

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ ВО ВРЕМЕНИ МОМЕНТОВ УПРАВЛЯЮЩИХ СИЛ МЫШЕЧНОЙ СИСТЕМЫ СПОРТСМЕНА

М.А. КИРКОР, А.Е. ПОКАТИЛОВ, А.М. ГАЛЬМАК
Белорусский государственный университет
пищевых и химических технологий, г. Могилев

В данном исследовании предлагается оценивать скоростно-силовые характеристики мышечной системы спортсмена с помощью дифференцирования динамических уравнений движения, записанных относительно моментов управляющих сил мышечной системы. Само уравнение для управляющих моментов относительно любого i -го сустава биомеханической системы запишем в виде [1]:

$$M_{i,i-1} = \sum_{j=i}^N I_j \ddot{Q}_j + g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j + \ddot{L}_{0b} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \\ + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j). \quad (1)$$

Здесь гриф перекладины моделируется одной горизонтальной L_{0r} и одной вертикальной L_{0b} пружинами. В уравнении (1) эти параметры представлены в виде вторых производных \ddot{L}_{0r} и \ddot{L}_{0b} . Продифференцировав уравнение (1) в общем виде, получим

$$V_{M_{i,i-1}} = \dot{M}_{i,i-1} = \left[\sum_{j=i}^N I_j \ddot{\ddot{Q}}_j \right] - \left[g \sum_{j=i}^N C_{ij} \dot{Q}_j \sin Q_j \right] + \left[-\ddot{\ddot{L}}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j - \right. \\ \left. - \ddot{\ddot{L}}_{0b} \sum_{j=i}^N C_{ij} \dot{Q}_j \cos Q_j \right] + \left[\ddot{\ddot{L}}_{0b} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{\ddot{L}}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \dot{Q}_j \sin Q_j \right] + \\ + \left[- \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k (\dot{Q}_k - \dot{Q}_j) \sin(Q_k - Q_j) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) \right] + \\ + \left[-2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k \ddot{Q}_k \sin(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 (\dot{Q}_k - \dot{Q}_j) \cos(Q_k - Q_j) \right]. \quad (2)$$

Исследование проводилось на примере большого оборота назад на перекладине в спортивной гимнастике (рисунок 1, *а*) и на примере рывка в тяжелой атлетике (рисунок 1, *б*). Во всех случаях упражнения выполняли мастера спорта. Вычислительный эксперимент с использованием численных методов основывался на математических моделях по уравнениям (1) и (2).

В тяжелой атлетике учтено, что в рывке отсутствует деформация опоры, поэтому соответствующие динамические уравнения были проще и не включали параметры деформации спортивного снаряда [2].

а)



б)



Рисунок 1 – Спортивные упражнения:

а – большой оборот назад на перекладине; б – рывок штанги

Математический анализ результатов биомеханического анализа спортивных упражнений выявил новую, ранее неизвестную закономерность: между локальными экстремумами управляющих моментов и их динамических скоростей есть сдвиг по времени. Пиковые значения скоростей и моментов не совпадают, при этом сдвиг соответствующих графиков функций происходит в одну сторону и не зависит от вида спорта.

На рисунке 2 представлен график для управляющего момента и его динамической скорости относительно тазобедренного сустава спортсмена в спортивной гимнастике. На рисунке 3 показаны изменения как динамической скорости, так и самого управляющего момента также относительно тазобедренного сустава при рывке штанги весом в 100 кг. На всем протяжении упражнения фиксируется сдвиг локальных экстремумов на величину Δt_i .

