

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**

Кафедра высшей математики

С. А. ДУДКО, И. М. ДЕРГАЧЁВА, А. И. ПРОКОПЕНКО

**ЧИСЛЕННЫЕ
И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ.
МЕТОД Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Учебно-методическое пособие

Гомель 2022

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики

С. А. ДУДКО, И. М. ДЕРГАЧЁВА, А. И. ПРОКОПЕНКО

ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ. МЕТОД Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области энергетики и энергетического оборудования
для обучающихся по специальности 1-43 01 03
«Электроснабжение (по отраслям)»
в качестве учебно-методического пособия*

Гомель 2022

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.193
Д81

Р е ц е н з е н т ы: доцент кафедры информационно-управляющих систем и технологий, канд. физ.-мат. наук, доцент *Н. В. Рязанцева* (БелГУТ); кафедра фундаментальной и прикладной математики (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент *Л. Н. Марченко*; канд. физ.-мат. наук, доцент *В. Н. Княгина* (ГГУ им. Ф. Скорины)

Дудко, С. А.

Д81 Численные и аналитические методы современной математики. Метод Z-преобразований : учеб.-метод. пособие / С. А. Дудко, И. М. Дергачёва, А. И. Прокопенко ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2022. – 139 с.

ISBN 978-985-891-065-5

Кратко изложена теория решетчатых функций, на основе которой рассматриваются разностные уравнения и системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Излагается метод Z-преобразования для решетчатых функций, являющийся наиболее эффективным методом решения разностных уравнений и систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрены численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Излагаемый теоретический материал сопровождается большим количеством подробно разобранных примеров и задач. Даны также упражнения для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов специальности 1-43 01 03 «Электроснабжение (по отраслям)», а также для студентов технических специальностей.

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.193

ISBN 978-985-891-065-5

© Дудко С. А., Дергачёва И. М.,
Прокопенко А. И., 2022
© Оформление. БелГУТ, 2022

1 Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЕТЧАТЫХ ФУНКЦИЙ

1.1 Решетчатые функции

В приложениях часто рассматриваются функции $f(t)$, определенные в дискретных точках $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots$ промежутка T , причем $t_{n+1} \geq t_n$. Такие функции называются решетчатыми. Обозначив $f(t_n) = f_n$, получим последовательность (f_n) значений функции. В дальнейшем, положив $f_n = f[n]$, будем считать, что аргумент n принимает множество целых чисел Z .

Конечные разности решетчатых функций. Конечной разностью 1-го порядка $\Delta f[n]$ решетчатой функции $f[n]$ называется выражение

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n], \quad (1.1)$$

соответственно разностью 2-го порядка – выражение

$$\begin{aligned} \Delta^2 f[n] &= \Delta(\Delta f[n]) = \Delta f[n+1] - \Delta f[n] = f[n+2] - f[n+1] - \\ &- (f[n+1] - f[n]) = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Аналогично для разности 3-го порядка получаем выражение вида

$$\begin{aligned} \Delta^3 f[n] &= \Delta(\Delta^2 f[n]) = \Delta^2 f[n+1] - \Delta^2 f[n] = \\ &= f[n+3] - 3f[n+2] + 3f[n+1] - f[n]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Используя метод математической индукции, для разности k -го порядка можно получить формулу

$$\Delta^k f[n] = \sum_{m=0}^k (-1)^m C_k^m f[n+k-m], \quad (1.4)$$

где $C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Формулы (1.1)–(1.4) определяют разности решетчатых функций через значения этих функций в целочисленных точках. Можно выразить саму решетчатую функцию $f[n]$ через ее разности различных порядков. Из равенства (1.1) получаем

$$f[n+1] = f[n] + \Delta f[n].$$

Используя это равенство и формулу (1.2), аналогичным образом получаем

$$\Delta^2 f[n] = f[n+2] - f[n+1] - \Delta f[n] = f[n+2] - f[n] - 2\Delta f[n],$$

откуда находим

$$f[n+2] = f[n] + 2\Delta f[n] + \Delta^2 f[n].$$

Точно так же, используя это равенство и формулу (1.3), получаем

$$\begin{aligned} \Delta^3 f[n] &= \Delta^2 f[n+1] - \Delta^2 f[n] = f[n+3] - 2f[n+2] + f[n+1] - \Delta^2 f[n] = \\ &= f[n+3] - 2f[n] - 4\Delta f[n] - 2\Delta^2 f[n] + f[n] + \Delta f[n] - \Delta^2 f[n] = \\ &= f[n+3] - f[n] - 3\Delta f[n] - 3\Delta^2 f[n], \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем следующее выражение:

$$f[n+3] = f[n] + 3\Delta f[n] + 3\Delta^2 f[n] + \Delta^3 f[n].$$

Используя метод математической индукции, можно аналогичным методом получить формулу

$$f[n+k] = f[n] + C_k^1 \Delta f[n] + C_k^2 \Delta^2 f[n] + \dots + \Delta^k f[n].$$

Эта формула определяет значения решетчатой функции через ее конечные разности до порядка k включительно. Она представляет собой дискретный аналог формулы Тейлора для непрерывной функции.

1.2 Основные понятия разностных уравнений и систем разностных уравнений

Функциональное соотношение вида

$$F(n, x[n], \Delta x[n], \Delta^2 x[n], \dots, \Delta^k x[n]) = 0, \quad (1.5)$$

связывающее решетчатую функцию $x[n]$ и ее разности до порядка k , называется разностным уравнением k -го порядка. Функция F в функциональном равенстве (1.5) – заданная функция своих аргументов. Используя формулу (1.4), уравнение (1.5) можно преобразовать к виду

$$F_1(n, x[n], x[n+1], x[n+2], \dots, x[n+k]) = 0. \quad (1.6)$$

Равенство (1.6) также называется разностным уравнением k -го порядка. Порядок этого уравнения определяется разностью $k = (n+k) - n$ наибольшего и наименьшего значений аргумента функции $x(n)$, входящей в уравнение. В дальнейшем будем рассматривать линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$a_0 x[n+k] + a_1 x[n+k-1] + \dots + a_{k-1} x[n+1] + a_k x[n] = f[n], \quad (1.7)$$

где $a_i - \text{const}$ (постоянные коэффициенты), $i = 0, 1, 2, \dots, k$; $a_0 \neq 0$; $a_k \neq 0$; $x[n]$ – неизвестная решетчатая функция.

Если $f[n] \neq 0$, то уравнение (1.7) называется неоднородным разностным уравнением, если $f[n] \equiv 0$ – однородным разностным уравнением. Решением уравнения (1.7) называется решетчатая функция $x[n] = \varphi[n]$, которая при подстановке ее в уравнение (1.7) превращается в тождество при $n = 0, 1, 2, \dots$

По аналогии с задачей Коши для дифференциальных уравнений k -го порядка задача с начальными данными для разностного уравнения (1.7) (начальная задача) формулируется следующим образом: найти решетчатую функцию $x[n]$, удовлетворяющую уравнению (1.7) и начальным условиям

$$x[0] = x_0, \quad x[1] = x_1, \dots, \quad x[k-1] = x_{k-1}, \quad (1.8)$$

где x_0, x_1, \dots, x_{k-1} – заданные числа.

Решение $x[n]$ уравнения (1.7), удовлетворяющее начальным условиям (1.8), называется частным решением этого уравнения.

Теория линейных разностных уравнений во многом сходна с теорией линейных дифференциальных уравнений. Справедливы следующие утверждения.

1 Если $x_1[n], x_2[n], \dots, x_l[n]$ – решение линейного разностного уравнения k -го порядка

$$a_0 x[n+k] + a_1 [n+k-1] + \dots + a_k x[n] = 0, \quad (1.9)$$

то и их линейная комбинация

$$x[n] = \sum_{i=1}^l c_i x_i[n], \quad c_i - \text{const},$$

также является решением этого уравнения.

Дадим теперь определение линейной зависимости и независимости решетчатых функций.

Решетчатые функции $x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n]$ называются линейнозависимыми, если существуют постоянные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все из которых равны нулю, такие, что для $\forall n$ выполняется равенство

$$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] + \dots + \alpha_k x_k[n] = 0. \quad (1.10)$$

Если же равенство (1.10) выполняется лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, то решетчатые функции будут линейно независимыми.

2 *Структура общего решения линейного однородного разностного уравнения.* Всякое однородное разностное уравнение k -го порядка имеет ровно k линейно независимых решений $x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n]$. Любое решение этого уравнения имеет вид

$$X_0[n] = c_1 x_1[n] + c_2 [n] x_2[n] + \dots + c_k [n] x_k[n], \quad (1.11)$$

где c_1, c_2, \dots, c_k – некоторые константы.

Решение (1.11) при произвольных константах c_1, c_2, \dots, c_k называется общим решением линейного однородного разностного уравнения.

3 Структура общего решения неоднородного линейного разностного уравнения. Всякое решение неоднородного линейного разностного уравнения (1.7) представляет собой сумму некоторого его частного решения $\bar{X}[n]$ и его общего решения $X_0[n]$ соответствующего однородного разностного уравнения (1.9).

Системы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами 1-го порядка, записанную в нормальной форме:

$$\begin{cases} x_1[n+1] = a_{11}x_1[n] + \dots + a_{1k}x_k[n] + f_1[n], \\ x_2[n+1] = a_{21}x_1[n] + \dots + a_{2k}x_k[n] + f_2[n], \\ \dots \\ x_k[n+1] = a_{k1}x_1[n] + \dots + a_{kk}x_k[n] + f_k[n]. \end{cases} \quad (1.12)$$

Здесь a_{ij} – постоянные действительные числа, $i, j = 1, 2, \dots, k$; $f_i[n]$ – заданные решетчатые функции; $x_i[n]$ – неизвестные решетчатые функции. Система (1.12) называется неоднородной, если не все $f_i[n] = 0$. Если же для $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ $f_i[n] = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, то система уравнений (1.12) называется однородной. Решением системы (1.12) называется набор k решетчатых функций $x_1[n] = \varphi_1[n]$, $x_2[n] = \varphi_2[n]$, ..., $x_k[n] = \varphi_k[n]$, подстановка которых в систему уравнений (1.12) обращает каждое уравнение системы в тождество.

Начальные данные для системы (1.12) имеют вид

$$x_1[0] = x_{10}, x_2[0] = x_{20}, \dots, x_k[0] = x_{k0}, \quad (1.13)$$

где $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}$ – заданные числа. Решить начальную задачу для системы разностных уравнений (1.12) – это значит найти ее решение при начальных условиях (1.13).

Введем вектор-столбцы и матрицу

$$\vec{X}[n] = \begin{pmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \dots \\ x_k[n] \end{pmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}; \quad \vec{F}[n] = \begin{pmatrix} f_1[n] \\ f_2[n] \\ \dots \\ f_k[n] \end{pmatrix},$$

тогда систему уравнений (1.12) можно записать в векторно-матричном виде

$$\vec{X}[n+1] = A\vec{X}[n] + \vec{F}[n],$$

а соответствующую однородную систему – в виде

$$\vec{X}[n+1] = A\vec{X}[n].$$

1.3 Z-преобразование решетчатых функций и его свойства

Понятие Z-преобразования. Пусть $f[n]$ – решетчатая функция, причем $f[n] = 0$ при $n \leq 0$. Функция $F(z)$ комплексной переменной z , определяемая равенством

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f[n]}{z^n}, \quad (1.14)$$

называется Z-преобразованием решетчатой функции, или преобразованием Лорана.

Если $f[n]$ – решетчатая функция, а $F(z)$ – ее Z-преобразование, то это соответствие символически будем записывать в виде $f[n] \square F(z)$. Если Z-преобразованию $F(z)$ отвечает решетчатая функция $f[n]$, то будем писать $F(z) \square f[n]$. Функцию $F(z)$ будем также называть Z-образом, отвечающим решетчатому оригиналу $f[n]$.

Правую часть равенства (1.14) можно рассматривать как ряд Лорана функции $F(z)$. Найдем область сходимости этого ряда.

Пусть существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f[n]|} = R$. Тогда, по признаку

Коши, ряд (1.14) сходится абсолютно, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f[n]}{z^n} \right|} = \frac{1}{|z|} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f[n]|} = \frac{R}{|z|} \leq 1.$$

Отсюда следует, что ряд (1.14) сходится абсолютно в области $|z| \geq R$, т.е. во внешности круга с радиусом R с центром в точке 0.

При этом функция $F(z)$ будет аналитической в области $|z| > R_1 > R$.

Свойства Z-преобразования. Рассмотрим основные свойства Z-преобразования.

1 *Линейность Z-преобразования.* Если $f[n] \square F(z)$, $g[n] \square G(z)$, то при любых $\alpha, \beta \in R$

$$\alpha f[n] + \beta g[n] \square \alpha F(z) + \beta G(z), \quad (1.15)$$

т.е. сумме оригиналов отвечает сумма соответствующих Z-образов. Очевидно, что свойство (1.15) следует непосредственно из определения Z-преобразования и линейности операции суммирования.

2 *Z-преобразование смещенных решетчатых функций.* Пусть $f[n]$ – решетчатая функция. Рассмотрим следующие решетчатые функции:

$$f_1[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, 2, \dots, k-1; \\ f[n-k], & n = k, k+1, \dots; \end{cases}$$

$$f_2[n] = \begin{cases} 0, & n = -(k+1), -(k+2), \dots, \\ f[n+k], & n = -k, -k+1, \dots, 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Функция $f_1[n]$ получается из $f[n]$ смещением ее по оси n на k единиц вправо, а функция $f_2[n]$ – из $f[n]$ смещением ее на k единиц влево. Такие функции называются смещенными решетчатыми функциями. Найдем Z-образы смещенных решетчатых функций. Исходя из непосредственного определения Z-образа, т.е. формулы (1.14), получаем

$$\begin{aligned}
f[n-k] \boxtimes \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1[n]}{z^n} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f[n-k]}{z^n} = (m=n-k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f[m]}{z^{m+k}} = \\
&= \frac{1}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f[m]}{z^m} = \frac{1}{z^k} F(z).
\end{aligned}$$

Итак, если $f[n] \boxtimes F(z)$, то смещенная функция

$$f[n-k] \boxtimes \frac{1}{z^k} F(z). \quad (1.16)$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned}
f[n+k] \boxtimes \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_2[n]}{z^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f[n+k]}{z^n} = (m=n+k) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{f[m]}{z^{m-k}} = \\
&= z^k \sum_{m=k}^{\infty} \frac{f[m]}{z^m} = z^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f[m]}{z^m} - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{f[m]}{z^m} \right) = z^k F(z) - z^k \left(f[0] + \frac{f[1]}{z} + \frac{f[2]}{z^2} + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \frac{f[k-1]}{z^{k-1}} \right) \\
&= z^k F(z) - z^k f[0] - z^{k-1} f[1] - z^{k-2} f[2] - \dots - z f[k-1].
\end{aligned}$$

Таким образом, если $f[n] \boxtimes F(z)$, то для смещенной функции $f[n+k]$ имеем

$$f[n+k] \boxtimes z^k F(z) - z^k f[0] - z^{k-1} f[1] - \dots - z f[k-1]. \quad (1.17)$$

В частности, при $k=1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
f[n+1] \boxtimes zF(z) - zf[0], \\
f[n+2] \boxtimes z^2F(z) - z^2f[0] - zf[1], \\
f[n+3] \boxtimes z^3F(z) - z^3f[0] - z^2f[1] - zf[2].
\end{aligned} \quad (1.18)$$

3 Если $f[n] \boxtimes \mathcal{F}(z)$, то

$$a^n f[n] \boxtimes F\left(\frac{z}{a}\right). \quad (1.19)$$

Действительно, используя формулу (1.14), получаем

$$a^n f[n] \boxtimes \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n f[n]}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f[n]}{\left(\frac{z}{a}\right)^n} = F\left(\frac{z}{a}\right).$$

4 Дифференцирование Z-преобразования. Если $f[n] \boxtimes F(z)$, то

$$nf[n] \boxtimes z z F'(z). \quad (1.20)$$

Действительно, дифференцируя аналитическую функцию $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}$, получаем

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-nf[n])}{z^{n+1}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-nf[n])}{z^n}.$$

Отсюда

$$z z F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nf[n]}{z^n} = nf[n],$$

что и подтверждает справедливость формулы (1.20).

Используя равенство (1.20), по аналогии будем иметь

$$n^2 f[n] \boxtimes -z(-z F'(z))' = z^2 F''(z) + z F'(z). \quad (1.21)$$

5 Z-преобразованные свертки решетчатых функций. Сверткой двух решетчатых $f[n]$ и $g[n]$ называется решетчатая функция

$$f[n] \times g[n] = \sum_{k=0}^n f[k] g[n-k]. \quad (1.22)$$

Заметим, что так как $g[n-k] = 0$ при $k > n$, то верхний предел суммы (1.22) может быть заменен на ∞ , т.е.

$$f[n] \times g[n] = \sum_{k=0}^n f[k] g[n-k].$$

Тогда, используя непосредственное определение Z-преобразования (формула 1.14), получаем

$$f[n] \times g[n] \boxtimes \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f[k] g[n-k] \right) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g[n-k]}{z^n} = (m = n-k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f[k] \sum_{m=-k}^{\infty} \frac{g[m]}{z^{m+k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g[k]}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g[m]}{z^m} = F(z)G(z),$$

поскольку $g[m] \equiv 0$ при $m = -k, -k+1, \dots, -2, -1$.

Таким образом, доказана справедливость формулы

$$f[n] \times g[n] \square F(z)G(z), \quad (1.23)$$

т.е. свертке решетчатых функций отвечает произведение их Z -образов.

1.4 Z -образы элементарных решетчатых функций

Используя непосредственное определение Z -преобразования и его свойства, получим Z -образы основных элементарных решетчатых функций.

1 Рассмотрим функции

$$f_1[n] = 1, \quad f_2[n] = (-1)^n.$$

Используя формулу (1.14) и формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} g^n = \frac{1}{1-g} \quad (|g| < 1),$$

получаем

$$f_1[n] \square \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}, \quad \text{где } |z| < 1.$$

Аналогичным образом находим Z -образ функции

$$f_2[n] \square \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z} \right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{z}{z+1}, \quad \text{где } |z| < 1.$$

Таким образом, получаем

$$1 \square \frac{z}{z-1}, \quad (-1)^n \square \frac{z}{z+1}.$$

Рассмотрим функцию $g_1[n] = a^n$. Используя формулу (1.19), находим

$$g_1[n] = a^n f_1[n] \propto \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a} - 1} = \frac{z}{z - a}.$$

При $a = e^\alpha$ получаем Z-образ решетчатой функции

$$e^{\alpha n} \propto \frac{z}{z - e^\alpha}. \quad (1.24)$$

Рассмотрим функцию $g_2[n] = a^n e^{an}$. Вновь, используя формулу (1.19), находим Z-образ

$$a^n e^{an} \propto \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a} - e^\alpha} = \frac{z}{z - ae^\alpha}.$$

2 Рассмотрим тригонометрические функции $f_1[n] = \cos \beta n$, $f_2[n] = \sin \beta n$. Используя формулы (1.15) и (1.24), получаем

$$\begin{aligned} \cos \beta n &= \frac{1}{2}(e^{i\beta n} + e^{-i\beta n}) \propto \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{i\beta}} + \frac{z}{z - e^{-i\beta}} \right) = \frac{1}{2} \frac{z(2z - e^{i\beta} - e^{-i\beta})}{(z - e^{i\beta})(z - e^{-i\beta})} = \\ &= \frac{z \left(z - \frac{1}{2}(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) \right)}{z^2 - z(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + 1} = \frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} \sin \beta n &= \frac{1}{i2}(e^{i\beta n} - e^{-i\beta n}) \propto \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{i\beta}} - \frac{z}{z - e^{-i\beta}} \right) = \\ &= \frac{1}{i2} \frac{z(e^{i\beta} - e^{-i\beta})}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} = \frac{z \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}. \end{aligned}$$

Итак, для тригонометрических решетчатых функций получаем

$$\cos \beta n \simeq \frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}, \quad (1.25)$$

$$\sin \beta n \simeq \frac{z \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}. \quad (1.26)$$

Рассмотрим далее функции

$$g_1[n] = a^n \cos \beta n, \quad g_2[n] = a^n \sin \beta n.$$

Используя формулу (1.19), из равенства (1.25) получаем

$$a^n \cos \beta n \simeq \frac{\frac{z}{a} \left(\frac{z}{a} - \cos \beta \right)}{\left(\frac{z}{a} \right)^2 - 2 \frac{z}{a} \cos \beta + 1} = \frac{z(z - a \cos \beta)}{z^2 - 2az \cos \beta + a^2}.$$

Аналогичным образом, из формулы (1.26) находим

$$a^n \sin \beta n \simeq \frac{az \sin \beta}{z^2 - 2az \cos \beta + a^2}.$$

3 Рассмотрим гиперболические функции $f_1[n] = \text{ch } \beta n$, $f_2[n] = \text{sh } \beta n$. Вновь используя формулы (1.15) и (1.24), получаем

$$\begin{aligned} \text{ch } \beta n &= \frac{1}{2}(e^{\beta n} + e^{-\beta n}) \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^\beta} + \frac{z}{z - e^{-\beta}} \right) = \frac{1}{2} \frac{z(2z - (e^\beta + e^{-\beta}))}{(z - e^\beta)(z - e^{-\beta})} = \\ &= \frac{z \left(z - \frac{1}{2}(e^\beta + e^{-\beta}) \right)}{z^2 - z(e^\beta + e^{-\beta}) + 1} = \frac{z(z - \text{ch } \beta)}{z^2 - 2z \text{ch } \beta + 1}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим Z-образ функции

$$\text{sh } \beta n \simeq \frac{z \text{sh } \beta}{z^2 - 2z \text{ch } \beta + 1}.$$

Используя формулу (1.19), находим Z-образы функций

$$a^n \operatorname{ch} \beta n \propto \frac{z(z - a \operatorname{ch} \beta)}{z^2 - 2az \operatorname{ch} \beta + a^2}, \quad a^n \operatorname{sh} \beta n \propto \frac{az \operatorname{sh} \beta}{z^2 - 2az \operatorname{ch} \beta + a^2}.$$

4 Рассмотрим функции $f_1[n] = n$, $f_2[n] = n^2$. Так как

$$1 \propto F(z) = \frac{z}{z-1} \quad \text{и} \quad F'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2},$$

то, используя формулу (1.20), получаем

$$n \propto -zF'(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Аналогичным образом, используя равенство (1.21), находим

$$n^2 \propto z^2 F''(z) + zF'(z) = \frac{2z^2}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Таким образом, требуемые Z-образы будут иметь вид

$$n \propto \frac{z}{(z-1)^2}, \quad n^2 \propto \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}. \quad (1.27)$$

Как следствие, из формул (1.27) получаем Z-образы решетчатых функций [формула (1.19)]

$$na^n \propto \frac{\frac{z}{a}}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad \text{или} \quad \frac{z}{(z-a)^2} \propto na^{n-1}.$$

Соответственно

$$n^2 a^n \propto \frac{\frac{z}{a} \left(\frac{z}{a} + 1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^3} = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}, \quad \text{или} \quad \frac{z(z+a)}{(z-a)^3} \propto n^2 a^{n-1}.$$

Совершенно аналогичным образом, используя равенство (1.20), находим и Z -образы решетчатых функций:

$$n \cos \beta n \propto \frac{z((z^2+1)\cos\beta-2z)}{(z^2-2z\cos\beta+1)^2}, \quad n \sin \beta n \propto \frac{z(z^2-1)\sin\beta}{(z^2-2z\cos\beta+1)^2}.$$

Суммируем полученные выше результаты в виде таблицы 1.1 элементарных решетчатых функций и отвечающих им Z -образов.

Таблица 1.1

$f[n]$	$F(z)$	$f[n]$	$F(z)$
1	$\frac{z}{z-1}$	$\cos \beta n$	$\frac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$
$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$	$\sin \beta n$	$\frac{z \sin \beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$a^n \cos \beta n$	$\frac{z(z-a\cos\beta)}{z^2-2az\cos\beta+a^2}$
na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$a^n \sin \beta n$	$\frac{az \sin \beta}{z^2-2az\cos\beta+a^2}$
$n^2 a^{n-1}$	$\frac{z(z+a)}{(z-a)^3}$	$\text{sh} \beta n$	$\frac{z \text{sh} \beta}{z^2-2z\text{ch}\beta+1}$
$e^{\alpha n}$	$\frac{z}{z-e^\alpha}$	$\text{ch} \beta n$	$\frac{z(z-\text{ch}\beta)}{z^2-2z\text{ch}\beta+1}$
$a^n e^{\alpha n}$	$\frac{z}{z-ae^\alpha}$	$a^n \text{ch} \beta n$	$\frac{z(z-a\text{ch}\beta)}{z^2-2az\text{ch}\beta+a^2}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$a^n \text{sh} \beta n$	$\frac{az \text{sh} \beta}{z^2-2az\text{ch}\beta+a^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$n \cos \beta n$	$\frac{z((z^2+1)\cos\beta-2z)}{(z^2-2z\cos\beta+1)^2}$
$\cos \beta n$	$\frac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$	$n \sin \beta n$	$\frac{z(z^2-1)\sin\beta}{(z^2-2z\cos\beta+1)^2}$
$\sin \beta n$	$\frac{z \sin \beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$		

1.5 Z-восстановление решетчатой функции по ее Z-преобразованию (обращение Z-преобразования)

При восстановлении решетчатой функции по ее Z-образу в простейших случаях можно использовать полученную нами таблицу простых Z-преобразований, отвечающих элементарным решетчатым функциям. В общем случае справедлива

Теорема 1. Пусть $f[n] \leftrightarrow F(z)$. Тогда

$$f[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.28)$$

где Γ – любая окружность радиусом $|z| = R_1 > R$, обходимая против часовой стрелки.

Докажем справедливость формулы (1.28). Умножим равенство $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f[n]}{z^n}$ на $z^{k-1} \frac{1}{2}$ и проинтегрируем обе части равенства по окружности Γ : $|z| = R_1 > R$. Поменяв порядок интегрирования и суммирования, получаем

$$\oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz = \oint_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f[n] z^{k-1}}{z^n} dz = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \oint_{\Gamma} z^{k-n-1} dz. \quad (1.29)$$

Для точек, лежащих на окружности Γ , перейдем к параметрической форме представления $z = R_1 e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Как следствие, получаем

$$\oint_{\Gamma} z^{k-n-1} dz = iR_1^{k-n} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\varphi} d\varphi = iR_1^{k-n} \int_0^{2\pi} (\cos(k-n)\varphi + i \sin(k-n)\varphi) d\varphi.$$

При $k \neq n$

$$\int_0^{2\pi} (\cos(k-n)\varphi + i \sin(k-n)\varphi) d\varphi = 0,$$

для $k = n$ получаем $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$.

Таким образом, при $k = n$ из равенства (1.29) получаем следующее соотношение:

$$\oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz = 2\pi i f[n],$$

из которого и следует формула (1.28).

Интеграл в формуле (1.28) в общем случае можно вычислить с помощью вычетов, через соотношение

$$f[n] = \sum_k \operatorname{Re} s_{z=z_k} (F(z) z^{n-1}), \quad (1.30)$$

где z_k – особые точки (полюса) функции $F(z)$ внутри контура интегрирования $|z| = R_1$.

Формула (1.30) записана нами в предположении, что все полюса функции $F(z)$ являются действительными. Наряду с действительными полюсами, функция $F(z)$ может иметь полюса и в комплексно-сопряженных точках. Пусть $z = z_k$ – действительные полюса функции $F(z)$, а $z = \alpha_k + i\beta_k$, $\bar{z} = \alpha_k - i\beta_k$ – комплексные полюса функции $F(z)$, в этом случае решетчатую функцию $f[n]$ мы будем находить по формуле

$$f[n] = \sum_k \operatorname{Re} s_{z=z_k} (F(z) z^{n-1}) + \sum_k 2 \operatorname{Re} \operatorname{Re} s_{z=\alpha_k + i\beta_k} (F(z) z^{n-1}), \quad (1.31)$$

т.е. для пары двух комплексно-сопряженных полюсов $z = \alpha_k + i\beta_k$, $\bar{z} = \alpha_k - i\beta_k$ достаточно вычислить вычет в полюсе $z = \alpha_k + i\beta_k$ ($\beta_k > 0$), а затем выделить в полученном выражении действительную часть.

