (ЛПР).

Рассмотрим еще одну шкалу, в которой величина (уровень) риска определяется на основании коэффициента вариации $V = \sigma / M(x)$, где $M(x)$ – математическое ожидание случайной величины, а σ – ее квадратичное отклонение (σ^2 – дисперсия случайной величины) (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Шкала уровней риска

№ п/п	Величина (уровень) риска (вероятность нежелательного результата принятого решения)	Градация риска
1	До 0,1	Слабый риск
2	От 0,1 до 0,25	Умеренный риск
3	Свыше 0,25	Высокий риск

Для оценки коэффициента вариации, определяющего риск банкротства, существуют разные точки зрения. Одни авторы считают, что оптимальным является коэффициент вариации, равный 0,3, а коэффициент вариации 0,7 и выше соответствует уровню риска, который ведет к банкротству. Промежуток от 0,3 до 0,7 представляет собой зону повышенного риска. Принятие решения о реализации рискового мероприятия в зоне повышенного риска (от 0,3 до 0,7) определяется величиной возможного выигрыша в случае, если рисковое событие не произойдет, и склонностью к риску ЛПР.

5.6.2. Безотносительно к величине (уровню) риска существуют относительные характеристики шкал риска по величине ожидаемых потерь. Эти шкалы можно рекомендовать для оценки приемлемости рискового решения. Опишем одну из таких шкал.

1. Промежуток (зона) приемлемого (минимального) риска характеризуется уровнем потерь, которые не превышают величину чистой прибыли фирмы.

2. Промежуток допустимого (повышенного) риска характеризуется уровнем потерь, которые не превышают величину расчетной прибыли фирмы.

3. Промежуток критического риска характеризуется тем, что в этом промежутке возможны потери, объем которых превышает величину расчетной прибыли, но не превышает величины ожидаемого дохода.

4. Промежуток катастрофического (недопустимого) риска характеризуется тем, что в его границах ожидаемые потери могут быть больше ожидаемых доходов и достичь величины, равной всему имущественному состоянию предпринимателя (фирмы). К катастрофическому риску следует отнести (вне зависимости от величины денежного и имущественного ущерба) такой риск, который связан с возникновением непосредственной опасности для жизни или экономических катастроф.

5.7. Методы предупреждения и снижения риска

5.7.1. В этом параграфе рассматриваются универсальные методы предупреждения и снижения риска. Эти методы имеют широкую область эффективного применения. Методы предупреждения и снижения риска в специфических условиях описаны и проанализированы в специальной литературе, посвященной проблемам риска.

К универсальным методам предупреждения риска принято относить методы:

1) страхования;
2) резервирования средств;
3) диверсификации;
4) лимитирования;
5) повышения уровня достоверности информации.

Страхование – один из наиболее распространенных методов предупреждения и снижения рисков. Страхование – это соглашение между страховой компанией, называемой страховщиком, и страхователем (т.е. индивидуумом или фирмой). Согласно этому соглашению страхователь выплачивает страховщику страховую премию, а страховщик обязуется возместить страхователю убытки (полностью или частично, в зависимости от договоренности) в случае наступления так называемого страхового случая. Например, индивидуум (страхователь), приобретая недвижимость, может иметь убытки, в частности в связи со стихийным бедствием. Вероятность p того, что индивидуум будет иметь убыток, равный сумме a руб., может иметь субъективную и объективную оценки. Математическое ожидание возможных потерь индивидуума, очевидно, равно $p \cdot a$ руб. Если индивидуум приобретает страховой полис, уплачивая страховщику страховую премию в размере $p \cdot a$ руб., то в случае наступления страхового случая страховщик возмещает индивидууму сумму не в $p \cdot a$ руб., а в размере a руб.

Сущность страхования состоит в том, что страхователь за определенную плату, равную страховой премии, передает риск (ответственность за негативные последствия принятого решения) страховщику, т.е. страховая премия есть премия за риск индивидуума, не склонного к риску (см. параграф 5.5).

Существуют три вида страхования: личное страхование, имущественное страхование и страхование ответственности.

В *имущественном страховании* объектом страховых соглашений выступают движимое и недвижимое имущество, а также имущественные интересы. Часто имущество страхуется на случай повреждения или его утраты в результате стихийных бедствий, несчастных случаев и т.п. Имущественные интересы страхуются на случай недополучения прибыли или доходов (т.е. упущенной выгоды), неплатежа по счетам продавца продукции, простоя оборудования, изменения валютных курсов.

Специфической формой страхования имущественных интересов является *хеджирование*, которое представляет собой систему мер, позволяющих исключить или ограничить риски финансовых операций в связи с неблагоприятным изменением валютных курсов, цен на товары, процентных ставок и т.п. в будущем. Такими мерами являются форвардные операции, опционы и др. В частности, хеджирование с помощью опционов предусматривает право (но не обязанность) страхователя за определенную плату (опционную премию) купить заранее оговоренное количество валюты по фиксированному курсу в определенный момент (в случае европейского опциона) и в течение фиксированного временнóго промежутка (в случае американского опциона). Опционная премия представляет собой аналог страхового взноса.

Хеджирование является, по сути, передачей риска одним лицом другому лицу, однако в отличие от других традиционных договоров страхования хеджирование не всегда предусматривает выплату страхователем страховых взносов, т.е. страховой премии. Например, в случае форвардных операций, предусматривающих куплю-продажу валюты в заранее согласованный день (в будущем) по фиксированному курсу, страхователь не несет никаких предварительных затрат. В качестве страхователя здесь выступает спекулянт, который принимает на себя риск, рассчитывая получить прибыль.

Страхование ответственности – это такой вид страхования, в котором объектом выступает ответственность страховщика перед третьими лицами за причиненный им ущерб вследствие какого-либо действия или бездействия страхователя (непогашение кредитов, нанесение ущерба окружающей среде и т.п).

Страхование риска имеет две разновидности: сострахование и перестрахование. Форма сострахования используется тогда, когда страховщик может выплатить только часть страховой суммы в страховом случае. Поэтому страхователь в случае наступления страхового случая должен получить оставшуюся часть страховой суммы у другого (других) страховщика(ов), с которым (с которыми) страхователь заключает отдельный договор, возможно на других условиях. Форма перестрахования свободна от недостатков сострахования, ибо в случае перестрахования страхователь делегирует (за определенную сумму) весь свой риск страховщику, который в случае необходимости уже от своего имени обращается к другому страховщику (страховщикам) с предложением о передаче ему части уже своего риска за определенную плату.

5.7.2. В случае резервирования средств как метода предупреждения и снижения отрицательных последствий наступления рисковых событий предприниматель (фирма) создает специальные фонды возмещения убытков за счет части собственного оборотного капитала. Резервирование средств целесообразно, если издержки резервирования меньше величины страховых взносов (страховых премий) в случае страхования. В связи с тем что резервные (т.е. страховые) фонды создаются на самом хозяйствующем субъекте, резервирование средств на покрытие убытков называют самострахованием.

Резервные фонды могут создаваться в натуральной или денежной форме. Например, субъекты сельскохозяйственного производства для предотвращения или возмещения потерь, вызываемых неблагоприятными природными условиями, создают натуральные резервные фонды (например, семенной фонд). В промышленном производстве, торговле создаются резервные запасы сырья, материалов на случай срыва поставок. Резервные денежные фонды создаются на случай непредвиденных расходов, которые могут появиться в связи с изменением тарифов, цен, оплатой исков и т.п.

В процессе оценки эффективности, выбора и обоснования вариантов снижения риска путем резервирования средств необходимо определить оптимальный объем этих резервируемых средств, т.е. оптимальный размер запасов. Для определения оптимальных размеров запасов в различных конкретных ситуациях построено большое число специальных экономико-математических моделей, совокупность которых составляет *теорию управления запасами*.

В связи с тем что задачи теории управления запасами могут быть сложными, используют на практике различные упрощенные критерии для определения требуемого размера резервных (страховых) фондов. За рубежом одни фирмы формируют страховые фонды в размере 1–5% от объема продаж, другие – 3–5% от годового фонда выплат акционерам. В Российской Федерации фирмам разрешено создавать свои страховые фонды за счет издержек в размере не более 1% реализованной продукции (товаров, услуг). Источником возмещения потерь при наступлении рискового случая служит прибыль.

5.7.3. В системе методов предупреждения и снижения риска важную роль играет *диверсификация*. Она представляет собой процесс распределения инвестируемых средств между различными объектами вложения, которые непосредственно не связаны между собой.

Диверсификация – эффективный метод снижения рисков в процессе управления портфелем ценных бумаг (см. параграф 5.8). Помимо этой важной области диверсификация широко применяется в промышленном производстве, торговле и в других областях предпринимательской деятельности. В частности, для снижения риска потерь, связанных с падением спроса на определенный вид продукции, фирма должна осваивать выпуск других видов продукции.

В страховом бизнесе диверсификация имеет форму расширения страхового поля, которое уменьшает вероятность одновременного наступления ряда страховых событий. В то же время страхование урожая, строений только на небольшом пространстве в случае стихийного бедствия может привести к необходимости одновременной выплаты значительных сумм.

Приведем примеры диверсификации в целях снижения банковских рисков:

1) при сохранении общего объема кредитования целесообразно предоставлять кредиты относительно мелкими суммами возможно большему числу клиентов;

2) образование валютных резервов в разной валюте в целях уменьшения потерь в случае падения курса одной из валют;

3) привлечение депозитных вкладов, ценных бумаг более мелкими суммами от большего числа вкладчиков и т.п.

Диверсификация акций, клиентов, услуг эффективна в случае независимости объектов вложения капитала друг от друга. В случае зависимости диверсификация неэффективна. Если, скажем, средства вложены в автопром, прокат тонких листов и в производство шин, т.е. формально достаточно диверсифицированы, то, по сути, такая диверсификация неэффективна, ибо эти производства зависят друг от друга.

Наиболее эффективна диверсификация в случае, когда выбираемые производства таковы, что спрос на их продукцию меняется в противоположных направлениях, т.е. корреляция между показателями этих производств отрицательна.

Диверсификация не может уменьшить систематический риск, который обусловлен общей экономической конъюнктурой и связан с войнами, инфляцией, глобальными изменениями налогообложения, изменениями денежной политики.

5.7.4. *Лимитирование* представляет собой установление нижних и верхних пределов в целях уменьшения риска. В частности, ограничение размеров кредитов, выдаваемых одному заемщику, позволяет уменьшить потери банка в случае невозврата кредита и процентов по кредиту. Превышение этой суммы может повлечь за собой отказ от страхования или использования перестрахования.

Приведем еще ряд примеров лимитирования. Применяются ограничения по срокам (заемных средств, инвестиций), по структуре (доле отдельных затрат в общем объеме, доле каждого вида ценных бумаг в общей стоимости портфеля), по уровню отдачи (установление нижнего уровня доходности проекта) и т.п.

5.7.5. *Повышение уровня достоверности информации* представляет собой важный метод предупреждения и снижения риска. Если индивидууму (потребителю, предпринимателю) информация более доступна, он может сделать лучший прогноз и уменьшить риск. Информация – это ценный товар, за который индивидуумы готовы платить и достаточно хорошо. *Ценность полной информации* равна разности между ожидаемой ценностью выбора при наличии полной информации и ожидаемой ценностью, когда информация неполная. Заплатив эту разность, можно получить значение ожидаемой ценности выбора при наличии полной информации и уменьшить риск.

Проведенный анализ методов предупреждения и снижения рисков показал, что любое мероприятие, направленное на предупреждение и снижение риска, имеет свою цену.

При страховании имущества или ответственности такой ценой является величина страховой премии (страховых взносов). При страховании посредством распределения риска за счет партнеров и инвесторов платой фирмы за снижение риска является отказ от части ее доходов в пользу других участников проекта, которые приняли на себя ответственность за часть риска.

При хеджировании с помощью опционов платой за снижение риска является опционная премия (которая аналогична страховой премии).

При резервировании платой за снижение риска являются издержки по созданию резервных фондов, а также уменьшению оборачиваемости оборотного производственного капитала, возможное ухудшение использования основного производственного капитала, что приводит к снижению прибыли фирмы.

Уменьшение риска путем диверсификации приводит к снижению ожидаемой отдачи (дивидендов, доходов, прибыли), ибо расширение области вложения средств, как правило, сопряжено с привлечением менее доходных областей вложения средств.

При лимитировании в качестве платы за снижение риска выступает снижение отдачи как следствие принятых дополнительных ограничений и исключения из рассмотрения возможных привлекательных вариантов.

На основании сказанного следует сравнивать получаемые результаты с целью и степенью их достижения и делать выводы об экономической целесообразности использования в каждом конкретном случае конкретных методов предупреждения и снижения риска.

В конкретных прикладных случаях целесообразно комплексно использовать различные методы предупреждения и снижения риска, комбинируя которые следует стремиться к оптимальному сочетанию уровня достигаемого снижения риска и необходимых для этого затрат.

5.8. Спрос на рисковые активы. Задача оптимизации инвестиционного портфеля

5.8.1. *Актив* – источник, обеспечивающий денежные поступления его владельцу. В частном жилом доме квартиры могут быть сданы в аренду, обеспечивая рентный доход его владельцу. Если индивидуум имеет срочный счет в банке, то банк ему выплачивает проценты (обычно ежегодно или ежемесячно), которые вновь поступают на тот же счет.

Рисковый актив дает денежные поступления, которые частично зависят от случая, т.е. предстоящие поступления неопределенны. Примером рискового актива является акция «Дженерал моторс» (ДМ), ибо владелец акции не знает, поднимется или упадет ее курс со временем, даже не может быть уверен, что ДМ будет продолжать выплачивать тот же дивиденд за акцию. Даже долгосрочные государственные облигации США (которые подлежат погашению через 10 или 20 лет) имеют элемент риска. Маловероятно, что федеральное правительство станет банкротом, но темпы инфляции могут неожиданно вырасти и обесценить выплаты по процентам и погашению номинала в реальном выражении и тем самым снизить стоимость облигаций.

Безрисковый (свободный от риска) актив обеспечивает денежные поступления в заранее установленном размере. Например, казначейские векселя США (краткосрочные государственные облигации США) погашаются через несколько месяцев, поэтому они являются почти безрисковыми активами.

Доходность актива – отношение общего объема денежных поступлений от актива к его цене. Если, скажем, цена дома, квартиры которого сдаются в аренду, выросла за год с 10 млн до 11 млн д. е., в течение года дом обеспечил чистый рентный доход в размере 0,5 млн д. е. Тогда $(11 - 10) + 0,5 = 1,5$ и $1,5/10 = 0,15 = 15\%$ – доходность актива.

Реальная доходность актива (с поправкой на инфляцию) равна номинальной доходности актива минус темп инфляции.

Ожидаемая доходность – это математическое ожидание его доходности, т.е. доходность, которую актив принес в среднем. Ожидаемая доходность близка к средней действительной доходности на длительном временно́м промежутке.

Различные активы имеют разные ожидаемые доходности. Например, табл. 5.3 показывает, что ожидаемая реальная доходность по казначейским векселям США была ниже 1%, в то время как доходность типичной акции на Нью-Йоркской фондовой бирже составляла почти 9%. Однако типичная акция в отличие от казначейского векселя США является более рисковым активом. Величина риска, измеряемого в показателях среднего квадратичного отклонения реальной доходности, равна 21,2 для обычной акции, 8,5% – для долгосрочных корпоративных облигаций и 3,4% – для казначейских билетов США. В табл. 5.3 наблюдается следующая закономерность: чем выше доход от инвестиций, тем больше связанный с этим риск. Следовательно, не склонный к риску вкладчик должен соизмерить ожидаемую доходность с величиной риска. Таким образом, спрос на активы зависит не только от их ожидаемой доходности, но и от риска.

Таблица 5.3

Инвестиции – риск и прибыль в США (1926–1991)

Ценные бумаги	Ожидаемая реальная доходность (%)	Величина риска (среднее отклонение) (%)
Обычные акции	8,3	21,2
Долгосрочные промышленные облигации	0,9	8,5
Казначейские векселя	0,15	3,4

5.8.2. Предположим, что индивидуум (далее – инвестор) вкладывает свои сбережения в активы двух видов: в казначейские векселя, которые почти не сопряжены с риском, и в акции, которые являются рисковым активом. Инвестор должен определиться с тем, какую часть своих сбережений ему следует вложить в казначейские билеты, а какую часть – в акции.

Пусть R_f – свободная от риска доходность (скажем, от казначейских векселей), R_m – ожидаемая доходность от акций, купленных на фондовой бирже, r_m – реальная доходность (она связана с риском).

Ожидаемая (R_m) и реальная (r_m) доходности связаны между собой так: $R_m = M[r_m]$, где символом M обозначено математическое ожидание реальной доходности, которая является случайной величиной. Отметим, что $M[R_f] = R_f$, ибо R_f – детерминированная, а не случайная величина.

У рисковых активов ожидаемая доходность выше, чем у безрисковых, т.е. $R_m > R_f$. Если бы это было не так, то рискофобы приобретали только казначейские билеты, а акции не покупали бы.

Пусть b – доля средств инвестора, размещенных на фондовой бирже, $(1 - b)$ – доля средств инвестора, используемая для покупки казначейских векселей.

Ожидаемая доходность (математическое ожидание доходности) R_p всего набора ценных бумаг равна средневзвешенным значениям ожидаемых доходностей (математических ожиданий доходностей) двух активов

$$R_p = bR_m + (1 - b)R_f, \tag{5.8.1}$$

ибо математическое ожидание $M[bR_m + (1 - b)R_f]$ суммы двух случайных величин $bR_m + (1 - b)R_f$ равно сумме их математических ожиданий:

$$M[bR_m + (1-b)R_f] = M[br_m] + M[(1-b)R_f] =$$
$$= bM[r_m] + (1-b)M[R_f] = bR_m + (1-b)R_f.$$

Риск от такого набора (портфеля) ценных бумаг $((1 - b), b)$ определяется с помощью дисперсии (квадратичного отклонения) общей доходности R_p всего набора ценных бумаг.

Пусть σ_m^2 – дисперсия (σ_m – среднее квадратичное отклонение) доходности от вклада в фондовую биржу.

Дисперсия σ_p^2 доходности набора (портфеля) ценных бумаг по определению дисперсии

$$\sigma_p^2 = M[br_m + (1-b)R_f - R_p]^2 =$$
$$= M[bR_m + (1-b)R_f - M(br_m + (1-b)R_f)]^2,$$

откуда следует, что

$$\sigma_p^2 \overset{(5.8.1)}{=} M[br_m + (1-b)R_f - bR_m - (1-b)R_f]^2 = M[b(r_m - R_m)]^2 = b^2\sigma_m^2,$$

т.е.

$$\sigma_p = b\sigma_m. \tag{5.8.2}$$

Имеем

$$R_p \overset{(5.8.1)}{=} bR_m + (1-b)R_f = R_f + b(R_m - R_f) \overset{(5.8.2)}{=} R_f + \frac{(R_m - R_f)}{\sigma_m}\sigma_p,$$

откуда вытекает, что ожидаемая доходность R_p имеет вид

$$R_p = R_f + \frac{(R_m - R_f)}{\sigma_m}\sigma_p. \tag{5.8.3}$$

Выражение (5.8.3) с содержательной точки зрения описывает взаимосвязь между риском (σ_p) и ожидаемым доходом (математическим ожиданием доходности) R_p; с формальной точки зрения уравнение (5.8.3) – это уравнение бюджетной прямой L в плоскости σ_p и R_p. Здесь R_f, R_m, σ_m – параметры, а

$$\frac{R_m - R_f}{\sigma_m} - \tag{5.8.4}$$

угловой коэффициент прямой (5.8.3) (рис. 5.7).

