ских специальностей, методические указания для управляемой самостоятельной работы студентов механических специальностей, включающие в себя задачи профессионально-ориентированного содержания.

Опыт использования данных разработок показал значительный рост интереса студентов к изучению, а также к осознанию ими значимости дисциплины «Высшая математика».

Список литературы

1 **Андреев, А.Л.** Компетентностная парадигма в образовании: опыт философско-методологического анализа / А.Л. Андреев // Педагогика. – 2005. – № 4. – с. 19–27.

УДК 517.956

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

С.А. ДУДКО, И.М. ДЕРГАЧЁВА, А.И. ПРОКОПЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В задачах теоретической и прикладной механики (прежде всего теории колебаний), теории линейных электрических цепей, теории систем автоматического регулирования приходится часто сталкиваться с необходимостью описания переходных процессов в системах, на которые действуют периодические внешние силы, т. е. необходимо уметь решать дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений, в которых в правой части присутствуют периодические функции. Эффективным методом решения таких задач является операционное исчисление. Мы рассмотрим особенности метода на достаточно простом, но показательном примере.

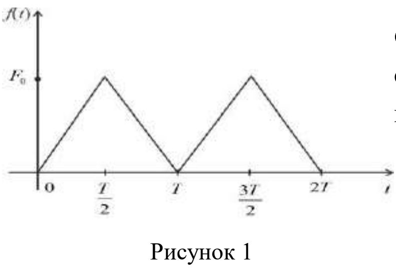

Рисунок 1

Рассмотрим изображенную на рисунке 1 функцию $f(t)$ с периодом *T*. Аналитическая зависимость, определяющая функцию $f(t)$, имеет вид

$$f(t) = F_0 \begin{cases} \dfrac{2t}{T}, 0 \le t < \dfrac{T}{2} \\ \dfrac{2(T-t)}{T}, \dfrac{T}{2} \le t < T \end{cases}. \qquad (1)$$

В задачах электротехники функцию вида (1) обычно называют пилообразным напряжением (если считать, что F_0 – амплитуда напряжения на входе в электрическую цепь).

Лаплас-образ периодической функции с периодом T находим по формуле

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pt}},$$

где «укороченный» лаплас-образ

$$F_0(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt + 2 \int_{\frac{T}{2}}^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{2}{pT} \left(Te^{-pT} - Te^{-\frac{pT}{2}} \right) + \frac{2}{p^2 T} \left(e^{-pT} - 2e^{-\frac{pT}{2}} + 1 \right) -$$

$$- \frac{2}{p} \left(e^{-pT} - e^{-\frac{pT}{2}} \right) = \frac{2}{p^2 T} \left(1 - e^{-\frac{pT}{2}} \right)^2.$$

Как следствие, лаплас-образ функции $f(t)$ будет иметь вид

$$F(p) = \frac{2\left(1 - e^{-\frac{pT}{2}}\right)^2}{p^2 T \left(1 - e^{-pT}\right)} = \frac{2\left(1 - e^{-\frac{pT}{2}}\right)}{p^2 T \left(1 + e^{-\frac{pT}{2}}\right)} = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{pT}{4}}{Tp^2 \operatorname{ch} \frac{pT}{4}}.$$

Рассмотрим колебательный процесс для идеального гармонического осциллятора (без диссипации энергии), на который действует периодическая сила $f(t)$ вида (1). Дифференциальное уравнение осциллятора будет иметь вид (собственную частоту осциллятора обозначим через m)

$$y'' + m^2 y = f(t),$$

где $y(t)$ – амплитуда смещения осциллятора из положения равновесия.

Решаем уравнение операционным методом при нулевых начальных условиях, т. е. $y(0) = y'(0) = 0.$ Обозначим через $Y(p)$ лаплас-образ неизвестной функции $y(t)$, тогда с учетом найденного лаплас-образа $F(p)$ получаем следующее изображающее уравнение

$$\left(p^2+m^2\right)Y(p)=F(p),$$

из которого находим

$$Y(p)=\frac{F(p)}{p^2+m^2}=\frac{2F_0\operatorname{sh}\frac{pt}{4}}{Tp^2\left(p^2+m^2\right)\operatorname{ch}\frac{pt}{4}}=\frac{2F_0\operatorname{sh}\frac{pt}{4}}{B(p)}.$$

Далее находим функцию-оригинал, отвечающую лаплас-образу $Y(p)$. Обращение лаплас-образа можно осуществить по формуле

$$y(t)=\sum_k \operatorname*{Re}_{p=p_k}s\left(Y(p)e^{pt}\right), \tag{2}$$

где в правой части формулы (2) суммирование распространяется на все особые точки функции $Y(p)$. При этом формулу (2) можно представить в следующем виде

$$y(t)=\sum \operatorname{Re}s(Y(p)e^{pt})+\sum 2\operatorname{Re}\operatorname{Re}s(Y(p)e^{pt}), \tag{2a}$$

где первая сумма распространена на все действительные корни функции $B(p)$, а вторая сумма – на комплексные корни функции $B(p)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Функция $B(p)=p^2(p^2+m^2)\operatorname{ch}\frac{pT}{4}$ имеет бесконечно много нулей в точках $p=p_n$, являющихся решениями уравнения $\operatorname{ch}\frac{pT}{4}=0$, $\frac{p_nT}{4}=i\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $p_n=\frac{i2\pi(2n+1)}{T}=i\omega(2n+1)\left(\omega=\frac{2\pi}{T}\right)$, $n=0,1,\ldots$. Нулю функции $B(p)$ в точке $p=p_n$ отвечает простой полюс функции $Y(p)$. Вычет функции $Y(p)e^{pt}$ в простом полюсе p_n находим по формуле

$$\operatorname*{Re}_{p=p_n}s(Y(p)e^{pt})=\frac{2F_0}{T}\frac{\operatorname{sh}\frac{p_nT}{4}e^{p_nt}}{B'(p_n)}. \tag{3}$$