Динамические характеристики движения в тазобедренном суставе:

● - полный момент; ■ - скорость изменения момента

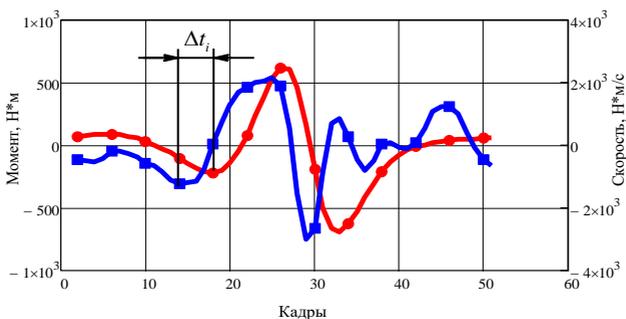


Рисунок 2 – Динамика полной БМС относительно тазобедренного сустава в спортивной гимнастике

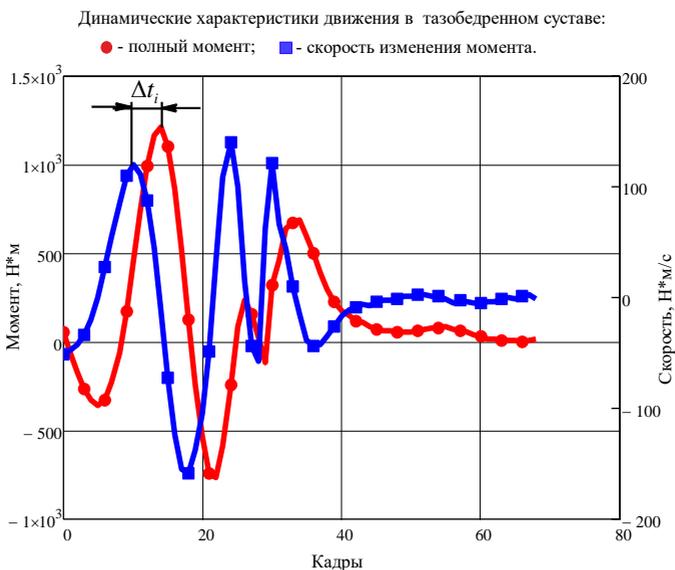


Рисунок 3 – Динамика управляющего момента относительно тазобедренного сустава (рывок, штанга 100 кг)

На данном этапе возникает закономерный вопрос: имеет ли здесь место опережение пиковых значений динамической скорости соответствующего управляющего момента, или наоборот – управляющий момент достигает пиковых значений раньше, чем это происходит с динамической скоростью?

Для выяснения этого важного вопроса выполним исследования математических выражений (1) и (2) на теоретическом уровне.

Анализ уравнений показывает, что динамическое уравнение движения спортсмена имеет 6 структур, и в пяти из них присутствуют тригонометрические функции. При дифференцировании уравнения (1) получаем уравнение (2), в котором каждая из структур выделена квадратными скобками.

Теоретический анализ динамических уравнений движения (1) и (2) показывает только несколько возможных случаев преобразования тригонометрических функций, что и вызывает сдвиг локальных экстремумов управляющего момента и его динамической скорости по отношению друг к другу. Эти случаи сведены в таблицу 1. Получаем только 2 варианта: $\cos Q \rightarrow [-\sin Q]$ и $[-\sin Q] \rightarrow [-\cos Q]$. Графически в общем виде они показаны на рисунке 4 для функций $\sin x$ и $\cos x$ с учетом изменения знака в соответствии с таблицей 1. Сдвиг функций в обоих случаях показан как Δ .