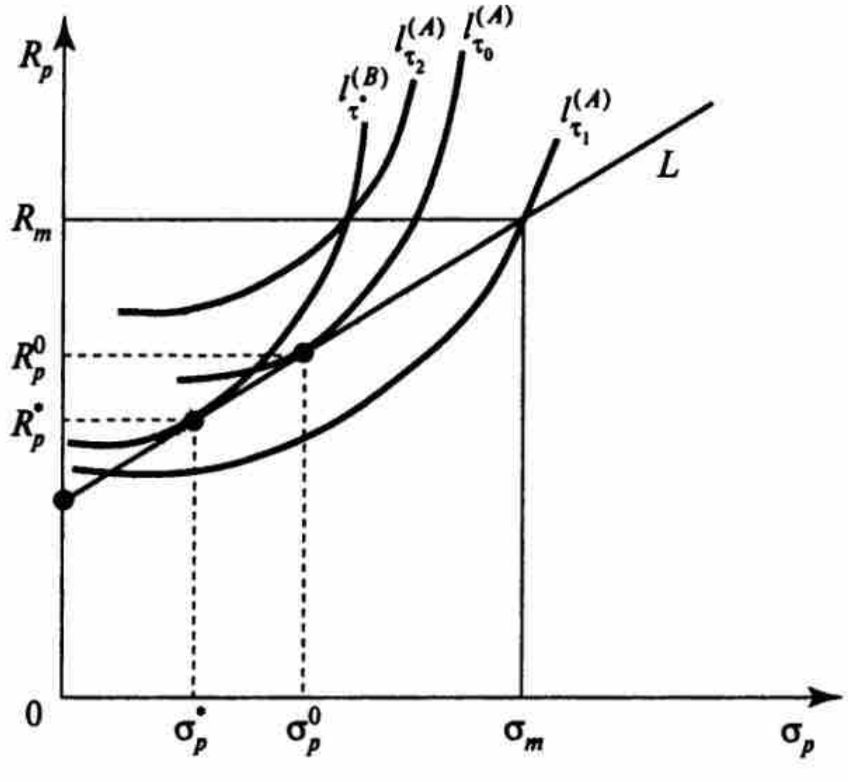


Рис. 5.7

С содержательной точки зрения дробь (5.8.4) есть цена риска, ибо ее обратная величина $\dfrac{\sigma_m}{R_m - R_f}$ показывает, насколько возрастет риск инвестора, если он намерен получить дополнительную единицу ожидаемой доходности

$$R_p = R_f + \frac{(R_m - R_f)}{\sigma_m}\sigma_p.$$

Линия безразличия инвестора показывает сочетание размеров риска и ожидаемой доходности, она идет с юго-запада на северо-восток, ибо рост размера риска следует компенсировать повышением ожидаемой доходности (рост ожидаемой доходности означает рост риска).

Фрагмент карт линий безразличия инвестора A содержит три линии безразличия $l_{\tau_1}^{(A)}$, $l_{\tau_0}^{(A)}$ и $l_{\tau_2}^{(A)}$ $(\tau_1 < \tau_0 < \tau_2)$. Линия $l_{\tau_0}^{(A)}$ касается бюджетной прямой L в точке с координатами (σ^0, R^0), что содержательно означает, что ожидаемая доходность инвестора A равна R^0, а риск равен σ_p^0, откуда $b = \sigma_p^0/\sigma_m$. Следовательно, оптимальный инвестиционный портфель инвестора A имеет вид $(1 - \sigma_p^0/\sigma_m, \sigma_p^0/\sigma_m)$. Точка касания линии безразличия $l_{\tau^*}^{(B)}$ инвестора B с бюджетной прямой имеет координаты (σ_p^*, R_p^*). Поскольку $\sigma_p^* < \sigma_p^0$, то инвестор A более склонен к риску, инвестор B менее склонен к риску.

5.9. Принятие решений в условиях неопределенности

5.9.1. В условиях неопределенности вероятности результатов принятых решений неизвестны или не имеют оценок. В условиях риска вероятности результатов принятых решений известны или для них могут быть получены оценки.

Для постановки и решения задачи оптимизации принимаемых решений используем табл. 5.4, называемую таблицей эффективностей.

В табл. 5.4 представлено конечное число (n) ситуаций и конечное число (m) принимаемых решений. Если решение B_i принимается в ситуации A_j, то результат (эффективность) этого решения характеризуется показателем a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Таблица 5.4

Таблица эффективностей

		Ситуации					
		A_1	A_2	...	A_j	...	A_n
Решения	B_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
	B_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...	...	...
	B_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
	...	...	...	...	...	...	...
	B_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

В ситуации A_j, $j = 1, \ldots, n$, наиболее эффективным является решение B_k, тогда $a_{kj} \geq a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$. Если в ситуации A_j, $j = 1, \ldots, n$, принимается решение B_i, $i = 1, \ldots, m$, такое, что $a_{ij} \leq a_{kj}$, то потери h_{ij}, которые появляются в связи с принятием этого решения B_i, очевидно, равны $h_{ij} = a_{kj} - a_{ij}$.

Теперь можно построить новую таблицу потерь (табл. 5.5), в которой вместо показателей эффективности a_{ij} помещаются потери h_{ij}.

Таблица 5.5

Таблица потерь

		Ситуации					
		A_1	A_2	...	A_j	...	A_n
Решения	B_1	h_{11}	h_{12}	...	h_{1j}	...	h_{1n}
	B_2	h_{21}	h_{22}	...	h_{2j}	...	h_{2n}
	...	...	...	...	...	...	...
	B_i	h_{i1}	h_{i2}	...	h_{ij}	...	h_{in}
	...	...	...	...	...	...	...
	B_m	h_{m1}	h_{m2}	...	h_{mj}	...	h_{mn}

Если ситуация A_1 появляется с вероятностью p_1, ситуация A_2 – с вероятностью p_2, …, ситуация A_n – с вероятностью A_n, то решение принимается в условиях риска. В этом случае средние потери первого варианта B_1 принимаемых решений равны

$$R_1 = h_{11}p_1 + \ldots + h_{1n}p_n,$$

второго варианта B_2 равны

$$R_1 = h_{11}p_1 + \ldots + h_{1n}p_n, \ldots,$$

варианта B_m равны

$$R_m = h_{m1}p_1 + \ldots + h_{mn}p_n.$$

Предпочтение отдается тому решению B_g, для которого средние потери минимальны.

Средние потери R_i решения B_i, $i = 1, \ldots, m$, естественно интерпретировать в качестве средневзвешенного показателя риска решения B_i, тогда решение B_g с минимальным средневзвешенным риском должно предпочитаться остальным решениям B_i, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq g$. Решение, предпочитаемое остальным решениям, называется оптимальным.

5.9.2. Если вероятности появления ситуаций неизвестны или для них невозможно получить какие-либо удовлетворительные оценки, приходится принимать решение в условиях неопределенности.

Классическими критериями принятия решения в условиях неопределенности являются:

1) принцип недостаточного обоснования Лапласа;
2) максиминный критерий Вальда;
3) минимаксный критерий Сэвиджа;
4) критерий обобщенного максимина (пессимизма – оптимизма) Гурвица.

Принцип недостаточного обоснования Лапласа применяется, если можно предположить, что все ситуации равновероятны. В этом случае выбирается то решение B_g, у которого средневзвешенный показатель риска минимален, т.е.

$$R_g = \min\{R_1, \ldots, R_m\},$$

при условии, что $p_1 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}$.

Выбираемое решение называется оптимальным по принципу недостаточного обоснования Лапласа.

Максиминный критерий Вальда используется, когда показатель эффективности в любой ситуации должен быть не меньше, чем наибольший показатель эффективности из возможных наихудших показателей. Формально максиминный критерий Вальда имеет вид

$$\max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n} a_{ij},$$

т.е. следует в каждой строке табл. 5.4 выбрать минимальный элемент a_{ij}, а потом из этих минимумов выбрать максимальный элемент. Пусть это будет элемент a_{i0j0}, тогда решение B_{i0} должно предпочитаться всем остальным решениям.

Решение B_{i0}, предпочитаемое остальным решениям, называется оптимальным по максиминному критерию Вальда.

Максиминный критерий Вальда ориентирует ЛПР на слишком осторожную стратегию поведения, поэтому этот критерий используется, когда необходимо обеспечить успех при любых возможных условиях.

Минимаксный критерий Сэвиджа используется, когда требуется при любых условиях избежать большого риска.

Формально минимаксный критерий Сэвиджа имеет вид

$$\min_{1\le i\le m}\max_{1\le j\le n} h_{ij},$$

т.е. следует в каждой строке табл. 5.5 выбрать максимальный элемент h_{ij}, а потом из этих максимумов выбрать минимальный элемент h_{i0j0}. Тогда решение B_{i0} должно предпочитаться всем остальным решениям.

Решение B_{i0}, предпочитаемое остальным решениям, называется оптимальным по минимаксному критерию Сэвиджа.

Этот критерий также ориентирует ЛПР на слишком осторожную стратегию поведения, только в отличие от критерия Вальда получения гарантированной эффективности критерий Сэвиджа минимизирует возможные потери. Это особенно важно, если конкуренты уже успели реализовать все свои преимущества.

Критерий обобщенного максимина (пессимизма – оптимизма) Гурвица используется, если требуется выбирать что-то промежуточное между двумя крайними стратегиями – стратегией, рассчитанной на получение худшего, и стратегией, рассчитанной на получение лучшего.

Формально критерий обобщенного максимина Гурвица имеет вид

$$\max_{1 \le i \le m} H_i,$$

где $H_i = \lambda \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\lambda) \max_{1 \le j \le n} a_{ij}$, где скалярный множитель $\lambda \in [0, 1]$ фиксирован.

Пусть $\max_{1 \le i \le m} H_i = H_{i0}$, тогда решение B_{i0} должно предпочитаться всем остальным решениям. Решение B_{i0}, предпочитаемое остальным решениям, называется оптимальным по критерию обобщенного максимина Гурвица.

Если скалярный множитель λ изменить, то может появиться новое оптимальное решение.

При $\lambda = 1$ критерий обобщенного максимина совпадает с критерием максимина Вальда. При $\lambda = 0$ мы имеем максимаксный критерий

$$\max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} a_{ij},$$

ориентированный на максимальную эффективность, которая, как правило, сопряжена с большим риском. Значения параметра λ между 0 и 1 являются промежуточными между осторожностью ($\lambda = 0$) и большим риском ($\lambda = 1$) и выбираются в зависимости от конкретной ситуации и склонности к риску ЛПР.

Приведенные здесь классические методы решения задачи в условиях неопределенности не исчерпывают всех существующих методов, рассмотрение которых выходит за рамки данного учебника.

5.9.3. Пример

Пусть таблица эффективностей имеет следующий вид (табл. 5.6).

Таблица 5.6

		Ситуации		
		A_1	A_2	A_3
Решения	B_1	0,3	0,4	0,6
	B_2	0,7	0,25	0,45
	B_3	0,4	0,9	0,15
	B_4	0,85	0,2	0,5

Здесь каждый показатель эффективности представляет собой относительную величину, например, удельную прибыль, удельный доход, т.е. прибыль, доход на единицу выпускаемой продукции.

Таблица потерь, построенная на основе таблицы эффективностей (см. табл. 5.6), имеет, очевидно, вид

Таблица 5.7

		Ситуации		
		A_1	A_2	A_3
Решения	B_1	0,55	0,5	0
	B_2	0,15	0,65	0,15
	B_3	0,45	0	0,45
	B_4	0	0,7	0,1

Пусть вероятности p_1, p_2, p_3 появления ситуаций A_1, A_2, A_3 соответственно равны $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,6$; $p_3 = 0,1$.

Тогда

$$R_1 = 0,55 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,1 = 0,465,$$

$$R_2 = 0,15 \cdot 0,3 + 0,65 \cdot 0,6 + 0,15 \cdot 0,1 = 0,45,$$

$$R_3 = 0,45 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,6 + 0,45 \cdot 0,1 = 0,18,$$

$$R_4 = 0 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,43.$$

Поскольку средние потери R_3 минимальны, постольку решение B_3 является наименее рискованным.

Используя принцип недостаточного обоснования Лапласа, положим $p_1 = p_2 = p_3 = {}^1/_3 = 0,33$.

Тогда

$$R_1 = (0,55 + 0,5 + 0) \cdot 0,33 = 0,35,$$

$$R_2 = (0,15 + 0,65 + 0,15) \cdot 0,33 = 0,31,$$

$$R_3 = (0,45 + 0 + 0,45) \cdot 0,33 = 0,3,$$

$$R_4 = (0 + 0,7 + 0,1) \cdot 0,33 = 0,26.$$

Поскольку средние потери R_1 минимальны, постольку следует в качестве оптимального выбрать решение B_1.

Используя максиминный критерий Вальда, будем иметь для табл. 5.6 (эффективностей)

	A_1	A_2	A_3	
B_1	0,3	0,4	0,6	0,3
B_2	0,7	0,25	0,45	0,25
B_3	0,4	0,9	0,15	0,15
B_4	0,85	0,2	0,5	0,2
				0,3

(в правом крайнем столбце выписаны минимальные элементы всех строк, самый нижний элемент крайнего правого столбца есть максимальный среди всех элементов правого столбца), т.е.

$$\max_{1 \le i \le 4} \min_{1 \le j \le 3} a_{ij} = 0,3,$$

откуда следует, что в качестве оптимального следует выбрать решение B_1.

Используя минимаксный критерий Сэвиджа, будем иметь для табл. 5.7 потерь

	A_1	A_2	A_3	
B_1	0,55	0,5	0	0,55
B_2	0,15	0,65	0,15	0,65
B_3	0,45	0	0,45	0,45
B_4	0	0,7	0,1	0,7
				0,45

(в правом крайнем столбце выписаны максимальные элементы всех строк, самый нижний элемент крайнего правого столбца есть минимальный элемент среди всех элементов правого столбца), т.е.

$$\min_{1 \le i \le 4} \max_{1 \le j \le 3} h_{ij} = 0,45,$$

откуда следует, что в качестве оптимального следует выбрать решение B_3.

Используя критерий обобщенного максимума Гурвица, будем иметь при $\lambda = 1$ случай максиминного критерия Вальда с оптимальным решением B_1.

При $\lambda = 0{,}67$ имеем для табл. 5.6 эффективностей

$$0{,}67\begin{bmatrix}0{,}3\\0{,}25\\0{,}15\\0{,}2\end{bmatrix} + 0{,}33\begin{bmatrix}0{,}6\\0{,}7\\0{,}9\\0{,}85\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}42\\0{,}4\\0{,}4\\0{,}41\\0{,}42\end{bmatrix}.$$

Здесь в левом столбце расположены минимальные элементы всех строк табл. 5.6, во втором столбце – максимальные элементы всех строк, третий столбец есть выпуклая комбинация первых двух столбцов. Самый нижний элемент последнего столбца – это максимальный элемент последнего столбца. Следовательно, при $\lambda = 0{,}67$ B_1 – оптимальное решение.

При $\lambda = 0{,}33$ имеем для табл. 5.6 эффективностей

$$0{,}33\begin{bmatrix}0{,}3\\0{,}25\\0{,}15\\0{,}2\end{bmatrix} + 0{,}67\begin{bmatrix}0{,}6\\0{,}7\\0{,}9\\0{,}85\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}5\\0{,}55\\0{,}52\\0{,}64\\0{,}64\end{bmatrix},$$

т.е. при $\lambda = 0{,}33$ B_4 – оптимальное решение.

При $\lambda = 0$ имеем для табл. 5.6 эффективностей

$$\begin{bmatrix}0{,}6\\0{,}7\\0{,}9\\0{,}85\\0{,}9\end{bmatrix},$$

т.е. при $\lambda = 0$ B_3 – оптимальное решение.

В рассматриваемом примере в условиях риска ($p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,6$; $p_3 = 0,1$) наименее рискованным является решение B_3.

Оптимальным решением по критерию Лапласа является решение B_1.

Оптимальным решением по критерию Вальда является решение B_1.

Оптимальным решением по критерию Сэвиджа является решение B_3.

Оптимальным решением по критерию Гурвица при $\lambda = 1$ является решение B_1, при $\lambda = 0,67$ – решение B_1, при $\lambda = 0,33$ – решение B_4, при $\lambda = 0$ – решение B_3.

Таким образом, из всех четырех решений B_1, B_2, B_3, B_4 в рассмотренном примере решения B_1 и B_3 являются самыми осторожными, а максимальным (т.е. самым рисковым) опять получилось решение B_3.

Вопросы для самоконтроля к главе 5

1. Что представляют собой понятия неопределенности и риска? В чем сходство и различие этих понятий?
2. В чем проявляется объективная природа риска?
3. В чем проявляется субъективно-объективная природа риска?
4. Какие основные причины неопределенности и риска?
5. Чем занимается экономическая теории риска?
6. Какие важные элементы охватывает классификация рисков?
7. Что такое производственный риск? Назовите причины возникновения производственного риска.
8. Что такое коммерческий риск? Перечислите причины возникновения коммерческого риска.
9. Что такое финансовый риск? Раскройте причины возникновения финансового риска.
10. Что такое посреднический риск? Назовите причины возникновения посреднического риска.
11. Что такое риск страхования? Перечислите причины возникновения риска страхования.
12. Что представляет собой структура предпринимательских рисков?
13. Что представляют собой внешние риски?
14. Что такое страновой риск?
15. Что такое валютный риск?
16. Что такое системный риск?
17. Что такое налоговый риск?
18. Что такое риск форс-мажорных обстоятельств?

19. Что представляют собой внутренние риски?
20. Что такое организационный риск?
21. Что такое портфельный риск?
22. Что такое кредитный риск?
23. Что такое инновационный риск?
24. Что такое ожидаемый доход?
25. Что такое ожидаемая полезность?
26. Как связаны между собой математическое ожидание (случайной) полезности и полезность математического ожидания (случайного) дохода, равного безрисковому доходу, если индивидуум рискофоб? Приведите графическую иллюстрацию.
27. Как связаны между собой математическое ожидание (случайной) полезности и полезность математического ожидания (случайного) дохода, равного безрисковому доходу, если индивидуум рискофил? Приведите графическую иллюстрацию.
28. Как связаны между собой математическое ожидание (случайной) полезности и полезность математического ожидания (случайного) дохода, равного безрисковому доходу, если индивидуум рисконейтрал? Приведите геометрическую интерпретацию.
29. Что такое премия за риск? Чему равна премия за риск, если индивидуум рискофоб? рискофил? рисконейтрал? Дайте геометрическую интерпретацию для всех трех случаев.
30. Как определяется абсолютная мера Эрроу – Пратта? Какую она имеет размерность?
31. Как определяется относительная мера Эрроу – Пратта? Какую она имеет размерность? Как она связана с эластичностью предельной полезности по доходу?
32. Каковы свойства абсолютной и относительной мер Эрроу – Пратта?
33. Для каких функций полезности абсолютная мера Эрроу – Пратта постоянна?
34. Для каких функций полезности относительная мера Эрроу – Пратта постоянна?
35. Что представляет собой шкала уровней риска? Приведите практические значения шкал уровней риска.
36. Каковы универсальные методы предупреждения и снижения риска?
37. В чем суть страхования как метода предупреждения и снижения риска?
38. Что такое хеджирование?
39. В чем суть резервирования средств как метода предупреждения и снижения риска?
40. В чем суть диверсификации как метода предупреждения и снижения риска?
41. В чем суть лимитирования как метода предупреждения и снижения риска?