Находим производную функции $B(p)$:

$$B'(p)=\frac{T}{4}\operatorname{sh}\frac{pT}{4}\,p^2(p^2+m^2)+\operatorname{ch}\frac{pT}{4}\,(p^2(p^2+m^2))'_p\,,$$

поэтому

$$B'(p_n)=\frac{T}{4}\operatorname{sh}\frac{p_nT}{4}\,p_n{}^2(p_n{}^2+m^2)=(\text{подставляем } p_n=i\omega(2n+1))=$$

$$=\frac{T}{4}\operatorname{sh}\frac{p_nT}{4}\,\omega^2(2n+1)^2(\omega^2(2n+1)^2-m^2).$$

Подставляя полученное соотношение для производной $B'(p_n)$ в равенство (3), получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}(Y(p)e^{pt})=\frac{8F_0}{T^2}\frac{e^{i\omega(2n+1)t}}{\omega^2(2n+1)^2(\omega^2(2n+1)^2-m^2)}=$$

$$=\frac{8F_0}{T^2}\frac{\cos\omega(2n+1)t+i\sin\omega(2n+1)t}{\omega^2(2n+1)^2(\omega^2(2n+1)^2-m^2)}. \qquad (4)$$

Функция $B(p)$ имеет также два простых комплексно сопряженных полюса в точках $p=\pm im.$ Вычет функции $Y(p)e^{pt}$ в полюсе $p=im$ вычисляем аналогичным образом. При этом производную функции $B(p)$ перезапишем в виде

$$B'(p)=2p^3\operatorname{ch}\frac{pT}{4}+(p^2+m^2)\left(p^2\operatorname{ch}\frac{pT}{4}\right)'_p.$$

В дальнейших вычислениях мы также будем использовать формулы, связывающие гиперболические функции мнимого аргумента с тригонометрическими функциями

$$\operatorname{ch}ix=\cos x,\ \ \operatorname{sh}ix=i\sin x,$$

где x – действительное число. Получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=im}(Y(p)e^{pt})=\frac{2F_0}{T}\frac{\operatorname{sh}\frac{imT}{4}e^{imt}}{B'(im)}=-\frac{2F_0}{T}\frac{\sin\frac{mT}{4}e^{imt}}{m^3\cos\frac{mT}{4}}=$$

$$=-\frac{F_0}{Tm^3}\operatorname{tg}\frac{mT}{4}(\cos mt+i\sin mt). \qquad (5)$$

Рассмотрим точку $p=0.$ Используя разложение гиперболического синуса в ряд Маклорена

$$\operatorname{sh}\frac{pT}{4}=\frac{pT}{4}+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^3+\ldots=\frac{pT}{4}\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^2+\ldots\right),$$

представим лаплас-образ $Y(p)$ в виде

$$Y(p)=\frac{2F_0}{T}\frac{\frac{pT}{4}\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^2+\ldots\right)}{p^2(p^2+m^2)\operatorname{ch}\frac{pT}{4}}=\frac{F_0\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^2+\ldots\right)}{2p(p^2+m^2)\operatorname{ch}\frac{pT}{4}}.$$

Из полученного соотношения видно, что точка $p=0$ является полюсом 1-го порядка. Поэтому получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=0}(Y(p)e^{pt})=\frac{F_0}{2}\lim_{p\to 0}\left[p\frac{\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{pT}{4}\right)^2+\ldots\right)e^{pt}}{p(p^2+m^2)\operatorname{ch}\frac{pT}{4}}\right]=\frac{F_0}{2m^2}. \qquad (6)$$

Далее подставляем действительные части вычетов (4) и (5) и соотношение (6) в формулу (2а) и находим решение дифференциального уравнения гармонического осциллятора, на который действует периодическая сила $f(t)$ (1). Это решение будет иметь вид

$$y(t)=\operatorname*{Res}_{p=0}(Y(p)e^{pt})+2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=im}(Y(p)e^{pt})+\sum_{n=0}^{\infty}2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}(Y(p)e^{pt})=$$

$$=\frac{F_0}{2m^2}-\frac{2F_0}{Tm^3}\operatorname{tg}\frac{mT}{4}\cos mt+\frac{16F_0}{T^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\omega(2n+1)t}{\omega^2(2n+1)^2(\omega^2(2n+1)^2-m^2)}.$$

Таким образом, уже на примере разобранной нами достаточно простой задачи хорошо проявляется эффективность операционного метода для описания динамических процессов. В особенности необходимость знакомства студентов с более сложными разделами операционного исчисления, на взгляд авторов статьи, нужна студентам-электротехникам и всем специальностям, в базисной подготовке которых есть такие разделы, как ТОЭ (теоретические основы электротехники), ТЛЭЦ (теория линейных электрических цепей), ТАП (теория автоматического регулирования).

Список литературы

1 **Свешников, А.Г.** Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М. : Наука, 1974. – 320 с.

2 **Пчелин, Б.К.** Специальные разделы высшей математики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление / Б.К. Пчелин. – М. : Высш. шк., 1973. – 464 с.

3 **Шахно, К.У.** Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления / К.У. Шахно. – Минск : Выш. шк. 1975. – 400 с.