Напомним, что вычет функции $F(z) z^{n-1}$ в простом полюсе $z = z_0$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{Re} s_{z=z_0} (F(z) z^{n-1}) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) F(z) z^{n-1}], \quad (1.32)$$

а в полюсе $z = z_0$ m -го порядка (m -й кратности) – по формуле

$$\operatorname{Res}_{z \rightarrow z_0} (F(z)z^{n-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m F(z)z^{n-1} \right]. \quad (1.33)$$

В дальнейшем анализе Z -образы, которые мы будем получать, будут представлять собой рациональные дроби. Поэтому для нахождения соответствующих решетчатых оригиналов мы будем использовать два метода: 1) разложение полученного Z -образа на сумму элементарных рациональных дробей и приведение дробно-рациональных слагаемых к табличным Z -образам; 2) общий подход через вычисление вычетов функции $F(z)z^{n-1}$ в полюсах функции $F(z)$ с использованием формул (1.30), (1.31).

2 МЕТОД Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

2.1 Решение линейных разностных уравнений методом Z-преобразования

Рассмотрим линейное разностное уравнение k -го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 x[n+k] + a_1 x[n+k-1] + \dots + a_{k-1} x[n+1] + a_k x[n] = f[n], \quad (2.1)$$

при заданных начальных условиях

$$x[0] = x_0, \quad x[1] = x_1, \quad \dots, \quad x[k-1] = x_{k-1}.$$

Решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами методом Z-преобразования производится по схеме, подобной применению преобразования Лапласа к решению задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Применяв Z-преобразование с учетом начальных условий к обеим частям разностного уравнения (2.1), получим алгебраическое операторное уравнение для Z-образа $X(z) \square x[n]$. Затем по найденному образу $X(z)$ восстанавливаем решетчатую функцию-оригинал $x[n]$, которая и является решением линейного разностного уравнения при поставленных начальных условиях.

Рассмотрим применение этой схемы на конкретных примерах.

Пример 2.1.

1. Найти решение разностного уравнения

$$y[n+3] + y[n] = 0 \quad (2.2)$$

с начальными условиями $y[0] = y[1] = y[2] = 1$.

Решение. Вводим Z-образ неизвестной решетчатой функции $y[n] \square Y(z)$. С учетом поставленных начальных условий для смещенной решетчатой функции получаем [формулы (1.18)]

$$y[n+3] \square z^3 Y(z) - z^3 - z^2 - z.$$

Как следствие, уравнение (2.2) после перехода к Z-образам принимает вид

$$(z^3 + 1)Y(z) = z(z^2 + z + 1),$$

откуда находим требуемый Z-образ

$$Y(z) = \frac{z(z^2 + z + 1)}{z^3 + 1} = \frac{z(z^2 + z + 1)}{(z+1)(z^2 - z + 1)}.$$

Далее разлагаем на сумму элементарных дробей рациональную дробь

$$\frac{z^2 + z + 1}{(z+1)(z^2 - z + 1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz + C}{z^2 - z + 1} = \frac{A(z^2 - z + 1) + (Bz + C)(z+1)}{(z+1)(z^2 - z + 1)},$$

приравниваем многочлены в числителях дробей

$$z^2 + z + 1 = A(z^2 - z + 1) + (Bz + C)(z+1).$$

$$\text{Получаем при } z = -1: 1 = 3A, \quad A = \frac{1}{3};$$

$$z = 0: 1 = A + C, \quad C = \frac{2}{3};$$

$$z = 1: 3 = A + 2\left(B + \frac{2}{3}\right), \quad B = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, разложение дроби на сумму элементарных дробей имеет вид

$$\frac{(z^2 + z + 1)}{(z+1)(z^2 - z + 1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{z+1} + \frac{2}{3} \frac{z+1}{z^2 - z + 1}.$$

Поэтому для Z-образа $Y(z)$ получаем

$$Y(z) = z \left(\frac{1}{3} \frac{1}{z+1} + \frac{2}{3} \frac{z+1}{z^2 - z + 1} \right) = \frac{1}{3} \frac{z}{z+1} + \frac{2}{3} \frac{z(z+1)}{z^2 - z + 1}.$$

Второе слагаемое в полученном выражении для Z -образа $Y(z)$ приводим к табличному виду:

$$\frac{z(z+1)}{z^2 - z + 1} = \frac{z \left(\left(z - \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2} \right)}{z^2 - 2z \frac{1}{2} + 1} = \frac{z \left(z - \cos \frac{\pi}{3} \right)}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{3} + 1} + \sqrt{3} \frac{z \sin \frac{\pi}{3}}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{3} + 1}.$$

Таким образом, для Z -образа $Y(z)$ окончательно получаем следующее выражение:

$$Y(z) = \frac{1}{3} \frac{z}{z+1} + \frac{2}{3} \left(\frac{z \left(z - \cos \frac{\pi}{3} \right)}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{3} + 1} + \sqrt{3} \frac{z \sin \frac{\pi}{3}}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{3} + 1} \right).$$

Далее смотрим таблицу элементарных Z -образов и находим решетчатую функцию $y[n]$, которая и дает нам решение исходного разностного уравнения (2.2). Получаем

$$y[n] = (-1)^n + \frac{2}{3} \left(\cos \frac{\pi n}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi n}{3} \right).$$

2. Найти решение начальной задачи для разностного уравнения

$$x[n+2] + 2x[n+1] + 2x[n] = f[n], \quad (2.3)$$

где $f[n]$ – заданная решетчатая функция, начальные условия $x[0] = x[1] = 0$.

Решение. Вводим соответствующие Z -образы $x[n] \leftrightarrow X(z)$, $f[n] \leftrightarrow F(z)$. Переходим к Z -образам в обеих частях уравнения (2.3), с учетом нулевых начальных условий получаем уравнение вида

$$(z^2 + 2z + 2)X(z) = F(z),$$

из которого находим

$$X(z) = \frac{F(z)}{z^2 + 2z + 2} = X_0(z)F(z).$$

Сначала найдем решетчатую функцию-оригинал, отвечающую Z -образу:

$$X_0(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

где $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$.

Используем общий подход через вычеты функции $X_0(z)z^{n-1}$.

Вычисляем вычет в простом полюсе $z_1 = -1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

Применяя формулу (1.32), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s_{z=z_1} (X_0(z)z^{n-1}) &= \left[(z - z_1) \frac{z^{n-1}}{(z - z_1)(z - z_2)} \right]_{z=z_1} = \frac{z_1^{n-1}}{z_1 - z_2} = \\ &= \frac{1}{2i} (\sqrt{2})^{n-1} \left(\cos \frac{3\pi(n-1)}{4} + i \sin \frac{3\pi(n-1)}{4} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{2})^{n-1} \left(\sin \frac{3\pi(n-1)}{4} - i \cos \frac{3\pi(n-1)}{4} \right). \end{aligned}$$

Выделяем в полученном выражении действительную часть

$$\operatorname{Re} \operatorname{Re} s_{z=z_1} (X_0(z)z^{n-1}) = \frac{1}{2} (\sqrt{2})^{n-1} \sin \frac{3\pi(n-1)}{4} = -\frac{1}{2} (\sqrt{2})^{n-2} \left(\cos \frac{3\pi n}{4} + \sin \frac{3\pi n}{4} \right).$$

Как следствие, решетчатая функция $x_0[n] \stackrel{\square}{=} X_0(z)$ будет иметь вид [формула (1.31)]

$$x_0[n] = 2 \operatorname{Re} \operatorname{Re} s_{z=z_1} (X_0(z)z^{n-1}) = -(\sqrt{2})^{n-2} \left(\cos \frac{3\pi n}{4} + \sin \frac{3\pi n}{4} \right).$$

Тогда решение исходного разностного уравнения (2.3) получаем через свертку решетчатых функций $x_0[n]$ и $f[n]$ по формуле (1.22)

$$x[n] = \sum_{k=0}^n x_0[k] f[n-k] = -\sum_{k=0}^n (\sqrt{2})^{k-2} \left(\cos \frac{3\pi k}{4} + \sin \frac{3\pi k}{4} \right) f[n-k].$$

2.2 Решение систем линейных разностных уравнений методом Z-преобразования

Проиллюстрируем эффективность метода Z-преобразования для решения начальных задач для систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 2.2. Найти решение систем линейных разностных уравнений при данных начальных условиях:

$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + 2y[n] = 2^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 2x[n] + y[n] = (-2)^n, & y[0] = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Решение. Вводим Z-образы неизвестных решетчатых функций $x[n] \leftrightarrow X(z)$, $y[n] \leftrightarrow Y(z)$. Переходим к Z-образам в обоих уравнениях системы (2.4), с учетом нулевых начальных условий получаем следующую систему уравнений для Z-образов:

$$\begin{cases} (z-1)X(z) + 2Y(z) = \frac{z}{z-2}, \\ -2X(z) + (z+1)Y(z) = \frac{z}{z+2}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Систему уравнений (2.5) решаем по формулам Крамера. Определитель системы

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} z-1 & 2 \\ -2 & z+1 \end{vmatrix} = (z-1)(z+1) + 4 = z^2 + 3.$$

Определитель

$$\Delta_1(z) = \begin{vmatrix} \frac{z}{z-2} & 2 \\ \frac{z}{z+2} & z+1 \end{vmatrix} = \frac{z(z+1)}{z-2} - \frac{2z}{z+2} = \frac{z(z^2 + z + 6)}{(z-2)(z+2)}.$$

Тогда для Z-образа $X(z)$ получаем

$$X(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta(z)} = \frac{z(z^2 + z + 6)}{(z-2)(z+2)(z^2 + 3)}.$$

Функция $X(z)$ имеет два простых действительных полюса $z = +2, -2$ и два простых комплексно-сопряженных полюса в точках $z = +i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}$. Вычисляем вычеты в действительных полюсах [формула (1.32)]:

$$\operatorname{Res}_{z=2}(X(z)z^{n-1}) = \left[(z-2) \frac{(z^2 + z + 6)z^n}{(z-2)(z+2)(z^2 + 3)} \right]_{z=2} = \frac{3}{7}2^n, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{Res}_{z=-2}(X(z)z^{n-1}) = \left[(z+2) \frac{(z^2 + z + 6)z^n}{(z-2)(z+2)(z^2 + 3)} \right]_{z=-2} = -\frac{2}{7}(-2)^n. \quad (2.7)$$

Представив Z -образ в виде

$$X(z) = \frac{z(z^2 + z + 6)}{(z^2 - 4)(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3})},$$

вычисляем вычет функции $X(z)z^{n-1}$ в простом комплексном полюсе

$$z = i\sqrt{3} = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right):$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i\sqrt{3}}(X(z)z^{n-1}) &= \left[(z - i\sqrt{3}) \frac{(z^2 + z + 6)z^n}{(z^2 - 4)(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3})} \right]_{z=i\sqrt{3}} = -\frac{(3 + i\sqrt{3})}{14i\sqrt{3}} (\sqrt{3})^n i^n = \\ &= -\frac{(\sqrt{3} + i)}{14i} (\sqrt{3})^n \left(\cos \frac{\pi n}{2} + i \sin \frac{\pi n}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3} + i}{14} (\sqrt{3})^n \left(\sin \frac{\pi n}{2} - i \cos \frac{\pi n}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{14} (\sqrt{3})^n \left(\cos \frac{\pi n}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi n}{2} + i \left(\sin \frac{\pi n}{2} - \sqrt{3} \cos \frac{\pi n}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Действительная часть полученного выражения

$$\operatorname{Re} \operatorname{Res}_{z=i\sqrt{3}}(X(z)z^{n-1}) = -\frac{1}{14} (\sqrt{3})^n \left(\cos \frac{\pi n}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi n}{2} \right). \quad (2.8)$$

Суммируя результаты, даваемые равенствами (2.6)–(2.8), находим решетчатую функцию $x[n]$ [формула (1.31)]:

$$\begin{aligned} x[n] &= \operatorname{Re} s_{z=2} (X(z)z^{n-1}) + \operatorname{Re} s_{z=-2} (X(z)z^{n-1}) + 2\operatorname{Re} \operatorname{Re} s_{z=i\sqrt{3}} (X(z)z^{n-1}) = \\ &= \frac{3}{7}2^n + \frac{1}{7}(-2)^{n+1} - \frac{1}{7}(\sqrt{3})^n \left(\cos \frac{\pi n}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi n}{2} \right). \end{aligned}$$

Вычисляем определитель:

$$\Delta_2(z) = \begin{vmatrix} z-1 & \frac{z}{z-2} \\ -2 & \frac{z}{z+2} \end{vmatrix} = \frac{z(z-1)}{z+2} + \frac{2z}{z-2} = \frac{z(z^2 - z + 6)}{(z-2)(z+2)}.$$

Тогда

$$Y(z) = \frac{\Delta_2(z)}{\Delta(z)} = \frac{z(z^2 - z + 6)}{(z-2)(z+2)(z^2 + 3)}.$$

Дальнейшие вычисления аналогичны предыдущим. Вычисляем вычеты функции $Y(z)z^{n-1}$ в действительных полюсах:

$$\operatorname{Re} s_{z=2} (Y(z)z^{n-1}) = \left[(z-2) \frac{(z^2 - z + 6)z^n}{(z-2)(z+2)(z^2 + 3)} \right]_{z=2} = \frac{1}{7}2^{n+1}, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{Re} s_{z=-2} (Y(z)z^{n-1}) = \left[(z+2) \frac{(z^2 - z + 6)z^n}{(z-2)(z+2)(z^2 + 3)} \right]_{z=-2} = -\frac{3}{7}(-2)^n. \quad (2.10)$$

Вычет в комплексном полюсе $z = i\sqrt{3}$ равен

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s_{z=i\sqrt{3}} (Y(z)z^{n-1}) &= \left[(z-i\sqrt{3}) \frac{(z^2 - z + 6)z^n}{(z^2 - 4)(z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})} \right]_{z=i\sqrt{3}} = -\frac{(3-i\sqrt{3})}{14i\sqrt{3}} (\sqrt{3})^n i^n = \\ &= -\frac{(\sqrt{3}-i)}{14i} (\sqrt{3})^n \left(\cos \frac{\pi n}{2} + i \sin \frac{\pi n}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}-i}{14} (\sqrt{3})^n \left(\sin \frac{\pi n}{2} - i \cos \frac{\pi n}{2} \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{14}(\sqrt{3})^n \left(\sqrt{3} \sin \frac{\pi n}{2} - \cos \frac{\pi n}{2} - i \left(\sin \frac{\pi n}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi n}{2} \right) \right).$$

Действительная часть полученного выражения

$$\operatorname{Re} \operatorname{Re}_{z=i\sqrt{3}}(Y(z)z^{n-1}) = -\frac{1}{14}(\sqrt{3})^n \left(\sqrt{3} \sin \frac{\pi n}{2} - \cos \frac{\pi n}{2} \right). \quad (2.11)$$

Суммируя результаты равенств (2.9), (2.10), (2.11), находим решетчатую функцию:

$$\begin{aligned} y[n] &= \operatorname{Re}_{s_{z=2}}(Y(z)z^{n-1}) + \operatorname{Re}_{s_{z=-2}}(Y(z)z^{n-1}) + 2\operatorname{Re} \operatorname{Re}_{z=i\sqrt{3}}(Y(z)z^{n-1}) = \\ &= \frac{1}{7}2^{n+1} - \frac{3}{7}(-2)^n - \frac{1}{7}(\sqrt{3})^n \left(\sqrt{3} \sin \frac{\pi n}{2} - \cos \frac{\pi n}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, решение системы разностных уравнений (2.4) с нулевыми начальными условиями имеет вид

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{3}{7}2^n + \frac{1}{7}(-2)^{n+1} - \frac{1}{7}(\sqrt{3})^n \left(\cos \frac{\pi n}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi n}{2} \right), \\ y[n] &= \frac{1}{7}2^{n+1} - \frac{3}{7}(-2)^n - \frac{1}{7}(\sqrt{3})^n \left(\sqrt{3} \sin \frac{\pi n}{2} - \cos \frac{\pi n}{2} \right). \end{aligned}$$

Пример 2.3. Найти решение систем линейных разностных уравнений при данных начальных условиях:

$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = \cos \frac{\pi n}{2}, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - x[n] - y[n] = 0, & y[0] = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Решение. Переходим от решетчатых функций к соответствующим Z -образам $x[n] \leftrightarrow X(z)$, $y[n] \leftrightarrow Y(z)$. Так как начальные условия нулевые, то $x[n+1] \leftrightarrow zX(z)$, $y[n+1] \leftrightarrow zY(z)$. После перехода к Z -образам в уравнениях системы (2.12), получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} (z-1)X(z) + Y(z) = \frac{z^2}{z^2+1}, \\ -X(z) + (z-1)Y(z) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Определитель системы (2.13)

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} z-1 & 1 \\ -1 & z-1 \end{vmatrix} = (z-1)^2 + 1 = z^2 - 2z + 2.$$

Определители

$$\Delta_1(z) = \begin{vmatrix} \frac{z^2}{z^2+1} & 1 \\ 0 & z-1 \end{vmatrix} = \frac{z^2(z-1)}{z^2+1} = \frac{z(z^2-z)}{z^2+1}, \quad \Delta_2(z) = \begin{vmatrix} z-1 & \frac{z^2}{z^2+1} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{z^2}{z^2+1}.$$

Находим Z-образ $X(z)$, который имеет вид

$$X(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta(z)} = \frac{z(z^2-z)}{(z^2+1)(z^2-2z+2)} = z \frac{z^2-z}{(z^2+1)(z^2-2z+2)}.$$

Разлагаем на сумму элементарных дробей правильную рациональную дробь:

$$\frac{z^2-z}{(z^2+1)(z^2-2z+2)} = \frac{Az+B}{z^2+1} + \frac{Cz+D}{z^2-2z+2} = \frac{(Az+B)(z^2-2z+2) + (Cz+D)(z^2+1)}{(z^2+1)(z^2-2z+2)}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях Z в двух многочленах

$$0 \cdot z^3 + z^2 - z + 0 = A(z^3 - 2z^2 + 2z) + B(z^2 - 2z + 2) + C(z^3 + z) + D(z^2 + 1),$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ -2A + B + D = 1, \\ 2A - 2B + C = -1, \\ 2B + D = 0, \end{cases}$$

из которой находим коэффициенты разложения

$$A = -\frac{3}{5}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = \frac{3}{5}, \quad D = -\frac{2}{5}.$$

Таким образом, разложение дроби имеет вид

$$\frac{z^2 - z}{(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2)} = -\frac{3}{5} \frac{z}{z^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{1}{z^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{3z - 2}{z^2 - 2z + 2}.$$

Используя это разложение, получаем

$$X(z) = z \left(-\frac{3}{5} \frac{z}{z^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{1}{z^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{3z - 2}{z^2 - 2z + 2} \right) = \frac{1}{5} \frac{z}{z^2 + 1} - \frac{3}{5} \frac{z^2}{z^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{z(3z - 2)}{z^2 - 2z + 2}.$$

Приводим третье слагаемое к табличному виду:

$$\begin{aligned} \frac{z(3z - 2)}{z^2 - 2z + 2} &= \frac{3z^2 - 2z}{z^2 - 2\sqrt{2}z \cos \frac{\pi}{4} + (\sqrt{2})^2} = \frac{3z \left(z - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \right)}{z^2 - 2\sqrt{2}z \cos \frac{\pi}{4} + (\sqrt{2})^2} + \\ &+ \frac{\sqrt{2}z \sin \frac{\pi}{4}}{z^2 - 2\sqrt{2}z \cos \frac{\pi}{4} + (\sqrt{2})^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, для Z-образа $X(z)$ окончательно получаем следующее выражение:

$$X(z) = \frac{1}{5} \frac{z}{z^2 + 1} - \frac{3}{5} \frac{z^2}{z^2 + 1} + \frac{3}{5} \frac{z \left(z - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \right)}{z^2 - 2\sqrt{2}z \cos \frac{\pi}{4} + (\sqrt{2})^2} + \frac{1}{5} \frac{\sqrt{2}z \sin \frac{\pi}{4}}{z^2 - 2\sqrt{2}z \cos \frac{\pi}{4} + (\sqrt{2})^2}.$$

Переходим в каждом слагаемом к соответствующему решетчатому оригиналу и находим функцию:

$$x[n] = \frac{1}{5} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{3}{5} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{3}{5} (\sqrt{2})^n \cos \frac{\pi n}{4} + \frac{1}{5} (\sqrt{2})^n \sin \frac{\pi n}{4} =$$

$$= \frac{1}{5} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{3}{5} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{5} (\sqrt{2})^n \left(3 \cos \frac{\pi n}{4} + \sin \frac{\pi n}{4} \right).$$

Находим Z-образ:

$$Y(z) = \frac{\Delta_2(z)}{\Delta(z)} = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2-2z+2)} = z \frac{z}{(z^2+1)(z^2-2z+2)}.$$

Разлагая дробь на сумму элементарных дробей

$$\frac{z}{(z^2+1)(z^2-2z+2)} = \frac{1}{5} \frac{z}{z^2+1} - \frac{2}{5} \frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{5} \frac{z-4}{z^2-2z+2},$$

получаем для функции $Y(z)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} Y(z) &= z \left(\frac{1}{5} \frac{z}{z^2+1} - \frac{2}{5} \frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{5} \frac{z-4}{z^2-2z+2} \right) = \frac{1}{5} \frac{z^2}{z^2+1} - \frac{2}{5} \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{5} \frac{z(z-4)}{z^2-2z+2} = \\ &= \frac{1}{5} \frac{z^2}{z^2+1} - \frac{2}{5} \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{5} \frac{z \left(z - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \right)}{z^2 - 2\sqrt{2}z \cos \frac{\pi}{4} + (\sqrt{2})^2} + \frac{3}{5} \frac{\sqrt{2}z \sin \frac{\pi}{4}}{z^2 - 2\sqrt{2}z \cos \frac{\pi}{4} + (\sqrt{2})^2}. \end{aligned}$$

Как следствие, соответствующая функция-оригинал $y[n]$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{5} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{2}{5} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{5} (\sqrt{2})^n \cos \frac{\pi n}{4} + \frac{3}{5} (\sqrt{2})^n \sin \frac{\pi n}{4} = \\ &= \frac{1}{5} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{2}{5} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{5} (\sqrt{2})^n \left(3 \sin \frac{\pi n}{4} - \cos \frac{\pi n}{4} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, решение исходной системы разностных уравнений (2.12) при нулевых начальных условиях дается следующими функциями:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{5} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{3}{5} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{5} (\sqrt{2})^n \left(3 \cos \frac{\pi n}{4} + \sin \frac{\pi n}{4} \right), \\ y[n] &= \frac{1}{5} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{2}{5} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{5} (\sqrt{2})^n \left(3 \sin \frac{\pi n}{4} - \cos \frac{\pi n}{4} \right). \end{aligned}$$

Пример 2.4. Найти решение систем линейных разностных уравнений при данных начальных условиях:

$$\begin{cases} x[n+1] + x[n] - y[n] = (-2)^n, & x[0] = 1, \\ y[n+1] - 5y[n] + 9x[n] = 0, & y[0] = 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Решение. Вводим Z -образы неизвестных функций $x[n] \stackrel{\square}{\rightarrow} X(z)$, $y[n] \stackrel{\square}{\rightarrow} Y(z)$, переходим к соответствующим Z -образам, с учетом поставленных начальных условий получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (z+1)X(z) - Y(z) = \frac{z^2 + 3z}{z+2}, \\ 9X(z) + (z-5)Y(z) = z. \end{cases} \quad (2.15)$$

Из системы уравнений (2.15) находим требуемые Z -образы. Получаем

$$X(z) = \frac{z(z^2 - z - 13)}{(z+2)(z-2)^2}.$$

Функция $X(z)$ имеет простой полюс в точке $z = -2$ и полюс 2-й кратности в точке $z = 2$. Вычисляя вычет функции $X(z)z^{n-1}$ в простом полюсе, находим

$$\operatorname{Res}_{z=-2} (X(z)z^{n-1}) = \left[(z+2) \frac{(z^2 - z - 13)z^n}{(z+2)(z-2)^2} \right]_{z=-2} = -\frac{7}{16}(-2)^n. \quad (2.16)$$

По формуле (1.33) вычисляем вычет в полюсе 2-й кратности ($m=2$):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=2} (X(z)z^{n-1}) &= \frac{d}{dz} \left[(z-2)^2 \frac{(z^2 - z - 13)z^n}{(z+2)(z-2)^2} \right]_{z=2} = \\ &= \left[\frac{((2z-1+nz^{-1})(z^2 - z - 13))(z+2) - (z^2 - z - 13)z^n}{(z+2)} \right]_{z=2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} 2^n \left(4 \left(3 - \frac{11}{2} n \right) + 11 \right) = \frac{1}{16} 2^n (23 - 22n) = 2^{n-4} (23 - 22n). \quad (2.17)$$

Суммируя результаты равенств (2.16), (2.17), находим решетчатую функцию [формула (1.30)]:

$$\begin{aligned} x[n] &= -\frac{7}{16} (-2)^n + 2^{n-4} (23 - 22n) = 7(-1)^{n-1} 2^{n-4} + 2^{n-4} (23 - 22n) = \\ &= 2^{n-4} (23 - 22n - 7(-1)^n). \end{aligned}$$

Функцию-оригинал, отвечающую образу

$$Y(z) = \frac{z(z^2 - 6z - 25)}{(z+2)(z-2)^2},$$

находим аналогичным образом.

Вычет функции $Y(z)z^{n-1}$ в простом полюсе $z = -2$

$$\operatorname{Res}_{z=-2} (Y(z)z^{n-1}) = \left[(z+2) \frac{(z^2 - 6z - 25)z^n}{(z+2)(z-2)^2} \right]_{z=-2} = -\frac{9}{16} (-2)^n. \quad (2.18)$$

Вычисляем вычет в полюсе 2-й кратности $z = 2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=2} (Y(z)z^{n-1}) &= \frac{d}{dz} \left[(z-2)^2 \frac{(z^2 - 6z - 25)z^n}{(z+2)(z-2)^2} \right]_{z=2} = \\ &= \left[\frac{\left((2z - 6 + nz^{-1}(z^2 - 6z - 25))(z+2) - (z^2 - 6z - 25) \right) z^n}{(z+2)} \right]_{z=2} = \\ &= \frac{1}{16} 2^n (33(1-2n) - 8) = \frac{1}{16} 2^n (25 - 66n) = 2^{n-4} (25 - 66n). \quad (2.19) \end{aligned}$$

Из равенств (2.18), (2.19), суммируя их результаты, получаем функцию

$$y[n] = -\frac{9}{16}(-2)^n + 2^{n-4}(25-66n) = 2^{n-4}(25-66n) - \frac{9}{16}(-1)^n 2^n = \\ = 2^{n-4}(25-66n) - 9(-1)^n 2^{n-4} = 2^{n-4}(25-66n-9(-1)^n).$$

Итак, решение системы разностных уравнений (2.14) имеет вид

$$x[n] = 2^{n-4}(23-22n-7(-1)^n), \\ y[n] = 2^{n-4}(25-66n-9(-1)^n).$$

Пример 2.5. Найти решение системы разностных уравнений, не приведенных к нормальному виду:

$$\begin{cases} x[n+2] - y[n] = 0, & x[0] = x[1] = 1, \\ y[n+2] + x[n] = 0, & y[0] = y[1] = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Решение. Вводим требуемые Z-образы $X(z) \square x[n]$, $Y(z) \square y[n]$. С учетом начальных условий, Z-образы смещенных функций будут иметь вид [формулы (1.18)]

$$x[n+2] \square z^2 X(z) - z^2 - z, \quad y[n+2] \square z^2 Y(z).$$

Как следствие, система уравнений (2.20) после перехода к Z-образам в обоих уравнениях системы принимает вид

$$\begin{cases} z^2 X(z) - Y(z) = z^2 + z, \\ X(z) + z^2 Y(z) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Определитель системы (2.21)

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} z^2 - 1 & \\ 1 & z^2 \end{vmatrix} = z^4 + 1 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1).$$

Определитель

$$\Delta_1(z) = \begin{vmatrix} z^2 + z & -1 \\ 0 & z^2 \end{vmatrix} = z^2(z^2 + z) = z(z^3 + z^2).$$

Поэтому Z -образ

$$X(z) = \frac{\Delta_1(z)}{\Delta(z)} = \frac{z(z^3 + z^2)}{(z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)}.$$

Разложив на сумму элементарных дробей дробь

$$\begin{aligned} \frac{z^3 + z^2}{(z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)} &= \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} z - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} z + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(\sqrt{2}+1)z-1}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(\sqrt{2}-1)z+1}{z^2 + \sqrt{2}z + 1}, \end{aligned}$$

получаем для Z -образа следующее выражение:

$$\begin{aligned} X(z) &= z \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(\sqrt{2}+1)z-1}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(\sqrt{2}-1)z+1}{z^2 + \sqrt{2}z + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{z((\sqrt{2}+1)z-1)}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{z((\sqrt{2}-1)z+1)}{z^2 + \sqrt{2}z + 1}. \end{aligned}$$

Далее приводим каждую из дробей к табличному виду и получаем:
1-е слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{z((\sqrt{2}+1)z-1)}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} &= \frac{(\sqrt{2}+1)z \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + z \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} - 1 \right)}{z^2 - 2z \frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = \\ &= (\sqrt{2}+1) \frac{z \left(z - \cos \frac{\pi}{4} \right)}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{4} + 1} + \frac{z \sin \frac{\pi}{4}}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{4} + 1}; \end{aligned}$$

2-е слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{z((\sqrt{2}-1)z+1)}{z^2+\sqrt{2}z+1} &= \frac{(\sqrt{2}-1)z\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+z\left(1-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)}{z^2-2z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1} = \\ &= (\sqrt{2}-1) \frac{z\left(z-\cos\frac{3\pi}{4}\right)}{z^2-2z\cos\frac{3\pi}{4}+1} + \frac{z\sin\frac{3\pi}{4}}{z^2-2z\cos\frac{3\pi}{4}+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно Z-образ $X(z)$ принимает вид

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\sqrt{2}+1) \frac{z\left(z-\cos\frac{\pi}{4}\right)}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{4}+1} + \frac{z\sin\frac{\pi}{4}}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{4}+1} \right) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\sqrt{2}-1) \frac{z\left(z-\cos\frac{3\pi}{4}\right)}{z^2-2z\cos\frac{3\pi}{4}+1} + \frac{z\sin\frac{3\pi}{4}}{z^2-2z\cos\frac{3\pi}{4}+1} \right). \end{aligned}$$

Как следствие, для решетчатой функции $x[n]$ получается следующее выражение:

$$x[n] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\sqrt{2}+1) \cos\frac{\pi n}{4} + \sin\frac{\pi n}{4} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\sqrt{2}-1) \cos\frac{3\pi n}{4} + \sin\frac{3\pi n}{4} \right).$$

Вычислив определитель

$$\Delta_2(z) = \begin{vmatrix} z^2 & z^2+z \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(z^2+z),$$

находим Z-образ:

$$Y(z) = \frac{\Delta_2(z)}{\Delta(z)} = -\frac{z^2+z}{(z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+\sqrt{2}z+1)} = -\frac{z(z+1)}{(z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+\sqrt{2}z+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{z - \sqrt{2} + 1}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{z + \sqrt{2} - 1}{z^2 + \sqrt{2}z + 1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{z(z - (\sqrt{2} + 1))}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{z(z + \sqrt{2} - 1)}{z^2 + \sqrt{2}z + 1}.$$

После приведения дробей к табличному виду окончательно получаем для Z -образа следующее выражение:

$$Y(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{z \left(z - \cos \frac{\pi}{4} \right)}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{4} + 1} - (\sqrt{2} + 1) \frac{z \sin \frac{\pi}{4}}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{4} + 1} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{z \left(z - \cos \frac{3\pi}{4} \right)}{z^2 - 2z \cos \frac{3\pi}{4} + 1} - (\sqrt{2} - 1) \frac{z \sin \frac{\pi}{4}}{z^2 - 2z \cos \frac{3\pi}{4} + 1} \right).$$

Из последнего равенства находим соответствующую функцию-оригинал

$$y[n] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi n}{4} - (\sqrt{2} + 1) \sin \frac{\pi n}{4} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi n}{4} - (\sqrt{2} - 1) \sin \frac{3\pi n}{4} \right).$$

Найденные решетчатые функции $x[n]$ и $y[n]$ дают решение поставленной начальной задачи для системы разностных уравнений (2.20).