42. В чем суть повышения уровня достоверности информации как метода предупреждения и снижения риска?
43. Что представляет собой таблица решений по снижению риска? Приведите практическое значение таблицы решений.
44. Что представляют собой актив, рисковый актив, безрисковый актив?
45. Что представляют собой доходность актива, реальная доходность актива, ожидаемая доходность актива?
46. Что представляет собой ожидаемая доходность инвестиционного портфеля?
47. Что представляет собой содержательная интерпретация углового коэффициента бюджетной прямой?
48. Как объяснить, что линии безразличия функции полезности инвестора имеют положительный наклон?
49. Как строятся таблицы эффективностей и таблицы потерь?
50. Как с помощью таблицы потерь выявляется оптимальное решение в условиях риска?
51. Как формулируется принцип недостаточного обоснования Лапласа?
52. Какое решение называется оптимальным по принципу недостаточного обоснования Лапласа?
53. Как формулируется максиминный критерий Вальда?
54. Какое решение называется оптимальным по максиминному критерию Вальда?
55. Как формулируется минимаксный критерий Сэвиджа?
56. Какое решение называется оптимальным по минимаксному критерию Сэвиджа?
57. Как формулируется критерий обобщенного максимина Гурвица?
58. Какое решение является оптимальным по критерию обобщенного максимина Гурвица?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 5

1. В лотерею можно ничего не выиграть с вероятностью $p_1 = 0,5$, выиграть 10 руб. с вероятностью $p_2 = 0,3$, выиграть 50 руб. с вероятностью $p_3 = 0,07$, выиграть 100 руб. с вероятностью $p_4 = 0,03$:
   а) найдите математическое ожидание участника лотереи;
   б) найдите дисперсию всех исходов лотереи, а также среднее квадратичное отклонение и вариацию;
   в) сколько готов заплатить рисконейтрал, чтобы принять участие в лотерее?
   г) сколько готов заплатить рискофоб, чтобы принять участие в лотерее?

2. Вложение в бизнес имеет три возможных исхода: получение прибыли 1000 д.е. с вероятностью $p_1 = 0,2$, получение прибыли 500 д.е. с вероятностью $p_2 = 0,5$, получение убытка – 200 д.е. с вероятностью $p_3 = 0,3$:
   а) найдите математическое ожидание этого неопределенного вложения в бизнес;
   б) найдите дисперсию всех возможных исходов, а также среднее квадратичное отклонение и вариацию.
3. Фермер может оказаться в одной из двух ситуаций: дождливое лето, засушливое лето. Вероятность дождливого лета равна $p_1 = 0,4$, вероятность засушливого лета равна 0,6. У фермера два варианта решений – вносить удобрения, не вносить удобрения. Сведем все эти данные в платежную таблицу, содержащую информацию о возможных доходах (в д.е.) фермера:

		Ситуации	
		Дождливое лето	Засушливое лето
Решения	Не удобрять	100 д.е.	10 д.е.
	Удобрять	60 д.е.	30 д.е.
	Вероятности	0,4	0,6

   а) какое решение примет рискофоб, рисконейтрал, рискофил?
   б) дайте геометрическую интерпретацию всех трех случаев.
4. Функция полезности индивидуума имеет вид $u = w^{\alpha}$, где w – доход индивидуума, а параметр $0 < \alpha < 1$ (все расчеты проводить при $\alpha_1 = {}^1/_3$ и $\alpha_2 = {}^1/_7$):
   а) является ли индивидуум рискофобом, рисконейтралом или рискофилом? Ответ обоснуйте. Дайте геометрическую интерпретацию;
   б) доход индивидуума равен 20 д.е. Индивидууму предлагают новые условия, в которых с вероятностями 0,5 его доход может вырасти на 10 д.е., но может и упасть на 15 д.е. Примет ли индивидуум новые условия?
   в) определите абсолютную и относительную меры Эрроу – Пратта для данной функции полезности;
   г) выполните пункты а), б), в) и г) при $\alpha_3 = 2$ и $\alpha_4 = 6$.
5. Приведите в графической и аналитической формах пример функции полезности $u = u(w)$ индивидуума (w – его доход), который при низком доходе является рискофилом, а при высоком доходе – рискофобом.

6. Таблица эффективностей имеет вид:

		Ситуации			
		A_1	A_2	A_3	A_4
Решения	B_1	0,5	0,6	0,6	0,7
	B_2	0,4	0,3	0,5	0,15
	B_3	0,7	0,8	0,2	0,3
	B_4	0,9	0,2	0,3	0,1

а) постройте таблицу потерь;
б) найдите оптимальное решение в условиях риска, если вероятность появления ситуации A_1 равна $p_1 = 0,1$, ситуации $A_2 - 0,3$, ситуации $A_3 - 0,4$, ситуации $A_4 - 0,2$;
в) найдите решение, оптимальное по принципу недостаточного обоснования Лапласа;
г) найдите решение, оптимальное по максиминному критерию Вальда;
д) найдите решение, оптимальное по минимаксному критерию Сэвиджа;
е) найдите решение, оптимальное по критерию обобщенного максимина Гурвица (рассмотрите $\lambda = 1$, $\lambda = 0,8$, $\lambda = 0,6$, $\lambda = 0,4$, $\lambda = 0,2$, $\lambda = 0$).

Вопросы и тесты для контрольных работ к главе 5

1. Риск – это:
   а) возможность опасности;
   б) действие на удачу;
   в) вероятность возникновения убытков;
   г) ответы а)–в) не верны;
   д) ответы а)–в) верны.
2. Основные причины неопределенности:
   а) случайность;
   б) столкновение противоречивых интересов;
   в) вероятностный характер НТП;
   г) все ответы а)–в) верны;
   д) ни один из ответов а), б), в) не является верным.
3. Основные причины неопределенности и риска:
   а) ограниченность ресурсов при принятии решения;
   б) невозможность выйти на такой уровень познания объекта, который был бы достаточным для принятия верного решения;

в) относительная ограниченность сознательной деятельности ЛПР;
г) все ответы а)–в) верны;
д) все ответы а)–в) не верны.

4. По времени возникновения риски распределяются на:
   а) внешние;
   б) текущие;
   в) политические;
   г) чистые;
   д) внутренние.
5. По характеру учета риски делятся на:
   а) перспективные;
   б) политические;
   в) коммерческие;
   г) внутренние;
   д) ретроспективные.
6. К внешним предпринимательским рискам необходимо отнести следующий риск:
   а) организационный;
   б) системный;
   в) кредитный;
   г) ресурсный;
   д) инновационный.
7. К внутренним предпринимательским рискам необходимо отнести следующий риск:
   а) валютный;
   б) налоговый;
   в) системный;
   г) кредитный;
   д) все ответы а)–г) не верны.
8. Для рискофоба:
   а) ожидаемая полезность строго больше полезности в условиях отсутствия риска;
   б) ожидаемая полезность равна полезности в условиях отсутствия риска;
   в) ожидаемая полезность строго меньше полезности в условиях отсутствия риска;
   г) нет однозначного ответа о взаимосвязи между ожидаемой полезностью и полезностью в условиях отсутствия риска;
   д) все ответы а)–г) не верны.
9. Для рискофоба премия за риск:
   а) положительна;
   б) отрицательна;
   в) равна нулю;

г) нет однозначного ответа;
д) все ответы а)–г) не верны.

10. В случае перестрахования:
   а) страхователь перекладывает риск за определенную плату одновременно на двух (и более) страховщиков;
   б) страховщик перекладывает часть своего риска за определенную плату на другого страховщика;
   в) страховщик заключает со страхователем договор на часть общей суммы страхового договора;
   г) перестрахование – теоретическое понятие, которое не имеет аналогов в практике страхования.
   д) все ответы а)–г) не верны.
11. Диверсификация в целях снижения банковских рисков представляет собой:
   а) уменьшение кредитуемых вкладчикам сумм;
   б) расширение числа клиентов при сохранении или уменьшении общей суммы, выделяемой для их кредитования;
   в) образование резервов в разных валютах;
   г) привлечение депозитных вкладов более мелкими суммами от большего числа вкладчиков;
   д) все ответы а)–г) верны.
12. Применяемый принцип недостаточного обоснования Лапласа – это:
   а) частный вариант выбора оптимального решения в условиях риска;
   б) обобщение максиминного критерия Вальда;
   в) обобщение минимаксного критерия Сэвиджа;
   г) обобщение критерия Гурвица;
   д) все ответы а)–г) не верны.
13. Оптимальное по критерию Вальда решение:
   а) минимизирует возможные потери;
   б) обеспечивает успех при любых возможных условиях;
   в) может быть получено при условии наличия равновероятных ситуаций;
   г) совпадает с максимальным решением Гурвица;
   д) все ответы а)–г) верны.
14. Оптимальное по критерию Сэвиджа решение:
   а) минимизирует возможные потери;
   б) обеспечивает успех при любых возможных условиях;
   в) может быть получено только при условии наличия равновероятных ситуаций;
   г) совпадает с максиминным решением Вальда;
   д) все ответы неверны.

Задачи для контрольных работ к главе 5

1. В лотерею можно ничего не выиграть с вероятностью $p_1 = 0{,}7$, выиграть 10 руб. с вероятностью $p_2 = 0{,}2$, выиграть 50 руб. с вероятностью $p_3 = 0{,}08$, выиграть 100 руб. с вероятностью $p_4 = 0{,}02$:
   а) найдите математическое ожидание участника лотереи;
   б) найдите дисперсию всех исходов лотереи, а также квадратичное отклонение и вариацию;
   в) найдите премию за риск для участника лотереи, если участник рискофоб, рисконейтрал, рискофил.
2. Вложение в бизнес имеет три возможных исхода: получение прибыли 2000 д.е. с вероятностью $p_1 = 0{,}1$, получение прибыли 800 д.е. с вероятностью $p_2 = 0{,}4$, получение убытка 300 д.е. с вероятностью $p_3 = 0{,}5$:
   а) найдите математическое ожидание этого неопределенного вложения в бизнес;
   б) найдите дисперсию всех возможных исходов, а также среднее квадратичное отклонение и вариацию.
3. Ближайшее для студента лето может оказаться дождливым или засушливым. Вероятность дождливого лета равна $p_1 = 0{,}3$, вероятность сухого лета – 0,7. У студента два варианта решений – подрядиться на работу или отдохнуть. Сведем все эти данные в платежную таблицу, содержащую информацию о возможных доходах (в д.е.) студента:

		Ситуации	
		Дождливое лето	Засушливое лето
Решения	Работать	1000	1500
	Отдыхать	–500	–800
	Вероятности	0,3	0,7

   а) какое решение примет рискофоб, рисконейтрал, рискофил?
   б) дайте геометрическую интерпретацию всех трех случаев.
4. Таблица эффективностей имеет следующий вид:

		Ситуации			
		A_1	A_2	A_3	A_4
Решения	B_1	0,9	0,5	0,4	0,3
	B_2	0,4	0,2	0,7	0,5
	B_3	0,5	0,8	0,5	0,2
	B_4	0,3	0,6	0,3	0,6

а) постройте таблицу потерь;
б) найдите оптимальное решение в условиях риска, если вероятность появления ситуации A_1 равна $p_1 = 0{,}4$, ситуации A_2 – 0,3, ситуации A_3 – 0,1, ситуации A_4 – 0,2;
в) найдите решение, оптимальное по принципу недостаточного обоснования Лапласа;
г) найдите решение, оптимальное по максиминному критерию Вальда;
д) найдите решение, оптимальное по минимаксному критерию Сэвиджа;
е) найдите решение, оптимальное по критерию обобщенного максимина Гурвица (рассмотрите $\lambda = 1$, $\lambda = 0{,}75$, $\lambda = 0{,}5$, $\lambda = 0{,}25$, $\lambda = 0$).

5. Функция полезности индивидуума имеет вид $u = w^{\alpha}$, где w – доход индивидуума, а параметр $0 < \alpha < 1$ (все расчеты проводите при $\alpha_1 = {}^1/_4$ и $\alpha_2 = {}^1/_9$):
   а) доход индивидуума равен 40 е.д. Индивидууму предлагают новые условия, в которых равновероятно его доход может вырасти на 30 д.е., но может и упасть на 20 д.е. Примет ли индивидуум новые условия?
   б) определите, сколько будет стоить страховка индивидуума, приобретаемая в целях элиминирования неопределенности, связанной с новыми условиями;
   в) выполните пункты а) и б) при $\alpha_3 = 3$ и $\alpha_4 = 7$.
6. Приведите в графической и аналитической формах пример функции полезности $u = u(w)$ индивидуума (w – его доход), который при низком доходе является рискофобом, а при высоком доходе – рискофилом.

Глава 6

ТЕОРИЯ ФИРМЫ, ФУНКЦИОНИРУЮЩЕЙ В УСЛОВИЯХ ЧИСТОЙ КОНКУРЕНЦИИ

6.1. Задача максимизации прибыли фирмы в долговременном и краткосрочном промежутках. Локальное рыночное равновесие фирмы. Функции спроса на ресурсы со стороны фирмы и функция предложения фирмы. Аргументы «за» и «против» максимизации прибыли. Понятие «разумной прибыли»

6.1.1. Согласно теории микроэкономики и соображениям многих практиков задача максимизации прибыли является основной целью функционирования фирмы в условиях конкуренции. Это положение кажется бесспорным, если рассматривать фирму как исходный элемент (атом) системы производства.

Суть проблемы максимизации прибыли фирмы усложняется, если фирму рассматривать самостоятельно в качестве сложной системы.

Приведем ряд аргументов «за» и «против» максимизации прибыли фирмы. Ряд аргументов наиболее убедителен «в случае атома», другой ряд — «в случае сложной системы».

Сначала аргументы «за»:

- мотив прибыли — самая универсальная и устойчивая сила, направляющая деловое поведение фирмы, в связи с тем, что влияние других целей фирмы на ее поведение относительно невелико, ибо их учет не способствует лучшему объяснению и прогнозированию поведения фирмы, но значительно усложняет анализ;

- конкуренция заставляет фирмы преследовать цель максимизации прибыли, ибо если фирма в конкурентной борьбе имеет шанс заработать хоть какую-то прибыль, то она должна стремиться ее максимизировать;
- допущение о максимизации прибыли фирмы позволяет точно предсказать ее поведение, ибо экономисты успешно применяли это допущение в качестве основы для прогнозирования поведения во времени цен и объемов производства фирм;
- допущение о максимизации прибыли фирмы полезно для общего понимания и объяснения ее поведения.

Приведем аргументы «против»:

- цель максимизации прибыли фирмы бессмысленна в качестве основы для принятия решений о поведении фирмы, ибо в условиях неопределенности невозможно установить, какое из направлений деятельности фирмы приведет к максимизации прибыли. Лучшее решение в одной ситуации не обязательно будет таковым в другой;
- отделение управления от собственности дает менеджерам свободу преследовать другие, отличные от максимизации прибыли цели;
- существует много примеров того, что практическая деятельность фирмы не связана с максимизацией ее прибыли;
- фирма находит выгодным для себя избегать получения максимально возможной прибыли, ибо максимальная прибыль может привлечь новых конкурентов, спровоцировать антитрестовские акции, требования профсоюза повысить заработную плату;
- максимизация прибыли — дело трудное, малореалистичное и даже аморальное, ибо может спровоцировать бизнесменов на торгашеские уловки (понижение зарплаты, повышение цен, снижение качества производимого продукта, давление на поставщиков, чтобы они снизили цены). Мотив максимизации прибыли может быть решающим для повышения уровня деградации окружающей среды за счет роста общественных издержек в связи с сокращением затрат на охрану окружающей среды и борьбу с загрязнениями.

Если фирму рассматривать как сложную систему, основными элементами которой являются собственники (акционеры), менеджеры (управляющие) и наемная рабочая сила, то сразу в поле зрения появляются по меньшей мере три целевые функции: максимизация прибыли (целевая функция собственников, которые получают дивиденды из прибыли), долговременный устойчивый рост (целевая функция менеджеров) и максимизация заработной платы (целевая функция наемных работников). К числу системных целевых элементов следует отнести также минимизацию степени риска, с учетом которого прибыль фирмы может оказаться недостаточной для ее дальнейшего развития. Таким образом, речь идет о векторной целевой функции оптимального функционирования фирмы в условиях конкуренции. Векторная целевая функция путем свертки ее координат с определенными весами может быть превращена в скалярную целевую функцию.

Если фирма имеет сильный профсоюз, то это обстоятельство должно быть отражено в повышении относительного веса той координаты векторной целевой функции, которая показывает уровень заработной платы наемных работников. Если на фирме сформировался крепкий и влиятельный корпус менеджеров, относительно больший вес получает та координата векторной целевой функции, которая характеризует темп долговременного устойчивого роста фирмы. Если на фирме большим влиянием пользуется совет директоров (совет акционеров) (заметим, что для конкретной реальной фирмы это может и не иметь места), то относительно больший вес получает та координата векторной целевой функции, которая равна собственно прибыли фирмы.

В связи со сказанным актуальным становится понятие «разумной» прибыли, которое разными руководителями высшего звена управления фирмы толкуется совершенно по-разному:

- «разумная» прибыль позволяет фирме выполнять свои обязательства перед акционерами и приобретать средства, необходимые для производства в будущем товаров, услуг и создания рабочих мест;
- прибыль «разумная», если она позволяет фирме выживать;
- «разумная» прибыль фирмы должна несколько превышать уровень, необходимый для привлечения инвесторов в другие аналогичные фирмы, которые характеризуются той же степенью риска;

- в связи с тем что «высокая» (по сравнению с неким средним уровнем) прибыль с учетом риска может оказаться недостаточной для дальнейшего развития фирмы, такие описательные ярлыки, как «справедливая прибыль», «разумная прибыль», имеют мало смысла.

Для анализа и прогнозирования поведения фирмы, функционирующей в условиях конкуренции, одних качественных рассуждений недостаточно, ибо необходимо получение конкретных величин, характеризующих рациональное поведение фирмы.

Далее будут рассмотрены и проанализированы три классические модели оптимального функционирования фирмы, в которых четко разграничиваются экзогенные и эндогенные переменные, отражающие рыночную ситуацию и характеризующие оптимальное состояние фирмы. Развитие этих моделей путем перехода к векторной оптимизации и путем учета рисков и неопределенности в этой книге не рассматривается.

6.1.2. Задача максимизации прибыли фирмы и две ее версии (задача максимизации выпуска при лимите на ресурсы и задача минимизации издержек при фиксированном объеме выпускаемой продукции) будут рассмотрены в случаях долговременного и краткосрочного промежутков.