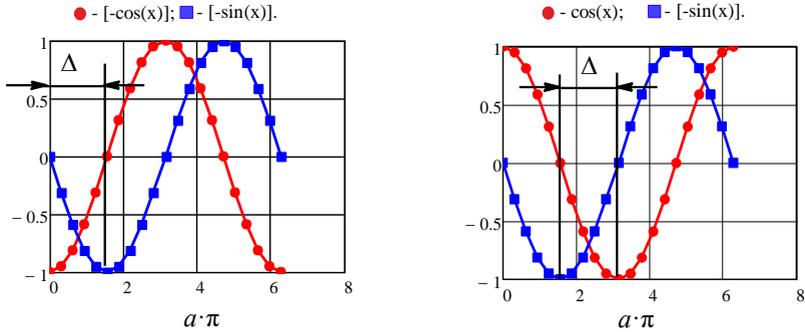


Рисунок 4 – Сдвиг локальных экстремумов на примере тригонометрических функций

Таблица 1 – Преобразование функций в динамических уравнениях

Формула	Производная	Преобразование
$g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j$	$-\left[g \sum_{j=i}^N C_{ij} \dot{Q}_j \sin Q_j \right]$	$\cos(Q) \rightarrow$ $-\left[\sin(Q) \right]$
$-\ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j$	$-\ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin Q_j$	–
	$-\ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \dot{Q}_j \cos Q_j$	$-\left[\sin(Q) \right] \rightarrow$ $-\left[\cos(Q) \right]$
$\ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j$	$\ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j$	–
	$-\ddot{L}_{0B} \sum_{j=i}^N C_{ij} \dot{Q}_j \sin Q_j$	$\cos(Q) \rightarrow$ $-\left[\sin(Q) \right]$
$\sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j)$	$-\sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k (\dot{Q}_k - \dot{Q}_j) \sin(Q_k - Q_j)$	$\cos(Q) \rightarrow$ $-\left[\sin(Q) \right]$
	$\sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j)$	–
$-\sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j)$	$-2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k \ddot{Q}_k \sin(Q_k - Q_j)$	–
	$-\sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N B_{jk} \dot{Q}_k^2 (\dot{Q}_k - \dot{Q}_j) \cos(Q_k - Q_j)$	$-\left[\sin(Q) \right] \rightarrow$ $-\left[\cos(Q) \right]$

Анализ таблицы 1 и рисунка 4 показывает, что теоретически возможно как опережение, так и отставание динамической скорости управляющего момента по отношению к самому моменту.

Список литературы

1 **Покатилов, А.Е.** Биодинамические исследования спортивных упражнений в условиях упругой опоры : монография / А.Е. Покатилов, В.И. Загrevский, Д.А. Лавшук. – Минск : Издательский центр БГУ, 2008. – 291 с.

2 **Воронович, Ю.В.** Биомеханика тяжелоатлетических упражнений : монография / Ю.В. Воронович, Д.А. Лавшук, В.И. Загrevский. – М-во внутр. дел Респ. Беларусь, учреждение образования «Могилевский институт Министерства внутренних дел Республики Беларусь». – Могилев : Могилев. институт МВД, 2015. – 196 с.

УДК 378.147:517.956.225

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ПРИ ПОДГОТОВКЕ ИНЖЕНЕРОВ-ЭНЕРГЕТИКОВ

Д.В. КОМНАТНЫЙ

*Гомельский государственный технический университет
им. П.О. Сухого, г. Гомель*

Решение разнообразных инженерных проблем энергетики и электротехники связано с расчетом электрических, тепловых, магнитных статических полей. Для выполнения расчетов необходимо поставить и решить задачу математической физики для уравнения Лапласа с заданными граничными условиями. Одним из фундаментальных методов решения такой задачи является метод разделения переменных. Поэтому для подготовки квалифицированного инженера-энергетика необходимо обучение применению указанного метода с упором на постановку и решение задач математической физики.

В настоящее время раздел о решении уравнения Лапласа включен в курсы теоретических основ электротехники [1]. Также разработаны спецкурсы по дифференциальным уравнениям математической физики в электротехнике [2]. Указанные курсы нельзя признать удачными. В [1] и [2] не изложены условия применимости метода разделения переменных, не объясняется общая схема метода, не уделяется внимание заданию граничных условий и методам построения расчетных моделей. Следовательно, полноценное обучение специалистов становится невозможным.

Специфика деятельности инженера заключается в необходимости решения практических задач и получения расчетных соотношений для определения характеристик поля в конструкции. Для ускорения получения расчет-