2.3 Упражнения для самостоятельной работы

Упражнение 1. Найти решения начальной задачи для данных разностных уравнений:

1.1. $y[n+2] + 3y[n] + 2y[n] = 3^n$, $y[0] = 1$, $y[1] = 2$.

1.2. $y[n+2] - 5y[n+1] + 4y[n] = 2^n + (-2)^n$, $y[0] = y[1] = 1$.

1.3. $y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = 2^n$, $y[0] = -1$, $y[1] = 1$.

$$1.4. \quad y[n+2] + 2y[n+1] + 2y[n] = (-2)^n, \quad y[0] = y[1] = 1.$$

$$1.5. \quad y[n+2] + 4y[n] = \cos \frac{\pi n}{3}, \quad y[0] = 0, \quad y[1] = 1.$$

$$1.6. \quad y[n+2] - 4y[n] = 2 \sin \frac{\pi n}{2}, \quad y[0] = 0, \quad y[1] = 1.$$

Упражнение 2. *Найти решение разностной задачи для данных систем разностных уравнений:*

$$2.1. \quad \begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = \cos \frac{\pi n}{3}, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - x[n] - y[n] = 0, & y[0] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{\pi n}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi n}{4} \right) - \cos \frac{\pi n}{3}.$$

$$y[n] = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi n}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi n}{3} - (\sqrt{2})^n \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi n}{4} - \sin \frac{\pi n}{4} \right).$$

$$2.2. \quad \begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = 2^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] + 2x[n] = 0, & y[0] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = \frac{1}{9}(-1)^n + \frac{1}{9}2^n(3n+1),$$

$$y[n] = \frac{2}{9}(-1)^{n+1} - \frac{1}{9}2^n(3n-2).$$

$$2.3. \quad \begin{cases} x[n+1] + y[n] = 2^n \cos \frac{\pi n}{2}, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - x[n] = 0, & y[0] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1) \sin \frac{\pi n}{2},$$

$$y[n] = \frac{1}{3}(1 - 2^n) \cos \frac{\pi n}{2}.$$

$$2.4. \begin{cases} x[n+1] - y[n] = 2^n \sin \frac{\pi n}{2}, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - x[n] = 0, & y[0] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = \frac{1}{5}((-1)^n + 1) - \frac{1}{5}2^{n+1} \cos \frac{\pi n}{2},$$

$$y[n] = \frac{1}{5}(1 - (-1)^n) - \frac{1}{5}2^n \sin \frac{\pi n}{2}.$$

$$2.5. \begin{cases} x[n+1] - 2y[n] = 2^n \cos \frac{\pi n}{2}, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 2x[n] = 0, & y[0] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = 2^{n-3} + (-2)^{n-3} + 2^{n-2} \sin \frac{\pi n}{2},$$

$$y[n] = 2^{n-3} - (-2)^{n-3} - 2^{n-2} \cos \frac{\pi n}{2}.$$

$$2.6. \begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = (-2)^n, & x[0] = 1, \\ y[n+1] + 2x[n] = 0, & y[0] = 1. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = 2^{n-1} + (-2)^{n-1} + (-1)^n,$$

$$y[n] = (-2)^{n-1} - 2^{n-1} + 2(-1)^n.$$

$$2.7. \begin{cases} x[n+2] + 2y[n] = 0, & x[0] = x[1] = 1, \\ y[n+2] + 2x[n] = 0, & y[0] = y[1] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = \frac{1}{4}(\sqrt{2})^{n-1} \left(\sqrt{2} + 1 + (\sqrt{2} - 1)(-1)^n \right) + \frac{1}{2}(\sqrt{2})^{n-1} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi n}{2} + \sin \frac{\pi n}{2} \right),$$

$$y[n] = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^{n-1} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi n}{2} + \sin \frac{\pi n}{2} \right) - \frac{1}{4}(\sqrt{2})^{n-1} \left(\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1)(-1)^n \right).$$

$$2.8. \begin{cases} x[n+2] + y[n] = 0, & x[0] = x[1] = 1, \\ y[n+2] + x[n] = 0, & y[0] = y[1] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi n}{2} + \sin \frac{\pi n}{2} \right),$$

$$y[n] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi n}{2} + \sin \frac{\pi n}{2} \right).$$

$$2.9. \begin{cases} x[n+2] + 2y[n] = (-2)^n, & x[0] = x[1] = 0, \\ 4x[n] + y[n+1] = 0, & y[0] = y[1] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = 2^{n-3} \left((-1)^n + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} 2^{n-1} \cos \frac{2\pi n}{3},$$

$$y[n] = 2^{n-2} \left((-1)^n - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} 2^{n-1} \left(\sqrt{3} \sin \frac{2\pi n}{3} - \cos \frac{2\pi n}{3} \right).$$

$$2.10. \begin{cases} x[n+2] - y[n] = 2^n, & x[0] = x[1] = 0, \\ x[n] + y[n+1] = 0, & y[0] = y[1] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = \frac{1}{9} \left(2^{n+1} + (-1)^n \right) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin \frac{\pi(n+1)}{3},$$

$$y[n] = \frac{1}{9} \left((-1)^n - 2^n \right) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin \frac{\pi n}{3}.$$

$$2.11. \begin{cases} x[n+2] + 4y[n] = 0, & x[0] = 2, x[1] = 0, \\ y[n+2] + 4x[n] = 0, & y[0] = 1, y[1] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = 2^{n-2} + (-2)^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} \cos \frac{\pi n}{2},$$

$$y[n] = \frac{1}{8} (-2)^{n+1} - 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1} \cos \frac{\pi n}{2}.$$

$$2.12. \begin{cases} x[n+1] + 2x[n] - 10y[n] = (-2)^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 7y[n] + 2x[n] = (-3)^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = 3^{n-1} \left((-1)^n + \frac{13}{5} \right) - 3 \cdot 2^{n-2} \left(\frac{3}{5} (-1)^n + 1 \right),$$

$$y[n] = \frac{1}{10} \cdot 3^{n-1} \left(13 - (-1)^n \right) - \frac{1}{5} \cdot 2^{n-1} \left((-1)^n + 3 \right).$$

$$2.13. \begin{cases} x[n+1] + 2x[n] + y[n] = \sin \frac{\pi n}{2}, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 3y[n] - 4x[n] = 0, & y[0] = 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$x[n] = \frac{2}{3} (-1)^n - \frac{1}{15} \cdot 2^n - \frac{3}{5} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{5} \sin \frac{\pi n}{2},$$

$$y[n] = \frac{4}{15} \cdot 2^n - \frac{2}{3} (-1)^n + \frac{2}{5} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{6}{5} \sin \frac{\pi n}{2}.$$

3 ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

3.1 Понятие дискретного преобразования Фурье и его свойства

Дискретное преобразование Фурье находит широкое применение в частотных методах анализа различного рода линейных дискретных систем.

Рассмотрим решетчатую функцию $f[n]$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, удовлетворяющую условию абсолютной сходимости, т.е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| = M < +\infty.$$

Дискретным преобразованием Фурье заданной решетчатой функции $f[n]$ называется функция

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-in\omega}, \quad (3.1)$$

где ω – действительное число.

Функция $F(\omega)$, определяемая формулой (3.1), называется спектральной характеристикой решетчатой функции $f[n]$.

Рассмотрим решетчатую функцию $f[n]$, определенную для $n=0, 1, \dots$. Для таких функций дискретное преобразование Фурье имеет вид

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-in\omega}. \quad (3.2)$$

Преобразование, определяемое формулой (3.2), называется односторонним дискретным преобразованием Фурье.

Для дискретного преобразования Фурье и одностороннего дискретного преобразования Фурье в дальнейшем будем использовать обозначение $F(\omega) \leftrightarrow f[n]$. Функцию $F(\omega)$ будем называть дискретным фурье-образом, а решетчатую функцию

$f[n]$ – функцией-оригиналом, соответствующей данному фурье-образу.

Свойства дискретного преобразования Фурье. Дискретное преобразование Фурье обладает следующими свойствами.

1 *Линейность преобразования.* Если $f[n] \square F(\omega)$, $g[n] \square G(\omega)$, то

$$\alpha f[n] + \beta g[n] \square \alpha F(\omega) + \beta G(\omega), \quad \forall \alpha, \beta \in R.$$

Это свойство следует непосредственно из определения дискретного преобразования Фурье и линейности операции суммирования.

2 *Дискретное преобразование Фурье для решетчатых функций.* Если $f[n] \square F(\omega)$, то при $k \geq 0$

$$f[n \pm k] \square e^{\pm ik\omega} F(\omega). \quad (3.3)$$

Действительно, исходя непосредственно из определения дискретного фурье-образа [формула (3.1)], получаем

$$\begin{aligned} f[n+k] \square \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] e^{-im\omega} &= (m=n+k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] e^{-i(m-k)\omega} = \\ &= e^{ik\omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m] e^{-im\omega} = e^{ik\omega} F(\omega). \end{aligned}$$

Второе соотношение $f[n-k] \square e^{-ik\omega} F(\omega)$ из равенств (3.3) доказывается аналогично.

3 Для *одностороннего дискретного преобразования Фурье* [формула (3.2)] справедлива следующая формула

$$e^{-\alpha n} f[n] \square F(\omega + \alpha), \quad \alpha > 0, \quad (3.4)$$

где $F(\omega) \square f[n]$.

4 *Дифференцирование преобразования Фурье.* Если $f[n] \square F(\omega)$, то

$$n^k f[n] \square -i^k F^{(k)}(\omega). \quad (3.5)$$

Продифференцируем последовательно равенство (3.1):

$$F'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-in) f[n] e^{-in\omega} = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n f[n] e^{-in\omega} \propto -in f[n].$$

$$F''(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-in)^2 f[n] e^{-in\omega} \propto (-i)^2 n^2 f[n],$$

.....

$$F^k(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-in)^k f[n] e^{-in\omega} \propto (-i)^k n^k f[n].$$

Из последнего равенства и следует формула (3.5).

5 Для свертки двух решетчатых функций $f[n] \times g[n] \propto$

$\propto \sum_{k=-n}^n f[k] g[n-k]$ справедлива формула

$$f[n] \times g[n] \propto F(\omega) G(\omega), \quad (3.6)$$

где $f[n] \propto F(\omega)$, $g[n] \propto G(\omega)$.

Действительно, из формулы (3.1) непосредственно получаем

$$\begin{aligned} f[n] \times g[n] &\propto \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-n}^n f[k] g[n-k] \right) e^{-in\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-k] e^{-in\omega} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-ik\omega} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-k] e^{-i(n-k)\omega} = (m = n - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-ik\omega} \times \\ &\quad \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} g[m] e^{-im\omega} = F(\omega) G(\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к формуле (3.6), дающей связь между сверткой двух решетчатых функций и их дискретными фурье-образами.

3.2 Дискретные фурье-образы, отвечающие элементарным решетчатым функциям

Рассмотрим одностороннее преобразование Фурье [формула (3.2)]. Используя свойства дискретного преобразования Фурье,

найдем фурье-образы, отвечающие некоторым элементарным решетчатым функциям.

1 Рассмотрим функции $f_1[n] = a^n$, $f_2[n] = na^n$, $f_3[n] = n^2 a^n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

Используя непосредственное определение одностороннего фурье-образа, находим

$$a^n \boxtimes \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-in\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-i\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-i\omega}} = \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - a}, \text{ где } |a| < 1.$$

Таким образом, получаем

$$a^n \boxtimes \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - a}. \quad (3.7)$$

Далее используем формулу (3.5) при $k = 1, 2$:

$$nf[n] \boxtimes -iF'(\omega), \quad n^2 f[n] \boxtimes -F''(\omega). \quad (3.8)$$

Так как $F(\omega) = \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - a}$, то получаем

$$F'(\omega) = \frac{ie^{i\omega}(e^{i\omega} - a) - ie^{i\omega} \cdot e^{i\omega}}{(e^{i\omega} - a)^2} = -\frac{iae^{i\omega}}{(e^{i\omega} - a)^2},$$

$$F''(\omega) = -ia \frac{iae^{i\omega}(e^{i\omega} - a) - 2ie^{i\omega} \cdot e^{i\omega}}{(e^{i\omega} - a)^3} = ai^2 \frac{e^{i\omega}(e^{i\omega} + a)}{(e^{i\omega} - a)^3} = -a \frac{e^{i\omega}(e^{i\omega} + a)}{(e^{i\omega} - a)^3}.$$

Подставляя полученные соотношения для производных в формулы (3.8), находим

$$na^n \boxtimes -iF'(\omega) = -\frac{ae^{i\omega}}{(e^{i\omega} - a)^2}, \quad n^2 a^n \boxtimes -F''(\omega) = \frac{ae^{i\omega}(e^{i\omega} + a)}{(e^{i\omega} - a)^3}.$$

Представим полученные дискретные фурье-образы в следующем виде:

$$na^{n-1} \propto -\frac{e^{i\omega}}{(e^{i\omega} - a)^2}, \quad n^2 a^{n-1} \propto \frac{e^{i\omega}(e^{i\omega} + a)}{(e^{i\omega} - a)^3}.$$

2 *Дискретные фурье-образы тригонометрических функций.*
Рассмотрим функции

$$f_1[n] = a^n \cos \beta n, \quad f_2[n] = a^n \sin \beta n, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Для нахождения фурье-образов этих функций используем формулу (3.6). Получаем

$$\begin{aligned} a^n \cos \beta n &= \frac{1}{2} a^n (e^{i\beta n} + e^{-i\beta n}) = \frac{1}{2} \left((ae^{i\beta})^n + (ae^{-i\beta})^n \right) \propto \\ &\propto \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - ae^{i\beta}} + \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - ae^{-i\beta}} \right) = \frac{1}{2} e^{i\omega} \left(\frac{1}{e^{i\omega} - ae^{i\beta}} + \frac{1}{e^{i\omega} - ae^{-i\beta}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{i\omega} (2e^{i\omega} - a(e^{i\beta} + e^{-i\beta}))}{e^{2i\omega} - ae^{i\omega}(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + a^2} = \frac{e^{i\omega} (e^{i\omega} - a \cos \beta)}{e^{2i\omega} - 2ae^{i\omega} \cos \beta + a^2}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} a^n \sin \beta n &= \frac{1}{2i} a^n (e^{i\beta n} - e^{-i\beta n}) = \frac{1}{2i} \left((ae^{i\beta})^n - (ae^{-i\beta})^n \right) \propto \\ &\propto \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - ae^{i\beta}} - \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - ae^{-i\beta}} \right) = \frac{1}{2i} \frac{ae^{i\omega} (e^{i\beta} - e^{-i\beta})}{e^{2i\omega} - ae^{i\omega} (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + a^2} = \\ &= \frac{a \sin \beta e^{i\omega}}{e^{2i\omega} - 2ae^{i\omega} \cos \beta + a^2}. \end{aligned}$$

Итак, требуемые дискретные фурье-образы имеют вид

$$a^n \cos \beta n \propto \frac{e^{i\omega} (e^{i\omega} - a \cos \beta)}{e^{2i\omega} - 2ae^{i\omega} \cos \beta + a^2}, \quad (3.9)$$

$$a^n \sin \beta n \propto \frac{a \sin \beta e^{i\omega}}{e^{2i\omega} - 2ae^{i\omega} \cos \beta + a^2}. \quad (3.10)$$

Из формул (3.9), (3.10) при $a=1$ получаем дискретные фурье-образы функций

$$\cos \beta n \simeq \frac{e^{i\omega} (e^{i\omega} - \cos \beta)}{e^{2i\omega} - 2e^{i\omega} \cos \beta + 1}, \quad \sin \beta n \simeq \frac{\sin \beta e^{i\omega}}{e^{2i\omega} - 2e^{i\omega} \cos \beta + 1}.$$

3 *Дискретные фурье-образы гиперболических функций.*
Рассмотрим функции $g_1[n] = a^n \operatorname{ch} \beta n$, $g_2[n] = a^n \operatorname{sh} \beta n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Вновь используя формулу (3.7), находим

$$\begin{aligned} a^n \operatorname{ch} \beta n &= \frac{1}{2} a^n (e^{\beta n} + e^{-\beta n}) = \frac{1}{2} \left((ae^\beta)^n + (ae^{-\beta})^n \right) \simeq \\ &\simeq \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - ae^\beta} + \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - ae^{-\beta}} \right) = \frac{1}{2} e^{i\omega} \left(\frac{1}{e^{i\omega} - ae^\beta} + \frac{1}{e^{i\omega} - ae^{-\beta}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{i\omega} (e^{2i\omega} - a(e^\beta + e^{-\beta}))}{e^{2i\omega} - 2ae^{i\omega} \operatorname{ch} \beta + a^2} = \frac{e^{i\omega} (e^{i\omega} - a \operatorname{ch} \beta)}{e^{2i\omega} - 2ae^{i\omega} \operatorname{ch} \beta + a^2}. \end{aligned}$$

Итак, дискретный фурье-образ решетчатой функции

$$a^n \operatorname{ch} \beta n \simeq \frac{e^{i\omega} (e^{i\omega} - a \operatorname{ch} \beta)}{e^{2i\omega} - 2ae^{i\omega} \operatorname{ch} \beta + a^2}. \quad (3.11)$$

Аналогичным образом находим и фурье-образ решетчатой функции:

$$a^n \operatorname{sh} \beta n \simeq \frac{a \operatorname{sh} \beta e^{i\omega}}{e^{2i\omega} - 2ae^{i\omega} \operatorname{ch} \beta + a^2}. \quad (3.12)$$

При $a=1$ из формул (3.11), (3.12) находим дискретные фурье-образы функций:

$$\operatorname{ch} \beta n \simeq \frac{e^{i\omega} (e^{i\omega} - \operatorname{ch} \beta)}{e^{2i\omega} - 2e^{i\omega} \operatorname{ch} \beta + 1}, \quad \operatorname{sh} \beta n \simeq \frac{\operatorname{sh} \beta e^{i\omega}}{e^{2i\omega} - 2e^{i\omega} \operatorname{ch} \beta + 1}.$$

3.3 Восстановление решетчатой функции по ее дискретному преобразованию Фурье

Покажем, что если дискретный фурье-образ

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-in\omega}, \quad (3.13)$$

то функция-оригинал

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{in\omega} d\omega. \quad (3.14)$$

Для этого умножим обе части равенства (3.13) на $e^{ik\omega}$ и проинтегрируем почленно от $-\pi$ до π . Получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{ik\omega} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-i(n-k)\omega} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-k)\omega} d\omega = 2\pi f[n],$$

так как $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-k)\omega} d\omega = \begin{cases} 2\pi, & n = k \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$ Справедливость формулы (3.14)

доказана.

Пример 3.1. Найдем решетчатые функции-оригиналы, отвечающие следующим дискретным фурье-образам:

- $F_1(\omega) = \cos \alpha \omega$ (α – не целое).

Решение. Используя формулу (3.14), получаем

$$\begin{aligned} f_1[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha \omega \cdot e^{in\omega} d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} (e^{i\alpha\omega} + e^{-i\alpha\omega}) d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+\alpha)\omega} d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-\alpha)\omega} d\omega \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Вычисляем первый интеграл:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+\alpha)\omega} d\omega = \frac{e^{i(n+\alpha)\pi} - e^{-i(n+\alpha)\pi}}{i(n+\alpha)} = \frac{2 \sin(n+\alpha)\pi}{n+\alpha} = \frac{2 \sin \pi \alpha (-1)^n}{n+\alpha}.$$

Аналогичным образом находим второй интеграл:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-\alpha)\omega} d\omega = -\frac{2 \sin \pi\alpha (-1)^n}{n-\alpha}.$$

Подставляем полученные величины интегралов в равенство (3.15) и находим решетчатую функцию:

$$f_1[n] = \frac{\sin \pi\alpha (-1)^n}{2\pi} \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha} \right) = \frac{\alpha \sin \pi\alpha (-1)^{n+1}}{\pi(n^2 - \alpha^2)}.$$

Итак, получаем $\cos \alpha\omega \boxtimes \frac{\alpha \sin \pi\alpha (-1)^{n+1}}{\pi(n^2 - \alpha^2)}$.

2. $F_2(\omega) = \text{ch } \alpha\omega$.

Решение. Вновь используя формулу (3.14), находим

$$\begin{aligned} f_2[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{ch } \alpha\omega \cdot e^{in\omega} d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{\alpha\omega} + e^{-\alpha\omega}) e^{in\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{(in+\alpha)\omega} d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} e^{(in-\alpha)\omega} d\omega \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Вычисляем интегралы:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(in+\alpha)\omega} d\omega &= \frac{e^{(\alpha+in)\pi} - e^{-(\alpha+in)\pi}}{\alpha + in} = \frac{e^{\alpha\pi} e^{i\pi n} - e^{-\alpha\pi} e^{-i\pi n}}{\alpha + in} = \\ &= \frac{(-1)^n (e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi})}{\alpha + in} = \frac{2 \text{sh } \alpha\pi (-1)^n}{\alpha + in}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{(in-\alpha)\omega} d\omega &= \frac{e^{(in-\alpha)\pi} - e^{-(in-\alpha)\pi}}{in - \alpha} = \frac{2 \text{sh } \alpha\pi (-1)^n}{\alpha - in}, \end{aligned}$$

подставляем найденные величины интегралов в равенство (3.16)

$$f_2[n] = \frac{\text{sh } \alpha\pi (-1)^n}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha + in} + \frac{1}{\alpha - in} \right) = \frac{\alpha \text{sh } \alpha\pi (-1)^n}{\pi(n^2 + \alpha^2)}.$$

Таким образом, получаем $\text{ch } \alpha\omega \boxtimes \frac{\alpha \text{sh } \alpha\pi (-1)^n}{\pi(n^2 + \alpha^2)}$.

4 ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Задача 1

Найти решетчатый оригинал по данному Z-образу.

1. а) $F(z) = \frac{z^3 + 2z^2}{(z-2)(z^2 + z - 6)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 4z}{(z+3)(z^2 + 3)}$.

2. а) $F(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z-2)(z^2 - 4)}$, б) $F(z) = \frac{z^2 + z}{(z-2)(z^2 + 4)}$.

3. а) $F(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 4z}{(z+4)(z^2 - 9)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + z}{z^3 + 8}$.

4. а) $F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 4z}{(z+1)(z^2 - 4z + 3)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - 3z^2 + 4z}{z^3 + 1}$.

5. а) $F(z) = \frac{z^3 - 3z^2}{(z+2)(z^2 + 5z + 6)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 4z^2 - 3z}{(z-2)(z^2 + 4)}$.

6. а) $F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 - 3z}{(z-2)(z^2 + 2z - 8)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 3z^2}{(z+1)(z^2 + 4)}$.

7. а) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 3z}{(z-2)(z^2 + 5z + 6)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - 2z^2}{z^3 + 1}$.

8. а) $F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 3z}{(z+1)(z^2 - 4)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + 4z}{(z-2)(z^2 + 4)}$.

9. а) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 2z}{(z+1)(z^2 - 3z + 2)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 3z}{z^3 + 8}$.

10. а) $F(z) = \frac{z^2 + 4z}{(z-2)(z^2 + 4z + 3)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 4z^2}{z^3 + 1}$.

11. а) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 - 2z}{(z-2)(z^2 - 9)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - 3z^2}{(z+1)(z^2 + z + 1)}$.

12. a) $F(z) = \frac{z^3 + 3z^2}{(z-2)(z^2-4)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - z^2}{z^3 + 8}$.
13. a) $F(z) = \frac{z^3 - z^2 + 3z}{(z+2)(z^2 - 2z - 8)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 3z^2}{z^3 - 8}$.
14. a) $F(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 3z}{(z+2)(z^2 - 5z + 6)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 2z^2}{z^3 + 1}$.
15. a) $F(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 3z}{(z+2)(z^2 - 4)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 2z}{(z+1)(z^2 + z + 1)}$.
16. a) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 3z}{(z-3)(z^2 - 9)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 4z}{(z+2)(z^2 + 2z + 2)}$.
17. a) $F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 - 5z}{(z+2)(z^2 - 4)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 2z^2}{z^3 - 1}$.
18. a) $F(z) = \frac{z^3 - z^2 + 4z}{(z-1)(z^2 - 5z + 4)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 3z^2}{(z+1)(z^2 + 4)}$.
19. a) $F(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 4z}{(z+1)(z^2 + 3z + 2)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 2z^2}{(z-2)(z^2 - 2z + 2)}$.
20. a) $F(z) = \frac{z^3 + 4z^2}{(z-2)(z^2 - z - 6)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - 3z^2 + 3z}{(z-1)(z^2 - z + 1)}$.
21. a) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 3z}{(z+2)(z^2 - 6z + 8)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - z^2 - 3z}{z^3 + 8}$.
22. a) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 2z}{(z+2)(z^2 - 4z + 4)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 4z^2}{z^3 - 8}$.
23. a) $F(z) = \frac{z^3 - z^2 + 2z}{(z-2)(z^2 + 6z + 9)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + 6z}{(z+2)(z^2 + 9)}$.
24. a) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 4z}{(z+2)(z^2 - 6z + 9)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - 4z^2 + 6z}{(z+2)(z^2 + 2)}$.
25. a) $F(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 4z}{(z+3)(z^2 - z - 12)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{(z+1)(z^2 + 3)}$.
26. a) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 3z}{(z-2)(z^2 + 2z + 1)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - 4z^2}{(z+2)(z^2 + 2z + 2)}$.