В случае долговременного промежутка задача максимизации прибыли имеет вид (в случае двух ресурсов — капитала и труда)

$$PR(x_1, x_2) = p_0 \cdot f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2 \to (\max), \qquad (6.1.1)$$

где $f(x_1, x_2)$ — производственная функция (ПФ) фирмы;
p_0 — цена выпускаемой фирмой продукции (например, валенок);
p_1 и p_2 — цена на капитал и труд;
x_1 — количество капитала;
x_2 — количество труда.

Данными (экзогенными) величинами являются цены p_0, p_1, p_2, искомыми (эндогенными) величинами — количества x_1 и x_2 капитала и труда. Все величины p_0, p_1, p_2, x_1 и x_2, а также производственная функция $f(x_1, x_2)$ привязаны к текущему периоду (атому времени) t (номер t в модели явно не показывается). Число периодов между базовым (нулевым) периодом и текущим периодом такое, что они составляют долговременный промежуток, в течение которого фирма может свободно распоряжаться как капиталом, так и трудом.

Таким образом, если в базовом периоде фирме известны цены p_0, p_1, p_2 текущего периода, то, решив задачу (6.1.1), фирма будет знать, какое количество капитала x_1^0 и какое количество труда x_2^0 фирма должна приобрести в текущем периоде, чтобы в этом периоде максимизировать свою прибыль.

Особо отметим, что необходимый расчет фирма производит заранее, чтобы в течение долговременного промежутка подготовить к функционированию требуемое количество капитала x_1^0 и требуемое количество труда x_2^0. Фиксированные цены p_0, p_1, p_2 означают, что фирма на эти цены влиять не может, т.е. принимается важная предпосылка, что фирма является конкурентной, т.е. на рынке готовой продукции (например, валенок) и на рынке ресурсов фирма функционирует в условиях чистой конкуренции.

6.1.3. Для решения задачи (6.1.1) следует выписать условия первого порядка, т.е. систему двух уравнений с двумя переменными

$$\frac{\partial PR}{\partial x_1} = p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial PR}{\partial x_2} = p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - p_2 = 0 \qquad (6.1.2)$$

и решить эту систему.

Решение (x_1^0, x_2^0) системы (6.1.2) является глобальным максимумом прибыли $PR(x_1, x_2)$, ибо производственная функция $f(x_1, x_2)$ обладает рядом специфических свойств (в частности, ее изокванты, как правило, суть линии строго выпуклые к точке $O = (0, 0)$).

Решение (x_1^0, x_2^0) системы (6.1.2) называется локальным рыночным равновесием фирмы. Термин «локальный» означает, что на рынке готовой продукции (например, валенок) и на рынках ресурсов (капитала и труда) функционирует одна (а не несколько) фирма. В связи с тем что решение (x_1^0, x_2^0) зависит от экзогенных переменных p_0, p_1, p_2, получаются две функции спроса со стороны фирмы на рынке ресурсов: функция спроса $x_1^0 = g_1(p_0, p_1, p_2)$ на капитал и функция спроса на труд $x_2^0 = g_2(p_0, p_1, p_2)$.

Функция $y^0 = h(p_0, p_1, p_2) = f(x_1^0, x_2^0)$ есть функция предложения фирмой своей продукции на рынке продукции.

Хорошо известно, что все три функции $x_1^0 = g_1(p_0, p_1, p_2)$, $x_2^0 = g_2(p_0, p_1, p_2)$, $y^0 = h(p_0, p_1, p_2)$ однородны нулевой степени по Эйлеру. Это означает, что при изменении масштаба цен значения x_1^0, x_2^0, y^0 не меняются.

6.1.4. В случае краткосрочного промежутка задача максимизации прибыли имеет вид (6.1.1) с дополнительным условием

$$x_1 = \bar{x}_1, \tag{6.1.3}$$

т.е. в математическом отношении это задача на абсолютный максимум одной переменной

$$PR(\bar{x}_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - p_1\bar{x}_1 - p_2 x_2.$$

Здесь фиксированное количество $\bar{x}_1$ капитала означает, что в течение краткосрочного промежутка между базовым и текущим периодами фирма не имеет возможности скорректировать количество $\bar{x}_1$ капитала.

Здесь и далее вместо условия вида (6.1.3) может фигурировать более общее условие $g(x_1, x_2) \le 0$.

6.1.5. Приведем решение задачи (глобальной) максимизации прибыли фирмы в случае, когда ПФ $f(x_1, x_2)$ фирмы есть ПФ Кобба – Дугласа.

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \quad (\alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0, \alpha_1 + \alpha_2 < 1).$$

В рассматриваемом случае имеем

$$PR = p_0 a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} - p_1 x_1 - p_2 x_2.$$

Условия первого порядка имеют вид

$$\frac{\partial PR}{\partial x_1} = p_0 a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} - p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial PR}{\partial x_2} = p_0 a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} - p_2 = 0.$$

После деления первого уравнения на второе и сокращений

$$\frac{p_0 a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}}{p_0 a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}} = \frac{p_1}{p_2}, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}$$

получим выражение для x_2

$$x_2 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} x_1.$$

Подставив его в первое из двух уравнений, будем иметь

$$p_0 a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1}\left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}\right)^{\alpha_2} x_1^{\alpha_2} - p_1 = 0,$$

откуда после ряда элементарных преобразований выражения

$$x_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} = \frac{p_1}{\alpha_1 a_0 p_0\left(\dfrac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}\right)^{\alpha_2}}$$

получим

$$x_1^0 = (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Объединяя первое и последнее звенья цепочки

$$x_2^0 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} x_1^0 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}(a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} =$$

$$= (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}},$$

будем иметь

$$x_2^0 = (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Точка (x_1^0, x_2^0) – критическая точка прибыли $PR(x_1, x_2)$, ибо обращает в нуль частные производные прибыли.

Выше отмечалось, что в экономических задачах весьма часто критическая точка является точкой не только локального, но и глобального максимума.

Проверим в рассматриваемом случае выполнение условий второго порядка:

$$\frac{\partial^2 PR}{\partial x_1^2} = p_0 a_0 \alpha_1 (\alpha_1 - 1) x_1^{\alpha_1 - 2} x_2^{\alpha_2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 PR}{\partial x_2^2} = p_0 a_0 \alpha_2 (\alpha_2 - 1) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 2},$$

$$\frac{\partial^2 PR}{\partial x_1 \partial x_2} = p_0 a_0 \alpha_1 \alpha_2 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1},$$

$$\frac{\partial^2 PR}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 PR}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 PR}{\partial x_1 \partial x_2} =$$

$$= (p_0 a_0)^2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) x_1^{2\alpha_1 - 2} x_2^{2\alpha_2 - 2} - (p_0 a_0)^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} =$$

$$= (p_0 a_0)^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} (\alpha_1(\alpha_1 - 1)\alpha_2(\alpha_2 - 1) - \alpha_1^2 \alpha_2^2) =$$

$$= (p_0 a_0)^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} ((\alpha_1^2 - \alpha_1)(\alpha_2^2 - \alpha_2) - \alpha_1^2 \alpha_2^2) =$$

$$= (p_0 a_0)^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} (\alpha_1^2 \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1^2 \alpha_2^2) =$$

$$= (p_0 a_0)^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)) =$$

$$= (p_0 a_0)^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 > 0.$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 PR(x_1^0; x_2^0)}{\partial x_1^2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 PR(x_1^0; x_2^0)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 PR(x_1^0; x_2^0)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 PR(x_1^0; x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2} > 0,$$

на основании условий второго порядка критическая точка (x_1^0, x_2^0) есть точка локального максимума функции $PR(x_1, x_2)$.

Поскольку функция $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ $(\alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0;\ 0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 1)$ выпукла вверх для всех $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, постольку локальный максимум является глобальным.

Таким образом, при конфигурации ресурсов (x_1^0, x_2^0) фирма будет иметь максимальную прибыль:

$$PR^0 = p_0 a_0 (x_1^0)^{\alpha_1} (x_2^0)^{\alpha_2} - p_1 x_1^0 - p_2 x_2^0 =$$

$$= (p_0 a_0)(a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}\alpha_1} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}\alpha_1} \cdot (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}\alpha_2} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}\alpha_1} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}\alpha_2} - p_1 (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} -$$

$$- p_2 (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} =$$

$$= (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot$$

$$\left[\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} - p_1 \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} - \right.$$

$$\left. - p_2 \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \right] =$$

$$= (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot$$

$$\left[\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} - \alpha_1 \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} - \right.$$

$$\left. - \alpha_2 \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \right] =$$

$$= (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} (1 - \alpha_1 - \alpha_2).$$

Задача (глобальной) максимизации прибыли фирмы в случае ПФ Кобба – Дугласа ($\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$)) решена.

Если $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, прибыль $PR(x_1, x_2)$ имеет вид

$$PR = a_0 p_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha_1} - p_1 x_1 - p_2 x_2.$$

Если, например, $x_2 = kx_1$, то

$$PR = a_0 p_0 x_1^{\alpha_1} (k x_1)^{1-\alpha_1} - p_1 x_1 - p_2 k x_1 =$$
$$= a_0 p_0 k^{1-\alpha_1} x_1 - (p_1 + p_2 k) x_1 = (a_0 p_0 k^{1-\alpha_1} - p_1 - p_2 k) x_1,$$

Отсюда вытекает, что если в последнем звене круглая скобка равна нулю, то максимальная $PR = 0$. Если круглая скобка положительна, то максимальная $PR \to +\infty$ при $x_1 \to +\infty$. Если круглая скобка отрицательна, то максимальная $PR = 0$. При $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ и при $x_2 = kx_1$ $PR \to +\infty$ при $x_1 \to +\infty$. То есть в случае $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 1$ и $x_2 = kx_1$ задача максимизации PR либо имеет тривиальное решение $x_1^0 = x_2^0 = 0$ и $PR^0 = 0$, либо решения не имеет.

6.2. Задача максимизации выпуска фирмы при лимите на используемые ею ресурсы в долговременном и краткосрочном промежутках. Функции условного спроса по Маршаллу (по Вальрасу) на ресурсы со стороны фирмы и функция условного выпуска фирмы

6.2.1. Задача максимизации выпуска фирмы при лимите на ресурсы – первая версия задачи максимизации прибыли фирмы. Второй версией задачи максимизации прибыли фирмы является задача минимизации издержек при фиксированном объеме выпускаемой продукции, которая анализируется в параграфе 6.4.

Если фирма имеет лимит на ресурсы, равный V, т.е.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = V, \qquad (6.2.1)$$

то задача (6.1.1) максимизации прибыли фирмы в долговременном промежутке приобретает вид $PR = p_0 f(x_1, x_2) - V \to \max$, что эквивалентно задаче

$$f(x_1, x_2) \to \max \qquad (6.2.2)$$

при наличии ограничения (6.2.1) на условный экстремум.

Хорошо известно, что задачу (6.2.2), (6.2.1) следует решать методом Лагранжа: составить функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(V - p_1x_1 - p_2x_2) \qquad (6.2.3)$$

и решить систему трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, λ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} &= \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0, \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} &= \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0, \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} &= V - p_1x_1 - p_2x_2 = 0, \end{aligned} \qquad (6.2.4)$$

которые представляют собой условия первого порядка.

В связи с тем что ПФ $f(x_1, x_2)$ обладает рядом специфических свойств, одним из которых является строгая выпуклость изоквант к точке O, короткая точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ есть точка глобального максимума целевой функции (6.2.2) при наличии ограничения (6.2.1). Напомним, что длинная точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$ является единственным решением системы (6.2.4).

В связи с тем что формальная задача (6.2.2), (6.2.1) максимизации выпуска фирмы при лимите на ресурсы не отличается от задачи максимизации функции полезности потребителя при бюджетном ограничении (см. параграф 1.1), мы воспользуемся формальными результатами параграфа 1.1.

Функции $\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, p_2, V)$, $\hat{x}_2 = \varphi_2(p_1, p_2, V)$ называются функциями условного спроса по Маршаллу (по Вальрасу) на ресурсы со стороны фирмы на рынках ресурсов (капитала и труда). Функция $\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = f(\varphi_1(p_1, p_2, V), \varphi_2(p_1, p_2, V)) = \theta(p_1, p_2, V)$ называется функцией условного предложения фирмы на рынке продукции (например, на рынке валенок), $\hat{\lambda} = \varphi_3(p_1, p_2, V)$.

Подставив длинную точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$ в первые два уравнения системы (6.2.4), получим равенство

$$\operatorname{grad} f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{\lambda} \cdot (p_1, p_2), \qquad (6.2.5)$$

откуда следует, что множитель Лагранжа $\hat{\lambda}$, как правило, получается достаточно малым, ибо цены p_1 и p_2 на ресурсы относительно велики, а предельные производительности ресурсов

$$\frac{\partial f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_2}$$

при значительных количествах $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ расходуемых ресурсов относительно малы.

Все функции $\varphi_1(p_1, p_2, V)$, $\varphi_2(p_1, p_2, V)$ и $\theta(p_1, p_2, V)$ однородны нулевой степени относительно всех трех переменных p_1, p_2, V.

С изменением лимита V от нуля до $+\infty$ и при фиксированных ценах p_1 и p_2 на ресурсы точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\varphi_1(p_1, p_2, V), \varphi_2(p_1, p_2, V))$ заметает (от слова «метла») на плоскости Ox_1x_2 линию L, которая называется *линией развития фирмы в долговременном промежутке*. Линия L развития фирмы аналогична линии доход–потребление в теории поведения потребителя на рынке (рис. 6.1, на котором лимит принимает два значения V_1 и V_2 и на котором также показано локальное рыночное равновесие (x_1^0, x_2^0) фирмы, т.е. решение задачи 6.1.1).

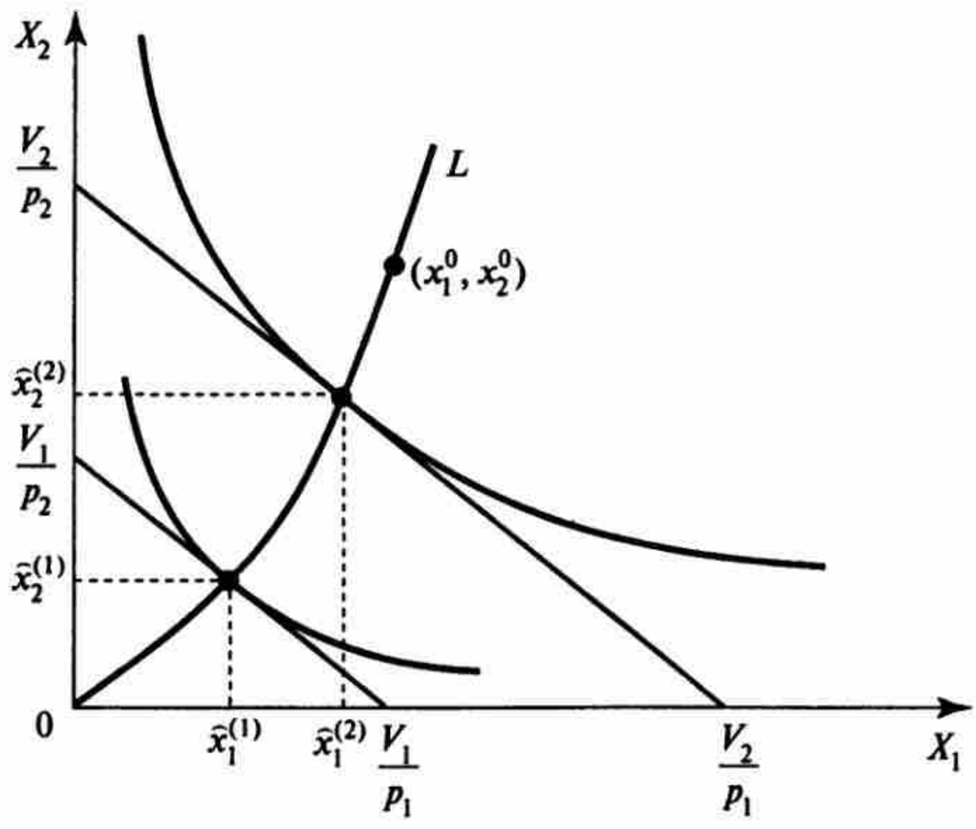


Рис. 6.1

6.2.2. Задача максимизации выпуска фирмы при лимите на ресурсы в краткосрочном промежутке есть задача (6.2.2), (6.2.1) при дополнительном ограничении

$$x_1 = \bar{x}_1, \tag{6.2.6}$$

Приведем геометрическое решение этой задачи (на рис. 6.2 – конфигурация ресурсов $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$). На рис. 6.2 для сравнения показано решение задачи (6.2.2), (6.2.1) в долговременном промежутке (см. конфигурацию ресурсов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ на рис. 6.2). Рисунок 6.2 иллюстрирует важное положение: при одном и том же лимите V на ресурсы в случае долговременного промежутка объем выпуска $\hat{y}$ фирмы больше (не меньше) объема выпуска $\bar{y}(\hat{y} \geq \bar{y})$ в случае краткосрочного промежутка.

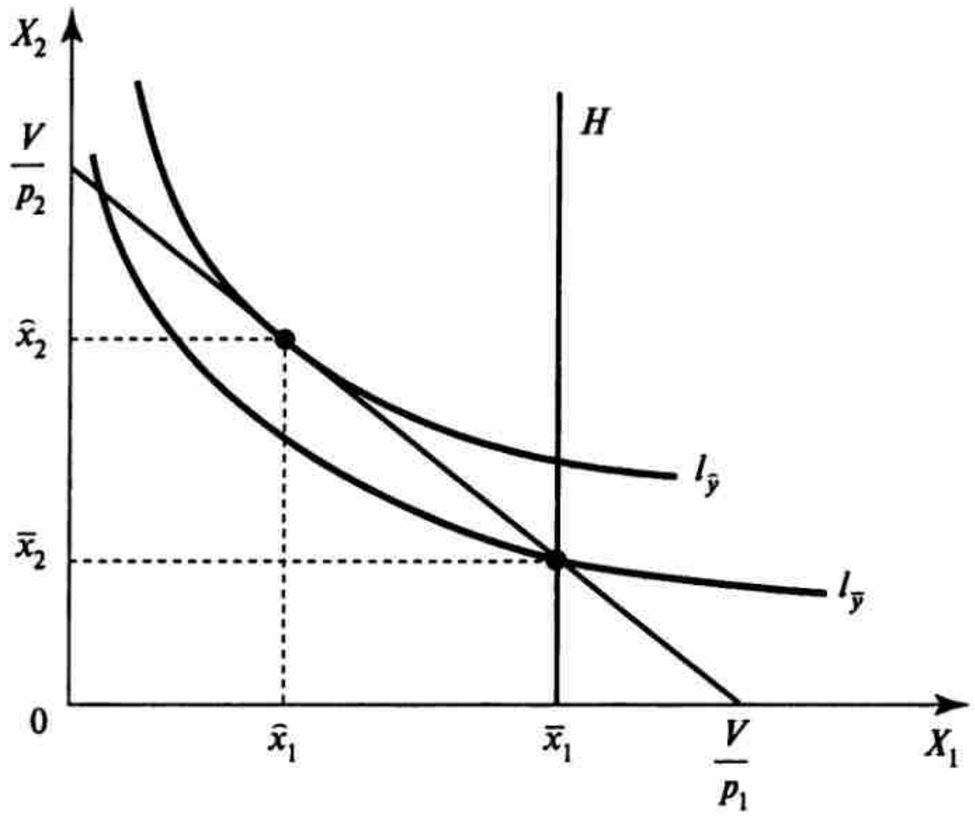


Рис. 6.2

При вариации лимита V на ресурсы конфигурация $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ресурсов будет перемещаться по линии H, которая, следовательно, есть *линия развития фирмы в краткосрочном промежутке*.

6.2.3. Приведем решение задачи максимизации выпуска фирмы при наличии лимита C на ресурсы в случае, когда производственная функция $f(x_1, x_2)$ фирмы есть функция Кобба – Дугласа $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$:

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \to \max,$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = C.$$

Здесь p_1 и p_2 – рыночные цены на ресурсы. Искомыми переменными являются объемы x_1 и x_2 первого и второго ресурсов.

Составим функцию Лагранжа

$$L = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \lambda(C - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

и выпишем для нее условия первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} - \lambda p_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} - \lambda p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = C - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0,$$

откуда получаем равенство дробей

$$\frac{a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}}{a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

После элементарных преобразований имеем

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}, \text{ или } x_2 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} x_1.$$

Подставив выражение для x_2 в ограничение $C = p_1 x_1 + p_2 x_2$, получим

$$C - p_1 x_1 - p_2 \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} x_1 = 0, \text{ или } C\alpha_1 = (\alpha_1 + \alpha_2) p_1 x_1,$$

откуда

$$\hat{x} = \varphi_1(p_1, p_2, C) = \frac{\alpha_1 C}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_1}$$

(функция условного спроса (по Маршаллу) на первый ресурс со стороны фирмы на рынке).

Для x_2 имеем

$$\hat{x}_2 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \hat{x}_1 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \cdot \frac{\alpha_1 c}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_1} = \frac{\alpha_2 c}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_2},$$

$$\hat{x}_2 = \frac{\alpha_2 C}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_2} = \varphi_2(p_1, p_2, C)$$

(функция условного спроса (по Маршаллу) на второй ресурс со стороны фирмы на рынке).

Имеем

$$f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = a_0(\hat{x}_1)^{\alpha_1}(\hat{x}_2)^{\alpha_2} = \alpha_0\left(\frac{\alpha_1 C}{(\alpha_1+\alpha_2)p_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2 C}{(\alpha_1+\alpha_2)p_2}\right)^{\alpha_2} =$$

$$= a_0\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\alpha_2}\frac{C^{\alpha_1+\alpha_2}}{(\alpha_1+\alpha_2)^{\alpha_1+\alpha_2}} = \theta(p_1, p_2, C)$$

или

$$\theta(p_1, p_2, C) = a_0\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\alpha_2}\frac{C^{\alpha_1+\alpha_2}}{(\alpha_1+\alpha_2)^{\alpha_1+\alpha_2}}$$

(функция условного предложения выпуска фирмы на рынке).

6.3. Предельный условный выпуск по лимиту и предельный условный выпуск по цене ресурса (тождество Роя)

6.3.1. Предельный условный выпуск по лимиту равен множителю Лагранжа $\hat{\lambda}$

$$\frac{\partial\theta(p_1, p_2, V)}{\partial V} = \hat{\lambda}. \tag{6.3.1}$$

Предельный условный выпуск по цене p_i ресурса вида i ($i = 1, 2$) равен $-\breve{x}_i\hat{\lambda}$, т.е.

$$\frac{\partial\theta(p_1, p_2, V)}{\partial p_i} = -\hat{x}_i\hat{\lambda}, \quad i = 1, 2. \tag{6.3.2}$$

Формально эти результаты ничем не отличаются соответственно от предельной полезности по доходу и предельной полезности по цене p_i продукта G_i ($i = 1, 2$) в теории потребления (см. параграф 1.2).

6.3.2. Выражения (6.3.1) и (6.3.2) принято называть утверждениями (теоремами) о маргинальных значениях. Эти выражения позволяют проводить анализ чувствительности условного выпуска относительно изменения лимита на ресурсы и цен на ресурсы.

Формула (6.3.1) показывает, что при росте на ΔV (относительно малых) единиц лимита на ресурсы условное предложение фирмы $\theta(p_1, p_2, V)$ увеличится приблизительно на $\hat{\lambda}\Delta V$ единиц. Учитывая достаточную малость множителя Лагранжа $\hat{\lambda}$, получили важный качественный результат, основанный на использовании формулы (6.3.1):

$$\theta(p_1, p_2, V+\Delta V) \cong \theta(p_1, p_2, V) + \hat{\lambda}\Delta V.$$

Аналогично формула (6.3.2) показывает, что при росте на Δp_i (относительно малых) единиц цены p_i на ресурс вида i ($i = 1, 2$) условное предложение фирмы $\theta(p_1, p_2, V)$ уменьшается приблизительно на $\hat{\lambda}\Delta p_i$ единиц. Учитывая достаточную малость множителя Лагранжа $\hat{\lambda}$, получим важный качественный результат, основанный на использовании формулы (6.3.2):

$$\theta(p_1+\Delta p_1, p_2, V) \cong \theta(p_1, p_2, V) - \hat{\lambda}\cdot\hat{x}_1\Delta p_1.$$

Для цены p_2 на второй ресурс получим аналогичное выражение:

$$\theta(p_1, p_2+\Delta p_2, V) \cong \theta(p_1, p_2, V) - \hat{x}_2\cdot\hat{\lambda}.$$

6.4. Задача минимизации издержек фирмы при фиксированном выпуске фирмы в долговременном и краткосрочном промежутках. Функции условного спроса по Хиксу на ресурсы со стороны фирмы и функция условных издержек фирмы

6.4.1. Вторая версия задачи максимизации прибыли фирмы есть задача минимизации издержек при фиксированном объеме $\breve{y}$ выпускаемой фирмой продукции.

Если фирма имеет фиксированный выпуск $\breve{y} = f(x_1, x_2)$, т.е.

$$\breve{y} = f(x_1, x_2), \tag{6.4.1}$$

то задача (6.1.1) максимизации прибыли фирмы в долговременном промежутке приобретает вид $PR = p_0\breve{y} - p_1x_1 - p_2x_2 \to \max$, что эквивалентно задаче

$$p_1x_1 + p_2x_2 \to \min \tag{6.4.2}$$

при наличии ограничения (6.4.1) на условный экстремум. Для решения задачи (6.4.2) и (6.4.1) составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \breve{y}) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(\breve{y} - f(x_1, x_2)) \tag{6.4.3}$$

и затем выпишем условия первого порядка

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = p_2 - \lambda \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial \lambda} = 0, \qquad (6.4.4)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = \breve{y} - f(x_1, x_2) = 0.$$

Аналогично системе (6.2.4) система (6.4.4), в которой фигурирует ПФ со своей спецификой, имеет единственное решение $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ (длинная точка). Короткая точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ есть точка глобального минимума задачи (6.4.2), (6.4.1), которая формально ничем не отличается от задачи минимизации расхода при фиксированном уровне полезности (см. параграф 1.3).

Функции $\breve{x}_1 = \psi_1(p_1, p_2, \breve{y})$, $\breve{x}_2 = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y})$ называются функциями условного спроса по Хиксу на ресурсы со стороны фирмы на рынках ресурсов (капитала и труда), $\breve{\lambda} = \psi_3(p_1, p_2, \breve{y})$.

Функция $\breve{C} = p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \psi_1(p_1,\ p_2,\ \breve{y}) + p_2 \psi_2(p_1,\ p_2,\ \breve{y}) = C(p_1, p_2, \breve{y})$ называется функцией условных издержек фирмы.

Подставив длинную точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ в первые два уравнения системы (6.4.4), получим равенство

$$(p_1, p_2) = \breve{\lambda} \cdot grad\, f(\breve{x}_1, \breve{x}_2), \qquad (6.4.5)$$

откуда следует, что множитель Лагранжа $\breve{\lambda}$, как правило, получается достаточно большим, ибо цены p_1 и p_2 на ресурсы относительно велики, а предельные производительности ресурсов относительно малы.

Функции $\psi_1(p_1, p_2, \breve{y})$, $\psi_2(p_1, p_2, \breve{y})$ однородны нулевой степени по переменным p_1 и p_2, а функция $C(p_1, p_2, \breve{y})$ однородна первой степени по переменным p_1 и p_2.

С изменением объема $\breve{y}$ от нуля до $+\infty$ и при фиксированных ценах p_1 и p_2 на ресурсы конфигурация ресурсов $(\breve{x}_1, \breve{x}_2) = (\psi_1(p_1, p_2, \breve{y}), \psi_2(p_1, p_2, \breve{y}))$ заметает на плоскости Ox_1x_2 линию развития фирмы L (см. параграф 6.2, рис. 6.1 и рис. 6.3). На рис. 6.3 фиксированный выпуск $\breve{y}$ принимает два значения – $\breve{y}_1$ и $\breve{y}_2$ ($\breve{y}_2 > \breve{y}_1$). На рис. 6.3 также показано локальное рыночное равновесие (x_1^0, x_2^0) (см. параграф 6.1).

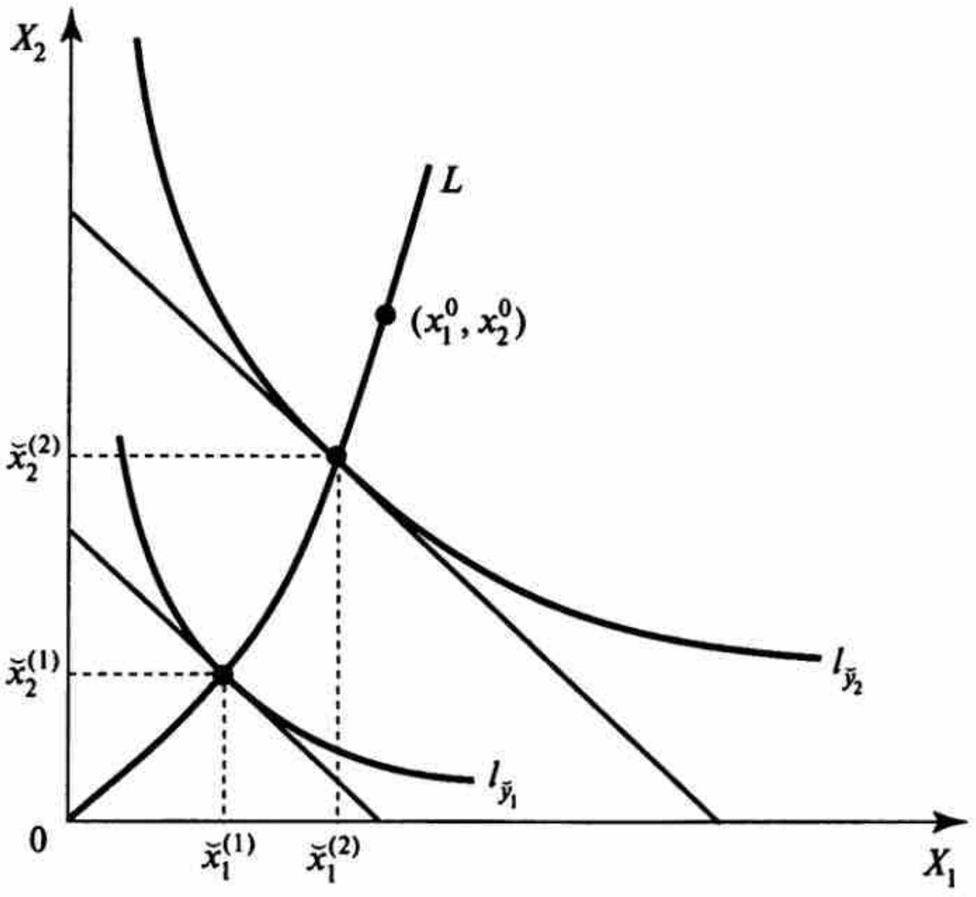


Рис. 6.3

6.4.2. Задача минимизации издержек фирмы при фиксированном объеме $\breve{y}$ выпускаемой продукции в краткосрочном промежутке является задачей (6.4.2), (6.4.1) при дополнительном ограничении

$$x_1 = \bar{x}_1. \tag{6.4.6}$$

Приведем геометрическое решение этой задачи (см. конфигурацию ресурсов $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ на рис. 6.4). На рис. 6.4 для сравнения показано решение задачи (6.4.2), (6.4.1) в долговременном промежутке (см. конфигурацию ресурсов $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ на рис. 6.4). Рисунок 6.4 иллюстрирует важное положение: при одном и том же объеме $\breve{y}$ выпускаемой продукции в случае долговременного промежутка минимальные издержки фирмы $\breve{C}$ меньше (не больше) условных издержек $\bar{C}$ в случае краткосрочного промежутка. В случае долговременного промежутка у фирмы больше возможностей для снижения издержек, чем в случае краткосрочного промежутка.

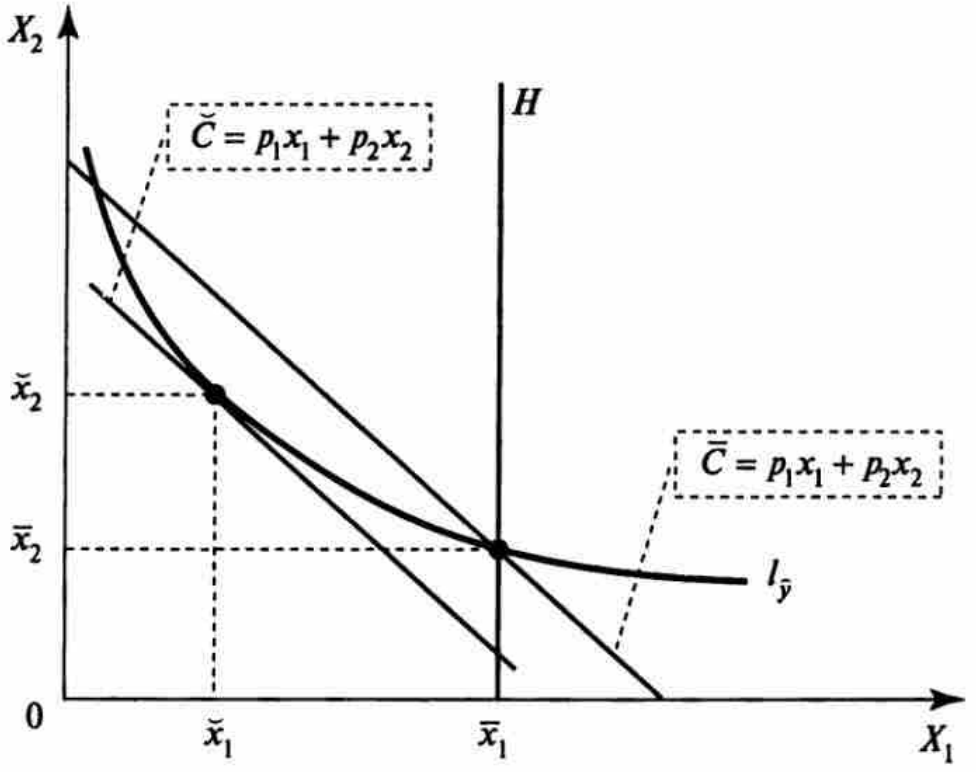


Рис. 6.4

При вариации объема $\breve{y}$ выпускаемой фирмой продукции конфигурация $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ресурсов будет перемещаться по прямой H, которая, следовательно, есть линия развития фирмы в краткосрочном промежутке.

6.4.3. Приведем решение задачи минимизации издержек фирмы при фиксированном объеме $\breve{y}$ выпускаемой продукции в случае, когда ПФ $f(x_1, x_2)$ фирмы есть функция Кобба–Дугласа:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = C\,(\min),$$
$$\breve{y} = a_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2},$$

где p_1 и p_2 – рыночные цены на ресурсы. Искомыми переменными являются объемы x_1 и x_2 первого и второго ресурсов.

Составим функцию Лагранжа

$$L = p_1x_1 + p_2x_2 + \mu(\breve{y} - f(x_1, x_2)).$$

Имеем условия первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \mu a_0\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \mu a_0\alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \breve{y} - f(x_1, x_2) = 0,$$

откуда получаем равенство дробей

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\mu a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}}{\mu a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}}.$$

После элементарных преобразований получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha_1 x_2}{\alpha_2 x_1}, \text{ или } x_2 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} x_1.$$

Подставив выражение для x_2 в ограничение $\breve{y} = f(x_1, x_2)$, получим

$$\breve{y} = a_0 x_1^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \cdot x_1 \right)^{\alpha_2} \text{ или } \frac{\breve{y}}{a_0} = x_1^{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{p_1}{\alpha_1} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2},$$

откуда

$$\left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{p_2}{\alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \breve{x}_1 = \psi_1(p_1, p_2, \breve{y})$$

(функция условного спроса (по Хиксу) на первый ресурс со стороны фирмы на рынке).

Объединяя первое и последнее звенья цепочки

$$\breve{x}_2 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \breve{x}_1 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{p_2}{\alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \right) \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{p_1}{\alpha_1} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y}),$$

получим

$$\breve{x}_2 = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y}) = \left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{p_1}{\alpha_1} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

(функция условного спроса (по Хиксу) на второй ресурс со стороны фирмы на рынке).

Имеем

$$\breve{C} = C(p_1, p_2, \breve{y}) = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2 =$$

$$= p_1\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} + p_1\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left[p_1\frac{\alpha_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}{p_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}\cdot\frac{p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}{\alpha_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}} + p_2\frac{\alpha_2^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}{p_2^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}\cdot\frac{p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}{\alpha_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left[\alpha_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\cdot\frac{p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}{\alpha_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}} + \alpha_2^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\cdot\frac{p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}{\alpha_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left[\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\cdot p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left[1 + \frac{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left[1 + \frac{(\alpha_2)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}{(\alpha_1)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1} =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2)\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}},$$

т.е.

$$\breve{C} = C(p_1, p_2, \breve{y}) = (\alpha_1 + \alpha_2)\left(\frac{u}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}$$

(функция условных издержек фирмы при фиксированном объеме $\breve{y}$ выпускаемой продукции).

6.5. Предельные условные издержки по объему выпуска и предельные условные издержки по цене ресурса (лемма Шепарда)

6.5.1. Предельные условные издержки по объему выпуска равны множителю Лагранжа

$$\frac{\partial C(p_1, p_2, \breve{y})}{\partial \breve{y}} = \breve{\lambda}. \tag{6.5.1}$$

Предельные условные издержки по цене p_i ресурса вида i ($i = 1, 2$) равны $\breve{x}_i$, т.е.

$$\frac{\partial C(p_1, p_2, \breve{y})}{\partial p_i} = \breve{x}_i. \tag{6.5.2}$$

Формально эти равенства ничем не отличаются соответственно от предельного расхода по полезности и предельного расхода по цене p_i продукта G_i ($i = 1, 2$) в теории потребления (см. параграф 1.4).