27. a) $F(z) = \frac{z^3 - z^2 + z}{(z+2)(z^2 - 6z + 8)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 3z}{(z+1)(z^2 + 2)}$.
28. a) $F(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z+3)(z^2 - 4)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - z^2}{(z-3)(z^2 + 3)}$.
29. a) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 2z}{(z-1)(z^2 - 1)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 + 3z}{(z-2)(z^2 + 4)}$.
30. a) $F(z) = \frac{z^3 - z^2 + 2z}{(z+1)(z^2 - 1)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - 3z^2 + 3z}{(z+3)(z^2 - z + 1)}$.
31. a) $F(z) = \frac{z^3 + 2z^2}{(z-2)(z^2 + 7z + 12)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 - 2z^2}{(z+2)(z^2 + 2z + 2)}$.
32. a) $F(z) = \frac{z^3 - z^2 + 3z}{(z+3)(z^2 - 7z + 12)}$, б) $F(z) = \frac{z^3 + z^2 - 3z}{z^3 + 1}$.

Задача 2

Методом Z-преобразования найти решение начальной задачи для данного разностного уравнения.

1. $y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = (-3)^n$, $y[0] = y[1] = 1$.
2. $y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = (-1)^n$, $y[0] = 1$, $y[1] = 2$.
3. $y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = 3^n$, $y[0] = y[1] = 2$.
4. $y[n+2] + 5y[n+1] + 4y[n] = 2^n$, $y[0] = 1$, $y[1] = 2$.
5. $y[n+2] - 7y[n+1] + 12y[n] = (-2)^n$, $y[0] = y[1] = 1$.
6. $y[n+2] - 5y[n+1] + 4y[n] = (-3)^n$, $y[0] = -1$, $y[1] = 1$.
7. $y[n+2] - 6y[n+1] + 8y[n] = (-1)^n$, $y[0] = y[1] = 2$.
8. $y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = 4^n$, $y[0] = -1$, $y[1] = 1$.
9. $y[n+2] + 6y[n+1] + 8y[n] = (-2)^n$, $y[0] = y[1] = 1$.
10. $y[n+2] - 6y[n+1] + 5y[n] = (-1)^n$, $y[0] = -1$, $y[1] = 1$.
11. $y[n+2] + 7y[n+1] + 12y[n] = 3^n$, $y[0] = y[1] = 2$.
12. $y[n+2] - 4y[n+1] + 3y[n] = (-2)^n$, $y[0] = y[1] = 2$.

13. $y[n+2]-4y[n+1]+3y[n]=(-2)^n$, $y[0]=y[1]=2$.
14. $y[n+2]-4y[n]=3^n$, $y[0]=-1$, $y[1]=2$.
15. $y[n+2]-16y[n]=(-2)^n$, $y[0]=y[1]=2$.
16. $y[n+2]+4y[n+1]+3y[n]=4^n$, $y[0]=-1$, $y[1]=2$.
17. $y[n+2]-3y[n]=2^n$, $y[0]=y[1]=2$.
18. $y[n+2]-9y[n]=(-2)^n$, $y[0]=y[1]=1$.
19. $y[n+2]-7y[n+1]+10y[n]=(-3)^n$, $y[0]=2$, $y[1]=3$.
20. $y[n+2]-8y[n+1]+12y[n]=3^n$, $y[0]=y[1]=1$.
21. $y[n+2]-9y[n]=4^n$, $y[0]=y[1]=2$.
22. $y[n+2]-16y[n]=(-2)^n$, $y[0]=-1$, $y[1]=1$.
23. $y[n+2]+6y[n+1]+8y[n]=3^n$, $y[0]=y[1]=2$.
24. $y[n+2]+3y[n+1]+2y[n]=5^n$, $y[0]=y[1]=1$.
25. $y[n+2]-7y[n+1]+12y[n]=(-3)^n$, $y[0]=1$, $y[1]=2$.
26. $y[n+2]-5y[n+1]+6y[n]=(-4)^n$, $y[0]=y[1]=2$.
27. $y[n+2]-9y[n]=(-3)^n$, $y[0]=y[1]=1$.
28. $y[n+2]-4y[n]=2^n$, $y[0]=y[1]=2$.

Задача 3

Методом Z-преобразования найти решение начальной задачи для данного разностного уравнения.

1. $y[n+2]+2y[n+1]+2y[n]=2^n$, $y[0]=y[1]=1$.
2. $y[n+2]+4y[n]=(-1)^n$, $y[0]=y[1]=1$.
3. $y[n+2]+16y[n]=2^n$, $y[0]=y[1]=2$.
4. $y[n+2]-2y[n+1]+2y[n]=(-2)^n$, $y[0]=y[1]=1$.
5. $y[n+2]+16y[n]=(-2)^n$, $y[0]=1$, $y[1]=2$.
6. $y[n+2]+y[n+1]+y[n]=3^n$, $y[0]=1$, $y[1]=0$.
7. $y[n+2]+9y[n]=(-2)^n$, $y[0]=1$, $y[1]=2$.

8. $y[n+2] - y[n+1] + y[n] = (-2)^n$, $y[0] = 1, y[1] = 2$.
9. $y[n+2] + 4y[n] = 2^n$, $y[0] = 1, y[1] = 2$.
10. $y[n+2] - 4y[n] = 2^n$, $y[0] = y[1] = 1$.
11. $y[n+2] - 9y[n] = n$, $y[0] = y[1] = 1$.
12. $y[n+2] - y[n+1] + y[n] = 3^n$, $y[0] = y[1] = 2$.
13. $y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = n$, $y[0] = y[1] = 1$.
14. $y[n+2] + 3y[n] = 2^n + (-2)^n$, $y[0] = 0, y[1] = 1$.
15. $y[n+2] + 4y[n] = (-3)^n$, $y[0] = y[1] = 2$.
16. $y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = 3^n + (-3)^n$, $y[0] = 0, y[1] = 1$.
17. $y[n+2] - y[n+1] + y[n] = (-4)^n$, $y[0] = 0, y[1] = 1$.
18. $y[n+2] - 9y[n] = 3^n$, $y[0] = y[1] = 1$.
19. $y[n+2] - 4y[n] = (-2)^n$, $y[0] = y[1] = 2$.
20. $y[n+2] + 16y[n] = 4^n$, $y[0] = 1, y[1] = 2$.
21. $y[n+2] + 4y[n] = 2^n$, $y[0] = 0, y[1] = 1$.
22. $y[n+2] + 2y[n+1] + 2y[n] = 3^n$, $y[0] = 1, y[1] = 2$.
23. $y[n+2] - 4y[n] = 1 + (-1)^n$, $y[0] = 0, y[1] = 1$.
24. $y[n+2] + 2y[n] = (-3)^n$, $y[0] = y[1] = 1$.
25. $y[n+2] - 4y[n] = 2^n$, $y[0] = 1, y[1] = 2$.
26. $y[n+2] - y[n+1] + y[n] = (-2)^n$, $y[0] = y[1] = 1$.
27. $y[n+2] - 5y[n+1] + 4y[n] = 4^n$, $y[0] = 0, y[1] = 1$.
28. $y[n+2] + 5y[n+1] + 4y[n] = (-1)^n$, $y[0] = 0, y[1] = 1$.

Задача 4

Решить систему разностных уравнений.

$$1. \begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = 3^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] + 2x[n] = (-3)^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x[n+1] - 2y[n] = 2^n, & x[0] = 1, \\ y[n+1] + 2x[n] = 3^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = 1, & x[0] = 0, \\ y[n+1] + 2x[n] = 4^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} x[n+1] - y[n] = 2^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] + x[n] = 0, & y[0] = 0. \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} x[n+1] - 2y[n] = 3^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] + 2x[n] = (-3)^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = 4^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - x[n] - y[n] = 0, & y[0] = 1. \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = 1, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - x[n] - y[n] = (-1)^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = 0, & x[0] = 1, \\ y[n+1] - x[n] - y[n] = (-1)^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + 2y[n] = 4^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 2x[n] + y[n] = 1, & y[0] = 0. \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = (-1)^n, & x[0] = 1, \\ y[n+1] + 2x[n] = 0, & y[0] = 1. \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} x[n+1] - 2y[n] = (-1)^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] + 2x[n] = 2^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = 2^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] + 2x[n] = 1, & y[0] = 0. \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + 2y[n] = 3^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 2x[n] + y[n] = (-1)^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} x[n+1] + 2x[n] + 10y[n] = 1, & x[0] = 1, \\ y[n+1] - 7y[n] + 2x[n] = (-2)^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} x[n+1] + 2x[n] + y[n] = 3^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 3y[n] - 4x[n] = 1, & y[0] = 1. \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} x[n+1] + x[n] + 2y[n] = (-3)^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 4y[n] - 3x[n] = (-1)^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} x[n+1] + 4x[n] + 5y[n] = 3^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 3y[n] - 2x[n] = 4^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} x[n+1] + 4x[n] + 3y[n] = 2^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 4y[n] + 5x[n] = (-2)^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} x[n+1] + 2x[n] + 10y[n] = 2^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 7y[n] + 2x[n] = 0, & y[0] = 1. \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} x[n+1] + x[n] - 5y[n] = 3^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 5y[n] + x[n] = 0, & y[0] = 1. \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} x[n+1] - 3y[n] = 3^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] + 3x[n] = 1, & y[0] = 0. \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = (-1)^n, & x[0] = 1, \\ y[n+1] - x[n] - y[n] = 0, & y[0] = 0. \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} 5x[n+1] - 12x[n] - y[n] = (-2)^n, & x[0] = 0, \\ 5y[n+1] - 6x[n] - 13y[n] = (-3)^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} x[n+1] + 4x[n] + 5y[n] = (-2)^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 3y[n] - 2x[n] = 0, & y[0] = 1. \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} x[n+1] - 2x[n] + 2y[n] = (-1)^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 3y[n] + x[n] = 2^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} x[n+1] - x[n] + y[n] = (-4)^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - x[n] - y[n] = 0, & y[0] = 1. \end{cases}$$
27.
$$\begin{cases} x[n+1] - 2y[n] = (-2)^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] + 2x[n] = (-3)^n, & y[0] = 0. \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} x[n+1] - 2y[n] = 3^n, & x[0] = 0, \\ y[n+1] - 2x[n] = 0, & y[0] = 1. \end{cases}$$

5 МЕТОД Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Метод Z-преобразования является эффективным средством решения задач электротехники. В частности, в сочетании с преобразованием Лапласа, метод Z-преобразования позволяет исследовать переходные процессы в электрических фильтрах. *Электрическим фильтром*, или *цепочной схемой*, называется электрическая цепь, в которой все контуры (за исключением, быть может, первого и последнего) имеют одинаковую структуру и расположены один за другим так, что каждый предшествующий имеет общую ветвь с последующим. «Элементом» цепочной схемы (элементарным фильтром) является T-образный четырехполюсник (рисунок 5.1).

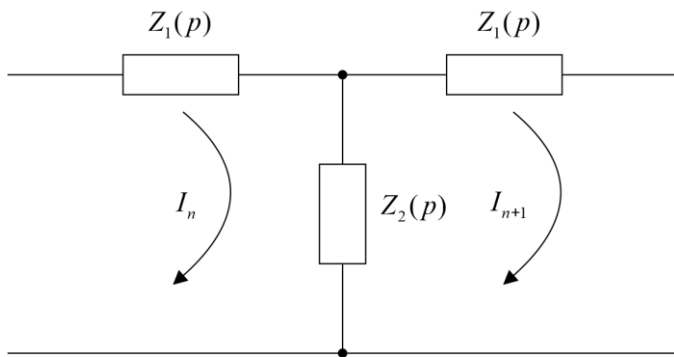


Рисунок 5.1

Схема четырехполюсника такова, что в верхней продольной ветви имеется два одинаковых импеданса $Z_1(p)$, а в поперечной ветви – один импеданс $Z_2(p)$. Нижняя продольная ветвь импедансов не содержит.

Число четырехполюсников пусть будет N , текущий номер четырехполюсника будем обозначать буквой n . Вводим лаплас-

образ напряжения $v_n(p)$ на выходе n -го четырехполюсника и, следовательно, на входе в $(n+1)$ -й четырехполюсник. $I_n(p)$ – лаплас-образ тока в n -м четырехполюснике. Приняв во внимание направление контурных токов, отмеченных на рисунке 5.1 стрелками, мы получим для левой и правой половины $(n+1)$ -го четырехполюсника следующие уравнения Кирхгофа для лаплас-образов $v_n(p)$ и $I_n(p)$:

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2)I_n(p) - Z_2 I_{n+1}(p) = v_n(p), \\ Z_2 I_n(p) - (Z_1 + Z_2)I_{n+1}(p) = v_{n+1}(p), \end{cases} \quad (5.1)$$

где $n = 0, 1, \dots, N-1$. Таким образом, мы получаем систему разностных уравнений первого порядка для двух неизвестных функций $I_n(p)$ и $v_n(p)$.

Вводим соответствующие Z -образы неизвестных функций $v_n(p) \leftrightarrow \tilde{E}_{nz}(z)$, $I_n(p) \leftrightarrow \tilde{I}_{nz}(z)$. Тогда с учетом Z -образов для смещенных функций, система уравнений (5.1) после перехода к соответствующим Z -образам принимает вид

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2)\tilde{I}_{nz}(z) - Z_2(z\tilde{I}_{nz}(z) - zI_0(p)) = \tilde{E}_{nz}(z), \\ Z_2\tilde{I}_{nz}(z) - (Z_1 + Z_2)(z\tilde{I}_{nz}(z) - zI_0(p)) = z\tilde{E}_{nz}(z) - zE_0(p), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2 - zZ_2)\tilde{I}_{nz}(z) - \tilde{E}_{nz}(z) = -zZ_2I_0(p), \\ (Z_2 - z(Z_1 + Z_2))\tilde{I}_{nz}(z) - z\tilde{E}_{nz}(z) = -z((Z_1 + Z_2)I_0(p) + E_0(p)). \end{cases} \quad (5.2)$$

Умножая первое уравнение системы (5.2) на $(-z)$ и прибавляя затем к первому уравнению второе, получаем

$$(Z_2 - 2z(Z_1 + Z_2) + z^2Z_2)\tilde{I}_{nz}(z) = (z^2Z_2 - z(Z_1 + Z_2))I_0(p) - zE_0(p).$$

Из полученного соотношения находим функцию

$$\tilde{I}_{nz}(z) = \frac{z(z - \text{ch}\tau)I_0(p) - \frac{z}{Z_2}E_0(p)}{z^2 - 2z\text{ch}\tau + 1}, \quad (5.3)$$

где при записи формулы (5.3) мы ввели величину

$$\text{ch}\tau = 1 + \frac{Z_1(p)}{Z_2(p)}. \quad (5.4)$$

Используя полученное соотношение (5.3), из первого уравнения системы (5.2) находим функцию $\tilde{E}_{nz}(z)$, для которой получаем

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{nz}(z) &= Z_2(\text{ch}\tau - z)\tilde{I}_{nz}(z) + zZ_2I_0(p) = \\ &= \frac{Z_2(\text{ch}\tau - z)\left(z(z - \text{ch}\tau)I_0(p) - \frac{z}{Z_2}E_0(p)\right)}{z^2 - 2z\text{ch}\tau + 1} + zZ_2I_0(p) = \\ &= \frac{z(z - \text{ch}\tau)E_0(p) - zZ_2\text{sh}^2\tau I_0(p)}{z^2 - 2z\text{ch}\tau + 1}. \end{aligned}$$

Таким образом, для функции $\tilde{E}_{nz}(z)$ окончательно получаем

$$\tilde{E}_{nz}(z) = \frac{z(z - \text{ch}\tau)E_0(p) - zZ_2\text{sh}^2\tau I_0(p)}{z^2 - 2z\text{ch}\tau + 1}. \quad (5.5)$$

Используя табличные Z-образы

$$\text{ch}\tau n \square \frac{z(z - \text{ch}\tau)}{z^2 - 2z\text{ch}\tau + 1}, \quad \text{sh}\tau n \square \frac{z\text{sh}\tau}{z^2 - 2z\text{ch}\tau + 1},$$

из соотношений (5.3), (5.5) находим соответствующие лаплас-образы тока $I_n(p)$ и напряжения $v_n(p)$. Получаем следующие выражения:

$$\begin{cases} E_n(p) = E_0(p)\text{ch}\tau n - I_0(p)\text{sh}\tau n, \\ I_n(p) = I_0(p)\text{ch}\tau n - \frac{E_0(p)}{Z_2} \frac{\text{sh}\tau n}{\text{ch}\tau}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Формула (5.6) дает решение поставленной задачи, то есть позволяет найти напряжение на выходе n -го четырехполюсника и ток в n -м четырехполюснике электрического фильтра. Необходимо только задать граничные значения $E_0(p)$ и $I_0(p)$.

В конкретных технических приложениях наиболее интересны

следующие две задачи.

Первое граничное условие.

На вход электрического фильтра подается напряжение $e(t)$, то есть задана функция $E_0(p) \square e(t)$. На выходе цепочная схема коротко замкнута. В этом случае $E_N(p) = 0$. При $n = N$ из первого уравнения системы (5.6) получаем

$$E_0(p) \operatorname{ch} \tau N - I_0(p) Z_2 \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau N = 0,$$

откуда

$$I_0(p) = \frac{E_0(p) \operatorname{ch} \tau N}{Z_2 \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau N}.$$

Используя полученное соотношение для величины $I_0(p)$, приводим уравнения системы (5.6) к виду

$$\begin{aligned} E_n(p) &= E_0(p) \left(\operatorname{ch} \tau n - \frac{\operatorname{ch} \tau N \operatorname{sh} \tau n}{\operatorname{sh} \tau N} \right) = \\ &= E_0(p) \frac{\operatorname{sh} \tau N \operatorname{ch} \tau n - \operatorname{ch} \tau N \operatorname{sh} \tau n}{\operatorname{sh} \tau N} = \frac{E_0(p) \operatorname{sh} \tau (N - n)}{\operatorname{sh} \tau N}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n(p) &= \frac{E_0(p)}{Z_2 \operatorname{sh} \tau} \left(\frac{\operatorname{ch} \tau N \operatorname{ch} \tau n}{\operatorname{sh} \tau N} - \operatorname{sh} \tau n \right) = \\ &= E_0(p) \frac{\operatorname{ch} \tau N \operatorname{ch} \tau n - \operatorname{sh} \tau N \operatorname{sh} \tau n}{Z_2 \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau N} = \frac{E_0(p) \operatorname{ch} \tau (N - n)}{Z_2 \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau N}. \end{aligned}$$

Таким образом, ток и напряжение на выходе n -го четырехполюсника (их лаплас-образы) для случая первого граничного условия даются следующими формулами:

$$\begin{cases} E_n(p) = \frac{E_0(p) \operatorname{sh} \tau (N - n)}{\operatorname{sh} \tau N}, n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ I_n(p) = \frac{E_0(p) \operatorname{ch} \tau (N - n)}{Z_2 \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau N}. \end{cases} \quad (5.7)$$

Второе граничное условие.

На вход электрического фильтра подается напряжение $e(t)$, то есть вновь задана функция $E_0(p) \propto e(t)$. На выходе цепочная схема разомкнута, $I_N(p) = 0$. В этом случае из второго уравнения системы (5.6) при $n = N$ получаем

$$I_0(p) \operatorname{ch} \tau N - \frac{E_0(p) \operatorname{sh} \tau N}{Z_2 \operatorname{sh} \tau} = 0.$$

Тогда

$$I_0(p) = \frac{E_0(p) \operatorname{sh} \tau N}{Z_2 \operatorname{sh} \tau \operatorname{ch} \tau N}.$$

Подставив это соотношение в уравнение системы (5.6), получаем следующие выражения для лаплас-образов напряжения и тока:

$$E_n(p) = E_0(p) \left(\operatorname{ch} \tau n - \frac{\operatorname{sh} \tau N \operatorname{sh} \tau n}{\operatorname{ch} \tau N} \right) = \frac{E_0(p) \operatorname{ch} \tau (N - n)}{\operatorname{ch} \tau N},$$

$$I_n(p) = \frac{E_0(p)}{Z_2 \operatorname{sh} \tau} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau N \operatorname{ch} \tau n}{\operatorname{ch} \tau N} - \operatorname{sh} \tau n \right) = \frac{E_0(p) \operatorname{sh} \tau (N - n)}{Z_2 \operatorname{sh} \tau \operatorname{ch} \tau N}.$$

Итак, для второго граничного условия получаем формулы вида

$$\begin{cases} E_n(p) = \frac{E_0(p) \operatorname{ch} \tau (N - n)}{\operatorname{ch} \tau N}, & n = 0, 1, \dots, N - 1, \\ I_n(p) = \frac{E_0(p) \operatorname{sh} \tau (N - n)}{Z_2 \operatorname{sh} \tau \operatorname{ch} \tau N}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Пример 5.1. Рассмотрим электрический фильтр, элементарный четырехполюсник которого имеет параметры $Z_1(p) = R$, $Z_2(p) = \frac{1}{C_p}$.

На вход фильтра подается постоянное напряжение $e(t) = U_0$. Характеристическое уравнение фильтра (5.4) принимает в этом случае вид

$$\operatorname{ch}\tau(p) = 1 + RC_p. \quad (5.9)$$

Рассмотрим сначала первое граничное условие. Так как $E_0(p) = \frac{U_0}{p}$, то из (5.7) для лаплас-образа $E_0(p)$ получаем следующее выражение:

$$E_0(p) = \frac{U_0 \operatorname{sh}\tau(N-n)}{p \operatorname{sh}\tau N} = \frac{U_0 \operatorname{sh}\tau(N-n)}{B(p)}. \quad (5.10)$$

Знаменатель дроби (5.10) $B(p) = p \operatorname{sh}\tau N$ имеет нули в точках

$$\operatorname{sh}\tau_k N = 0, \tau_k N = j\pi k, \tau_k = \frac{j\pi k}{N}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

(напомним, что при рассмотрении задач электротехники для обозначения мнимой единицы используется символ j).

Полюса p_k функции $E_n(p)$, отвечающие нулям τ_k , находим из уравнения (5.9). Получаем

$$-RCp_k = 1 - \operatorname{ch}\frac{j\pi k}{N} = 1 - \cos\frac{\pi k}{N} = 2\sin^2\frac{\pi k}{2N},$$

то есть

$$p_k = -\frac{2}{RC}\sin^2\frac{\pi k}{2N}. \quad (5.11)$$

Далее вычисляем вычеты функции $E_n(p)e^{pt}$ в полюсах (5.11). Производная функции $B(p)$ равна

$$B'(p) = N\tau'(p)p \operatorname{ch}\tau N + \operatorname{sh}\tau N. \quad (5.12)$$

Дифференцируя по переменной p обе части равенства (5.9), получаем

$$\tau'(p)\operatorname{sh}\tau(p) = RC,$$

или

$$\tau'(p) = \frac{RC}{\operatorname{sh}\tau}. \quad (5.13)$$

Используя формулы (5.12), (5.13), находим значение производной функции $B(p)$ в точке p_k :

$$B'(p_k) = NRC_{p_k} \frac{\text{ch}\tau_k N}{\text{sh}\tau_k}. \quad (5.14)$$

Как следствие, для требуемой величины вычета в полюсе p_k , используя формулы (5.11), (5.14), получаем (формула А.5)

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p=p_k}(E_n(p)e^{pt}) &= U_0 \frac{\text{sh}\tau_k(N-n)}{B'(p_k)} e^{p_k t} = \\ &= -\frac{U_0}{NRC} \frac{\text{ch}\tau_k N \text{sh}\tau_k n \text{sh}\tau_k}{p_k \text{ch}\tau_k N} e^{p_k t} = -\frac{U_0}{NRC} \frac{1}{p_k} \text{sh} \frac{j\pi k}{N} \text{sh} \frac{j\pi kn}{N} e^{p_k t} = \\ &= -\frac{U_0}{N} \frac{\cos \frac{\pi k}{2N} \sin \frac{\pi kn}{N}}{\sin \frac{\pi k}{2N}} e^{p_k t} = -\frac{U_0}{N} \frac{1}{p_k} \text{ctg} \frac{\pi k}{2N} \sin \frac{\pi kn}{N} e^{-\frac{2}{RC} \sin^2 \frac{\pi k}{2N} t}. \end{aligned}$$

Функция $B(p)$ имеет также полюс $p=0$. Из уравнения (5.9) при $p=0$ получаем

$$\text{ch}\tau = 1, \tau = \tau_m = j2\pi m, m = 0, 1, \dots$$

Используя правило Лопиталья, для вычета в полюсе $p=0$ получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p=0}(E_n(p)e^{pt}) &= U_0 \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{\text{sh}\tau(N-n)}{p \text{sh}\tau N} e^{pt} \right] = \\ &= U_0 \lim_{\tau \rightarrow \tau_m} \frac{\text{sh}\tau(N-n)}{\text{sh}\tau N} = \frac{U_0(N-n)}{N} \frac{\cos 2\pi(N-n)m}{\cos 2\pi m N} = \frac{U_0(N-n)}{N}. \end{aligned}$$

Поясним, почему при записи решений уравнения $\text{sh}\tau N = 0$ индекс k пробегает значения $1, 2, \dots, N-1$. При $k=N$ корень уравнения $\tau_n = j\pi$ не дает каких-либо особенностей в поведении функции $E_n(p)$. Действительно, для предела функции $E_n(p)$ в точке τ_N получаем конечную величину (вновь используем при вычислении

предела правило Лопиталя)

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \tau_N} E_n(p) &= \frac{U_0}{pN} \lim_{\tau \rightarrow \tau_N} \frac{\text{sh} \tau(N-n)}{\text{sh} \tau N} = -\frac{U_0 RC}{2} \frac{(N-n)}{N} \frac{\cos \pi(N-n)}{\cos \pi N} = \\ &= -\frac{U_0 RC(N-n)(-1)^n}{2N}. \end{aligned}$$

При $k=0$ получаем действительный корень $\tau=0$, которому отвечает полюс $p=0$, вычет в котором мы уже посчитали. При $k=N+1, N+2, \dots$ нули функции $\text{sh} \tau N$ дают те же полюса p_k , что и при $k=N-1, N-2, \dots$. Действительно, используя формулу (5.11), несложно показать, что

$$p_{N+1} = p_{N-1}, p_{N+2} = p_{N-2}, \dots$$

Найденные соотношения для вычетов функции $E_n(p)e^{pt}$ в ее полюсах позволяют найти оригинал, отвечающий лаплас-образу $E_n(p)$, то есть напряжение на выходе n -го четырехполюсника (формула А.4)

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \text{Res}_{p=0} (E_n(p)e^{pt}) + \sum_{k=1}^{N-1} \text{Res}_{p=p_k} (E_n(p)e^{pt}) = \\ &= \frac{U_0(N-n)}{N} \frac{U_0}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \text{ctg} \frac{\pi k}{2N} \sin \frac{\pi k n}{2N} e^{-\frac{2}{RC} \sin^2 \frac{\pi k}{2N} t}. \end{aligned}$$

Для лаплас-образа тока $I_n(p)$ второе уравнение системы (5.7) в рассматриваемом случае дает

$$I_n(p) = \frac{U_0 C \text{ch} \tau(N-n)}{\text{sh} \tau \text{sh} \tau N} = \frac{U_0 C \text{ch} \tau(N-n)}{B_1(p)}.$$

Знаменатель $B_1(p) = \text{sh} \tau \text{sh} \tau N$ также имеет нули в точках $\tau_k = \frac{j\pi k}{N}$, $k=1, 2, \dots, N-1$, которым отвечают полюса (5.11).