6.5.2. Выражения, называемые утверждениями о маргинальных значениях, позволяют проводить анализ чувствительности условных издержек относительно изменения выпуска $\breve{y}$ фирмы и цен на ресурсы.

Формула (6.5.1) показывает, что при достаточно малом увеличении (уменьшении) выпуска на величину $\Delta\breve{y}$ условные издержки растут (падают) приблизительно на величину $\breve{\lambda} \cdot \Delta\breve{y}$. Напомним, что множитель Лагранжа $\breve{\lambda}$ может быть достаточно большим, так что условные издержки фирмы могут измениться на весьма значительную величину. Из формулы (6.5.1) следует приближенное равенство при относительно малой величине $\Delta\breve{y}$:

$$C(p_1, p_2, \breve{y} + \Delta y) \cong C(p_1, p_2, \breve{y}) + \breve{\lambda} \cdot \Delta \breve{y}.$$

Аналогично формула (6.5.2) показывает, что при росте цены p_i i-го ресурса на относительно малую величину Δp_i ($i = 1, 2$) условные издержки увеличиваются приблизительно на величину $\breve{x}_i$. В связи с тем что множитель Лагранжа $\breve{\lambda}$ может быть достаточно большим, условные издержки фирмы могут измениться на весьма значительную величину. Из формулы (6.5.2) следуют приближенные равенства при относительно малых величинах Δp_1 и Δp_2

$$C(p_1 + \Delta p_1, p_2, \breve{y}) \cong C(p_1, p_2, \breve{y}) + \breve{x}_1 \Delta p_1,$$

$$C(p_1, p_2 + \Delta p_2, \breve{y}) \cong C(p_1, p_2, \breve{y}) + \breve{x}_2 \Delta p_2.$$

6.6. Альтернативы максимизации прибыли фирмы и многообразие целей фирмы

6.6.1. Этот параграф продолжает и развивает ряд положений параграфа 6.1.

Неудовлетворенность максимизацией прибыли как единственным фактором, управляющим решениями, принимаемыми на рынке, вызвала к жизни несколько альтернативных критериев «наилучших» действий.

Одной из широко дискутируемых альтернатив максимизации прибыли является положение о том, что фирмы стремятся к «удовлетворительной», а не «максимальной» прибыли. Другими словами, фирмы скорее жертвуют прибылями, нежели максимизируют их. Суть заключается в том, что принимающие решения руководители довольствуются выполнимыми или удовлетворительными решениями и действиями и не берут на себя хлопоты по вычислению самых лучших вариантов деятельности.

Вкратце: сторонники концепции стремления получить удовлетворение рассматривают предприятия как стремящиеся заработать в будущем по крайней мере не меньше, а может быть и больше нынешней прибыли. Принятие решений, связанных с прибылью, они связывают с опорой менеджеров на прошлый опыт, правила принятия решений и информацию, позволяющую выбрать ту из известных альтернатив, от которой ожидается удовлетворительная прибыль. Утверждается, что обычно руководители не стремятся тщательно изучать каждую возможность в поиске самой прибыльной альтернативы, так как процесс поиска максимизирующей альтернативы может оказаться дороже, чем он того стоит, и отнять слишком много времени с учетом рыночной неопределенности, неточной информации относительно спроса, издержек, реакции конкурентов и будущих экономических условий.

Существует еще одно логическое обоснование стремления получить удовлетворительную прибыль. Современная теория корпорации рассматривает руководителей высшего звена как попечителей организации, несущих ответственность не только перед акционерами, но и перед сотрудниками, покупателями, кредиторами, поставщиками, общественностью, государством и обществом в целом. Руководитель корпорации должен искусно балансировать между заинтересованностью акционеров в высоких прибылях, требованиями сотрудников более высоких зарплат и большей экономической безопасности, стремлением покупателей получить качественные товары по низким ценам, желанием розничных продавцов получать приличную прибыль, склонностью поставщиков к стабильным условиям поставок и требованиями общественности к чистоте окружающей среды – и все это в конструктивных и общественно приемлемых рамках. Согласно теоретикам удовлетворительной прибыли, эти соображения заставляют руководителей занимать такую позицию, с которой они могут разрешать организационные конфликты и на которой возможно повышать благосостояние всех групп, заинтересованных в том, как организация делает свой бизнес.

Более того, многие управленцы среднего и высшего звеньев занимают ключевые для принятия решений и выработки политики позиции. Многие из них заинтересованы в увеличении бюджета собственных отделов, в более высоких зарплатах и пенсиях; в увеличении численности сотрудников, занятых выполнением их проектов, уютных кабинетах, собственной значительности, власти и полномочиях принятия важных решений; большей финансовой ликвидности, технологическом превосходстве и т.д. В целях удовлетворения таких интересов могут формироваться коалиции, что приводит к отказу предприятия от курса максимизации прибыли.

Вследствие этого крупные корпорации имеют много центров власти различных уровней, над которыми «парит» высшее руководство (топ-менеджеры). Согласно теоретикам удовлетворительной прибыли, результатом этого является принижение целей и решений корпорации до уровня политиканства, компромиссов и уступок. В такой среде невозможна забота о максимизации денежного благосостояния акционеров, так как преследование цели извлечения прибыли ограничивается требованием удовлетворить, по крайней мере минимально, конкурирующие вожделения. Ни один центр силы, за исключением акционеров, не имеет организационной поддержки, необходимой для достижения общей цели и, следовательно, для ее достижения в максимальной степени. В результате этого поведение, характеризующееся стремлением получить удовлетворение, становится скорее правилом, нежели исключением, и является примером стандарта деятельности, направленной на получение «удовлетворительной прибыли», взимание «справедливых цен», завоевание «удовлетворительной доли рынка» – деятельности, растущей «в приемлемой степени».

6.6.2. Второй часто упоминающейся альтернативой максимизации прибыли является ограниченная максимизация выручки.

Согласно этой альтернативе, когда прибыль достигает приемлемого уровня, некоторые фирмы склонны ставить во главу угла объем выручки, а не прибыль. Они делают это якобы потому, что рост выручки является важным показателем деятельности фирмы. Выручка от продаж отражает положительное отношение покупателей к продукции фирмы, конкурентную позицию фирмы на рынке и ее рост, а все эти показатели свидетельствуют о жизнеспособности фирмы. Если объем продаж падает, то любое преимущество, которым обладает фирма, подрывается, а ее конкурентоспособность ослабевает. Кроме того, в повышении объема продаж заинтересованы руководители фирмы, поскольку есть много свидетельств тому, что их заработная плата имеет более тесную связь с масштабом операций фирмы, чем с ее прибыльностью.

Тем не менее максимизация выручки не означает, что из виду упускается прибыль. Для удовлетворения акционеров и получения новых инвестиций прибыль должна быть довольно высокой. То есть, стараясь максимизировать выручку, руководители могут действовать лишь в ограниченных рамках, в степени, которая не позволяет прибыли упасть настолько низко, что фирма окажется без средств для роста и расширения рынков сбыта.

6.6.3. Многие фирмы преследуют цели, связанные с увеличением объемов продаж и долей рынка. Ясно, что большая доля рынка есть ценный актив, в частности потому, что она отражает способность фирмы эффективно конкурировать, извлекать выгоду от масштаба производства и быть признанным лидером рынка. Однако завоевание большей доли рынка совсем не обязательно способствует повышению прибыльности и не означает более крепких экономических позиций. По этой причине доля рынка, по всей вероятности, не является действительно принципиальной целью фирмы. На деле агрессивная борьба за долю рынка посредством урезания цен и завоевания потребителей «любой ценой» может создать опасность для прибыльности. Успешное завоевание большой доли рынка может привести к доминированию на рынке, что приведет к принятию антитрестовских мер.

Некоторые экономисты считают, что фирмам, как большинству других организаций и индивидуумов, присущ инстинкт выживания. Стремление выжить есть мотив более фундаментальный, нежели прибыль. То есть утверждается, что цель выживания доминирует над другими целями, особенно в стрессовых ситуациях.

Важность выживания в долговременном промежутке очевидна. Но как цель выживание не помогает объяснить и предсказать поведение фирмы. Путей выживания всегда много, и выбор одного из них зависит от тех или иных факторов. И если уж выживание в ближней перспективе обеспечено, то на управленческие решения наверняка будут влиять другие цели. Основное значение цели выживания состоит в том, что она является *предпосылкой* для достижения других целей. Ее отношение к объяснению поведения ограничено только теми случаями, когда фирма попадает в такую тяжелую ситуацию, что все ее усилия должны быть направлены на то, чтобы пережить плохие времена.

6.6.4. В последние годы много говорится и пишется о необходимости «социально ответственного» поведения фирм, особенно крупных корпораций. Социальная ответственность означает многое: представительство в управленческой структуре корпорации и ее властно распоряжающемся руководстве групп с различными интересами; соответствие деятельности всей фирмы изменяющимся потребностям общества; сбалансированность интересов акционеров с интересами общества в целом; построение политики и практической деятельности фирмы таким образом, чтобы увеличивать общественное достояние; стремление фирм лечить социальные болезни общества одновременно со своей основной деятельностью.

В сущности, возложение на фирмы социальной ответственности направлено на формирование некой *корпоративной совести*.

Лежащая в основе цели социальной ответственности философия говорит о том, что интересы акционеров в долговременном промежутке лучше всего удовлетворяет политика фирм, вносящая вклад в построение такого рода общества, в котором фирмы могут прибыльно развиваться. То есть преследование цели извлечения прибыли и преследование социальных целей полагаются взаимоусиливающими процессами. Прибыли могут быть получены посредством выполнения функций, которые влекут за собой большие или малые социальные выгоды. В то же время социальные цели могут быть эффективнее и быстрее достигнуты, если фирмы могут получать прибыль за общественно позитивную деятельность и наказание за деятельность общественно негативную.

Достижение целей социальной ответственности может снизить уровень прибыли фирмы. Фирма, которая в области снижения вредных выбросов в атмосферу делает больше того, что требуется законом, возможно, делает это за счет своей прибыли. Фирма, которая содержит неэффективное производство ради сохранения рабочих мест в районе, возможно, поступает так за счет прибыли. Весьма вероятно, что усилия фирмы демонстрировать социальную ответственность приводят к использованию ею привлекательных методов управления. Но социальная ответственность ни в коей мере не означает, что прибыльность отходит на второй план. Адекватная прибыль является предпосылкой организационной способности и финансовой возможности фирмы решать социальные задачи.

Призывы к фирмам быть социально ответственными встречают глухое сопротивление со стороны некоторых руководителей и общественных групп. Возможно, справедливо высказывание, что «бизнес бизнеса есть бизнес». Утверждается, что руководители корпораций не готовы решать социальные задачи и не могут пренебрегать интересами акционеров. Дело в том, что во многих ситуациях ответ на вопрос о соответствии общественным интересам дается по отношению к индивидуальным ценностям, а не по отношению к ясному подходу: «это лучше всего соответствует интересам всех». Однако появляется все больше фирм, которые пристально следят за влиянием корпоративной политики и стратегии на общество, и они определенно озабочены тем, чтобы избежать обвинений в «бесчувственности» и «отсутствии гражданской позиции».

6.6.5. Сегодняшние достоинства фирмы могут обесцениться завтра, когда изменятся вкусы потребителей, появятся новые товары, усилится конкуренция со стороны отечественных производителей и импортеров и вырастет сила поставщиков и потребителей. Компания, которая не развивается и не занимается инновационной деятельностью, может в конце концов обнаружить, что она производит никому не нужную продукцию. Немногие фирмы предпочитают «плыть по течению» – в мире бизнеса хуже сохранения статус-кво может быть только ведущая к закату ловушка стагнации.

Существуют несколько причин, по которым фирмы выбирают цели роста и диверсификации. Первое: рост – хорошая защита от несчастий. Рост посредством расширения рынков ставит фирму в более прочное, более безопасное положение на рынке по сравнению с конкурентами, поставщиками и покупателями. В той степени, в которой фирма может догнать или опередить конкурентов, она имеет бóльшую свободу маневра и большее влияние на принятие важных отраслевых решений. Рост путем диверсификации, расширения номенклатуры продукции освобождает фирмы от чрезмерной зависимости от узкого круга продуктов и услуг. Если один из продуктов начинает приносить убытки, фирма может не только продолжать существовать, но и набирать силу в других сферах деятельности.

Второе: рост в долговременном промежутке (например, рост объема продаж, повышение объема производства, увеличение прибыли) почти повсеместно признается лучшим измерителем делового успеха. Тема роста и диверсификации проходит красной нитью через годовые отчеты процветающих компаний и постоянно акцентируется на страницах журналов, посвященных проблемам финансов бизнеса. Инвесторы и аналитики оценивают предприятие не только по текущим прибылям, но и по потенциалу роста. Почти всегда упор делается не на абсолютный объем продаж и прибылей, а на величину их роста. Следовательно, фирмы имеют мотив повышения степени роста, они почти всегда стремятся проникнуть на живой рынок, а когда они на него попадают, то, за редким исключением, не желают занимать иного места, кроме первого.

Наконец, рост и диверсификация представляют собой эффективные средства преследования других корпоративных целей. Они могут быть совместимы с получением повышенных прибылей, увеличением продаж, защитой и укреплением конкурентных позиций фирмы, выплатой высоких дивидендов акционерам, повышением курса акций, созданием здорового корпоративного имиджа и т.д. Рост и диверсификация фирмы, как показывает устойчивая тенденция, дополняют и поддерживают ее деятельность по достижению других целей. Уже одно это делает их приоритетными.

6.6.6. Из предыдущих рассуждений ясно, что у фирм может быть множество целей и извлечение прибыли — лишь одна из них. Заявления руководителей и стратегические планы фирм подтверждают, что фирмы обычно одновременно преследуют несколько целей, что ведет к конфликтам и компромиссам.

Например, перед фирмой существует выбор из следующих вариантов.

- Упор на краткосрочные или долгосрочные прибыли.
- Увеличение маржи прибыли или увеличение доли рынка.
- Расширение деятельности на данных рынках или выход на новые рынки.
- Диверсификация на основе родственной или чужеродной продукции.
- Конкуренция в среде низкого уровня риска или на высокорисковых рынках.
- Преследование целей извлечения прибыли или неприбыльных целей.
- Поиск возможностей быстрого развития в новых сферах рынка или удовлетворенность улучшением текущих операций.

Современная теория реальной фирмы принимает в расчет многообразные цели. Она расширяет модель максимизации прибыли и признает ценность других направлений деятельности фирмы, в том числе многообразие целей, преследуемых в рамках максимизации полезности. Например, помимо прибыли, она может преследовать цели увеличения доли рынка и роста. Когда одна цель фирмы начинает конфликтовать с другой целью, что может легко произойти при наличии многих целей, руководитель фирмы ищет компромисс между целями и выбирает лучшую комбинацию прибыли, выручки и роста. Лицо, принимающее решения, обычно имеет некоторую свободу действий, и малые фирмы отличаются от больших в образе действий по ранжированию целей и поиску компромисса. В разное время фирмы приходят к разным компромиссам. Выбор может быть очень жестким. Например, фирма, чья прибыль падает, может поддаться соблазну ликвидировать расходы на НИОКР, рекламу и стимулирование сбыта; прекратить инвестиции в новые виды деятельности, здания и оборудование или новые продукты, т.е. в то, от чего зависят долгосрочные прибыли и рост. Имеются данные, свидетельствующие об обратном соотношении между прибылью и маржей прибыли, с одной стороны, и ростом и долей рынка – с другой. Компромиссы между иными целями могут быть достаточно серьезными. В итоге многообразие целей в совокупности с изменяющейся динамикой рынка затрудняет прогнозирование поведения фирм.

При наличии нескольких целей ключевые руководители ищут компромисс и баланс между конфликтующими целями. Разумно ожидать, что если руководители имеют свободу выбора из нескольких альтернатив, то они выберут наиболее благоприятную для себя альтернативу. Фактически, даже если хозяева корпорации (акционеры) признают только цель максимизации прибыли, отделение владения от управления в крупных корпорациях предоставляет руководителям возможность преследовать личные цели, отличающиеся от целей хозяев, посредством чего формируется многоцелевая среда.

Например, исполнительный директор корпорации, в которой владение (собственность) отделено от управления, может добиваться славы ведущего производителя в отрасли, удовлетворять личное тщеславие, испытывать гордость от того, что он стоит во главе крупной империи бизнеса; добиваться профессионального признания в кругу себе подобных, стремиться занимать роскошные апартаменты и добиваться для себя большого размера материальной компенсации. Все это может отвлечь его от цели чистой максимизации прибыли в интересах акционеров. Стремление руководителей к спокойной, легкой жизни, бóльшему свободному времени также не способствует максимизации прибыли, поскольку руководители с «нормальными» предпочтениями не будут отдавать всю свою энергию максимизации прибыли. Таким же образом стремление создать устойчивый интерес к техническим трюкам и продемонстрировать профессиональное превосходство может привести действия руководителей к конфликту с максимально возможной прибылью. Стремление, вопреки прибыли, к достижению технологического превосходства и передовых позиций в разработке продукции, как утверждается, характерно для руководителей с научным или техническим образованием и для отраслей высоких технологий. Поскольку техническое мастерство дает возможность техническим специалистам удовлетворять собственный интерес, а также повышать квалификацию с целью продвижения, получения более высокой заработной платы и поиска работы, оно хорошо подходит тем сотрудникам фирмы (инженерам, техническим специалистам, исследователям), которые занимаются удержанием фирмы на передовых позициях науки и техники, а также обеспечивают производство передовой продукции.

Общее правило состоит в том, что если руководители фирмы имеют свободу преследовать свои собственные цели, то можно ожидать, что они будут их преследовать и наличие многоцелевой среды весьма вероятно. Вопрос в том, будут ли руководители корпораций преследовать свои личные цели в долговременном промежутке, когда они вступят в противоречие с долгосрочными интересами владельцев фирмы. Это сложный вопрос, и ответ на него включает решение проблемы принципала–агента. Он включает также тонкую посылку относительно рынка управленцев и не столь тонкую – относительно контроля рынка над фирмами. Переходим к обсуждению этой важной проблемы.

6.6.7. Принимающие решения ответственные лица (принципалы) зачастую полагают полезным нанять агентов, обладающих соответствующими квалификациями, способностями и информацией, которые могут быть использованы на благо ответственного лица. Проблема между принципалом и агентом возникает, когда последний обладает большей информацией и знаниями и использует их к собственной выгоде за счет принципала. Спортивная «звезда» (принципал) нанимает агента для заключения контракта с профессиональной спортивной командой. Если заключенный агентом контракт приносит максимальную пользу не спортсмену, а агенту (скажем, агент получает от спортивной команды гонорар), то это пример проблемы между принципалом и агентом.

Конфликты между принципалом и агентом могут возникнуть по самым разным поводам; и для крупных корпораций, в которых владение отделено от управления, такие конфликты являются обычным делом. Акционеры корпорации выступают в качестве принципалов, а высокопоставленные исполнительные руководители (топ-менеджеры) – в качестве агентов. Обычно агенты более информированы о положении дел и перспективах фирмы, чем акционеры. Информационная асимметрия позволяет агентам преследовать личные цели, в результате чего стоимость фирмы падает, а принципалы попадают в положение, худшее, чем то, в котором бы они находились, если бы агенты действовали исключительно в их интересах. Несмотря на то, что деятельность высших исполнительных руководителей контролируется советом директоров корпорации, последний не способен выявить истинную подоплеку всех действий первых. Совет директоров не обладает всей полнотой информации, и у большинства его членов есть другие обязанности.

Для того чтобы избежать необходимости мониторинга за поведением руководителей (топ-менеджеров), совет директоров может выплачивать им специальное вознаграждение за деятельность в соответствии со сформулированными советом целями фирмы. Такое вознаграждение может, например, принимать форму участия в прибылях или получения пакета акций и способствовать обогащению руководителей. Но руководители смогут получить доступ к материальным благам тогда и только тогда, когда прибыль корпорации высока и достигаются другие необходимые показатели. Такие вознаграждения способствуют предотвращению конфликтов между принципалами и агентами. Однако советы директоров далеко не всегда способны ликвидировать проблему принципала–агента и направить исполнительных руководителей на достижение целей фактических владельцев фирмы. Основная причина этого в том, что в крупных корпорациях, в которых владение отделено от управления, советы директоров могут рассматриваться в качестве агентов акционеров и проблема принципала–агента может возникнуть между советом директоров и акционерами. Советы директоров могут находиться в зависимости от исполнительных руководителей (топ-менеджеров) корпораций, поскольку они подчас выдвигают кандидатуры в совет и предлагают их на суд акционеров. То есть действия советов директоров крупных корпораций, большинство акций которых принадлежит сторонним инвесторам, не обязательно ликвидируют проблему принципала–агента.

Следствием названной проблемы является снижение прибылей, повышение издержек и отклонение от целей, совпадающих с интересами акционеров. Существо дела заключается в том, что руководители могут извлекать собственную выгоду за счет акционеров. Это снижает прибыль по сравнению с той, которая могла бы быть достигнута, если бы не существовало проблемы между принципалами и агентами.

6.6.8. Хотя между принципалами и агентами возникают конфликты, они не всегда столь серьезны, как об этом можно подумать на основании предыдущего раздела 6.6.7. Существуют ограничивающие факторы, которые в крупных фирмах снижают остроту проблемы принципала-агента и поощряют руководителей (топ-менеджеров) действовать в интересах владельцев. Эти факторы относятся к рыночной конкуренции.

Жесткая конкуренция заставляет фирму действовать в направлении извлечения прибыли. Прибыль увеличивает стоимость фирмы, повышает курс ее акций и благосостояние акционеров. Чем жестче конкуренция на рынке, на котором действует фирма, тем выше уровень ее дисциплины и выше вероятность ее вовлечения в деятельность по максимизации прибыли. На рынках с наивысшей конкуренцией проблема принципала–агента отодвигается далеко на задний план, так как выживание фирмы обусловлено максимизацией прибыли. На таких рынках выживают самые приспособленные, среди которых трудно найти фирмы, погрязшие в конфликтах между руководителями и фактическими владельцами.

Рынок трудовых ресурсов хорошо развит, и если руководитель заботится о собственном благе, то он старается сохранить свою рыночную конкурентоспособность. При высоком спросе на хорошо зарекомендовавших себя с точки зрения увеличения прибыли исполнительных руководителей дисциплина рынка заставит последних проводить политику повышения прибылей, максимизации курса акций и повышения благосостояния акционеров. То есть рынок управленческих ресурсов снижает внутрифирменные конфликты между принципалами и агентами. Когда же конфликты приводят к падению уровня руководства и понижению курса акций, тогда возникает вероятность смены контроля над фирмой. Это главный способ избавления фирмы от негодных руководителей. Ясно, что у руководителей есть возможность избежать такой ситуации, управляя корпорацией так, как того желают акционеры, и делая это наиболее эффективно.

6.6.9. Лишь немногие экономические концепции могут сравниться с концепцией прибыли по числу сбивающих с толку определений. Мало того, что существуют бухгалтерская прибыль, нормальная прибыль и экономическая прибыль, так каждая из них может еще и по-разному измеряться в зависимости от принятой бухгалтерской практики или от того, измеряется ли прибыль в долларах или как степень дохода на вложенный капитал. В основе бухгалтерской прибыли лежат доходы фирмы, и она определяется как превышение доходов над расходами прошлого периода после уплаты налогов. Нормальная прибыль есть прибыль (или доход на вложенный капитал), минимально достаточная для удержания фирмы на плаву в долговременном промежутке. Экономисты расценивают нормальную прибыль как часть совокупных издержек. Экономическая прибыль есть доход сверх минимальной прибыли. Фирмы стремятся к извлечению именно экономической прибыли, и именно эта прибыль определяет их поведение.

Прибыль (как нормальная, так и экономическая) есть результирующая различных факторов влияния, включая деловую хватку, успешное выполнение предпринимательской функции, предоставление покупателям качественных услуг, умелое обращение с неопределенностью, быстрое реагирование на возникающий на рынке дисбаланс, получение конкурентных преимуществ, технологическое превосходство, разработку и производство инновационной продукции.

Взгляды экономистов на максимизацию прибыли со временем изменились. Вот уже несколько лет существуют разногласия относительно того, действуют ли фирмы, особенно крупные корпорации, так, как если бы они стремились максимизировать прибыль. Ныне широко признается, что фирмы не обязательно стремятся максимизировать прибыль; и внимание экономистов сосредоточено на том, чтобы теория фирмы рассматривала и другие цели и задачи. Современная теория фирмы выявляет причины, по которым фирма стремится к извлечению максимальной прибыли, условия, в которых фирма стремится к извлечению максимальной прибыли, а также условия, при которых фирма преследует и другие цели. Полагают, что к достижению других целей, помимо цели максимизации прибыли, фирму подталкивают распыленные между многочисленными акционерами права собственности, неопределенность, проблема принципала–агента и изоляция от жесткой конкуренции. Наиболее известными альтернативами максимизации прибыли являются, как уже говорилось в разделах 6.6.1–6.6.3, стремление получить удовлетворение, максимизация выручки и рост посредством диверсификации. Менее важные цели и (или) цели, вытекающие из основных, включают увеличение доли рынка, выживание в долговременном плане, удовлетворительный уровень прибылей, увеличение размера дивидендов, финансовую ликвидность, технологическое лидерство, приобретение хорошего имиджа, социально ответственное поведение, занятие сильной конкурентной позиции и достижение личных целей руководителей высшего звена (власть, престиж, чувство самоудовлетворения, профессиональное признание и высокие премии). Эффективным средством одновременного достижения многих из этих целей является стратегия агрессивного роста и диверсификации.

Несомненно, что благодаря уже просто многочисленным оттенкам поведения и серьезным ограничениям, накладываемым на принимаемые решения, не существует единственной цели, которая охватывала бы все аспекты делового поведения. Более того, разнообразие целей и мотивов является естественным результатом рыночной экономики, состоящей из самых мелких, индивидуальных фирм и гигантских многономенклатурных корпораций. Весьма маловероятно, что все фирмы будут с той же интенсивностью и приоритетностью преследовать одинаковые цели, поскольку фирмы различаются по занимаемой на рынке позиции, формам собственности и контроля, величине конкуренции, неопределенности, технологическим возможностям, прибыльности, потенциалу прибыльности, личностным качествам владельцев и руководителей.

Но несмотря на это, мотив прибыли глубоко внедрен в сознание и фольклор современного бизнеса. И совершенно справедливо. Высококонкурентные рынки продуктов и ресурсов, существование рынков управленческих ресурсов и контроля над корпорациями дисциплинируют поведение управленцев и фирм и заставляют их настойчиво преследовать цель извлечения прибыли. Вследствие этого императив извлечения прибыли является распространенным и сильным. Конечно же прибыль стоит во главе иерархии целей большинства фирм; и если бы пришлось назвать только одну цель, характеризующую деловое поведение, то выбор пал бы на максимизацию прибыли в долговременном промежутке.

Вопросы для самоконтроля к главе 6

1. Какие целевые функции имеет фирма в условиях конкуренции?
2. Какие аргументы приводятся за максимизацию прибыли?
3. Какие аргументы приводятся против максимизации прибыли?
4. Что понимается под «разумной» прибылью?
5. Существует ли в реальности «разумная» прибыль?
6. В чем состоит различие между временны́м периодом и временны́м промежутком?
7. Какие характерные черты имеет долговременный промежуток?
8. Какие характерные черты имеет краткосрочный промежуток?
9. Что такое локальное рыночное равновесие фирмы, функционирующей в долговременном промежутке?
10. Что такое локальное рыночное равновесие фирмы, функционирующей в краткосрочном промежутке?
11. Какими формальными свойствами обладает локальное рыночное равновесие фирмы, функционирующей в долговременном промежутке?
12. Что такое первая версия задачи максимизации прибыли фирмы?
13. Как определяются функции условного спроса по Маршаллу (по Вальрасу) со стороны фирмы на ресурсы?
14. Какими формальными свойствами обладают функции условного спроса по Маршаллу?
15. Как определяется функция условного предложения фирмы на рынке готовой продукции?
16. Какими формальными свойствами обладает функция условного предложения фирмы?
17. В чем состоит теоретическое значение утверждений о маргинальных значениях функции условного предложения фирмы?
18. В чем состоит практическое значение утверждений о маргинальных значениях функции условного предложения фирмы?

19. Что такое вторая версия задачи максимизации прибыли фирмы?
20. Как определяются функции условного спроса по Хиксу со стороны фирмы на ресурсы?
21. Какими формальными свойствами обладают функции условного спроса по Хиксу?
22. Как определяется функция условных (минимальных) издержек фирмы?
23. Какими формальными свойствами обладает функция условных (минимальных) издержек?
24. В чем состоит теоретическое утверждение о маргинальных значениях функции условных (минимальных) издержек фирмы?
25. В чем состоит практическое утверждение о маргинальных значениях функции условных (минимальных) издержек фирмы?
26. Каковы альтернативы максимизации прибыли фирмы?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 6

1. ПФ конкурентной фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = x^{2/3} \cdot x^{1/4}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Цены на выпускаемую фирмой продукцию и на ресурсы соответственно равны p_0, p_1, p_2. Найдите:
   а) локальное рыночное равновесие фирмы (x_1^0, x_2^0);
   б) доход $R^0 = p^0 f(x_1^0, x_2^0)$, издержки $C^0 = p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0$ и максимальную прибыль $PR^0 = R^0 - C^0$.
2. Конкурентная фирма производит единственный продукт, реализуемый на рынке по цене p_0. Цены капитала и труда соответственно равны p_1 и p_2. ПФ фирмы имеет вид $y = x^{1/3} \cdot x^{1/2}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Определите эластичность функции спроса на труда по ценам p_0, p_1, p_2.
3. ПФ конкурентной фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} \cdot x_2^{1/2}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Цены капитала и труда соответственно равны $p_1 = 4$ и $p_2 = 5$. Лимит на ресурсы равен $V = 120$:
   а) определите конфигурацию ресурсов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, максимизирующую выпуск фирмы при лимите на ресурсы;
   б) определите объем максимального выпуска $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
   в) напишите уравнение изокванты, содержащей точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
   г) постройте точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Постройте по трем точкам (одна из которых есть точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$) изокосту;
   д) постройте по трем точкам (одна из которых есть точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$) изокванту.
4. ПФ конкурентной фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} \cdot x_2^{1/4}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Фиксированный выпуск фирмы $\breve{y} = 4$. Цены на капитал и труд соответственно равны $p_1 = 16, p_2 = 4$:

а) определите конфигурацию ресурсов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, минимизирующую издержки фирмы при фиксированном объеме $\breve{y} = 4$ выпускаемой фирмой продукции;
б) определите минимальные издержки фирмы $\breve{C} = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2$;
в) напишите уравнение изокосты $\breve{C} = p_1x_1 + p_2x_2$;
г) постройте точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$. Постройте изокосту по трем точкам (одна из которых есть точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$);
д) постройте изокванту по трем точкам (одна из которых есть точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$).

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 6

1. Координаты рыночного равновесия (x_1^0, x_2^0) конкурентной фирмы есть однородные функции:
   а) первой степени по всем переменным p_0, p_1, p_2;
   б) нулевой степени по всем переменным p_0, p_1, p_2;
   в) первой степени по переменным p_1, p_2 при фиксированной переменной p_0;
   г) нулевой степени по переменным p_1, p_2 при фиксированной переменной p_0;
   д) среди всех ответов а)–г) нет ни одного верного.

2. Координаты конфигурации ресурсов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, максимизирующей выпуск фирмы при лимите V на ресурсы, есть однородные функции:
   а) первой степени по ценам p_1, p_2 при фиксированном лимите;
   б) нулевой степени по ценам p_1 и p_2 при фиксированном лимите;
   в) первой степени по всем переменным p_1, p_2, V;
   г) нулевой степени по всем переменным p_1, p_2, V;
   д) для полного ответа условий недостаточно.

3. Координаты конфигурации ресурсов $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$, минимизирующей издержки фирмы при фиксированном объеме $\breve{y}$ выпускаемой фирмой продукции, есть однородные функции:
   а) нулевой степени по всем переменным $p_1, p_2, \breve{y}$;
   б) первой степени по всем переменным $p_1, p_2, \breve{y}$;
   в) нулевой степени по переменным p_1, p_2;
   г) первой степени по переменным p_1, p_2;
   д) среди всех ответов а)–г) нет ни одного верного.

4. Предельный выпуск $\left(\dfrac{\partial h(p_1, p_2, V)}{\partial p_i}\right)$ по цене p_i i-го ресурса $(i = 1, 2)$:
   а) противоположен по знаку множителю $\hat{\lambda}$ Лагранжа;
   б) равен значению $\hat{x}_i$ функции условного спроса по Маршаллу на i-й ресурс;

в) пропорционален значению $\breve{x}_i$ функции условного спроса по Хиксу на i-й ресурс;
г) равен значению $\breve{x}_i$ функции условного спроса по Хиксу на i-й ресурс;
д) среди всех ответов а)–г) нет ни одного верного.

5. Предельные издержки $\left(\dfrac{\partial C(p_1, p_2, \breve{y})}{\partial p_i}\right)$ по цене p_i i-го ресурса ($i = 1, 2$):
а) пропорциональны (с коэффициентом пропорциональности, не равном единице) значению $\breve{x}_i$ функции условного спроса по Хиксу на i-й ресурс;
б) равны значению $\breve{x}_i$ функции условного спроса по Хиксу на i-й ресурс;
в) пропорциональны значению $\hat{x}_i$ функции условного спроса по Маршаллу на i-й ресурс;
г) равны значению $\hat{x}_i$ функции условного спроса по Маршаллу на i-й ресурс;
д) среди всех ответов а)–г) нет ни одного верного.

6. Конкурентная фирма производит единственный продукт, реализуемый на рынке по цене p_0. Цены капитала и труда соответственно равны p_1 и p_2. Производственная функция фирмы имеет вид $y = x_1^{1/4} \cdot x_2^{2/3}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Определите эластичность функция спроса на капитал по ценам p_0, p_1, p_2.

7. Производственная функция конкурентной фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} \cdot x_2^{2/3}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Цены капитала и труда соответственно равны $p_1 = 1$ и $p_2 = 4$. Лимит на ресурсы равен $V = 11$:
а) определите конфигурацию ресурсов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, максимизирующую выпуск фирмы при лимите на ресурсы;
б) определите объем максимального выпуска $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
в) напишите уравнение изокванты, содержащей точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
г) постройте точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Затем постройте по трем точкам (одна из которых есть точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$) изокосту;
д) постройте по трем точкам (одна из которых есть точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$) изокванту.

8. Производственная функция конкурентной фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/4}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Фиксированный выпуск фирмы $\breve{y} = 6912$. Цены на капитал и труд соответственно равны $p_1 = 4$, $p_2 = 1$:
а) определите конфигурацию ресурсов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, минимизирующую издержки фирмы при фиксированном объеме $\breve{y} = 4$ выпускаемой фирмой продукции;

б) определите минимальные издержки фирмы $\breve{C} = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2$;

в) напишите уравнение изокосты $\breve{C} = p_1x_1 + p_2x_2$;

г) постройте точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$. Постройте по трем точкам (одна из которых есть точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$) изокосту;

д) постройте изокванту по трем точкам (одна из которых есть точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$).

Глава 7

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС

7.1. Производственные функции, используемые в экономическом анализе и прогнозировании, и их свойства

7.1.1. Понятие производственной функции (ПФ) хорошо известно из курса «Микроэкономика. Промежуточный уровень»: ПФ $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ – это функция, независимые переменные $(x_1, \ldots, x_n)$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число n переменных равно числу ресурсов), а значение y функции равно объему выпускаемой продукции. Вектор $(x_1, \ldots, x_n)$ называется конфигурацией ресурсов. ПФ зависит от параметров (одного или нескольких).

ПФ, используемые для описания функционирования фирмы или отрасли, называются *микроэкономическими*. ПФ, используемые для описания функционирования региона или национальной экономики, называются *макроэкономическими*.

Результаты теории ПФ используются и для микро-, и для макроэкономических ПФ. Элементы теории ПФ рассмотрим в основном для случая $n = 2$ по следующим двум причинам:

1) при $n = 2$ многие построения допускают наглядную геометрическую интерпретацию;

2) принципиальные результаты при $n > 2$ ничем не отличаются от результатов при $n = 2$. При $n = 2$ $x_1 = K$, $x_2 = L$ (K – количество

(основного) капитала, L – количество труда). ПФ определена при $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$).

7.1.2. Рассмотрим примеры ПФ (при $n = 2$).

1. ПФ Кобба–Дугласа (ПФКД): $y = a_0 \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$.

2. Линейная ПФ (ЛПФ): $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ и ПФ с линейными изоквантами (ПФЛИ): $y = (b_0 + b_1x_1 + b_2x_2)^h$.

3. ПФ Леонтьева (ПФЛ) (ПФ затраты – выпуск – ПФЗВ): $y = \min(c_1x_1; c_2x_2)$.

4. Классическая ПФ с постоянной эластичностью замены ресурсов (ПФ ПЭЗР): $y = a_0 \cdot (a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha}$.

В этих примерах постоянные a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h, α, c_1, c_2 играют роль параметров, которые являются обычно положительными величинами.

Примеры ПФ (при $n > 2$):

1′. ПФКД:

$y = a_0x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

2′. ЛПФ:

$y = b_0 + b_1x_1 + \ldots + b_nx_n$

и ПФ с плоскими изоквантами (ПФПИ):

$y = (b_0 + b_1x_1 + \ldots + b_nx_n)^h$.

3′. ПФЛ (ПФЗВ):

$y = \min(c_1x_1; \ldots; c_nx_n)$.

4′. Классическая ПФ с постоянной эластичностью замены ресурсов:

$y = a_0(a_1x_1^{-\alpha} + \ldots + a_nx_n^{-\alpha})^{-h/\alpha}$.

В этих примерах величины $a_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, b_0, b_1, \ldots, b_n, h, c_1, \ldots, c_n, \alpha, a_1, \ldots, a_n$ играют роль параметров, которые обычно положительны.