Производная знаменателя, с учетом формулы (5.13),

$$B_1'(p) = \tau'(p)(\text{ch} \tau \text{sh} \tau N + N \text{sh} \tau \text{ch} \tau N) =$$

$$= RC \left(\operatorname{ch} \tau \frac{\operatorname{sh} \tau N}{\operatorname{sh} \tau} + N \operatorname{ch} \tau N \right).$$

Значение производной в точке p_k

$$B_1'(p_k) = NRC \operatorname{ch} \tau_k N.$$

Вычет функции $I_n(p)e^{pt}$ в полюсе p_k равен

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=p_k} (I_n(p)e^{pt}) &= U_0 C \frac{\operatorname{ch} \tau_k (N-n)}{B_1'(p_k)} e^{p_k t} = \\ &= \frac{U_0 C}{NRC} \frac{\operatorname{ch} \tau_k N \operatorname{ch} \tau_k n}{\operatorname{ch} \tau_k N} e^{p_k t} = \frac{U_0}{NR} \operatorname{ch} \frac{j\pi k n}{N} e^{p_k t} = \\ &= \frac{U_0}{NR} \cos \frac{\pi k n}{N} e^{-\frac{2}{RC} \sin^2 \frac{\pi k}{2N} t}. \end{aligned}$$

Знаменатель $B_1(p)$, помимо нулей τ_k , имеет нули в точках

$$\operatorname{sh} \tau = 0, \tau_{m'} = j\pi m', m' = 0, 1, \dots$$

В этом случае уравнение (5.9) принимает вид

$$1 + RCp = (-1)^{m'}.$$

При $m' = 2m + 1$, где $m = 0, 1, \dots$, получаем полюс в точке

$$p = -\frac{2}{RC}. \quad (5.15)$$

Так как производная знаменателя

$$B_1'(p) = RC \left(\operatorname{ch} \tau \frac{\operatorname{sh} \tau N}{\operatorname{sh} \tau} + N \operatorname{ch} \tau N \right), \quad (5.16)$$

то ее значение в полюсе (5.15) (вновь используем правило Лопиталья) будет равно

$$B_1'(p) = RC \operatorname{ch} \tau_m \lim_{\tau \rightarrow \tau_m} \frac{\operatorname{sh} \tau N}{\operatorname{sh} \tau} + NRC \operatorname{ch} \tau_m N =$$

$$= 2NRC \cos \pi N(2m+1) = 2NRC(-1)^N.$$

Как следствие, для вычета функции $I_n(p)e^{pt}$ в полюсе (5.15) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=-\frac{2}{RC}} \left(I_n(p)e^{pt} \right) &= \frac{U_0 C}{2NRC} \frac{\cos \pi(N-n)(2m+1)}{(-1)^N} e^{-\frac{2}{RC}t} = \\ &= \frac{U_0}{2NR} \frac{(-1)^{N+n}}{(-1)^N} e^{-\frac{2}{RC}t} = \frac{U_0(-1)^n}{2NR} e^{-\frac{2}{RC}t}. \end{aligned}$$

При $m' = 2m$ из уравнения (5.9) получаем полюс $p = 0$. Используя формулу (5.6), находим

$$B_1'(0) = 2NRC \cos 2\pi Nm = 2NRC.$$

Вычет в полюсе $p = 0$

$$\operatorname{Res}_{p=0} \left(I_n(p)e^{pt} \right) = \frac{U_0 C \cos 2\pi m(N-n)}{2NRC} = \frac{U_0}{2NR}.$$

Рассматривая нули знаменателя τ_k , мы вновь ограничились индекс k значениями $1, \dots, N-1$, так как при $k=0$ корню $\tau=0$ отвечает полюс $p=0$, а при $k=N$ корню $\tau=j\pi$ отвечает полюс $p=-\frac{2}{RC}$.

То есть мы получаем те же полюса, что и при решении уравнения $\operatorname{sh} \tau = 0$.

Таким образом, для оригинала, отвечающего лаплас-образу $I_n(p)$, суммируя найденные соотношения для вычетов, получаем

$$\begin{aligned} i_n(t) &= \operatorname{Res}_{p=0} \left(I_n(p)e^{pt} \right) + \operatorname{Res}_{p=-\frac{2}{RC}} \left(I_n(p)e^{pt} \right) + \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{p=p_n} \left(I_n(p)e^{pt} \right) = \\ &= \frac{U_0}{2NR} + \frac{U_0(-1)^n}{2NR} e^{-\frac{2}{RC}t} + \frac{U_0}{NR} \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{\pi kn}{N} e^{-\frac{2}{RC} \sin^2 \frac{\pi k}{2N} t} = \\ &= \frac{U_0}{2NR} \left(1 + (-1)^n e^{-\frac{2}{RC}t} \right) + \frac{U_0}{NR} \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{\pi kn}{N} e^{-\frac{2}{RC} \sin^2 \frac{\pi k}{2N} t}. \end{aligned}$$

Итак, для первого граничного условия получаем следующие зависимости для напряжения $u_n(t)$ на выходе n -го четырехполюсника и тока $i_n(t)$ в n -м четырехполюснике:

$$u_n(t) = \frac{U_0(N-n)}{N} - \frac{U_0}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2N} \sin \frac{\pi k n}{N} e^{-\frac{2}{RC} \sin^2 \frac{\pi k}{2N} t},$$

$$i_n(t) = \frac{U_0}{2NR} \left(1 + (-1)^n e^{-\frac{2}{RC} t} \right) + \frac{U_0}{NR} \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{\pi k n}{N} e^{-\frac{2}{RC} \sin^2 \frac{\pi k}{2N} t}.$$

Найдем далее напряжение на выходе n -го четырехполюсника для второго граничного условия. Лаплас-образ $E_n(p)$ имеет вид (первое уравнение системы (5.8))

$$E_n(p) = \frac{U_0 \operatorname{ch} \tau(N-n)}{p \operatorname{ch} \tau N} = \frac{U_0 \operatorname{ch} \tau(N-n)}{B_2(p)}.$$

Нули знаменателя, функции $B_2(p)$ даются корнями уравнения

$$\operatorname{ch} \tau N = 0, \text{ откуда } \tau_k N = j \frac{\pi}{2} (2k+1),$$

тогда

$$\tau_k = \frac{j\pi(2k+1)}{2N}, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Отвечающие этим значениям τ_k полюса p_k находим из уравнения (5.9):

$$p_k = -\frac{2}{RC} \sin^2 \frac{\pi(2k+1)}{4N}. \quad (5.17)$$

Дальнейшие вычисления совершенно аналогичны предыдущему рассмотрению. Находим производную функции $B_2(p)$ (вновь используем формулу (5.13)), получаем

$$B_2'(p) = \operatorname{ch} \tau N + NRCp \frac{\operatorname{sh} \tau N}{\operatorname{sh} \tau},$$

тогда

$$B'_2(p_k) = NRC p_k \frac{\text{sh} \tau_k N}{\text{sh} \tau_k}.$$

Используя найденное соотношение для производной $B'_2(p_k)$, вычисляем вычет функции $E_n(p)e^{pt}$ в полюсе p_k

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p=p_k} (E_n(p)e^{pt}) &= U_0 \frac{\text{ch} \tau_k (N-n)}{B'_2(p)} e^{p_k t} = \\ &= -\frac{U_0}{NRC} \frac{\text{sh} \tau_k N \text{sh} \tau_k n \text{sh} \tau_k}{p_k \text{sh} \tau_k N} e^{p_k t} = \\ &= -\frac{U_0}{2N} \frac{1}{p_k} \text{sh} \frac{j\pi(2k+1)}{2N} \text{sh} \frac{j\pi(2k+1)n}{2N} e^{p_k t} = \\ &= -\frac{U_0}{2N} \frac{\sin \frac{\pi(2k+1)}{2N} \sin \frac{\pi(2k+1)n}{2N}}{\sin^2 \frac{\pi(2k+1)}{4N}} e^{p_k t} = \\ &= -\frac{U_0}{N} \text{ctg} \frac{\pi(2k+1)}{2N} \sin \frac{\pi(2k+1)n}{2N} e^{-\frac{2}{RC} \sin^2 \frac{\pi(2k+1)}{4N} t}. \end{aligned}$$

Функция $E_n(p)$ имеет также полюс в точке $p=0$. Из уравнения (5.9) в этом случае получаем

$$\text{ch} \tau = 1, \tau_m = j2\pi m, m = 0, 1, \dots$$

Как следствие, для величины вычета в полюсе $p=0$ получаем величину

$$\text{Res}_{p=0} (E_n(p)e^{pt}) = \frac{U_0 \text{ch} \tau_m (N-n)}{\text{ch} \tau_m N} = U_0 \frac{\cos 2\pi m (N-n)}{\cos 2\pi m N} = U_0.$$

Рассматривая корни уравнения $\text{ch} \tau N = 0$, мы ограничились решениями τ_k при $k=0, 1, \dots, N$, так как при $k=N+1, N+2, \dots$ решения τ_k дают повторяющиеся значения полюсов p_k , то есть $p_{N+1} = p_{N-1}$, $p_{N+2} = p_{N-2}$ и т.д.

Полученные соотношения для вычетов позволяют нам найти функцию $u_n(t)$, которая имеет вид

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \operatorname{Res}_{p=0} (E_n(p)e^{pt}) + \sum_{k=0}^N \operatorname{Res}_{p=p_k} (E_n(p)e^{pt}) = \\ &= U_0 - \frac{U_0}{N} \sum_{k=0}^N \operatorname{ctg} \frac{\pi(2k+1)}{4N} \sin \frac{\pi(2k+1)n}{2N} e^{-\frac{2}{RC} \sin^2 \frac{\pi(2k+1)}{4N} t}. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае второго граничного условия получаем следующую зависимость для напряжения $u_n(t)$ в n -м четырехполюснике фильтра:

$$u_n(t) = U_0 - \frac{U_0}{N} \sum_{k=0}^N \operatorname{ctg} \frac{\pi(2k+1)}{4N} \sin \frac{\pi(2k+1)n}{2N} e^{-\frac{2}{RC} \sin^2 \frac{\pi(2k+1)}{4N} t}.$$

Пример 5.2. Рассмотрим фильтр с параметрами $Z_1(p) = Lp + R_1$, $Z_2(p) = R_2$. На вход фильтра подается постоянное напряжение U_0 . Найдем ток, текущий в n -й секции фильтра (рассмотрим первое граничное условие).

Характеристическое уравнение фильтра в этом случае принимает вид

$$\operatorname{ch} \tau(p) = 1 + \frac{Lp + R_1}{R_2}. \quad (5.18)$$

При первом граничном условии лаплас-образ $I_n(p)$ представим в виде

$$I_n(p) = \frac{U_0}{R_2(p)} J_n(p),$$

где функция

$$J_n(p) = \frac{\operatorname{ch} \tau(N-n)}{\operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau N} = \frac{\operatorname{ch} \tau(N-n)}{B(p)}.$$

Нулям знаменателя $\tau_k = \frac{j\pi k}{N}$ ($k=1, \dots, N-1$) соответствуют полюса p_k , которые находим из уравнения (5.18)

$$p_k = -\frac{\alpha_k}{L}, \text{ где } \alpha_k = R_1 + 2R_2 \sin^2 \frac{\pi k}{2N}. \quad (5.19)$$

Из равенства (5.18), дифференцируя обе части, находим производную

$$\tau'(p) = \frac{L}{R_2 \operatorname{sh} \tau}. \quad (5.20)$$

Тогда производная функции $B(p) = \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \tau N$, с учетом равенства (5.20), будет

$$B'(p) = \frac{L}{R_2} \left(\operatorname{ch} \tau \frac{\operatorname{sh} \tau N}{\operatorname{sh} \tau} + N \operatorname{ch} \tau N \right), \quad (5.21)$$

как следствие, величина производной в точке p_k

$$B'(p_k) = \frac{LN}{R_2} \operatorname{ch} \tau_k N. \quad (5.22)$$

Для вычета функции $J_n(p)e^{pt}$ в полюсе p_k , используя формулу (5.22), получаем величину

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{p=p_k} (J_n(p)e^{pt}) &= \frac{\operatorname{ch} \tau_k (N-n)}{B'(p_k)} e^{p_k t} = \\ &= \frac{R_2}{LN} \frac{\operatorname{ch} \tau_k N \operatorname{ch} \tau_k n}{\operatorname{ch} \tau_k N} e^{p_k t} = \frac{R_2}{LN} \cos \frac{\pi k n}{N} e^{-\frac{\alpha_k t}{L}}. \end{aligned}$$

Нулям функции $B(p)$

$$\tau_m = j2\pi m, \quad m = 0, 1, \dots$$

отвечает полюс (как следует из уравнения (5.18))

$$p_{m1} = -\frac{R_1}{L}. \quad (5.23)$$

По формуле (5.21) вычисляем величину производной $B(p)$ в полюсе p_{m1} , используя правило Лопиталю, получаем

$$B'(p_{m1}) = \frac{L}{R_2} \left(\operatorname{ch} \tau_m \lim_{\tau \rightarrow \tau_m} \frac{\operatorname{sh} \tau N}{\operatorname{sh} \tau} + N \operatorname{ch} \tau_m N \right) =$$

$$= \frac{2LN}{R_2} \cos 2\pi m N = \frac{2LN}{R_2}.$$

Далее, с учетом полученного соотношения для производной $B'(p_{m1})$, находим вычет функции $J_n(p)e^{pt}$ в полюсе p_{m1} (5.23)

$$\operatorname{Res}_{p=p_{m1}}(J_n(p)e^{pt}) = \frac{R_2}{2NL} \operatorname{ch} j2\pi m(N-n)e^{p_{m1}t} = \frac{R_2}{2NL} e^{-\frac{R_1}{L}t}.$$

Нулям функции $B(p)$

$$\tau_m = j\pi(2m+1), \quad m = 0, 1, \dots$$

соответствует полюс

$$p_{m2} = -\frac{1}{L}(R_1 + 2R_2). \quad (5.24)$$

Для производной функции $B'(p)$ в полюсе p_{m2} по формуле (5.21) получаем величину

$$B'(p_{m2}) = \frac{2NL}{R_2} \cos \pi(2m+1)N = \frac{2LN}{R_2} (-1)^N.$$

Тогда для вычета функции $J_n(p)e^{pt}$ в полюсе p_{m2} (5.24), с учетом полученного соотношения для производной $B'(p_{m2})$, получаем

$$\operatorname{Res}_{p=p_{m2}}(J_n(p)e^{pt}) = \frac{R_2}{2NL} (-1)^N \cos \pi(2m+1)(N-n)e^{p_{m2}t} =$$

$$= \frac{R_2}{2NL} (-1)^N (-1)^{N-n} e^{p_{m2}t} = \frac{R_2(-1)^N}{2LN} e^{-\frac{1}{L}(R_1+2R_2)t}.$$

Суммируя полученные выражения для вычетов функции $J_n(p)e^{pt}$ в полюсах (5.19), (5.23), (5.24), находим функцию-оригинал, отвечающую лаплас-образу $J_n(p)$, получаем

$$\begin{aligned}
J_n(p)e^{pt} \simeq & \frac{R_2}{2NL} e^{-\frac{R_1 t}{L}} + \frac{R_2(-1)^n}{2NL} e^{-\frac{1}{L}(R_1+2R_2)t} + \\
& + \frac{R_2}{NL} \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{\pi kn}{N} e^{-\frac{\alpha_k t}{L}}. \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Используя полученную функцию-оригинал (5.25), по формуле (А.2) находим оригинал, отвечающий лаплас-образу $I_n(p)$, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
I_n(p) &= \frac{U_0}{R_2} \frac{1}{p} J_n(p) \simeq \frac{U_0}{R_2} \left(\frac{R_2}{2NL} \int_0^t e^{-\frac{R_1 \tau}{L}} d\tau + \right. \\
& \left. + \frac{R_2(-1)^n}{2NL} \int_0^t e^{-\frac{1}{L}(R_1+2R_2)\tau} d\tau + \frac{R_2}{NL} \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{\pi kn}{N} \int_0^t e^{-\frac{\alpha_k \tau}{L}} d\tau \right) = \\
&= \frac{U_0}{2N} \left(\frac{1}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}} \right) + \frac{(-1)^n}{R_1 + 2R_2} \left(1 - e^{-\frac{1}{L}(R_1+2R_2)t} \right) \right) + \\
& \quad + \frac{U_0}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\alpha_k} \cos \frac{\pi kn}{N} \left(1 - e^{-\frac{\alpha_k t}{L}} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, для тока в n -м четырехполюснике в случае первого граничного условия получаем следующую зависимость:

$$\begin{aligned}
i_n(t) &= \frac{U_0}{2NR_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1 t}{L}} \right) + \frac{U_0(-1)^n}{2N(R_1 + 2R_2)} \left(1 - e^{-\frac{1}{L}(R_1+2R_2)t} \right) = \\
&= \frac{U_0}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\alpha_k} \cos \frac{\pi kn}{N} \left(1 - e^{-\frac{\alpha_k t}{L}} \right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим далее ситуацию, когда на вход фильтра подается напряжение $e(t) = U_0 \sin \omega t$. Найдем напряжение на выходе n -го четырехполюсника (также ограничимся рассмотрением первого граничного условия).

Лаплас-образ $E_n(p)$ представим в виде

$$E_n(p) = E_0(p)D_n(p),$$

где

$$E_0(p) = \frac{U_0 \omega}{p^2 + \omega^2}, \quad D_n(p) = \frac{\text{sh}\tau(N-n)}{\text{sh}\tau N}.$$

Все дальнейшие вычисления аналогичны предыдущим. Функция $D_n(p)$ имеет полюса в точках p_k (5.19). Используя формулу (5.20), находим производную знаменателя $D_n(p)$, получаем

$$(\text{sh}\tau N)'_p = N\tau'(p)\text{ch}\tau N = \frac{NL \text{ch}\tau N}{R_2 \text{sh}\tau}.$$

С учетом полученного соотношения для вычета функции $D_n(p)e^{pt}$ в полюсе (5.19) получаем следующую величину:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p=p_k} \left(D_n(p)e^{pt} \right) &= \frac{\text{sh}\tau_k(N-n)e^{p_k t}}{(\text{sh}\tau N)'_{p=p_k}} = -\frac{R_2 \text{ch}\tau_k N \text{sh}\tau_k n \text{sh}\tau_k}{NL \text{ch}\tau_k N} e^{p_k t} = \\ &= -\frac{R_2}{NL} \text{sh} \frac{j\pi k}{N} \text{sh} \frac{j\pi kn}{N} e^{p_k t} = -\frac{R_2}{NL} \sin \frac{\pi k}{N} \sin \frac{\pi kn}{N} e^{-\frac{\alpha_k}{L} t}. \end{aligned}$$

Как следствие, оригинал, отвечающий лаплас-образу $D_n(p)$, будет иметь вид

$$D_n(p) \square d_n(t) = \frac{R_2}{NL} \sum_{k=1}^{N-1} \sin \frac{\pi k}{N} \sin \frac{\pi kn}{N} e^{-\frac{\alpha_k}{L} t}. \quad (5.26)$$

Напряжение $u_n(t)$ найдем, используя формулу (А.3), через свертку функций $e(t)$ и $d_n(t)$. С учетом формулы (5.26) получаем

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \int_0^t e(\tau) d_n(t-\tau) d\tau = \\ &= \frac{U_0 R_2}{NL} \sum_{k=1}^{N-1} \sin \frac{\pi k}{N} \sin \frac{\pi kn}{N} \int_0^t e^{-\frac{\alpha_k}{L}(t-\tau)} \sin \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{U_0 R_2}{NL} \sum_{k=1}^{N-1} \sin \frac{\pi k}{N} \sin \frac{\pi kn}{N} e^{-\frac{\alpha_k}{L} t} \int_0^t e^{\frac{\alpha_k}{L} \tau} \sin \omega \tau d\tau. \end{aligned}$$

Так как интеграл

$$\int_0^t e^{\frac{\alpha_k}{L}\tau} \sin \omega \tau d\tau = \frac{(\alpha_k L \sin \omega t - \omega L^2 \cos \omega t) e^{\frac{\alpha_k}{L}t} + \omega L^2}{\alpha_k^2 + \omega^2 L^2},$$

то для функции напряжения $u_n(t)$ получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{U_0 R_2}{NL} \sum_{k=1}^{N-1} \sin \frac{\pi k}{N} \sin \frac{\pi kn}{N} e^{-\frac{\alpha_k}{L}t} \frac{1}{\alpha_k^2 + \omega^2 L^2} \left((\alpha_k L \sin \omega t - \right. \\ &\quad \left. - \omega L^2 \cos \omega t) e^{\frac{\alpha_k}{L}t} + \omega L^2 \right) = \frac{U_0 R_2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\alpha_k^2 + \omega^2 L^2} \sin \frac{\pi k}{N} \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi kn}{N} (\alpha_k \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + \\ &\quad + \frac{U_0 R_2 \omega L}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\alpha_k^2 + \omega^2 L^2} \sin \frac{\pi k}{N} \sin \frac{\pi kn}{N} e^{-\frac{\alpha_k}{L}t}. \end{aligned}$$

Итак, зависимость напряжения от времени на выходе n -й секции фильтра при первом граничном условии имеет вид

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{U_0 R_2}{N} \sin \omega t \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + \omega^2 L^2} \sin \frac{\pi k}{N} \sin \frac{\pi kn}{N} + \\ &\quad + \frac{U_0 R_2 \omega L}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\alpha_k^2 + \omega^2 L^2} \sin \frac{\pi k}{N} \sin \frac{\pi kn}{N} \left(e^{-\frac{\alpha_k}{L}t} - \cos \omega t \right). \end{aligned}$$

6 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1 Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение 1-го порядка

$$y'(x) = f(x, y). \quad (6.1)$$

Основная задача, относящаяся к этому уравнению, есть задача Коши: найти решение уравнения (6.1) $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, т.е. требуется найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$ (рисунок 6.1). Если правая часть $f(x, y)$ дифференциального уравнения (6.1) непрерывна в некоторой области R , определяемой неравенствами

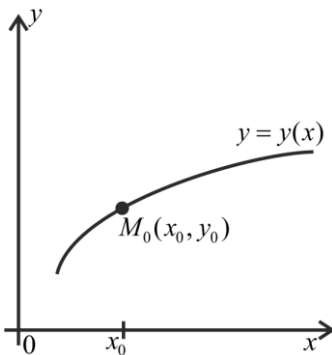


Рисунок 6.1

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b,$$

то существует по меньшей мере одно решение, определенное в некоторой окрестности $|x - x_0| < h$, где h – положительное число.

Решение задачи Коши является единственным, если в области R выполнено условие Липшица

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leq N|\bar{y} - y|,$$

где N – некоторая постоянная (константа Липшица), зависящая в общем случае от a и b . Если $f(x, y)$ имеет ограниченную

производную $f'_y(x, y)$ в области R , то можно положить

$$N = \max |f'_y(x, y)| \text{ при } (x, y) \in R.$$

Для дифференциального уравнения n -го порядка

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

задача Коши состоит в нахождении решения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

В приложениях часто встречаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ограничимся рассмотрением нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (6.2)$$

где $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – функции переменной x , которые требуется найти, решив систему уравнений (6.2).

Введем соответствующие вектор-столбцы:

$$\bar{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T, \quad \frac{d\bar{y}(x)}{dx} = \left(\frac{dy_1(x)}{dx}, \dots, \frac{dy_n(x)}{dx} \right)^T.$$

Тогда систему уравнений (6.2) можно записать в векторном виде:

$$\frac{d\bar{y}(x)}{dx} = \bar{f}(x, \bar{y}(x)),$$

где $\vec{f}(x, \vec{y}(x)) = (f_1(x, \vec{y}(x)), \dots, f_n(x, \vec{y}(x)))^T$ – заданная вектор-функция.

Под решением системы (6.2) понимается любая совокупность функций $\vec{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$, где $y_1(x) = \varphi_1(x), \dots, y_n(x) = \varphi_n(x)$, которая, будучи подставлена в систему уравнений (6.2), обращает уравнения системы в тождества.

Так как система дифференциальных уравнений имеет бесконечно много решений, то для выделения одного конкретного решения $\vec{y} = \vec{y}(x)$, кроме системы уравнений, нужны дополнительные условия

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}^{(0)}, \quad (6.3)$$

что приводит к задаче Коши.

Задача Коши. Найти решение $\vec{y} = \vec{y}(x)$ системы уравнений (6.2), удовлетворяющее заданным начальным условиям (6.3), где x_0 – фиксированное значение независимой переменной и $\vec{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})^T$ – данная система чисел.

Гарантия однозначной разрешимости задачи Коши дается следующими достаточными условиями.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Пусть в некоторой окрестности начальных значений

$$U = \{ |x - x_0| < a; |y_1 - y_1^{(0)}| < b_1, \dots, |y_n - y_n^{(0)}| < b_n \}$$

система (6.2) обладает следующими свойствами:

1) правые части $f_1(x, \vec{y}(x)), \dots, f_n(x, \vec{y}(x))$ – непрерывные функции в области U ;

2) функции $f_i(x, \vec{y}(x))$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в области U удовлетворяют условиям Липшица по зависимым переменным y_1, y_2, \dots, y_n , т.е.

$$|f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - f_i(x, y_1, \dots, y_n)| \leq N \sum_{j=1}^n |\bar{y}_j - y_j|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $(x, y_1, \dots, y_n) \in U, (x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in U$ и N – некоторая постоянная (константа Липшица). В этом случае существует единственное решение системы уравнений (6.2) $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$, определенное в некоторой окрестности $|x - x_0| < h$ и удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \dots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}.$$

Заметим, что вместо условий Липшица достаточно потребовать наличия ограниченных производных $\frac{\partial f_i}{\partial y_j} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ в области U . Тогда за константу Липшица можно принять

$$N = \max_{i,j} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right|.$$

Даже для простейшего дифференциального уравнения вида (6.1) нахождение решения, отвечающего заданному начальному условию, вообще невыполнимо с помощью конечного числа математических операций для достаточно общего вида функции $f(x, y)$. Тем более это неосуществимо для системы дифференциальных уравнений.

Это обстоятельство привело к созданию большого числа методов приближенного решения дифференциальных уравнений. Все эти методы в основном можно разделить на две группы:

1 Аналитические методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения.

2 Численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

Следует отметить, что приведенная классификация методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений является достаточно условной. Многие методы приближенного решения сочетают в себе аналитический и численный методы решения дифференциального уравнения.

6.2 Метод Эйлера решения задачи Коши. Модификации метода Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение 1-го порядка вида (6.1)

$$y'(x) = f(x, y)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Выбрав достаточно малый шаг h , построим систему равноотстоящих точек

$$x_i = x_0 + ih \quad (i=0, 1, 2, \dots). \quad (6.4)$$

Искомую интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ (см. рисунок 6.1), приближенно заменим ломаной $M_0M_1M_2\dots$ (рисунок 6.2) с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots$), звенья которой M_iM_{i+1} являются отрезками прямых и даются уравнениями

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \quad (i=0, 2, \dots). \quad (6.5)$$

Полученная ломаная линия называется *ломаной Эйлера*.

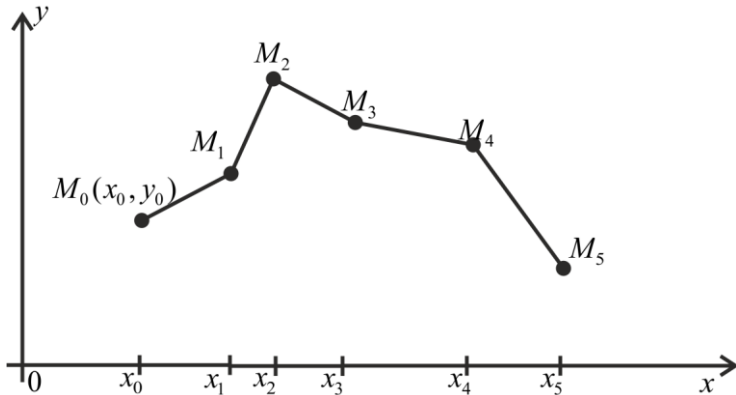


Рисунок 6.2

Из формул (6.5) следует, что значения y_i могут быть определены (метод Эйлера) по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (i=0, 1, 2, \dots). \quad (6.6)$$

Метод Эйлера является простейшим численным методом интегрирования дифференциального уравнения. Недостатки метода:

1) малая точность;

2) систематическое накопление ошибок.

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений 1-го порядка. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y'(x) = f_1(x, y(x), z(x)), \\ z'(x) = f_2(x, y(x), z(x)) \end{cases}$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0$.

Приближенное решение этой системы в точках x_i (уравнение (6.4)) вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf_1(x_i, y_i, z_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ z_{i+1} &= z_i + hf_2(x_i, y_i, z_i). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Метод Эйлера, в принципе, обладает малой точностью и дает сравнительно удовлетворительные результаты (в смысле погрешности) лишь при малых значениях h . Это обстоятельство понятно, так как по существу метод Эйлера заключается в том, что интеграл данного дифференциального уравнения (6.1) на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ представляется двумя членами ряда Тейлора

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

т.е. для этого отрезка имеется погрешность порядка h^2 .

Кроме того, при вычислении значений на следующем отрезке исходные данные не являются точными и содержат погрешности, зависящие от неточности предшествующих вычислений.

Для уточнения метода Эйлера используются различные виды его модификации.

Одной из модификаций метода Эйлера является метод Эйлера – Коши. В этом методе сначала определяется «грубое приближение» решения

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

исходя из которого затем вычисляют более точное приближение

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})). \quad (6.8)$$

Равноотстоящие точки x_i в равенстве (6.8) вычисляются по формулам (6.4).

Метод Эйлера – Коши можно еще более уточнить, применяя итерационную обработку каждого значения y_0 . А именно, исходя из «грубого приближения»

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

построим итерационный процесс:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i^{(k-1)})) \quad (k=1, 2, \dots).$$

Итерацию продолжаем до тех пор, пока некоторые два последовательных приближения $y_{i+1}^{(n)}$ и $y_{i+1}^{(n+1)}$ не совпадут между собой в соответствующих десятичных знаках. После этого полагаем

$$y_{i+1} \approx \bar{y}_{i+1}^{(n)},$$

где $\bar{y}_{i+1}^{(n)}$ – общая часть приближений $y_{i+1}^{(n)}$ и $y_{i+1}^{(n+1)}$.

6.3 Примеры численного решения задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений

Пример 6.1. Применяя метод Эйлера, найти на отрезке [1;2] решение дифференциального уравнения $y'(x) = \frac{xy^2 + xy}{1+x^2}$ с начальным условием $y(1)=1$, выбрав шаг $h = 0,1$.

Решение. Вычисление осуществляем по формуле (6.6) с данной величиной шага h , то есть

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + 0,1f(x_i, y_i).$$

В нашем случае $f(x, y) = \frac{xy^2 + xy}{1+x^2}$, $x_{i+1} = x_i + 0,1$. Поэтому получаем: $x_1 = x_0 + 0,1 = 1 + 0,1 = 1,1$,

$$y_1 = y_0 + 0,1f(x_0, y_0) = 1 + 0,1f(1,1) = 1 + 0,1 \cdot 1 = 1,1,$$

$$x_2 = x_1 + 0,1 = 1,1 + 0,1 = 1,2,$$

$$y_2 = y_1 + 0,1f(x_1, y_1) = 1 + 0,1 \frac{1,1 \cdot (1,1)^2 + 1,1 \cdot 1,1}{1 + (1,1)^2} = 1,150,$$

$$x_3 = x_2 + 0,1 = 1,2 + 0,1 = 1,3,$$

$$y_3 = y_2 + 0,1f(x_2, y_2) = 1,150 + 0,1 \frac{1,2 \cdot (1,150)^2 + 1,2 \cdot 1,150}{1 + (1,2)^2} = 1,324.$$

Аналогичным образом продолжаем процесс вычислений далее. Результаты вычислений удобно представить в виде таблицы 6.1:

Таблица 6.1

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$
0	1	1	1	6	1,6	1,885	2,444
1	1,1	1,1	1,150	7	1,7	2,129	2,912
2	1,2	1,215	1,324	8	1,8	2,420	3,515
3	1,3	1,347	1,528	9	1,9	2,772	4,309
4	1,4	1,500	1,774	10	2	3,203	—
5	1,5	1,678	2,073				

Пример 6.2. Применяя метод Эйлера – Коши, найти на отрезке $[0;0,5]$ решение дифференциального уравнения $y'(x) = -x^2 - y^2 + \frac{x^2 - 1,1}{1 + 1,1x^2}$ с начальным условием $y(0) = 1$ и шагом $h = 0,1$.

Решение. Вычисление осуществляем по формуле (6.8), которая при данной величине шага h принимает вид

$$y_{i+1} = y_i + 0,05 \left(f(x_i, y_i) + \overline{f(x_{i+1}, y_{i+1})} \right),$$

где

$$\overline{y_{i+1}} = y_i + 0,1f(x_i, y_i) \text{ и } f(x, y) = -x^2 - y^2 + \frac{x^2 - 1,1}{1 + 1,1x^2}.$$

Получаем:

$$x_1 = x_0 + 0,1 = 0 + 0,1 = 0,1,$$

$$\overline{y_1} = y_0 + 0,1f(x_0, y_0) = 1 + 0,1f(0,1) = 1 + 0,1 \cdot (-1,1) = 0,89,$$

$$f(x_1, \bar{y}_1) = f(0,1, 0,89) = -(0,1)^2 \cdot (0,89)^2 + \frac{(0,1)^2 - 1,1}{1 + 1,1 \cdot (0,1)^2} = -1,0861,$$

$$y_1 = y_0 + 0,05(f(x_0, y_0) + f(x_1, \bar{y}_1)) = 1 + 0,05(-1,1 - 1,0861) = 0,8907,$$

$$x_2 = x_1 + 0,1 = 0,1 + 0,1 = 0,2,$$

$$f(x_1, y_1) = -(0,1)^2 \cdot (0,8907)^2 + \frac{(0,1)^2 - 1,1}{1 + 1,1 \cdot (0,1)^2} = -1,0861,$$

$$\bar{y}_2 = y_1 + 0,1f(x_1, y_1) = 0,8907 - 0,1 \cdot 1,0861 = 0,7821,$$

$$f(x_2, \bar{y}_2) = -(0,2)^2 \cdot (0,7821)^2 + \frac{(0,2)^2 - 1,1}{1 + 1,1 \cdot (0,2)^2} = -1,0398,$$

$$y_2 = y_1 + 0,05(f(x_1, y_1) + f(x_2, \bar{y}_2)) = 0,8907 + 0,05(-1,0861 - 1,0398) = 0,7844.$$

Аналогичным образом вычисляем последующие значения.

Результаты вычислений представим в виде таблицы 6.2:

Таблица 6.2

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	\bar{y}_i	$f(x_i, \bar{y}_i)$
0	0	1	-1,1		
1	0,1	0,8907	-1,0861	0,89	-1,0861
2	0,2	0,7844	-1,0399	0,7821	-1,0398
3	0,3	0,6844	-0,9612	0,6804	-0,9607
4	0,4	0,5936	-0,8557	0,5883	-0,8547
5	0,5	0,5142	-	0,508	-0,7312

7 МЕТОД РУНГЕ – КУТТА

7.1 Метод Рунге – Кутта для дифференциального уравнения 1-го порядка

Пусть дано дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y'(x) = f(x, y) \quad (7.1)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Выберем шаг h и введем равноотстоящие точки $x_i = x_0 + ih$, а также обозначим $y_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Рассмотрим числа

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}). \end{cases} \quad (7.2)$$

Согласно обычному методу Рунге – Кутта, последовательные значения искомой функции $y(x)$, являющейся решением уравнения (7.1), определяются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.3)$$

Покажем, что погрешность этого метода на каждом шаге есть величина порядка h^5 . Пусть

$$\Delta y = y(x+h) - y(x). \quad (7.4)$$

Для текущей точки x приращение Δy , определенное равенством (7.4), в виде линейной суперпозиции величин k_1, k_2, k_3 , и k_4 ,

определяемых формулами (7.2) (значок «i», естественно, опускается),

$$\Delta y = \alpha k_1 + \beta k_2 + \gamma k_3 + \delta k_4. \quad (7.5)$$

Постоянные α, β, γ и δ определим из условия, чтобы приращение, вычисленное по формуле Тейлора

$$\Delta y = hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(x) + \dots, \quad (7.6)$$

совпадало до членов порядка h^4 включительно с величиной Δy , вычисляемой по формуле (7.5).

Наша задача – показать, что коэффициенты в формуле (7.3) в этом смысле являются наилучшими.

Последовательные производные $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$, ... определяются из уравнения (7.1). Для удобства дальнейших выкладок введем операторы:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y},$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$D^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3f \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3f^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + f^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

где $f(x, y)$ – правая часть уравнения (7.1).

Заметим, что оператор D обладает следующими свойствами:

$$D(u + v) = Du + Dv,$$

$$D(uv) = \frac{\partial}{\partial x}(uv) + f \frac{\partial}{\partial y}(uv) = vDu + uDv,$$

$$D(Du) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + f \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + f \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) = D^2 u + \frac{\partial u}{\partial y} Df$$

и

$$\begin{aligned}
D(D^2u) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
&+ f \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \\
&= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3f \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3f^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + f^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \\
&+ 2f \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) = D^3u + 2Df \cdot D \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, из уравнения (7.1) последовательно находим:

$$y' = f,$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} = Df,$$

$$y''' = D(Df) = D^2f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df,$$

$$\begin{aligned}
y^{(4)} &= D \left(D^2f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df \right) = D(D^2f) + D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot Df + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot D(Df) = \\
&= D^3f + 2Df \cdot D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + Df \cdot D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(D^2f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df \right) = \\
&= D^3f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot D^2f + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \cdot Df + 3Df \cdot D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

Подставляя полученные соотношения для производных в равенство (7.6) (в формуле Тейлора ограничиваемся четырьмя слагаемыми), получаем

$$\begin{aligned}
\Delta y &= hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{6} \left(D^2f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df \right) + \\
&+ \frac{h^4}{24} \left(D^3f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot D^2f + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \cdot Df + 3Df \cdot D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right). \tag{7.7}
\end{aligned}$$

Далее, используя разложение Тейлора для функции двух переменных

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) + \dots,$$

с точностью до h^4 находим

$$k_1 = hf,$$

$$k_2 = hf \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{hf}{2} \right) =$$

$$= h \left(f + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) f + \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f + \frac{h^3}{48} \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f \right) =$$

$$= hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{8} D^2 f + \frac{h^4}{48} D^3 f,$$

$$k_3 = hf \left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{hf}{2} + \frac{h^2}{4} Df + \frac{h^3}{16} D^2 f \right) = hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{8} \left(D^2 f + 2 \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df \right) +$$

$$+ \frac{h^4}{48} \left(D^3 f + 3 \frac{\partial f}{\partial y} \cdot D^2 f + 6 Df \cdot D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right),$$

$$k_4 = hf \left(x + h, y + hf + \frac{h^2}{2} Df + \frac{h^3}{8} D^2 f + 2 \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df \right) = hf + h^2 Df + \frac{h^3}{2} \left(D^2 f + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df \right) +$$

$$+ \frac{h^4}{48} \left(8 D^3 f + 6 \frac{\partial f}{\partial y} \cdot D^2 f + 12 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \cdot Df + 24 Df \cdot D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right).$$

Подставив эти выражения в формулу (7.5), получаем

$$\Delta y = hf \cdot (\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \frac{h^2}{2} Df \cdot (\beta + \gamma + 2\delta) + \frac{h^3}{8} D^2 f \cdot (\beta + \gamma + 4\delta) +$$

$$+ \frac{h^3}{4} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df \cdot (\gamma + 2\delta) + \frac{h^4}{48} D^3 f \cdot (\beta + \gamma + 8\delta) + \frac{h^4}{16} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot D^2 f \cdot (\gamma + 2\delta) +$$

$$+ \frac{h^4}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \cdot Df \cdot \delta + \frac{h^4}{8} Df \cdot D \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (\gamma + 4\delta) + o(h^5).$$

Приравнявая явно выписанные коэффициенты этого разложения соответствующим коэффициентам в формуле (7.7), для определения

постоянных α, β, γ и δ получаем систему восьми уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1, & \beta + \gamma + 8\delta = 2, \\ \beta + \gamma + 2\delta = 1, & \gamma + 2\delta = \frac{2}{3}, \\ \beta + \gamma + 4\delta = \frac{4}{3}, & \delta = \frac{1}{6}, \\ \gamma + 2\delta = \frac{2}{3}, & \gamma + 4\delta = 1. \end{cases} \quad (7.8)$$

Система уравнений (7.8) имеет единственное решение:

$$\alpha = \frac{1}{6}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}, \quad \delta = \frac{1}{6}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу (6.5), получаем

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + o(h^5). \quad (7.9)$$

Таким образом, мы показали, что погрешность метода Рунге – Кутта [формула (7.3)] порядка h^5 .

Формула (7.9) имеет четвертый порядок точности. Получены также формулы типа Рунге – Кутта с иными порядками точности.

Вычисления по формулам (7.2), (7.3) удобно располагать по схеме, указанной в таблице 7.1:

Таблица 7.1

i	x	y	$k = hf(x, y)$	Δy
0	x_0	y_0	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
	$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
	—	—	—	Δy_0
1	x_1	y_1		

Порядок заполнения таблицы следующий:

- 1 Записываем в первой строке таблицы данные значения x_0, y_0 .
 - 2 Вычисляем $f(x_0, y_0)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $k_1^{(0)}$.
 - 3 Записываем во второй строке таблицы $x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$.
 - 4 Вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $k_2^{(0)}$.
 - 5 Записываем в третьей строке таблицы $x_0 + h, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$.
 - 6 Вычисляем $f\left(x_0 + h, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right)$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $k_3^{(0)}$.
 - 7 Записываем в четвертой строке таблицы $x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}$.
 - 8 Вычисляем $f(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)})$, умножаем на h и заносим в таблицу в качестве $k_4^{(0)}$.
 - 9 В столбец Δy записываем числа $k_1^{(0)}, 2k_2^{(0)}, 2k_3^{(0)}, k_4^{(0)}$.
 - 10 Суммируем числа, стоящие в столбце Δy , делим на 6 и заносим в таблицу в качестве Δy_0 .
 - 11 Вычисляем $y_1 = y_0 + \Delta y_0$.
- Затем все вычисления продолжаются в том же порядке, принимая за начальную точку (x_1, y_1) .

Пример 7.1. Методом Рунге – Кутты найти решение уравнения $y'(x) = 0,25y^2 + x^2$ на отрезке $[0, 0,5]$ с начальным условием $y(0) = -1$, приняв шаг $h = 0,1$.

Решение. Результаты вычислений приведены в таблице 7.2:

Таблица 7.2

i	x	y	$k = hf(x, y)$	Δy	Δy_i
0	0	-1	0,025	0,025	0,02472
	0,05	-0,9875	0,02463	0,04926	
	0,05	-0,98769	0,02464	0,04928	
	0,1	-0,97536	0,02478	0,02478	
1	0,1	-0,97528	0,02478	0,02478	0,0255
	0,15	-0,96289	0,02543	0,05086	
	0,15	-0,96257	0,02541	0,05083	
	0,2	-0,94987	0,02656	0,02656	
2	0,2	-0,94978	0,02655	0,02655	0,02824
	0,25	-0,993650	0,02818	0,05635	
	0,25	-0,93569	0,02814	0,05628	
	0,3	-0,92164	0,03024	0,03024	
3	0,3	-0,92154	0,03023	0,03023	0,03284
	0,35	-0,90642	0,03279	0,06556	
	0,35	-0,90514	0,03273	0,06546	
	0,4	-0,88881	0,03574	0,03575	
4	0,4	-0,8887	0,03575	0,03575	0,03925
	0,45	-0,87083	0,03921	0,07842	
	0,45	-0,8691	0,03913	0,07827	
	0,5	-0,84957	0,04307	0,04304	
5	0,5	-0,84945	—	—	—

Таблица решений заполняется следующим образом.

При $i = 0$:

1) записываем в первой строке $x_0 = 0, y_0 = -1$;

2) вычисляем $f(x_0, y_0) = 0,25$, тогда $k_1^{(0)} = 0,1 \cdot 0,25 = 0,025$;

3) записываем во второй строке $x_0 + \frac{h}{2} = 0,05, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2} = -0,9875$;

4) вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0,24630$, тогда $k_2^{(0)} = 0,02463$;

5) записываем в третьей строке $x_0 + \frac{h}{2} = 0,05, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2} = -0,98769$;

6) вычисляем $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0,25 \cdot (0,98769)^2 + (0,05)^2 = 0,24639$,

тогда $k_3^{(0)} = 0,02464$;

7) записываем в четвертой строке $x_0 + h = 0,1$, $y_0 + k_3^{(0)} = -0,97536$;

8) вычисляем $f(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}) = 0,25 \cdot (0,97536)^2 + (0,1)^2 = 0,24781$,

тогда $k_4^{(0)} = 0,02478$;

9) в столбце Δy записываем числа $k_1^{(0)}$, $2k_2^{(0)}$, $2k_3^{(0)}$, $k_4^{(0)}$;

10) вычисляем $\Delta y_0 = \frac{1}{6} \cdot 0,14832 = 0,02472$;

11) получаем $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = -0,97528$.

Значения $x_1 = 0,1$, $y_1 = -0,97528$ заносим в строку, помеченную индексом $i=1$, и снова проводим вычисления по формулам (7.2) и (7.3).

7.2 Численное решение систем дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутты

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), z(x)), & y(x_0) = y_0, \\ z'(x) = \varphi(x, y(x), z(x)), & z(x_0) = z_0. \end{cases} \quad (7.10)$$

Численное решение задачи Коши для системы уравнений (7.10) находим по схеме, аналогичной решению дифференциального уравнения.

Введем обозначения $y(x_i) = y_i$, $z(x_i) = z_i$, где $x_i = x_0 + ih$, или $x_{i+1} = x_i + h$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Если известны y_i и z_i , то $y_{i+1} = y(x_{i+1})$, $z_{i+1} = z(x_{i+1})$ вычисляются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i,$$

где $\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$, $\Delta z_i = \frac{1}{6}(e_1^{(i)} + 2e_2^{(i)} + 2e_3^{(i)} + e_4^{(i)})$,

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i, z_i), \quad k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{e_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)} = hf \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{e_2^{(i)}}{2} \right), \quad k_4^{(i)} = hf \left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + e_3^{(i)} \right),$$

$$e_1^{(i)} = h\varphi(x_i, y_i, z_i), \quad e_2^{(i)} = h\varphi \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{e_1^{(i)}}{2} \right),$$

$$e_3^{(i)} = h\varphi \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{e_2^{(i)}}{2} \right), \quad e_4^{(i)} = h\varphi \left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + e_3^{(i)} \right).$$

8 МЕТОД АДАМСА

8.1 Элементы теории интерполирования и приближения функций

При решении многих задач анализа и в прикладных расчетах возникает необходимость вместо функции действительной переменной $f(x)$, принадлежащей некоторому широкому классу функций A , рассматривать функцию $\varphi(x)$, принадлежащую более узкому классу функций B и в известном смысле представляющую функцию $f(x)$ на некотором промежутке. Например, классом A может быть множество непрерывных функций, класс B могут составлять алгебраические или тригонометрические многочлены, которые широко применяются в качестве приближающих функций.

Из общего курса анализа известны некоторые способы приближения функций. Так, всякая функция $f(x)$, непрерывная и имеющая непрерывные производные до порядка n включительно на некотором промежутке, может быть представлена с помощью формулы Тейлора

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

т.е. $f(x) \approx P_n(x)$, где a – некоторая фиксированная точка промежутка, $P_n(x)$ – многочлен Тейлора степени n , $R_n(x)$ – остаточный член.

Известно также, что функция $f(x)$, удовлетворяющая весьма общим условиям, может быть приближена с помощью тригонометрического многочлена – ряда Фурье.

Введем понятие разности k -го порядка для функции $f(x)$. Разности первых разностей называются разностями второго порядка функции $y = f(x)$. Вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0, \\ \Delta^2 y_1 &= \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1, \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta^2 y_{n-1} &= \Delta y_n - \Delta y_{n-1} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются разности третьего порядка, четвертого и т.д. Разность порядка k определяется формулой

$$\Delta^k y_{i-1} = \Delta^k y_i - \Delta^k y_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Удобно записывать разности в виде таблицы 8.1, в которой разности 1-го, 2-го и так далее порядков выражаются через значения функции.

Таблица 8.1

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
y_0	$y_1 - y_0$		
y_1	$y_2 - y_1$	$y_2 - 2y_1 + y_0$	$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$
y_2	$y_3 - y_2$	$y_3 - 2y_2 + y_1$	$y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$
y_3	$y_4 - y_3$	$y_4 - 2y_3 + y_2$	$y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2$
y_4	$y_5 - y_4$		
y_5			

Для системы равноотстоящих точек x_0, x_1, \dots, x_n введем шаг интерполирования $h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$. Будем строить многочлен n -й степени $P_n(x)$, такой, чтобы выполнялись равенства

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n, \quad (8.1)$$

т.е. значения многочлена $P_n(x)$ в точках интерполяции совпадают со значениями функции $f(x)$: $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$.

Искомый многочлен $P_n(x)$ запишем в виде суммы

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + A_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + A_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (8.2)$$

и определим его коэффициенты из условий (8.1). Подставив в многочлен (8.2) вместо x число x_0 и учитывая равенства (8.1), находим

$$P_n(x_0) = f(x_0) = y_0, \quad A_0 = y_0.$$

Подставив затем в многочлен (8.2) вместо x число x_1 , аналогично предыдущему получаем

$$P_n(x_1) = f(x_1) = y_1 = y_0 + A_1(x - x_0),$$

$$A_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}, \quad A_1 = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Далее, полагая в (8.2) $x = x_2$, $x = x_3$, ..., с учетом равенств (8.1) вычисляем A_2, A_3, \dots :

$$P_n(x_2) = f(x_2) = y_2 = A_0 + A_1(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

$$y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot 2h + A_2 \cdot 2h^2, \quad A_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}, \quad A_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2},$$

$$P_n(x_3) = f(x_3) = y_3 = A_0 + A_1(x_3 - x_0) + A_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + A_3(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$

$$y_3 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot 3h + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} \cdot 3h \cdot 2h + A_3 \cdot 3 \cdot 2h^3,$$

$$A_3 = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3!h^3} = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}, \quad A_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}.$$

Легко показать, что

$$A_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Подставляя вычисленные коэффициенты в равенство (8.2), находим

$$P_n(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{h^3} \frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{h^n} \frac{\Delta^n y_0}{n!}. \quad (8.3)$$

Многочлен (8.3) называется первым интерполяционным многочленом Ньютона. Им удобно пользоваться при интерполировании функции вблизи начальной точки x_0 .

Формуле (8.3) можно придать другой вид, более удобный при ее применении. Обозначим $\frac{x-x_0}{h} = u$. Тогда

$$\frac{x-x_0}{h} \frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right) = u(u-1),$$

$$\frac{x-x_0}{h} \frac{x-x_1}{h} \frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x-x_0}{h} - 2 \right) = u(u-1)(u-2),$$

$$\frac{x-x_0}{h} \frac{x-x_1}{h} \dots \frac{x-x_{n-1}}{h} = \frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right) \dots \left(\frac{x-x_0}{h} - n + 1 \right) = u(u-1) \times \times (u-2) \dots (u-n+1).$$

Теперь первый интерполяционный многочлен Ньютона принимает вид

$$P_n(x) = y_0 + u \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (8.4)$$

Частные случаи формулы Ньютона:

1) при $n = 1$ – формула линейной интерполяции

$$P_1(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta y_0 = y_0 + u \Delta y_0;$$

2) при $n = 2$ – формула квадратичной интерполяции

$$P_2(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 y_0}{2!} = y_0 + u \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 y_0.$$

Первая интерполяционная формула Ньютона (8.4) удобна для интерполирования функции в начальных точках x_0, x_1, x_2, \dots . Полученная ниже вторая интерполяционная формула Ньютона удобна для интерполирования в конечных точках x_n, x_{n-1}, \dots .

Выберем в качестве узлов точки $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$. Число $h = x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) назовем интервалом, или шагом интерполяции. Значения функции в узлах интерполяции известны:

$$y = f(x_i), \quad i = n, n-1, \dots, 1, 0.$$

Построим многочлен

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_n) + A_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + A_3(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) + \dots + A_n(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})\dots(x-x_1) \quad (8.5)$$

со свойством

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1, n).$$

Положив: 1) $x = x_n$ 2) $x = x_{n-1}$ 3) $x = x_{n-2} \dots$ и сделав вычисления, аналогичные предыдущим, найдем коэффициенты многочлена:

$$A_0 = y_n, \quad A_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}, \quad A_2 = \frac{\Delta y_{n-2}}{2!h^2}, \quad A_3 = \frac{\Delta y_{n-3}}{3!h^3}, \dots, \quad A_n = \frac{\Delta y_0}{n!h^n}.$$

Подставив вычисленные коэффициенты в равенство (8.5), получим второй интерполяционный многочлен Ньютона:

$$P_n(x) = y_n + \frac{x-x_n}{h} \Delta y_n + \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{2!h^2} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})}{3!h^3} \Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_2)(x-x_1)}{n!h^n} \Delta^n y_0. \quad (8.6)$$

Если положить $\frac{x-x_n}{h} = u, x = x_n + uh$, то формула (8.6) может быть записана в виде многочлена по степеням u :

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = P_n(x_n + uh) = & y_n + u\Delta y_{n-1} + \frac{u(u+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \\
 & + \dots + \frac{u(u+1)\dots(u+n-1)}{n!}\Delta^n y_0.
 \end{aligned}
 \tag{8.7}$$

8.2 Разностные методы решения задачи Коши

Основную идею разностных методов численного решения задачи Коши изложим применительно к уравнениям 1-го порядка. Пусть задано уравнение

$$y'(x) = f(x, y) \tag{8.8}$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Можно записать, что

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \Delta y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx. \tag{8.9}$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (8.9), вычисляют по следующей схеме. Подынтегральная функция заменяется интерполяционным многочленом, значение которого в некотором числе точек, предшествующих точке x_{k+1} , совпадает со значением функции $f(x, y)$ в этих точках. Затем интерполяционный многочлен интегрируют. Таким образом, для того чтобы вести вычисления, надо предварительно знать значения искомой функции в некотором, обычно небольшом, числе точек. Надо знать «начальный отрезок» таблицы функции $y = y(x)$, являющейся решением уравнения (8.8).

Задачу численного интегрирования рассматриваемого уравнения можно разбить на два этапа: а) вычисление нескольких первых значений искомой функции (вычисление «начального отрезка» таблицы); б) составление таблицы значений искомой функции для выбранных значений аргумента при большом числе точек.

Начнем рассмотрение разностных методов численного интегрирования уравнений с решения задачи, сформулированной в пункте б), а затем рассмотрим приемы, с помощью которых вычисляется «начальный отрезок» таблицы.

8.3 Экстраполяционный метод Адамса

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$y'(x) = f(x, y) \quad (8.10)$$

и начальное условие $y(x_0) = y_0$. Надо найти значения функции $y(x)$ для равноотстоящих значений аргумента x_k ($k=0, 1, 2, \dots$); $x_{k+1} - x_k = h$. Введем обозначения

$$y'_k = y'(x_k) = f(x_k, y_k) = f_k, \quad hy'_k = hf_k = F_k. \quad (8.11)$$

В формуле (8.10) подынтегральную функцию $y'(x) = f(x, y(x))$ заменим интерполяционным многочленом Ньютона [формула (8.7)]

$$y' = y'_k + u\Delta y'_{k-1} + \frac{u(u+1)}{2!}\Delta^2 y'_{k-2} + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\Delta^3 y'_{k-3},$$

где $u = \frac{x - x_k}{h}$, удерживая в нем члены с разностями до третьего порядка включительно.

Учитывая введенные обозначения (8.11) и интегрируя их, получаем основную формулу метода Адамса:

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} hy' \frac{1}{h} dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} F(x) \frac{1}{h} dx = \int_0^1 F(x_k + hu) \frac{hdu}{h} = \\ &= \int_0^1 \left(F_k + u\Delta F_{k-1} + \frac{u(u+1)}{2!}\Delta^2 F_{k-2} + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\Delta^3 F_{k-3} \right) du = \\ &= F_k + \frac{1}{2}\Delta F_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 F_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 F_{k-3}, \\ \Delta y_k &= F_k + \frac{1}{2}\Delta F_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 F_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 F_{k-3}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Если известны четыре значения функции $y(x)$: $y_{k-3}, y_{k-2}, y_{k-1}, y_k$, то можно вычислить разности, входящие в формулу (8.12), а

следовательно, и величину Δy_k . Зная Δy_k , вычисляем $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$, т.е. продвигаемся в составлении таблицы искомой функции на один шаг. Зная y_{k+1} , по уравнению $y'(x) = f(x, y)$ вычисляем $hy'_{k+1} = hf(x_{k+1}, y_{k+1}) = F_{k+1}$ и далее заполняем таблицу разностей.

После того как вычислены y_{k+1} , F_{k+1} и соответствующие разности, рекомендуется перевычислить Δy_k по более точной формуле:

$$\Delta \bar{y}_k = F_k + \frac{1}{2} \Delta F_k - \frac{1}{12} \Delta^2 F_{k-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 F_{k-2}. \quad (8.13)$$

Формула (8.13) называется основной формулой интерполяционного метода Адамса, она может быть получена аналогично формуле (8.12), если в качестве аппроксимирующего многочлена выбрать интерполяционный многочлен Ньютона (8.4).

Если $\Delta y_k = \Delta \bar{y}_k$ или они отличаются друг от друга на несколько единиц последнего знака, то вычисления считаются удовлетворительными и процесс заполнения табличных значений функции продолжается.

Вычисления начальных строк таблицы в методе Адамса могут быть выполнены различными способами. Рассмотрим два из них.

Применение ряда Тейлора. Пусть задано дифференциальное уравнение $y'(x) = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Вычислим несколько значений искомой функции $y = y(x)$ для значений аргумента $x_0 + kh$ ($k = \pm 1, 2, \dots$), где h — шаг интегрирования.