ПФКД – пример ПФ, задаваемой в *мультипликативной форме*, ЛПФ – пример ПФ, задаваемой в *аддитивной форме*. Переход от мультипликативной формы к аддитивной осуществляется с помощью операции логарифмирования: $\ln y = \ln a_0 + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2$. Полагая $\ln y = w$, $\ln x_1 = v_1$, $\ln x_2 = v_2$, получим ПФ в аддитивной форме: $w = \ln a_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Переход от аддитивной формы к мультипликативной осуществляется с помощью операции потенцирования: полагая $b_0 = \ln a_0$, $x_1 = \ln v_1$, $x_2 = \ln v_2$, $y = \ln w$, получим $\ln w = \ln a_0 + b_1 \ln v_1 + b_2 \ln v_2$, откуда следует, что $w = a_0 v_1^{b_1} v_2^{b_2}$, т.е. ПФ в мультипликативной форме.

Фрагменты карт изоквант ПФ 1–4 приведены на рис. 7.1–7.4.

Рис. 7.1. Фрагмент карты изоквант ПФКД

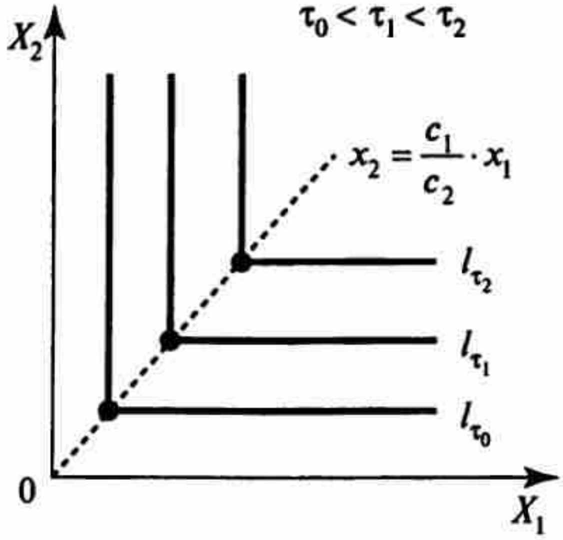


Рис. 7.2. Фрагмент карты изоквант ПФЛ

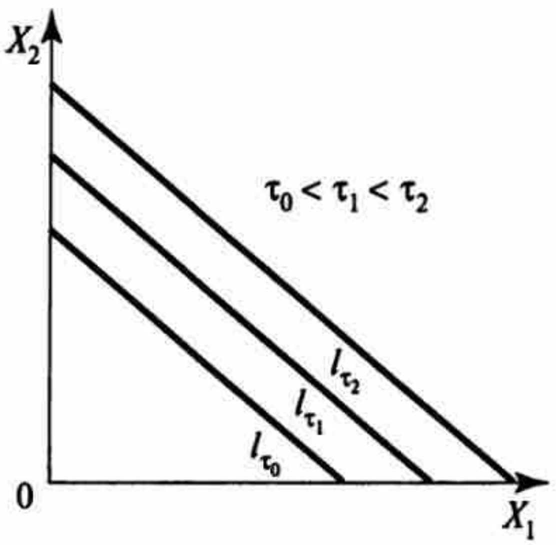


Рис. 7.3 Фрагмент карты изоквант ПД с линейными изоквантами

Рис. 7.4. Фрагмент карты изоквант ПФ ПЭЗР

Рисунки 7.1 и 7.4 наглядно демонстрируют, что ПФ ПЭЗР более адекватна реальности, чем ПФКД, ибо не бывает ситуации, когда капитал есть и практически нет работников или много работников и практически нет капитала. То есть ПФКД можно рассматривать только в конечной части первой четверти плоскости Ox_1x_2. В случае ПФ ПЭЗР для выпуска продукции в объеме, скажем, τ_0 каждый ресурс требуется в количестве не менее чем x_1^0 (первый ресурс) и x_2^0 (второй ресурс), что естественно с содержательной экономической точки зрения.

7.1.3. Напомним свойства ПФ (при $n = 2$) (для конкретной ПФ не обязаны выполняться все свойства):

1) $f(0, 0) = 0$ (нет ресурсов, значит, нет выпускаемой продукции);

$f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$;

2) $\tilde{x} \geq x$ ($\tilde{x} \neq x$) $\Rightarrow f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) > f(x_1, x_2)$ (свойство монотонности).

При $x = (x_1, x_2) > 0$ $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0$ (≥ 0), $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0$ (≥ 0),

т.е. если затраты одного ресурса увеличиваются, а затраты другого ресурса остаются неизменными, то объем выпускаемой продукции растет (точнее, не убывает);

3) при $x = (x_1, x_2) > 0$ $\dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0$ (≤ 0), $\dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0$ (≤ 0),

т.е. имеет место падение эффективности производства с ростом объема затрат одного из ресурсов и сохранением затрат другого ресурса неизменными;

4) существует число $\rho > 0$, такое, что для любого числа $\gamma > 0$ и любого вектора $x = (x_1, x_2) \geq 0$ справедливо равенство

$f(\gamma \cdot x_1; \gamma \cdot x_2) = \gamma^{\rho} \cdot f(x_1, x_2)$ – *свойство однородности* ПФ.

Свойства ПФ (при $n > 2$):

1′) $f(0, \ldots, 0) = 0$, $f(0, x_2, \ldots, x_n) = \ldots = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$;

2′) $\tilde{x} \geq x$ ($\tilde{x} \neq x$) $\Rightarrow f(\tilde{x}) > f(x)$ (более детально $f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) >$ $> f(x_1, \ldots, x_n)$), при $x > 0$ $\dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} > 0$ (≥ 0), ..., $\dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} > 0$ (≥ 0);

3′) при $x > 0$ $\dfrac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^2} < 0$ (≤ 0), ..., $\dfrac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n^2} < 0$ (≤ 0);

4′) существует число $\rho > 0$, такое, что для любого вектора $x \geq 0$ справедливо равенство $f(\gamma x_1, \ldots, \gamma x_n) = \gamma^{\rho} f(x_1, \ldots, x_n)$ – свойство однородности ПФ.

7.1.4. Проверим выполнение свойств 1–4 для ПФ 1–4.

Для ПФКД свойства 1, 2, 4 выполняются, а свойство 3 выполняется, если $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ и число $\rho = \alpha_1 + \alpha_2$: $f(\gamma x_1, \gamma x_2) =$ $= a_0(\gamma x_1)^{\alpha_1}(\gamma x_2)^{\alpha_2} = \gamma^{\alpha_1+\alpha_2} a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = \gamma^{\alpha_1+\alpha_2} f(x_1, x_2)$.

Для ЛПФ при $b_0 \neq 0$ свойства 1 и 4 не выполняются, при $b_0 = 0$ свойства 1 $f(0, 0) = 0$ и 4 выполняются, свойство 2 выполняется при $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$, вторые частные производные равны нулю.

Для ПФЛ свойство 1) выполняется. Для свойств 2) и 3) имеем при $x_1 > \frac{C_2}{C_1}x_2$ $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = 0$, при $0 < x_1 < \frac{C_2}{C_1}x_2$ $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0, \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = 0.$ Аналогично, при $x_2 > \frac{C_1}{C_2}x_1$ $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0$, при $0 < x_2 < \frac{C_1}{C_2}x_1$ $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0$, $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0.$ Свойство 4 выполняется.

Для ПФ ПЭЗР при $\alpha > 0$ и $h > 0$ $f(0, 0), f(0, x_2), f(x_1, 0)$ равны 0, при $0 > \alpha > -1$ $f(0, 0) = 0$, $f(0, x_2) \neq 0$, $f(x_1, 0) \neq 0$. При $h > 0$ $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0$ и $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0$, т.е. свойство 2) выполнено. При $h \le 1$ и $\alpha + 1 > 0$ $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0$ и $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0$, при $h > 1$ и $\alpha + 1 > 0$ вторые (чистые) частные производные отрицательны, если $\frac{x_1}{x_2} > \left(\frac{a_1(h-1)}{a_2(\alpha+1)}\right)^{1/\alpha}$ и $\frac{x_2}{x_1} > \left(\frac{a_2(h-1)}{a_1(\alpha+1)}\right)^{1/\alpha}$, т.е. свойство 3) выполняется. Свойство 4) выполняется при $\rho = h$.

7.1.5. Рассмотрим геометрическую и экономическую интерпретации свойств ПФ.

Если увеличиваем количество капитала на единицу, то объем производства вырастет на $\frac{\partial f}{\partial x_1}$:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \approx \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}, \quad \Delta x_1 \to 0.$$

Проведем вертикальные плоскости через точки $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$, $(x_1^0, 0)$, $(0, x_2^0)$. Они пересекают график ПФ $y = f(x_1, x_2)$ по плоским линиям L_1^0 и L_2^0 (рис. 7.5). Далее проводим касательные K_1^0 и K_2^0 к линиям L_1^0 и L_2^0 в точке $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$.

Имеем $\operatorname{tg}\varphi_1^0 = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} > 0$, $\operatorname{tg}\varphi_2^0 = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} > 0$ (свойство 2).

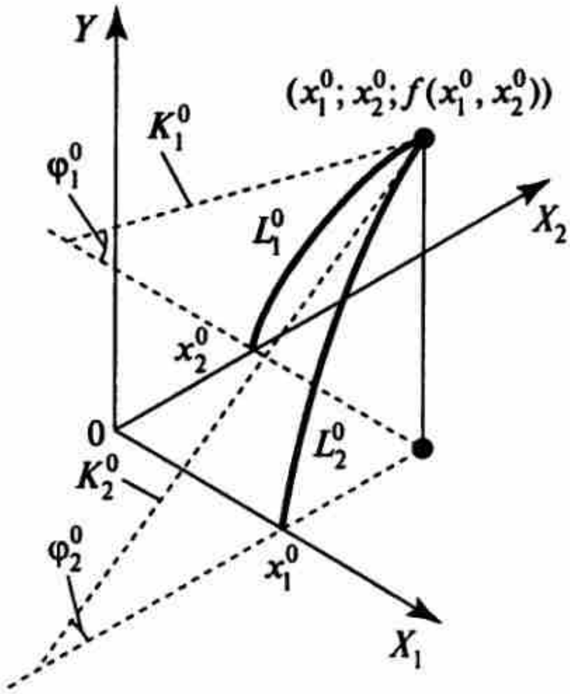


Рис. 7.5

Неравенство $\dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0$ (свойство 3)) означает, что предельная производительность труда $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$ убывает с ростом затрат труда x_2 (рис. 7.6). Аналогичное справедливо для предельной производительности капитала $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$.

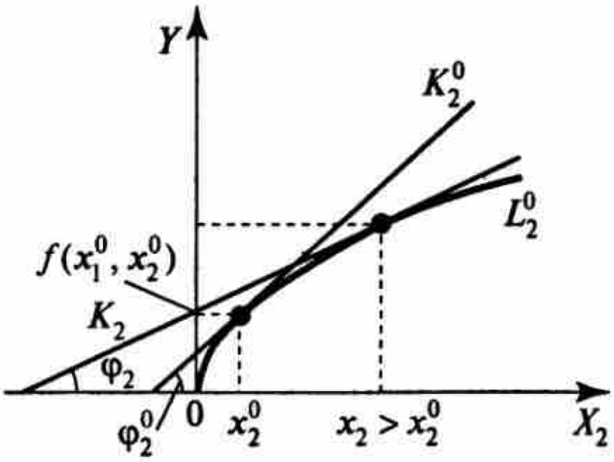


Рис. 7.6

Пример, когда в свойстве 2 может быть равенство нулю, дает ПФЛ.

При $\gamma > 1$ рост масштаба производства (увеличение затрат капитала и труда в γ раз) увеличивает объем выпуска в γ^ρ раз (при $\rho > 0$).

Если при этом $\rho > 1$, то растет эффективность производства (случай возрастающей эффективности с ростом масштаба производства). Если, например, $\rho = 2$ и $\gamma = 3$, то свойство 4) означает, что при росте объема капитала и труда в 3 раза объем выпуска растет в $\gamma^\rho = 9$ раз.

Если $\rho = 1$, то $f(\gamma \cdot x_1; \gamma \cdot x_2) = \gamma \cdot f(x_1, x_2)$ (случай постоянной эффективности с ростом масштаба производства). Если, например, $\gamma = 3$, то свойство 4) означает, что при росте объема капитала и труда в 3 раза объем выпуска растет также в $\gamma^\rho = 3$ раза.

Если $\rho < 1$, то имеем убывающую эффективность с ростом масштаба производства. Если, например, $\rho = 1/2$ и $\gamma = 3$, то свойство 4) означает, что при росте объема капитала и труда в 3 раза объем выпуска растет в $\gamma^\rho = \sqrt{3} \cong 1{,}7$ раза.

7.1.6. Приведем понятийный аппарат теории ПФ ($n = 2$).

При $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ дробь x_1/x_2 называется *капиталовооруженностью труда*, дробь $\dfrac{f(x_1, x_2)}{x_1}$ – *средней производительностью капитала*, дробь $\dfrac{f(x_1, x_2)}{x_2}$ – *средней производительностью труда*.

Средние производительности капитала и труда – это относительные величины (первого порядка), ибо они равны отношениям абсолютных величин (количества выпуска на количество соответствующего ресурса). Предельные производительности капитала и труда $\dfrac{f(x_1, x_2)}{x_1}$ и $\dfrac{f(x_1, x_2)}{x_2}$ – также относительные величины.

Дробь $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{f(x_1, x_2)/x_1} = E_1(f(x_1, x_2))$ называется (*частной*) *эластичностью выпуска по первому ресурсу* (*капиталу*), дробь $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}{f(x_1, x_2)/x_2} = E_2(f(x_1, x_2))$ называется (*частной*) *эластичностью выпуска по второму ресурсу* (*труду*). Эти эластичности называются *точечными* (*предельными*).

Точечные (предельные) частные эластичности – это относительные величины (второго порядка), ибо они равны отношениям относительных величин (первого порядка). Сумма $E(f(x_1, x_2)) = E_1(f(x_1,x_2)) + E_2(f(x_1,x_2))$ называется *эластичностью производства*.

Имеем

$$E_1(f(x_1, x_2)) \cong \frac{\dfrac{f(\tilde{x}_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\tilde{x}_1 - x_1}}{\dfrac{f(x_1, x_2)}{x_1}} = \frac{\dfrac{f(\tilde{x}_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} \cdot 100\%}{\dfrac{\tilde{x}_1 - x_1}{x_1} \cdot 100\%}.$$

Обе дроби после знака $\cong$ (приближенного равенства) называются *конечной (процентной) частной эластичностью* выпуска по первому ресурсу, т.е. справедливо приближенное равенство

Точечная (предельная) эластичность (по первому ресурсу) $\cong$
$\cong$ Конечная (процентная) эластичность (по первому ресурсу).

Конечная (процентная) эластичность выпуска по первому ресурсу (капиталу) показывает, на сколько процентов изменится выпуск, если объем затрачиваемого первого ресурса (капитала) изменится на 1%. Аналогично поясняется (частная) эластичность выпуска по второму ресурсу (труду) $E_2(f(x_1, x_2))$.

Если нет особой оговорки, то под термином «частная эластичность» следует понимать точечную (предельную) эластичность.

Частные эластичности для ПФКД имеют вид

$$E_1(f(x_1, x_2)) = \frac{x_1}{f(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1},$$

$$E_1(a_0 x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}) = \frac{x_1}{a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}} \cdot a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot x_2^{\alpha_2} = \alpha_1,$$

$$E_1(a_0 x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}) = \alpha_2 \quad (\text{обычно } \alpha_1, \alpha_2 < 1).$$

Частные эластичности для ПФ ПЭЗР имеют вид

$$E_1(f(x_1, x_2)) = \frac{-\dfrac{h}{\alpha} x_1 a_0 \left(a_1 x_1^{-\alpha} + a_2 x_2^{-\alpha}\right)^{\left(-\frac{h}{\alpha} - 1\right)}}{a_0 \left(a_1 x_1^{-\alpha} + a_2 x_2^{-\alpha}\right)^{-\frac{h}{\alpha}}} \cdot a_1(-\alpha_1) x_1^{-\alpha - 1} =$$

$$= \frac{h a_1 x_1^{-\alpha}}{a_1 x_1^{-\alpha} + a_2 x_2^{-\alpha}},$$

$$E_2(f(x_1, x_2)) = \frac{h a_2 x_2^{-\alpha}}{a_1 x_1^{-\alpha} + a_2 x_2^{-\alpha}}.$$

Эластичность производства

$E(f(x_1, x_2)) = E_1 + E_2$ для ПФКД и для ПФ ПЭЗР имеет соответственно вид $E = \alpha_1 + \alpha_2$, $E = h$.

Напомним важное понятие предельной нормы технологической замены одного ресурса другим.

Если точка x^2 расположена левее точки x^1, то дробь $RTS_{12} = -\frac{x_2^2 - x_2^1}{x_1^2 - x_1^1}$ – это норма технологической замены первого ресурса вторым (рис. 7.7), ибо количество x_1^1 первого ресурса уменьшается, а количество x_2^1 второго ресурса растет.

Если точка x^2 расположена правее точки x^1, то дробь $RTS_{21} = -\frac{x_2^2 - x_2^1}{x_1^2 - x_1^1}$ – это норма технологической замены второго ресурса первым (см. рис. 7.7), ибо количество x_1^1 первого ресурса растет, а количество x_2^1 второго ресурса уменьшается.

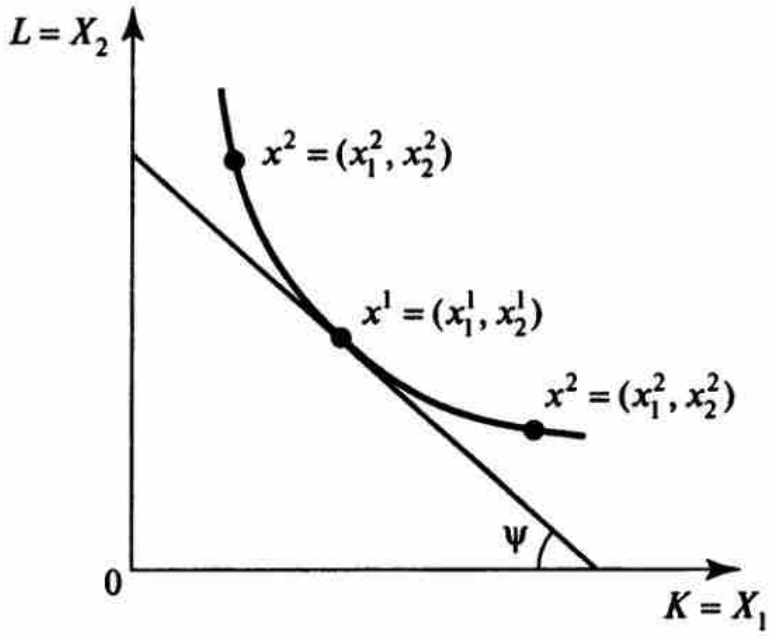


Рис. 7.7

При $x_1^2 \to x_1^1$ имеем

$$RTS_{12} \to -\frac{dx_2(x_1^1)}{dx_1} = MRTS_{12},$$

$$RTS_{21} \to -\frac{dx_2(x_1^1)}{dx_1} = MRTS_{21}.$$