Предположим, что функция $y(x)$ разлагается в ряд Тейлора:

$$y(x_0 + kh) = y(x_0) + khy'(x_0) + \frac{(kh)^2}{2!} y''(x_0) + \frac{(kh)^3}{3!} y'''(x_0) + \frac{(kh)^4}{4!} y^{(4)}(x_0) + \dots \quad (8.14)$$

Если интервал интегрирования выбран достаточно малым, то, удерживая в ряде (8.14) несколько первых членов, можно с

достаточной точностью вычислить значения искомой функции для значений аргумента, близких к $x = x_0$.

Метод Крылова. Пусть, как прежде, задано дифференциальное уравнение $y'(x) = f(x, y)$ и требуется найти его решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Составим таблицу функции $y = y(x)$ с помощью формулы Адамса

$$\Delta y_k = F_k + \frac{1}{2} \Delta F_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 F_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 F_{k-3}, \quad (8.15)$$

где $F_k = hf(x_k, y_k)$, h – шаг интегрирования.

Для того чтобы начать вычисления по формуле (8.15), необходимо знать несколько первых значений искомой функции $(y_0, y_1, y_2, y_3, \dots)$, известно же только одно значение $y_0 = y(x_0)$.

А. Н. Крылов предложил прием, с помощью которого могут быть вычислены начальные значения функции $y = y(x)$ в процессе численного интегрирования дифференциального уравнения 1-го порядка. При дальнейших вычислениях будем пользоваться разностями:

F_{-3}			
	ΔF_{-3}		
F_{-2}		$\Delta^2 F_{-3}$	
	ΔF_{-2}		$\Delta^3 F_{-3}$
F_{-1}		$\Delta^2 F_{-2}$	
	ΔF_{-1}		$\Delta^3 F_{-2}$
F_0		$\Delta^2 F_{-1}$	
	ΔF_0		$\Delta^3 F_{-1}$
F_1		$\Delta^2 F_0$	
	ΔF_1		$\Delta^3 F_0$
F_2		$\Delta^2 F_1$	
	ΔF_2		
F_3			

Правила составления разностей дают возможность написать равенства:

$$\Delta^2 F_{k-2} = \Delta^2 F_{k-1} - \Delta^3 F_{k-3}, \quad (8.16)$$

$$\Delta^2 F_{k-2} = \Delta^2 F_k - 2\Delta^3 F_k, \quad (8.17)$$

$$\Delta^2 F_{k-2} = \Delta F_k - \Delta^2 F_{k-1} = \Delta F_k - \Delta^2 F_k + \Delta^3 F_k. \quad (8.18)$$

Разности третьего порядка будем считать постоянными:

$$\Delta^3 F_k = \Delta^3 F_{k-1} = \Delta^3 F_{k-2} = \Delta^3 F_{k-3}. \quad (8.19)$$

Заменив в формуле (8.15) разности первого и второго порядков правыми частями равенств (8.17), (8.18) и учитывая равенства (8.19), найдем

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= F_k + \frac{1}{2}(\Delta F_k - \Delta^2 F_k + \Delta^3 F_k) + \frac{5}{12}(\Delta^2 F_k - 2\Delta^3 F_k) + \frac{3}{8}\Delta^3 F_{k-3}, \\ \Delta y_k &= F_k + \frac{1}{2}\Delta F_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 F_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 F_{k-1}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Далее в формуле (8.15) заменим разности второго и третьего порядка, пользуясь соотношениями (8.16), (8.18):

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= F_k + \frac{1}{2}\Delta F_{k-1} + \frac{5}{12}(\Delta^2 F_{k-1} - \Delta^2 F_{k-3}) + \frac{3}{8}\Delta^3 F_{k-3}, \\ \Delta y_k &= F_k + \frac{1}{2}\Delta F_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 F_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 F_{k-1}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Наконец, считая третьи разности постоянными, можно написать формулу

$$\Delta y_k = F_k + \frac{1}{2}\Delta F_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 F_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 F_{k-2}. \quad (8.22)$$

Полагая в формуле (8.20) $k=0$, в формуле (8.21) $k=1$, в формуле (8.22) $k=2$, получаем формулы Крылова

$$\Delta y_0 = F_0 + \frac{1}{2}\Delta F_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 F_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 F_0, \quad (8.23)$$

$$\Delta y_1 = F_1 + \frac{1}{2}\Delta F_0 + \frac{5}{12}\Delta^2 F_0 - \frac{1}{24}\Delta^3 F_0, \quad (8.24)$$

$$\Delta y_2 = F_2 + \frac{1}{2}\Delta F_1 + \frac{5}{12}\Delta^2 F_0 + \frac{3}{8}\Delta^3 F_0. \quad (8.25)$$

Необходимые значения y_1, y_2, y_3 вычисляем последовательными приближениями.

Первое приближение. По заданным x_0 и y_0 вычисляем $F_0 = hf(x_0, y_0)$ и, удерживая в формуле (8.23) один первый член, находим

$$\Delta y_0^{(1)} = F_0 \text{ и } \Delta y_1^{(1)} = y_0 + \Delta y_0^{(1)},$$

после чего определяем

$$F_1^{(1)} = hf(x_1, y_1^{(1)}) \text{ и } \Delta F_0^{(1)} = F_1^{(1)} - F_0.$$

Второе приближение. Удерживая в формулах (8.23) и (8.24) по два первых члена, получаем

$$\Delta y_0^{(2)} = F_0 + \frac{1}{2} \Delta F_0^{(1)},$$

$$\Delta y_1^{(2)} = F_1^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta F_0^{(1)}, \quad y_1^{(2)} = y_0 + \Delta y_0^{(2)},$$

$$\Delta y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + \Delta y_1^{(2)}, \quad F_1^{(2)} = hf(x_1, y_1^{(2)}), \quad F_2^{(2)} = hf(x_2, y_2^{(2)}),$$

$$\Delta F_0^{(2)} = F_1^{(2)} - F_0, \quad \Delta F_1^{(2)} = F_2^{(2)} - F_1^{(2)},$$

$$\Delta^2 F_0^{(2)} = \Delta F_1^{(2)} - \Delta F_0^{(2)}.$$

Третье приближение. В формулах (8.23)–(8.25) удерживаем по три члена и находим величины $F_3, \Delta F_2, \Delta^2 F_1$ и $\Delta^3 F_0$, необходимые для вычисления Δy_3 по формуле (8.15):

$$\Delta y_0^{(3)} = F_0 + \frac{1}{2} \Delta F_0^{(2)} - \frac{1}{12} \Delta^2 F_0^{(2)},$$

$$\Delta y_1^{(3)} = F_1^{(2)} + \frac{1}{2} \Delta F_0^{(2)} + \frac{5}{12} \Delta^2 F_0^{(2)},$$

$$\Delta y_2^{(3)} = F_2^{(2)} + \frac{1}{2} \Delta F_1^{(2)} + \frac{5}{12} \Delta^2 F_0^{(2)},$$

$$y_1^{(3)} = y_0 + \Delta y_0^{(3)}, \quad y_2^{(3)} = y_1^{(3)} + \Delta y_1^{(3)}, \quad y_3^{(3)} = y_2^{(3)} + \Delta y_2^{(3)},$$

$$F_1^{(3)} = hf(x_1, y_1^{(3)}), \quad F_2^{(3)} = hf(x_2, y_2^{(3)}), \quad F_3^{(3)} = hf(x_3, y_3^{(3)}),$$

$$\Delta F_0^{(3)} = F_1^{(3)} - F_0, \quad \Delta F_1^{(3)} = F_2^{(3)} - F_1^{(3)}, \quad \Delta F_2^{(3)} = F_3^{(3)} - F_2^{(3)},$$

$$\Delta^2 F_0^{(3)} = \Delta F_1^{(3)} - \Delta F_0^{(3)}, \quad \Delta^2 F_1^{(3)} = \Delta F_2^{(3)} - \Delta F_1^{(3)},$$

$$\Delta^3 F_0^{(3)} = \Delta^2 F_1^{(3)} - \Delta^2 F_0^{(3)}.$$

В ходе расчетов непосредственно видно, насколько третьи разности влияют на результат вычислений. Если их влияние существенно, то следует уменьшить шаг интегрирования.

9 РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

9.1 Общая постановка краевой задачи

Рассмотрим без потери общности дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)). \quad (9.1)$$

Простейшая двухточечная краевая задача формулируется следующим образом. Необходимо найти функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую уравнению (9.1) и принимающую при $x = a$ и $x = b$ ($a < b$) заданные значения

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

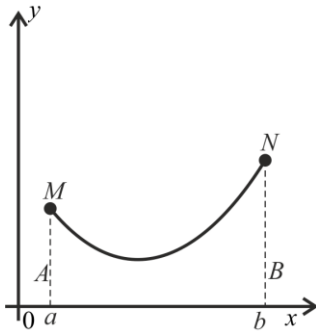


Рисунок 9.1

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую дифференциального уравнения (9.1), проходящую через данные точки $M(a, A)$ и $N(b, B)$ (рисунок 9.1).

Можно рассмотреть также смешанную краевую задачу: найти решение $y = y(x)$ уравнения (9.1), удовлетворяющее условиям

$$y(a) = A, \quad y'(b) = B_1.$$

Заметим, что краевая задача для уравнения (9.1) может:

- а) не иметь решений;
- б) иметь единственное решение;
- в) иметь несколько и даже бесконечно много решений.

В дальнейшем, как правило, будем предполагать, что решение краевой задачи существует и единственно.

Рассмотрим важный частный случай, когда дифференциальное уравнение и краевые условия линейны. Такая краевая задача

называется линейной краевой задачей. Эта задача формулируется следующим образом. Дано дифференциальное уравнение (вновь ограничимся рассмотрением уравнений 2-го порядка)

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad (9.2)$$

где функции $p(x), q(x), f(x)$ – непрерывны и требуется найти решение уравнения (9.2), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B. \end{cases} \quad (9.3)$$

Здесь $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ – заданные постоянные, причем $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

9.1 Редукция двухточечной краевой задачи для линейных уравнений 2-го порядка к задаче Коши

Решение краевой задачи (9.2), (9.3) будем искать в виде линейной комбинации

$$y(x) = Cu(x) + v(x), \quad (9.4)$$

где $u = u(x)$ – ненулевое решение соответствующего однородного уравнения

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0, \quad (9.5)$$

а $v = v(x)$ – некоторое решение данного неоднородного дифференциального уравнения (9.2)

$$v'' + p(x)v' + q(x)v = f(x). \quad (9.6)$$

Очевидно, функция $y(x)$, определяемая формулой (9.4), где C – произвольная постоянная, является решением уравнения (9.2).

Потребуем, чтобы первое краевое условие в системе равенств (9.3) выполнялось для функции $y(x)$ при любом C . Используя это краевое условие, будем иметь

$$C\alpha_0 u(a) + \alpha_0 v(a) + C\alpha_1 u'(a) + \alpha_1 v'(a) = A,$$

Или

$$C(\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a)) + \alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = A. \quad (9.7)$$

Для того чтобы равенство (9.7) было справедливо при любом C , необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при C обращался в нуль, т.е. должны быть выполнены равенства

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0, \quad (9.8)$$

$$\alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = A. \quad (9.9)$$

Для обеспечения равенств (9.8), (9.9) достаточно положить

$$u(a) = \alpha_1 k, \quad u'(a) = -\alpha_0 k, \quad (9.10)$$

где постоянная k отлична от нуля, а также

$$v(a) = \frac{A}{\alpha_0}, \quad v'(a) = 0, \quad (9.11)$$

если $\alpha_0 \neq 0$, и

$$v(a) = 0, \quad v'(a) = \frac{A}{\alpha_1}, \quad (9.12)$$

если $\alpha_1 \neq 0$.

Отсюда видно, что функция $u(x)$ есть решение задачи Коши для однородного уравнения (9.5), удовлетворяющее начальным условиям (9.10), а $v(x)$ есть решение задачи Коши для неоднородного уравнения (9.6), удовлетворяющего начальным условиям (9.11) или (9.12). При этом для любого C функция $y = Cu + v$ удовлетворяет краевому условию на конце $x = a$.

Подберем теперь постоянную C так, чтобы функция $y(x)$ удовлетворяла второму краевому условию в системе равенств (9.3). Это дает

$$C(\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)) + \beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b) = B,$$

откуда получаем

$$C = \frac{B - (\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b))}{\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)}.$$

При этом предполагается, что знаменатель

$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) \neq 0. \quad (9.13)$$

Таким образом, краевая задача (9.2), (9.3) сведена к задаче Коши для функций $u(x)$ и $v(x)$. Заметим, что если обеспечено условие (9.13), то краевая задача (9.2), (9.3) имеет единственное решение. В противном случае она или совсем не имеет решений, или их бесчисленное множество.

9.3 Метод конечных разностей

Одним из наиболее простых методов решения краевой задачи (9.2), (9.3) является сведение ее к системе конечно-разностных уравнений. Для этого разобьем основной отрезок $[a, b]$ на n равных частей, взяв шаг h по отрезку, где $h = \frac{b-a}{n}$. Точки разбиения имеют абсциссы

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

Значения в точках деления x_i искомой функции $y = y(x)$ и ее производных $y'_x = y'(x)$, $y''_{xx} = y''(x)$ обозначим соответственно через $y_i = y(x_i)$, $y'_i = y'(x_i)$, $y''_i = y''(x_i)$. Введем также обозначения $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

Заменяя производные симметричными конечно-разностными отношениями для внутренних точек x_i отрезка $[a, b]$, будем иметь

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_i'' = \frac{y_{i+2} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (9.14)$$

Для конечных точек $x_0 = a$ и $x_n = b$, чтобы не выходить за пределы отрезка $[a, b]$, можно положить

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y_n' = \frac{y_{n-1} - y_n}{-h}. \quad (9.15)$$

Однако если функция $y = y(x)$ достаточно гладкая, то более точные значения дают формулы

$$y_0' = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \quad (9.16)$$

и

$$y_n' = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}, \quad n \geq 2. \quad (9.17)$$

Используя формулы (9.14), дифференциальное уравнение (9.2) во внутренних точках $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) приближенно можно заменить системой линейных уравнений

$$\frac{y_{i+2} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad (9.18)$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Кроме того, в силу формул (9.16), (9.17) краевые условия (9.3) дополнительно дают еще два уравнения:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = A, \\ \beta_0 y_0 + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases} \quad (9.19)$$

Таким образом, получена линейная система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$, представляющими собой значение искомой функции $y = y(x)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Решив эту систему, получим таблицу значений искомой функции $y = y(x)$.

10 МЕТОД ПРОГОНКИ

При применении метода конечных разностей к краевым задачам для дифференциальных уравнений 2-го порядка получается «трехчленная система» линейных алгебраических уравнений вида (9.18), каждое из которых содержит три соседних неизвестных. Для решения такой системы разработан специальный метод, получивший название *метода прогонки*.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (10.1)$$

с двухточечными линейными краевыми условиями

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \quad (10.2)$$

$$(|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0).$$

Предположим также, что функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ непрерывны на $[a, b]$.

От дифференциального уравнения (10.1) обычным приемом перейдем к конечно-разностному уравнению. Разбиваем отрезок $[a, b]$ на n частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$. Полагая $x_i = x_0 + ih$, $x_0 = a$, $x_n = b$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) и вводя обозначения $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $y_i = y(x_i)$, для внутренних точек $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) отрезка $[a, b]$ вместо дифференциального уравнения (9.1) получаем систему разностных уравнений

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Отсюда после соответствующих преобразований будем иметь

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = h^2 \bar{f}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (10.3)$$

где мы ввели решетчатые функции

$$m_i = -\frac{2 - h^2 q_i}{1 + \frac{1}{2} h p_i}, \quad n_i = \frac{1 - \frac{1}{2} h p_i}{1 + \frac{1}{2} h p_i}, \quad \bar{f}_i = \frac{f_i}{1 + \frac{1}{2} h p_i}. \quad (10.4)$$

Для производных на концах $x_0 = a$ и $x_n = b$ берем односторонние производные [уравнение (9.15)]. Тогда, согласно краевым условиям (10.2), получаем

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = B. \quad (10.5)$$

Линейную систему уравнений (10.3), (10.5) будем решать методом прогонки. Разрешая уравнение (10.3) относительно y_i , будем иметь

$$y_i = \frac{\bar{f}_i}{m_i} h^2 - \frac{1}{m_i} y_{i+1} - \frac{n_i}{m_i} y_{i-1}. \quad (10.6)$$

Предположим, что с помощью полной системы уравнений (10.3), (10.5) из уравнения (10.6) исключена неизвестная y_{i-1} . Тогда уравнение (10.6) примет вид

$$y_i = c_i (d_i - y_{i+1}), \quad (10.7)$$

где c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) – некоторые коэффициенты. Из уравнения (10.7) получаем

$$y_{i-1} = c_{i-1} (d_{i-1} - y_i).$$

Подставив это выражение в уравнение (10.3), находим

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i c_{i-1} (d_{i-1} - y_i) = h^2 \bar{f}_i,$$

и, следовательно,

$$y_i = \frac{h^2 \bar{f}_i - n_i c_{i-1} d_{i-1} - y_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}}. \quad (10.8)$$

Сравнивая формулы (10.7) и (10.8), получаем для определения коэффициентов c_i и d_i рекуррентные формулы

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, \quad d_i = h^2 \bar{f}_i - n_i c_{i-1} d_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (10.9)$$

Определим теперь коэффициенты c_0 и d_0 . Из первого краевого условия (10.5) получаем

$$y_0 = \frac{Ah - \alpha_1 y_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}.$$

С другой стороны, из формулы (10.7) при $i = 0$ имеем

$$y_0 = c_0 (d_0 - y_1).$$

Сравнивая последние два равенства, находим

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}. \quad (10.10)$$

На основании формул (10.9), (10.10) последовательно определяем коэффициенты c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) до c_{n-1} и d_{n-1} включительно (прямой ход метода прогонки).

Обратный ход метода прогонки начинается с определения y_n . Используя второе краевое условие (10.5) и формулу (10.7) при $i = n-1$, получаем систему двух уравнений

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = B, \quad y_{n-1} = c_{n-1} (d_{n-1} - y_n). \quad (10.11)$$

Решая систему уравнений (10.11) относительно y_n , будем иметь

$$y_n = \frac{hB + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{h\beta_0 + \beta_1 (c_{n-1} + 1)}. \quad (10.12)$$

Далее по формуле (10.7) последовательно находим $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0$.

Для простейших краевых условий $y(a) = A, y(b) = B$ формулы для c_0, d_0, y_0 и y_n упрощаются. Полагая $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$ и

$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0$, из формул (10.10) будем иметь: $c_0 = 0, d_0 = \infty, c_0 d_0 = A$. Отсюда получаем

$$c_1 = \frac{1}{m_1}, d_1 = h^2 \bar{f}_1 - n_1 A,$$

а также

$$y_n = B, y_0 = A.$$

Метод прогонки дает более точные результаты, если при переходе от краевых условий (10.2) к конечно-разностным соотношениям воспользуемся трехчленными формулами (9.16), (9.17) для производных в точках $x = a$ и $x = b$. Используя эти формулы, из краевых условий (10.2) получаем

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = A, \beta_0 y_n + \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \quad (10.13)$$

Для вычисления коэффициентов c_0 и d_0 берем первое краевое условие (10.13) и уравнение

$$y_2 + m_1 y_1 + n_1 y_0 = h^2 \bar{f}_1,$$

взятое из системы (10.3) при $i = 1$.

Исключая y_2 из этих двух уравнений, находим

$$y_0 = \frac{h(2A + \alpha_1 h \bar{f}_1) - \alpha_1 y_1 (m_1 + 4)}{\alpha_1 (n_1 - 3) + 2h \alpha_0}. \quad (10.14)$$

С другой стороны, из формулы (10.7) при $i = 0$ имеем

$$y_0 = c_0 (d_0 - y_1).$$

Сравнивая последнее равенство с формулой (10.14), получаем

$$c_0 = \frac{\alpha_1 (m_1 + 4)}{\alpha_1 (n_1 - 3) + 2\alpha_0 h}, d_0 = \frac{h(2A + \alpha_1 \bar{f}_1 h)}{\alpha_1 (m_1 + 4)}. \quad (10.15)$$

Вычислив по формулам (10.15) коэффициенты c_0 и d_0 , далее последовательно определяем коэффициенты c_i, d_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) до c_{n-1} и d_{n-1} включительно [формулы (10.9)].

Обратный ход метода начинается с определения y_n . Используя второе краевое условие (10.13) и формулы (10.7), взятые при $i = n - 2$ и $i = n - 1$, получаем систему трех уравнений

$$\begin{cases} \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B, \\ y_{n-2} = c_{n-2}(d_{n-2} - y_{n-1}), \\ y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n). \end{cases} \quad (10.16)$$

Решая систему уравнений (10.16) относительно y_n , будем иметь

$$y_n = \frac{2Bh + \beta_1 [c_{n-1}d_{n-1}(4 + c_{n-2}) - c_{n-2}d_{n-2}]}{\beta_1(3 + 4c_{n-1} + c_{n-2}c_{n-1}) + 2\beta_0 h}. \quad (10.17)$$

Далее по формулам (10.7) последовательно находим $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0$.

Пример 10.1. Методом прогонки найти приближенное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad (10.18)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 3,718. \quad (10.19)$$

Решение. Примем шаг $h = 0,1$ и от уравнений (10.18), (10.19) перейдем к конечно-разностным соотношениям

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = h^2 \bar{f}_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

$$y_0 - \frac{y_1 - y_0}{h} = 0, \quad y_n = 3,718,$$

где

$$m_i = -\frac{2 + 2h^2}{1 - ih^2}, \quad n_i = -\frac{1 + ih^2}{1 - ih^2}, \quad \bar{f}_i = -\frac{4ih}{1 - ih^2}.$$

Значения m_i, n_i и $h^2 \bar{f}_i$ для $i = 1, 2, \dots, 9$ записываем в таблице 10.1.

Таблица 10.1

i	m_i	n_i	$h^2 \bar{f}_i$	i	m_i	n_i	$h^2 \bar{f}_i$
0	-2,020	1	0	5	-2,127	1,106	-0,021
1	-2,040	1,020	-0,004	6	-2,149	1,128	-0,025
2	-2,060	1,040	-0,008	7	-2,172	1,150	-0,030
3	-2,083	1,062	-0,012	8	-2,196	1,174	-0,035
4	-2,105	1,084	-0,017	9	-2,20	1,198	-0,040

Пользуясь этой таблицей, по формулам (10.10) находим значения c_0 и d_0 , а затем по формулам (10.9) находим значения c_i и d_i ($i=1, 2, \dots, 9$). Эти значения записываем в таблицу 10.2.

Используя значение $y_{10} = 3,718$, начинаем обратный ход и по формуле (10.8) последовательно вычисляем y_9, y_8, \dots, y_0 . Полученные результаты записываем в таблице 10.2, что и дает численное решение поставленной краевой задачи (10.18), (10.19).

Таблица 10.2

i	c_i	d_i	y_i	i	c_i	d_i	y_i
0	-0,909	0	1,050	6	-0,845	-0,081	2,054
1	-0,899	-0,004	1,154	7	-0,833	-0,109	2,350
2	-0,889	-0,012	1,280	8	-0,822	-0,142	2,712
3	-0,878	-0,023	1,428	9	-2,20	-0,180	3,157
4	-0,868	-0,039	1,603	10	—	—	3,718
5	-0,856	-0,058	1,808				

11 МЕТОД ГАЛЕРКИНА И МЕТОД МОМЕНТОВ

11.1 Метод Галеркина

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (11.1)$$

при наличии линейных краевых условий

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \quad (11.2)$$

$$(|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0).$$

Выберем конечную систему базисных функций $\{\varphi_k(x)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) таким образом, чтобы функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяла краевым условиям

$$\alpha_0 \varphi_0(a) + \alpha_1 \varphi_0'(a) = A, \quad \beta_0 \varphi_0(b) + \beta_1 \varphi_0'(b) = B,$$

а функции $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяли бы однородным краевым условиям

$$\alpha_0 \varphi_k(a) + \alpha_1 \varphi_k'(a) = 0, \quad \beta_0 \varphi_k(b) + \beta_1 \varphi_k'(b) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Решение краевой задачи (11.1), (11.2) будем искать в следующем виде:

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x). \quad (11.3)$$

При нашем подборе базисных функций $\varphi_k(x)$ функция $y_n(x)$, определяемая формулой (11.3), очевидно, удовлетворяет краевым условиям (11.2) при любом выборе коэффициентов a_k . Выражение (11.3) подставим в дифференциальное уравнение (11.1), что дает невязку

$$R(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = y_n''(x) + p(x)y_n'(x) + q(x)y_n(x) - f(x) = \\ = \varphi_0''(x) + p(x)\varphi_0'(x) + q(x)\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k (\varphi_k''(x) + p(x)\varphi_k'(x) + q(x)\varphi_k(x)) - f(x).$$

Для точного решения $y(x)$ нашей задачи функция $R \equiv 0$. Поэтому для приближенного решения, близкого к точному, необходимо подобрать коэффициенты a_k так, чтобы функция R была в каком-то смысле мала.

Согласно методу Галеркина требуем, чтобы невязка R была ортогональна к базисным функциям $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), что при достаточно большом числе базисных функций обеспечивает малость функции невязки в среднем.

Таким образом, для определения коэффициентов a_k приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \int_a^b \varphi_1(x) R(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0, \\ \int_a^b \varphi_2(x) R(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0, \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \int_a^b \varphi_n(x) R(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0, \end{cases}$$

или

$$\int_a^b \varphi_i(x) R(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.4)$$

С учетом явного вида функции невязки $R(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ для i -го уравнения из системы (11.4) получаем

$$\sum_{k=1}^n a_k \int_a^b \varphi_i(x) (\varphi_k''(x) + p(x)\varphi_k'(x) + q(x)\varphi_k(x)) dx = \\ = \int_a^b \varphi_i(x) (f(x) - \varphi_0''(x) - p(x)\varphi_0'(x) - q(x)\varphi_0(x)) dx.$$

Вводим коэффициенты

$$c_{ik} = \int_a^b \varphi_i(x) (\varphi_k''(x) + p(x)\varphi_k'(x) + q(x)\varphi_k(x)) dx, \quad (11.5)$$

$$d_i = \int_a^b \varphi_i(x) (f(x) - \varphi_0''(x) - p(x)\varphi_0'(x) - q(x)\varphi_0(x)) dx$$

и приводим систему уравнений (11.4) к виду

$$\sum_{k=1}^n c_{ik} a_k = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.6)$$

Решая систему алгебраических уравнений (11.6), находим коэффициенты a_k , а далее, по формуле (11.3), получаем решение поставленной краевой задачи.

Пример 11.1. Методом Галеркина найти приближенное решение краевой задачи

$$y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y'(0) = -2, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

Решение. Подберем систему базисных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$, используя при этом комбинации функций $1, x, x^2, \dots$. Функция $\varphi_0(x)$ должна удовлетворять условиям $\varphi_0'(0) = -2, \varphi_0(1) + \varphi_0'(1) = 0$. Для подбора $\varphi_0(x)$ воспользуемся комбинацией функций 1 и x , то есть будем искать $\varphi_0(x)$ в виде $\varphi_0(x) = b + cx$. Так как $\varphi_0'(x) = c$, то $c = -2, b = 4, \varphi_0(x) = 4 - 2x$.

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ должны удовлетворять условиям $\varphi_k'(0) = 0, \varphi_k(1) + \varphi_k'(1) = 0$. Первое условие будет выполняться для функций $\varphi_k(x) = b_k + x^{k+1}$. Значения коэффициентов b_k найдем из второго условия при $x = 1$. Имеем

$$\varphi_k(x) + \varphi_k'(x) = b_k + x^{k+1} + (k+1)x^k,$$

тогда

$$\varphi_k(1) + \varphi_k'(1) = b_k + 1 + k + 1 = 0.$$

Следовательно, коэффициенты $b_k = -(k + 2)$. Ограничившись $k = 1, 2$, получаем систему трех базисных функций

$$\varphi_0(x) = 4 - 2x, \quad \varphi_1(x) = x^2 - 3, \quad \varphi_2(x) = x^3 - 4.$$

По формулам (11.5) вычисляем значения коэффициентов c_{ik} и d_i ($k, i = 1, 2$). Получаем:

$$c_{11} = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^2 - 3) dx = -22,933,$$

$$c_{12} = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^3 - 4) dx = -32,333,$$

$$c_{21} = \int_0^1 (4x^3 + 6x + 8)(x^2 - 3) dx = -31,167,$$

$$c_{22} = \int_0^1 (4x^3 + 6x + 8)(x^3 - 4) dx = -44,229,$$

$$d_1 = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^2 - 3) dx = -22,933,$$

$$d_2 = \int_0^1 (2x^2 + 8)(x^3 - 4) dx = -32,333.$$

Как следствие, система уравнений (11.6) для данной краевой задачи принимает вид

$$\begin{cases} 22,933a_1 + 32,333a_2 = 22,933, \\ 31,167a_1 + 44,229a_2 = 32,333. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим $a_1 = 1,03$, $a_2 = 0,042$.

Таким образом, решение поставленной краевой задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned} y(x) &\approx \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) = 4 - 2x + 1,03(x^2 - 3) + 0,042(x^3 - 4) = \\ &= 0,742 - 2x + 1,03x^2 + 0,042x^3. \end{aligned}$$

11.2 Метод моментов

Метод моментов является обобщением метода Галеркина. При использовании метода моментов для решения краевой задачи (11.1), (11.2) выбираются две системы функций. Система базисных функций $\{\varphi_k(x)\} (k=0, 1, \dots, n)$ выбирается аналогично системе функций в методе Галеркина, т.е. функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяет краевому условию

$$\alpha_0\varphi_0(a) + \alpha_1\varphi_0'(a) = A, \quad \beta_0\varphi_0(b) + \beta_1\varphi_0'(b) = B,$$

а функции $\varphi_k(x) (k=1, 2, \dots, n)$ – однородным краевым условиям

$$\alpha_0\varphi_k(a) + \alpha_1\varphi_k'(a) = 0, \quad \beta_0\varphi_k(b) + \beta_1\varphi_k'(b) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Систему базисных функций $\{\psi_k(x)\} (k=1, 2, \dots, n)$ выбираем из условия ортогональности функций $\psi_k(x)$ функции невязки

$$R(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = y_n''(x) + p(x)y_n'(x) + q(x)y_n(x) - f(x),$$

где функция $y_n(x)$ дается равенством (11.3).

Таким образом, коэффициенты a_k находим, решая систему уравнений

$$\int_a^b \psi_i(x) R(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

или

$$\sum_{k=1}^n c_{ik} a_k = d_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \tag{11.7}$$

где коэффициенты системы

$$c_{ik} = \int_a^b \psi_i(x) (\varphi_k''(x) + p(x)\varphi_k'(x) + q(x)\varphi_k(x)) dx,$$

$$d_i = \int_a^b \psi_i(x) (f(x) - \varphi_0''(x) - p(x)\varphi_0'(x) - q(x)\varphi_0(x)) dx.$$

Вычислив из системы уравнений (11.7) коэффициенты a_k , по формуле (11.3) находим решение краевой задачи (11.1), (11.2).

12 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

12.1 Формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона

Вычисление определенного интеграла от непрерывной функции с помощью формулы Ньютона – Лейбница сводится к нахождению первообразной, которая всегда существует, но не всегда является элементарной функцией. В многочисленных приложениях интегральная функция задается таблично и формула Ньютона – Лейбница непосредственно неприменима.

Возникает задача о численном вычислении определенного интеграла, решаемая с помощью формул, носящих название квадратурных.

Получим простейшие формулы численного интегрирования.

Вычисляем приближенное численное значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Отрезок интегрирования $[a, b]$ разобьем на n равных частей точками деления $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, называемых узлами квадратурной формулы. Пусть в узлах известны значения $y = f(x)$:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \dots, y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n). \quad \text{Величина}$$

$h = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$ называется интервалом интерполирования, или шагом. На частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}] (k = 0, 1, \dots, n-1)$ подынтегральную функцию заменяем первым интерполяционным многочленом Ньютона

$$P(x) = y_k + u\Delta y_k + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_k + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_k + \dots + \frac{u(u-1)\dots(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_k,$$

$\left(u = \frac{x - x_k}{h}\right)$, который на рассматриваемом отрезке приближенно представляет функцию $f(x)$.

Ниже приведен порядок вычислений определенного интеграла с помощью формул прямоугольников, трапеций и Симпсона.

1 Удержим в интерполяционном многочлене только один первый член. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} y_k dx = \sum_{k=0}^{n-1} h \int_0^1 y_k du = \sum_{k=0}^{n-1} h y_k = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1}).$$

Итак, получена квадратурная формула

$$\int_a^b f(x) dx = h(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})). \quad (12.1)$$

Формула (12.1) называется *формулой прямоугольников*.

2 Удержим в интерполяционном многочлене два первых члена. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} P(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} h \int_0^1 (y_k + u \Delta y_k) du = \sum_{k=0}^{n-1} h \left(y_k + \frac{1}{2} \Delta y_k \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} h \left(y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{2} \right) = h \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} = \frac{1}{2} h (y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} h (f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n)). \quad (12.2)$$

Формула (12.2) называется *формулой трапеций*.

3 Отрезок интегрирования $[a, b]$ разобьем на четное число $2n$ равных частей, при этом шаг интегрирования $h = \frac{b-a}{2n}$. На отрезке $[x_k, x_{k+2}]$ длиной $2h$ подынтегральную функцию заменим интерполяционным многочленом второй степени, т.е. удержим в многочлене три первых члена:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0,2,\dots}^{2n-2} P(x) dx = h \sum_{k=0,2,\dots}^{2n-2} \left(y_k + u \Delta y_k + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 y_k \right) du = \\
&= h \sum_{k=0,2,\dots}^{2n-2} \int_0^2 \left(y_k + u(y_{k+1} - y_k) + \frac{u(u-1)}{2!} (y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k) \right) du = \\
&= \frac{h}{3} \sum_{k=0,2,\dots}^{2n-2} (y_k + 4y_{k+1} + y_{k+2}) = \\
&= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем формулу следующего вида:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{3} h (f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + \\
&\quad + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})) + f(x_{2n})). \quad (12.3)
\end{aligned}$$

Формула (12.3) называется *формулой Симпсона*.

Формулы (12.1)–(12.3) имеют простой геометрический смысл. В формуле прямоугольников подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ заменяется отрезком прямой $y = y_k$, параллельной оси абсцисс, а в формуле трапеций – отрезком прямой $y = y_k + u \Delta y_k$, и вычисляется соответственно площадь прямоугольника и прямолинейной трапеции, которые затем суммируются. В формуле Симпсона функция $f(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+2}]$ длиной $2h$ заменяется квадратным трехчленом – параболой $y = y_k + u \Delta y_k + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 y_k$ и вычисляется площадь криволинейной параболической трапеции, затем площади суммируются.

12.2 Точность квадратурных формул

Приведенные выше квадратурные формулы – формулы приближенные. Они получены в предположении, что

подынтегральная функция на частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ или $[x_k, x_{k+2}]$ заменяется интерполяционным многочленом небольшой степени. Рассмотрим вопрос о точности квадратурных формул.

Назовем разность между точным значением интеграла и его значением, вычисленным по той или иной квадратурной формуле, остаточным членом формулы, и его величину будем обозначать через R . Остаточные члены квадратурных формул могут быть получены интегрированием соответствующих остаточных членов интерполяционных формул.

Остаточный член первой интерполяционной формулы Ньютона дается выражением

$$Q_n(x) = h^{n+1} \frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$ — шаг интерполирования, $u = \frac{x-x_k}{h}$, $f^{(n+1)}(z)$ — производная $(n+1)$ -го порядка интерполяционной формулы, выполняется для некоторой точки z интервала интерполирования. Остаточный член формулы прямоугольников для отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ может быть вычислен по формуле

$$R_0 = \int_{x_k}^{x_{k+1}} Q_0(x) dx = h \int_0^1 u f'(z_k) h du = \frac{h^2}{2} f'(z_k).$$

Для того чтобы получить величину погрешности для всего отрезка интегрирования $[a, b]$, воспользуемся приближенным соотношением

$$\sum_{k=0}^{n-1} f'(z_k) = n f'(z) \quad (a < z < b).$$

Полагая $\max |f'(x)| = M_1$ при $x \in [a, b]$, получаем искомую оценку

$$|R_0| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1.$$

Остаточный член формулы трапеций для отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ вычисляется следующим образом:

$$R_1 = \int_{x_k}^{x_{k+1}} Q_1(x) dx = h^2 \int_0^1 \frac{u(u-1)}{2} f''(z_k) h du = -\frac{h^3}{12} f''(z_k).$$

Для того чтобы получить величину погрешности формулы трапеций для всего отрезка $[a, b]$, составим сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{h^3}{12} \right) f''(z_k) = -\frac{h^3}{12} \sum_{k=0}^{n-1} f''(z_k).$$

Приближенно можно считать

$$\sum_{k=0}^{n-1} f''(z_k) = n f''(z),$$

где z – некоторая средняя точка $[a, b]$. Учитывая, что $h = \frac{b-a}{n}$ и обозначая $\max |f''(x)| = M_2$ при $x \in [a, b]$, получаем

$$R_1 \approx \frac{h^3}{12} n f''(z) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2^2. \quad (12.4)$$

Как следует из выражения (12.4), формула трапеций точна в том случае, когда $f(x)$ – линейная функция (в этом случае $f''(x) \equiv 0$, $M_2 = 0$). Можно ожидать, что формула Симпсона будет точна для функции $f(x)$, равной квадратному трехчлену, но на самом деле формула Симпсона более точная – она точна для всякого многочлена третьей степени. Легко показать, что остаточный член

$$R_2 = \int_{x_k}^{x_{k+2}} Q_2(x) dx = h^3 \int_0^2 \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} f''(z_k) h du$$

равен нулю, так как равен нулю интеграл $\int_0^2 u(u-1)(u-2) du$.

Рассмотрим остаточный член формулы Симпсона для $n = 3$:

$$R_3 = \int_{x_k}^{x_{k+2}} Q_3(x) dx = h^4 \int_0^2 \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!} f^{(4)}(z_k) h u du = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(z_k).$$

Для того чтобы получить остаточный член для всего отрезка $[a, b]$, суммируем полученные выражения по n парным участкам и полагаем

$$\sum_{k=0,2,\dots}^{n-2} f^{(4)}(z_k) = n f^{(4)}(z),$$

где z – новая средняя точка отрезка $[a, b]$. Обозначая $\max |f^{(4)}(x)| = M_4$, $x \in [a, b]$ и вспоминая, что $h = \frac{b-a}{2n}$, получаем оценку остаточного члена формулы Симпсона

$$|R_3| \leq \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M_4.$$

Применяя различные интерполяционные многочлены и удерживая в них различное число членов, можно получить различные формулы квадратур.

12.3 Формула Чебышева

Рассмотрим численное вычисление определенного интеграла $\int_{-1}^1 f(x) dx$, к которому может быть приведен интеграл $\int_a^b f(t) dt$, если положить $t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x$.

В квадратурной формуле

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n)$$

положим все коэффициенты A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) равными между собой ($A_i = A$) и подберем узлы x_1, x_2, \dots, x_n так, чтобы квадратурная формула была точна для любого многочлена $(n-1)$ -й степени

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

Число A и абсциссы квадратурной формулы необходимо выбрать так, чтобы равенство

$$\int_{-1}^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}) dx =$$

$$= A(a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_0 + a_1x_2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} + \dots + a_0 + a_1x_n + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1})$$

было точным при любых a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Интегрируя левую часть равенства и преобразуя правую часть, получаем равенство

$$2\left(a_0 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{5}a_4 + \frac{1}{7}a_6 + \dots\right) = A\left(na_0 + a_1\sum_{k=1}^n x_k + a_2\sum_{k=1}^n x_k^2 + \dots + a_{n-1}\sum_{k=1}^n x_k^{n-1}\right).$$

Это равенство должно быть справедливым для любых значений a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , поэтому можно составить следующую систему уравнений для определения A и x_1, x_2, x_3, \dots . Так как $nA = 2$, $A = \frac{2}{n}$, то получаем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{2}{3A} = \frac{n}{3}, \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0, \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = \frac{2}{5A} = \frac{n}{5}, \\ \dots \end{cases} \quad (12.5)$$

В таблице 12.1 приведены абсциссы квадратурной формулы Чебышева для $n=3, 4, 5, 6, 7$. При $n=8$ и для всех $n > 9$ среди корней системы (12.5) имеются комплексные корни. Квадратурная формула

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)),$$

в которой числа x_1, x_2, \dots, x_n определены из системы уравнений (12.5) и n равно одному из чисел $n=3, 4, 5, 6, 7, \dots$, называется формулой Чебышева.

Таблица 12.1

n	A_n	Значения абсцисс
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0,7071$ $x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0,7947$ $x_2 = -x_3 = 0,1876$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0,8325$ $x_2 = -x_4 = 0,3745$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0,8622$ $x_2 = -x_5 = 0,4225$ $x_3 = -x_4 = 0,2667$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0,8839$ $x_2 = -x_6 = 0,5296$ $x_3 = -x_5 = 0,3239$ $x_4 = 0$

Для интеграла $\int_a^b f(t)dt$ формула Чебышева записывается в виде

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2n} (f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n)),$$

где $t_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), x_i – абсциссы, найденные из системы уравнений (12.5).

13 ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Задача 1. Метод Эйлера – Коши.

1. $y'(x) = -x^2y^2 + \frac{x^2 - 0,5}{(1 + 0,5x)^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

2. $y'(x) = -x^2y^2 + \frac{x^2 - 0,6}{(1 + 0,6x)^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

3. $y'(x) = -x^2y^2 + \frac{x^2 - 0,8}{(1 + 0,8x)^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

4. $y'(x) = -x^2y^2 + \frac{x^2 - 0,9}{(1 + 0,9x)^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

5. $y'(x) = -x^2y^2 + \frac{x^2 - 1,1}{(1 + 1,1x)^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

6. $y'(x) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$, $y(0) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

7. $y'(x) = \frac{1,4}{x^2 + y^2 + 1,4}$, $y(0) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

8. $y'(x) = \frac{2,2}{x^2 + y^2 + 2,2}$, $y(0) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

9. $y'(x) = \frac{1,8}{x^2 + y^2 + 1,8}$, $y(0) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

10. $y'(x) = \frac{2,6}{x^2 + y^2 + 2,6}$, $y(0) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

11. $y'(x) = \sqrt{y} + (1 + x^2)\sqrt{1 + y^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

12. $y'(x) = \sqrt{1 + y} + (2 + x^2)\sqrt{1 + y^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

13. $y'(x) = \sqrt{2 + y} + (3 + x^2)\sqrt{1 + y^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.

14. $y'(x) = \sqrt{1+y} + x^2\sqrt{1+y^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.
15. $y'(x) = \frac{2xy^3}{1-x^2y^2}$, $y(2) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [2; 2,5]$.
16. $y'(x) = -y^2 + \frac{1,4x}{1+x^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.
17. $y'(x) = -y^2 + \frac{1,5x}{1+x^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.
18. $y'(x) = -y^2 + \frac{1,6x}{1,5+x^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.
19. $y'(x) = \frac{3}{2x}y + \frac{3}{2}x^3\sqrt{1+y^2}$, $y(1) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [1; 1,5]$.
20. $y'(x) = -y^2 + \frac{1,6x}{1+x^2}$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.
21. $y'(x) = 9x^2y + x(1+x^2)\sqrt{y^3}$, $y(1) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [1; 1,5]$.
22. $y'(x) = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [1; 1,5]$.
23. $y'(x) = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1,5}{x^2}$, $y(1) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [1; 1,5]$.
24. $y'(x) = -\frac{\sqrt{1+y^2}}{x} + y^2 \ln x$, $y(1) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [1; 1,5]$.
25. $y'(x) = -\frac{\sqrt{2+y^2}}{2x} + y^2 \ln x$, $y(1) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [1; 1,5]$.
26. $y'(x) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1,4}$, $y(0) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.
27. $y'(x) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1,8}$, $y(0) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [0; 0,5]$.
28. $y'(x) = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [1; 1,5]$.

Задача 2. Метод Рунге – Кутта.

1. $y'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$, $y(1) = 0$, $h = 0,1$, $x \in [1; 2]$.
2. $y'(x) = x^3 - \frac{2y}{x}$, $y(1) = 2$, $h = 0,1$, $x \in [1; 2]$.

3. $y'(x) = y + \frac{1+y^2}{2\sqrt{x}}, y(4)=1, h=0,1, x \in [4; 5].$
4. $y'(x) = \frac{x+1-y^3}{3y^2}, y(1)=-1, h=0,1, x \in [1; 2].$
5. $y'(x) = \frac{xy^2+xy}{1+x^2}, y(1)=1, h=0,1, x \in [1; 2].$
6. $y'(x) = \frac{2xy}{3x^2+y^2}, y(1)=1, h=0,1, x \in [1; 2].$
7. $y'(x) = \frac{1+y^2}{1+xy}, y(2)=1, h=0,1, x \in [2; 3].$
8. $y'(x) = \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{2x^2+1}, y(4)=1, h=0,1, x \in [4; 5].$
9. $y'(x) = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2}, y(1)=0, h=0,1, x \in [1; 2].$
10. $y'(x) = \frac{y}{2\sqrt{x}} + (1+x^2)\sqrt{y}, y(4)=1, h=0,1, x \in [4; 5].$
11. $y'(x) = \frac{1}{10}(x^2+y^2), y(1)=1, h=0,1, x \in [1; 2].$
12. $y'(x) = \frac{1+x^2}{x^2+y^2}, y(1)=0,5, h=0,1, x \in [1; 2].$
13. $y'(x) = \frac{1}{4}(4x^2+y^2) + x\sqrt{y}, y(0)=1, h=0,1, x \in [0; 1].$
14. $y'(x) = \frac{1}{12}(x^2+y^2), y(2)=3, h=0,1, x \in [2; 3].$
15. $y'(x) = y^3 - x^3 + y(1+x^2), y(0)=1, h=0,1, x \in [0; 1].$
16. $y'(x) = \frac{2}{x^2+3y^2}, y(0)=1, h=0,1, x \in [0; 1].$
17. $y'(x) = \frac{2+x^2}{x^2+3y^2}, y(0)=1, h=0,1, x \in [0; 1].$
18. $y'(x) = \sqrt{xy} + y(1+x^2) + 1, y(0)=0, h=0,1, x \in [0; 1].$
19. $y'(x) = \frac{1}{4}(x^2+3y^2), y(2)=0, h=0,1, x \in [2; 3].$
20. $y'(x) = 2xy^3 + x^2 - 1, y(0)=0, h=0,1, x \in [0; 1].$

21. $y'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + y^3)$, $y(0) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [0; 1]$.
22. $y'(x) = \frac{x + y^3 + 1}{3y^2}$, $y(1) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [1; 2]$.
23. $y'(x) = \frac{y^2}{x+1} + xy$, $y(4) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [4; 5]$.
24. $y'(x) = \frac{2xy}{3x^2 - y^2 + 1}$, $y(1) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [1; 2]$.
25. $y'(x) = \frac{y^2}{x+1} + x\sqrt{y}$, $y(1) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [1; 2]$.
26. $y'(x) = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + x^2$, $y(1) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [1; 2]$.
27. $y'(x) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + xy$, $y(1) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [1; 2]$.
28. $y'(x) = \frac{xy^2 + xy}{2 + x^2}$, $y(1) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [1; 2]$.
29. $y'(x) = (2y + 1)\sqrt{x} + x\sqrt{y}$, $y(2) = 1$, $h = 0,1$, $x \in [2; 3]$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(справочное)

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Напомним кратко основные свойства преобразования Лапласа, а также метод поиска функции-оригинала по данному лаплас-образу. Преобразование Лапласа ставит в соответствие функции $f(t)$ действительной переменной t функцию $F(p)$ комплексной переменной p с помощью соотношения

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (\text{A.1})$$

Функции $f(t)$, для которых реализуемо преобразование (A.1), определены для всех значений действительной переменной $-\infty < t < \infty$ и удовлетворяют следующим условиям:

- 1) при $t < 0$ $f(t) \equiv 0$;
- 2) при $t \geq 0$ функция $f(t)$ на любом конечном участке t имеет конечное число точек разрыва 1-го рода;
- 3) при $t \rightarrow \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т.е. существуют также положительные постоянные M и a , что при $t > 0$ выполняется неравенство

$$|f(t)| \leq Me^{at}.$$

Число a называется показателем степени роста функции $f(t)$.

При выполнении этих условий интеграл (A.1) сходится в области $\text{Re } p > a$.

Функция $F(p)$, определенная соотношением (A.1), называется изображением Лапласа (или лаплас-образом) функции $f(t)$. Функция $f(t)$ называется оригиналом функции $F(p)$. Связь

функций $f(t)$ и $F(p)$ (A.1) символически обозначается следующим операторным равенством:

$$f(t) \square F(p).$$

Свойства изображения Лапласа.

Свойство 1 (линейность изображения). Если $F_i(p) \square f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p) \square \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t),$$

где α_i – заданные постоянные числа.

Свойство 2 (теорема запаздывания). Пусть $F(p) \square f(t)$ и задана функция

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \tau > 0, \\ f(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Тогда

$$f_\tau(t) \square F_\tau(p) = e^{-p\tau} F(p).$$

Свойство 3 (изображение производной). Если $f(t) \square F(p)$, то

$$f'(t) \square pF(p) - f(0).$$

Соответственно, для производной n -го порядка имеем равенство

$$f^n(t) \square p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Свойство 4 (интегрирование функции-оригинала). Пусть $f(t) \square F(p)$. Тогда

$$\frac{1}{p} F(p) = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (\text{A.2})$$

Изображение Лапласа свертки функций. Свёрткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция $\phi(t)$, определённая соотношением

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau.$$

Свойство 5. Если $f_1(t) \square F_1(p)$, $f_2(t) \square F_2(p)$, то

$$F_1(p)F_2(p) \square \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (\text{A.3})$$

Формула (A.3) используется для определения функции-оригинала по заданному изображению, когда заданное изображение можно разбить на множители, для которых оригиналы известны.

Свойство 6 (теорема смещения). Если $f(t) \square F(p)$, то для любого комплексного числа λ

$$F(p + \lambda) \square e^{-\lambda t} f(t).$$

Таблица лаплас-образов некоторых элементарных функций

$$\begin{aligned} 1 &\square \frac{1}{p}; \quad t^n \square \frac{n!}{p^{n+1}} \\ e^{\lambda t} &\square \frac{1}{p - \lambda}; \quad t^n e^{\lambda t} \square \frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}} \\ \sin \omega t &\square \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad \cos \omega t \square \frac{p}{p^2 + \omega^2} \\ e^{\lambda t} \sin \omega t &\square \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}; \quad e^{\lambda t} \cos \omega t \square \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2} \\ t \sin \omega t &\square \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}; \quad t \cos \omega t \square \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2} \end{aligned}$$

Обращение преобразования Лапласа (нахождение функции-оригинала по данному лаплас-образу).

Функцию-оригинал $f(t)$, отвечающую лаплас-образу $F(p)$, можно найти по формуле

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res}_{p=p_k} (F(p)e^{pt}), \quad (\text{A.4})$$

где сумма берётся по всем особым точкам функции $F(p)$.

Если функция $F(p)$ представлена в виде дроби, т.е. имеет вид

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \text{ то точки } p_k - \text{ нули знаменателя } B(p). \text{ Пусть } p = p_k -$$

корень уравнения $B(p) = 0$ кратности n_k . В этом случае вычет функции $F(p)e^{pt}$ в точке p_k вычисляется по формуле

$$\operatorname{Res}_{p=p_k}(F(p)e^{pt}) = \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \left((p - p_k)^{n_k} \frac{A(p)e^{pt}}{A(p)} \right).$$

Если $p = p_k$ - корень уравнения $B(p) = 0$, то формула вычисления вычета в полюсе p_k существенно упрощается и имеет вид

$$\operatorname{Res}_{p=p_k}(F(p)e^{pt}) = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (\text{A.5})$$

Если все полюсы функции $F(p)$ простые, то формула обращения лаплас-образа (A.4) принимает вид

$$\frac{A(p)}{B(p)} \square f(t) = \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (\text{A.6})$$

Функция $F(p)$ в ситуации, когда все полюса оказываются простыми, наряду с действительными полюсами может иметь комплексные полюса (т.е. уравнение $B(p) = 0$ может иметь действительные и комплексные корни). В этом случае формулу (A.6) можно представить в виде

$$\frac{A(p)}{B(p)} \square \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} + 2 \operatorname{Re} \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t},$$

где первая сумма распространена на все действительные корни $B(p)$, а вторая - на все комплексные корни с положительными

мнимыми частями.

Напомним также понятие электрического импеданса (операторного сопротивления). Рассмотрим элементарный колебательный RLC -контур, подключенный к переменной ЭДС $e(t)$ (рисунок А.1).

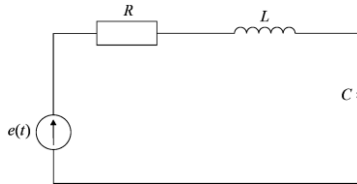


Рисунок А.1

Использование 2-го закона Кирхгофа приводит к следующему уравнению для колебательного контура:

$$U_R + U_L + U_C = e(t),$$

где U_R, U_L, U_C – падение напряжения на резистивном сопротивлении, катушке индуктивности и емкости элемента цепи.

Так как $U_R = iR$, $U_L = L \frac{di}{dt}$, $U_C = \frac{1}{c} \int_0^t i(\tau) d\tau$, где $i(t)$ – ток в цепи, то уравнение для колебательного контура принимает вид

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int_0^t i(\tau) d\tau = e(t).$$

Вводим соответствующие лаплас-образы $e(t) \square E(p)$, $i(t) \square I(p)$, начальный ток $i(0) = 0$ и получаем уравнение в операторной форме

$$\left(R + Lp + \frac{1}{cp} \right) I(p) = E(p).$$

Величину $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{cp}$ называют импедансом контура (характеристическим или операторным сопротивлением). Понятие импеданса является очень удобным в задачах электротехники, так как позволяет формально записывать уравнения для электрических

контуров сразу в лаплас-образах, не записывая систему интегро-дифференциальных уравнений для участка цепи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Волков, Е. А.** Численные методы / Е. А. Волков. – М. : Наука, 1987. – 248 с.
- 2 **Демидович, Б. И.** Основы вычислительной математики / Б. И. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 664 с.
- 3 **Крылов, В. И.** Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – Минск : Наука и техника, 1982. – 286 с.
- 4 **Самарский, А. А.** Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1987. – 288 с.
- 5 **Самарский, А. А.** Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЕТЧАТЫХ ФУНКЦИЙ	3
1.1 Решетчатые функции	3
1.2 Основные понятия разностных уравнений и систем разностных уравнений	4
1.3 Z-преобразование решетчатых функций и его свойства	8
1.4 Z-образы элементарных решетчатых функций	12
1.5 Восстановление решетчатой функции по ее Z-преобразованию (обращение Z-преобразования)	17
2 МЕТОД Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ	20
2.1 Решение линейных разностных уравнений методом Z-преобразования	20
2.2 Решение систем линейных разностных уравнений методом Z-преобразования	24
2.3 Упражнения для самостоятельной работы	36
3 ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	41
3.1 Понятие дискретного преобразования Фурье и его свойства	41
3.2 Дискретные фурье-образы, отвечающие элементарным решетчатым функциям	43
3.3 Восстановление решетчатой функции по ее дискретному преобразованию Фурье	47
4 ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ	49
5 МЕТОД Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ	57
6 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	75
6.1 Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	75
6.2 Метод Эйлера решения задачи Коши. Модификации метода Эйлера	78
6.3 Примеры численного решения задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений	81
7 МЕТОД РУНГЕ – КУТТА	84
7.1 Метод Рунге – Кутта для дифференциального уравнения 1-го порядка	84
7.2 Численное решение систем дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутта	91
8 МЕТОД АДАМСА	93
8.1 Элементы теории интерполирования и приближения функций	93
8.2 Разностные методы решения задачи Коши	98
8.3 Экстраполяционный метод Адамса	99

9 РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	104
9.1 Общая постановка краевой задачи	104
9.2 Редукция двухточечной краевой задачи для линейных уравнений 2-го порядка к задаче Коши.....	105
9.3 Метод конечных разностей	107
10 МЕТОД ПРОГОНКИ.....	110
11 МЕТОД ГАЛЕРКИНА И МЕТОД МОМЕНТОВ.....	115
11.1 Метод Галеркина	115
11.2 Метод моментов	119
12 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.....	120
12.1 Формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона	120
12.2 Точность квадратурных формул.....	122
12.3 Формула Чебышева	125
13 ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ	128
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Основные свойства преобразования Лапласа	132
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	137

Учебное издание

ДУДКО Сергей Алексеевич
ДЕРГАЧЁВА Ирина Михайловна
ПРОКОПЕНКО Алла Ивановна

**ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ.**

МЕТОД Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Учебно-методическое пособие

Редактор Я. А. Васькевич
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 20.04.2022 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 8,14. Уч.-изд. л. 5,26. Тираж 100 экз.
Зак № 910. Изд № 7.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель