Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

МЕХАНИКА
СИСТЕМЫ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.
ДИНАМИКА ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ,
мгновенныя силы и взаимные удары между твердыми тѣлами.

СОСТАВИЛЪ
Д. Бобылевъ,
Заслуженный Ординарный Профессоръ Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1905.

Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

МЕХАНИКА
СИСТЕМЫ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.
ДИНАМИКА ТВЕРДЫХЪ ТѢЛЪ,
мгновенныя силы и взаимные удары между твердыми тѣлами.

СОСТАВИЛЪ
Д. Бобылевъ,
Заслуженный Ординарный Профессоръ Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1905.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

быть или больше нуля, или равна нулю, т. е.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \geqslant 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

или

$$\Delta f \,.\, v \cos(v, N) \geqslant 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19, \text{bis})$$

Это значитъ, что, если матеріальная точка находится на неудерживающей по одну сторону кривой, то кривая допускаетъ точкѣ имѣть скорость либо перпендикулярную къ нормали N, либо составляющую съ послѣднею острый уголъ.

Если скорость v дѣлаетъ полную производную

$$\frac{df}{dt} = \Delta f \,.\, v \cos(v, N)$$

меньшею нуля, т. е., если уголъ между v и N тупой, то при такомъ, недопускаемомъ кривою направленіи скорости v, происходитъ ударъ, состоящій въ мгновенномъ развитіи весьма большой реакціи, направленной по N, которая, дѣйствуя въ теченіе весьма короткаго промежутка времени, измѣняетъ скорость точки въ скорость, удовлетворяющую условію (19).

Положимъ, что кривая, выражаемая уравненіемъ

$$f(x, y, t) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

находится на наружной поверхности движущагося твердаго тѣла. Такъ какъ кривая имѣетъ собственное движеніе вмѣстѣ съ тѣломъ, то поэтому въ уравненіи ея, кромѣ координатъ x, y, входитъ еще и время явнымъ образомъ.

Если матеріальная точка всегда удерживается этою кривою, то полная производная по t отъ f должна быть равна нулю, т. е.:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

или:

$$\Delta f \,.\, v \cos(v, N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21, \text{bis})$$

Матеріальная точка находится на мгновеніе въ совпаденіи съ нѣкорою точкою твердаго тѣла, на которомъ находится эта кривая. Но тѣло имѣетъ собственное движеніе. Назовемъ буквою w скорость этой точки твердаго тѣла. Такъ какъ и эта точка остается на кривой, то и скорость w должна удовлетворять условію (21, bis). Слѣдовательно:

$$\Delta f \,.\, w \cos(w, N) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

отсюда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta f \,.\, w \cos(w, N) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Поэтому условію (21) или (21, bis) можно дать такой видъ:

$$\frac{df}{dt} = \Delta f \,.\, (v \cos(v, N) - w \cos(w, N)) = 0, \quad . \quad . \quad (23)$$

или, такъ какъ Δf есть величина неравная нулю, то условіе будетъ:

$$v \cos(v, N) = w \cos(w, N) \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Примемъ теперь во вниманіе, что матеріальная точка не удерживается кривою линіею (20) и если находится на ней, то можетъ сойти съ нея въ наружную свободную сторону. Когда она находится на кривой, то послѣдняя допускаетъ матеріальную точку имѣть всякія скорости, удовлетворяющія условію:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \geqslant 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

или, согласно предыдущему:

$$\frac{df}{dt} = \Delta f \,.\, (v \cos(v, N) - w \cos(w, N) \geqslant 0 \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Если скорость v точки дѣлаетъ полную производную отъ f по t меньшею нуля:

$$\frac{df}{dt} < 0,$$

то происходитъ ударъ; мгновенно развивающаяся до весьма большой величины реакція измѣняетъ, въ теченіе весьма короткаго времени, скорость точки v въ такую, которая дѣлаетъ полную производную отъ f по t равною или большею нуля.

Импульсъ реакціи кривой за время отъ t_1 (момента начала удара) до какого либо момента t $(t < (t_1 + \vartheta))$ имѣетъ величину положительную, непрерывно возрастающую во время удара. Количество движенія матеріальной точки измѣняется въ это время по формуламъ (1), которыя въ настоящемъ случаѣ имѣютъ такой видъ:

$$m\frac{dx}{dt} - m(x')_1 = \frac{\partial f}{\partial x} J,$$

$$m\frac{dy}{dt} - m(y')_1 = \frac{\partial f}{\partial y} J,$$

гдѣ

$$J = \int_{t_1}^{t} \lambda \, dt$$

есть импульсъ множителя реакціи.

Помноживъ первое изъ этихъ равенствъ на $\frac{\partial f}{\partial x}$, второе — на $\frac{\partial f}{\partial y}$ и сложивъ, получимъ:

$$m\left(\frac{df}{dt} - \frac{\partial f}{\partial t}\right) + m\left(\left(\frac{df}{dt}\right)_1 - \frac{\partial f}{\partial t}\right) = (\Delta f)^2\, J,$$

или

$$m\,\frac{df}{dt} = m\left(\frac{df}{dt}\right)_1 + (\Delta f)^2 \,.\, J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Написанная въ скобкахъ полная производная отъ f по t имѣетъ въ моментъ t_1 величину отрицательную (какъ сказано раньше). Изъ этого равенства видно, что полная производная отъ f по t во время удара быстро возрастаетъ вслѣдствіе быстраго увеличенія импульса J. Тотъ моментъ τ удара, въ который полная производная отъ f по t сдѣлается равною нулю, будетъ моментомъ, раздѣляющимъ ударъ на два акта. Импульсъ J_1 за время перваго акта опредѣлится изъ равенства (27), примѣненнаго къ моменту τ. Изъ него получимъ:

$$J_1 = -\frac{m}{(\Delta f)^2}\left(\frac{df}{dt}\right)_1.$$

Въ этотъ моментъ τ скорость v_τ должна удовлетворять равенству:

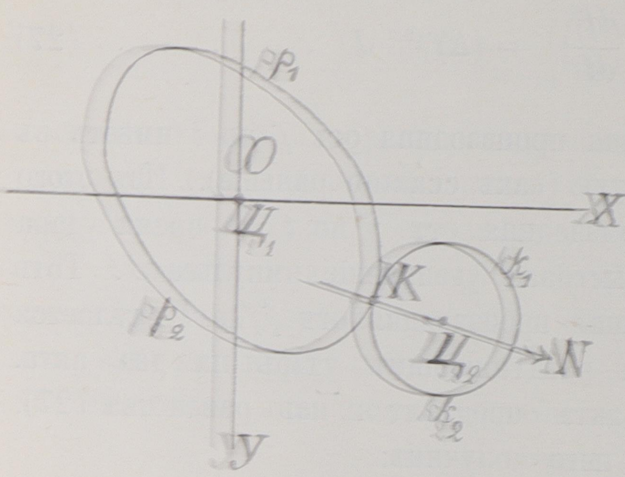
$$v_\tau \cos(v_\tau, N) - w\cos(w, N) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

За время второго акта удара импульсъ множителя реакціи равенъ $J_1\varepsilon$, гдѣ ε коэффиціентъ возстановленія.

Въ разсужденіяхъ этого параграфа предполагалось, что ударъ не измѣняетъ скоростей точекъ твердаго тѣла. Это мыслимо только при томъ условіи, чтобы масса твердаго тѣла была безконечно велика сравнительно съ массою матеріальной точки m.

§ 7. Ударъ твердаго гладкаго шара, движущагося поступательно, о твердое гладкое тѣло, движущееся параллельно неподвижной плоскости.

Твердое тѣло массы M движется параллельно неподвижной плоскости XOY, въ которой остается центръ инерціи его $Ц_1$. Поверхность тѣла симметрична относительно этой плоскости. Центръ инерціи $Ц_2$ шара остается также въ этой плоскости и шаръ движется поступательно, такъ что скорость всякой точки шара равна и параллельна скорости центра $Ц_2$. Въ моментъ t_1 поверхность шара встрѣчается съ кривою пересѣченія поверхности твердаго тѣла съ плоскостью XOY. Ударъ начинается въ моментъ t_1 въ точкѣ K прикосновенія круга Kk_1k_2 съ кривою p_1p_2K (фиг. 34). Начало координатъ находится въ центрѣ инерціи $Ц_1$ тѣла, скорость точки $Ц_1$ направлена по оси X-овъ и равна A, а угловая скорость вращенія тѣла въ моментъ t_1 равна ω_1 и вращеніе совершается вокругъ оси OZ. Скорости точекъ шара въ моментъ t_1 имѣютъ проэкціи a и b на оси X-овъ и Y-овъ. Координаты точки K суть x_k и y_k и нормаль N въ точкѣ K къ обѣимъ касающимся кривымъ составляетъ съ осями X-овъ и Y-овъ углы α и β. Моментъ инерціи тѣла вокругъ оси OZ означимъ черезъ C.



Черт. 34.

Означимъ черезъ J_1 импульсъ реакціи за время перваго акта удара. Импульсъ реакціи, дѣйствующій на шаръ массы m, проходитъ всегда черезъ $Ц_2$ по $KЦ_2N$, и потому не сообщаетъ никакого вращенія шару. Проэкціи на оси координатъ скоростей центра шара и всякой точки его въ моментъ τ означимъ черезъ u_1 и v_1 а проэкціи скоростей точекъ шара въ моментъ окончанія полнаго удара черезъ u_2, v_2. Обратный импульсъ, дѣйствующій на тѣло массы M за время перваго акта удара, измѣняетъ скорость A центра инерціи $Ц_1$ въ скорость, имѣющую проэкціи U_1 и V_1 въ моментъ τ и угловую скорость ω_1 въ угловую скорость ω_τ. Въ концѣ всего удара проэкціи скорости центра инерціи $Ц_1$ суть U_2 и V_2 и угловая скорость равна ω_2.

По формуламъ (4) § 3-го

$$\left.\begin{aligned} m\,(u_1 - a) &= J_1 \cos\alpha, \\ m\,(v_1 - b) &= J_1 \cos\beta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} M\,(U_1 - A) &= -J_1 \cos\alpha, \\ M V_1 &= -J_1 \cos\beta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Изъ формулъ (5) § 3-го понадобится только третья, въ которой моментъ количествъ движенія $(\lambda_c)_\tau$ надо замѣнить произведеніемъ момента инерціи C на угловую скорость; моментъ же импульса, дѣйствующаго на тѣло, будетъ равенъ $-J_1\,(x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha)$. Такимъ образомъ получится равенство:

$$C\,(\omega_\tau - \omega_1) = -J_1\,(x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha) \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Согласно съ тѣмъ, что сказано въ предыдущемъ параграфѣ, въ моментъ τ окончанія 1-го акта удара проэкція на нормаль N скорости точки шара K (или центра шара) должна быть равна проэкціи на нее скорости точки K тѣла массы M. Проэкціи первой на оси X-овъ и Y-овъ равны u_1, v_1, а проэкціи на тѣ же оси скорости точки тѣла M равны $U_1 - y_k \omega_\tau$, $V_1 + x_k \omega_\tau$, поэтому для момента τ должно имѣть мѣсто равенство:

$$u_1 \cos\alpha + v_1 \cos\beta = U_1 \cos\alpha + V_1 \cos\beta + \omega_\tau (x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha) \quad (32)$$

Раздѣливъ равенства (29) на m, умноживъ 1-е на $\cos\alpha$, второе — на $\cos\beta$ и сложивъ, получимъ:

$$u_1 \cos\alpha + v_1 \cos\beta - (a \cos\alpha + b \cos\beta) = \frac{J_1}{m}.$$

Раздѣлимъ равенства (30) на M, равенство (31) на C и составимъ изъ нихъ слѣдующее:

$$U_1 \cos\alpha + V_1 \cos\beta + \omega_\tau (x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha) -$$

$$-(A \cos\alpha + \omega_1 (x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha)) = -\frac{J_1}{M} - \frac{J_1}{C}(x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha)^2.$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ на основаніи равенства (32) слѣдуетъ равенство:

$$J_1 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} + \frac{1}{C}(x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha)^2\right) =$$

$$= A \cos\alpha + \omega_1 (x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha) - (a \cos\alpha + b \cos\beta), \quad (33)$$

изъ котораго опредѣлится J_1.

Зная J_1, изъ равенствъ (29), (30), (31) опредѣлимъ u_1, v_1, U_1, V_1, ω_τ, а затѣмъ, зная коэффиціентъ возстановленія ε, изъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned} m(u_2 - u_1) &= J_1 \varepsilon \cos\alpha, \\ m(v_2 - v_1) &= J_1 \varepsilon \cos\beta, \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} M(U_2 - U_1) &= -J_1 \varepsilon \cos\alpha, \\ M(V_2 - V_1) &= -J_1 \varepsilon \cos\beta, \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (35)$$

$$C(\omega_2 - \omega_\tau) = -J_1 \varepsilon (x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha) \quad \dots \quad (36)$$

опредѣлимъ всѣ величины u_2, v_2, U_2, V_2, ω_2 послѣ окончанія удара.

Зная величину импульса J_1, можно и прямо опредѣлить скорости въ моментъ окончанія удара по формуламъ, получаемымъ черезъ сложеніе равенствъ (29), (30), (31) съ соотвѣтственными равенствами (34), (35), (36). Эти формулы—слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} m(u_2 - a) &= J_1 (1 + \varepsilon) \cos\alpha, \\ m(v_2 - b) &= + J_1 (1 + \varepsilon) \cos\beta, \\ M(U_2 - A) &= - J_1 (1 + \varepsilon) \cos\alpha, \\ M V_2 &= - J_1 (1 + \varepsilon) \cos\beta, \\ C(\omega_2 - \omega_1) &= - J_1 (1 + \varepsilon)(x_k \cos\beta - y_k \cos\alpha). \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (37)$$

§ 8. Ударъ шара о неподвижный однородный свободный брусъ перпендикулярно къ его длинѣ.

Изложенное въ предыдущемъ параграфѣ примѣнимъ къ частному случаю.

Брусъ однородный, имѣющій видъ прямоугольнаго параллелопипеда, длина котораго $2l$, ширина $2n$, толщина $2c$, находится въ покоѣ въ такомъ положеніи, что центръ инерціи его $Ц_1$ совпадаетъ съ началомъ координатъ, главная ось $2l$ совмѣщена съ осью X_1OX, главная ось $2n$ совмѣщена съ осью $У_1OУ$. Масса бруса равна M, моментъ инерціи C вокругъ оси OZ равенъ $M\,(l^2+n^2):3$.

Шаръ имѣетъ скорость b параллельно положительной оси $У$-овъ, направленіе скорости пересѣкаетъ ударяемую грань въ точкѣ K, координаты которой суть:

$$x_k,\ y_k = -n.$$

Зная коэффиціентъ возстановленія ε, опредѣлить окончательный результатъ удара.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ $a = 0$, $A = 0$, $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = -1$, $\omega_1 = 0$, то импульсъ J_1 по формулѣ (33) имѣетъ слѣдующую величину.

$$J_1 = \frac{Mm\,(l^2+n^2)\,b}{(M+m)\,(l^2+n^2)+3mx_k{}^2}.$$

По формуламъ (37) найдемъ, что u_2 и U_2 равны нулю, а прочія величины равны:

$$v_2 = b - \frac{J_1}{m}\,(1+\varepsilon),$$

$$V_2 = \frac{J_1}{M}\,(1+\varepsilon),$$

$$\omega_2 = \frac{3J_1x_k}{M(l^2+n^2)}\,(1+\varepsilon).$$

Если подставить сюда найденое выше выраженіе для J_1, то получимъ:

$$v_2 = b\,\frac{m\,(l^2+n^2)+3mx_k{}^2 - M\,(l^2+n^2)\,\varepsilon}{(M+m)\,(l^2+n^2)+3mx_k{}^2},$$

$$V_2 = \frac{m\,(l^2+n^2)\,b\,(1+\varepsilon)}{(M+m)\,(l^2+n^2)+3mx_k{}^2},$$

$$\omega_2 = \frac{3mbx_k\,(1+\varepsilon)}{(M+m)\,(l^2+n^2)+3mx_k{}^2}.$$

Изъ этихъ выраженій видно, что скорость центра бруса будетъ всегда направлена по положительной оси $OУ$, что, если $x_k > 0$, то угловая скорость ω_2 будетъ соотвѣтствовать вращенію слѣва на право, но скорость v_2

шара будетъ положительною или отрицательною, смотря потому будетъ ли $3mx_k^2$ болѣе $(M\varepsilon - m)(l^2 + n^2)$ или менѣе этой величины. Въ послѣднемъ случаѣ шаръ отразится обратно.

§ 9. Ударъ движущагося однороднаго бруса или параллелопипеда о вполнѣ неподвижное препятствіе, предполагая коэффиціентъ возстановленія равнымъ нулю.

Представимъ себѣ, что шаръ неподвиженъ и накрѣпко придѣланъ къ совершенно неподвижному массиву, масса котораго безконечно велика. Тогда въ формулахъ § 7-го можно положить a и b равными нулю и m равнымъ безконечно-большой величинѣ.

Положимъ, что однородный брусъ длины $2l$, ширины $2n$, толщины $2c$ въ моментъ удара находится въ слѣдующемъ положеніи: центръ инерціи $Ц_1$, бруса находится въ началѣ координатъ, главная ось $2l$ совмѣщена съ осью X_1OX, главная ось $2n$—съ осью $У_1OУ$. Шаръ, придѣланный къ неподвижному массиву, прикасается къ грани $y = n$ въ точкѣ K, координаты которой суть x_k и $y_k = n$. Скорость центра инерціи $Ц_1$, равная B, направлена по положительной оси $OУ$. Угловая скорость ω_1 вокругъ оси OZ соотвѣтствуетъ вращенію слѣва на право.

Изъ равенства (33) § 7, въ которомъ $A\cos\alpha$ надо замѣнить черезъ $B\cos\beta$, положить a и b равными нулю, $\cos\alpha$ равнымъ нулю и $\cos\beta$ равнымъ 1, а m равнымъ ∞, получимъ слѣдующую величину J_1

$$J_1 = \frac{M(B + \omega_1 x_k)(l^2 + n^2)}{l^2 + n^2 + 3x_k^2}.$$

Полагая ε равнымъ нулю, опредѣлимъ результатъ неупругаго удара о неподвижное препятствіе изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$M(V_1 - B) = -J_1, \quad C(\omega_\tau - \omega_1) = -J_1 x_k,$$

откуда

$$V_1 = B - \frac{J_1}{M}; \quad \omega_\tau = \omega_1 - \frac{3J_1 x_k}{M(l^2 + n^2)}.$$

Подставивъ сюда полученное выраженіе для J_1, будемъ имѣть слѣдующія выраженія скорости V_1 и угловой скорости ω_τ:

$$V_1 = \frac{3Bx_k - \omega_1(l^2 + n^2)}{l^2 + n^2 + 3x_k^2} x_k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

$$\omega_\tau = -\frac{3Bx_k - \omega_1(l^2 + n^2)}{l^2 + n^2 + 3x_k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

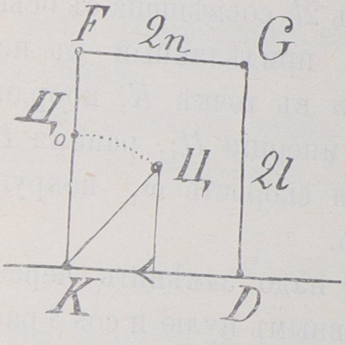
Изъ этихъ выраженій видно, что скорость V_1 будетъ равна нулю, если $x_k = 0$ и если

$$x_k = \frac{\omega_1 (l^2 + n^2)}{3B}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

въ послѣднемъ случаѣ и $\omega_\tau = 0$.

При x_k бо́льшихъ величины (40) скорость V_1 направлена по положительной оси OY, а угловая скорость ω_τ имѣетъ направленіе обратное угловой скорости ω_1; при x_k меньшихъ величины (40), скорость V_1 направлена по отрицательной оси OY_1 и угловая скорость ω_τ имѣетъ направленіе одинаковое съ ω_1.

Точка K представляетъ собою мгновенный центръ вращенія параллелопипеда. Если радіусъ шара ничтожно малъ, то точка K представляетъ собою остріе препятствія и вокругъ оси, проведенной черезъ K, и параллельной оси OZ параллелопипедъ начнетъ вращаться съ угловою скоростью ω_τ.



Черт. 35.

Мы разсмотримъ здѣсь слѣдующій вопросъ.

Однородный параллелопипедъ, размѣры котораго суть $2l$, $2n$ и $2c$, скользитъ по горизонтальной плоскости стороною DK (фиг. 35) съ нѣкоторою скоростью B по направленію DK. Въ точкѣ K встрѣчается твердое препятствіе, при встрѣчѣ съ которымъ тѣло получаетъ угловую скорость ω_τ.

Такъ какъ параллелопипедъ двигался поступательно, то угловая скорость была равна нулю и поэтому угловая скорость ω_τ получитъ по формулѣ (39) величину:

$$\omega_\tau = -\frac{3Bl}{4l^2 + n^2},$$

потому что теперь $x_k = l$.

Съ этою угловою скоростью тѣло вращается вокругъ ребра K и можетъ опрокинуться. Спрашивается, при какой скорости B является возможность опрокидыванія.

Такое опрокидываніе наступаетъ послѣ того, когда центръ $Ц$ получитъ вертикальное положеніе $KЦ_0$.

Подъ вліяніемъ вѣса Mg тѣла, приложеннаго къ точкѣ M, живая сила вращающагося тѣла постепенно уменьшается.

При вращеніи тѣла вокругъ неподвижной оси живая сила его равна половинѣ произведенія момента инерціи вокругъ этой оси на квадратъ угловой скорости. Такъ какъ моментъ инерціи вокругъ оси, проходящей черезъ K, равенъ

$$\frac{M}{3}(l^2 + n^2) + M \,.\, \overline{KЦ}^2 = \frac{4}{3} M (l^2 + n^2),$$

потому что $\overline{KЦ}^2 = l^2 + n^2$, то живая сила при какой либо угловой скорости ω будетъ:

$$\frac{2}{3} M (l^2 + n^2)\, \omega.$$

Съ другой стороны, если при такой угловой скорости высота центра $Ц$ надъ плоскостью KD будетъ y, то потенціалъ вѣса тѣла будетъ $-Mgy$.

По закону сохраненія полной энергіи:

$$\frac{2}{3} M (l^2 + n^2)\, \omega^2 = - Mgy + h,$$

гдѣ h произвольная постоянная, опредѣляемая по начальнымъ обстоятельствамъ, при которыхъ $y = l$, $\omega = \omega_\tau$; поэтому

$$\frac{2}{3} M (l^2 + n^2)\, \omega^2{}_\tau = - Mgl + h.$$

Вычтя первое равенство изъ второго, получимъ:

$$\frac{2}{3} M (l^2 + n^2)(\omega^2{}_\tau - \omega^2) = Mg (y - l).$$

Чтобы центръ $Ц$ принялъ положеніе $Ц_0$, когда $y = \sqrt{l^2 + n^2}$, достаточно, чтобы угловая скорость ω въ этомъ положеніи была равна нулю. Изъ предыдущаго же равенства тогда получимъ:

$$\frac{2}{3} M (l^2 + n^2)\, \omega^2{}_\tau = Mg (\sqrt{l^2 + n^2} - l).$$

Отсюда слѣдуетъ, что для опрокидыванія квадратъ угловой скорости ω_τ долженъ быть больше

$$\frac{3}{2}\, \frac{g (\sqrt{l^2 + n^2} - l)}{l^2 + n^2},$$

а, слѣдовательно, должно быть

$$\frac{9B^2 l^2}{(4l^2 + n^2)^2} > \frac{3}{2}\, \frac{g (\sqrt{l^2 + n^2} - l)}{l^2 + n^2}.$$

Слѣдовательно, параллелопипедъ опрокинется, запнувшись о препятствіе, если скорость его будетъ больше

$$\frac{4l^2 + n^2}{l} \sqrt{g\, \frac{(\sqrt{l^2 + n^2} - l)}{6 (l^2 + n^2)}}.$$

§ 10. Дѣйствіе мгновенной силы на твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось. Центръ удара. Баллистическій маятникъ.

Для опредѣленія дѣйствія мгновенныхъ силъ на какое либо твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось, слѣдуетъ взять квадратуры за время дѣйствія этихъ силъ отъ обѣихъ частей шести уравненій (20), находящихся на стр. 92-й. (§ 5. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси...)

Здѣсь, въ этомъ параграфѣ, имѣется въ виду разсмотрѣть дѣйствіе одной мгновенной силы на твердое тѣло, симметричное относительно плоскости, проведенной черезъ его центръ инерціи и имѣющее неподвижную ось, перпендикулярную къ этой плоскости, но не проходящую черезъ центръ инерціи. При этомъ предполагается, что мгновенная сила приложена къ нѣкоторой точкѣ той же плоскости и импульсъ ея заключается въ этой плоскости.

Кромѣ этого, мы здѣсь предположимъ, что точки опоры K_1 и K_2 оси вращенія находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ плоскости симметріи.

Въ § 4-мъ динамики твердыхъ тѣлъ на страницахъ 86 и 87 было показано, что, если твердое тѣло имѣетъ полную симметрію относительно нѣкоторой плоскости, то для всякой точки этой плоскости одна изъ главныхъ осей инерціи тѣла перпендикулярна къ этой плоскости слѣдовательно, произведенія инерціи D и E (стр. 93) для точки пересѣченія O оси вращенія съ плоскостью симметріи тѣла равны нулю. По этой причинѣ равны нулю и моменты количествъ движенія $(\textit{л}_0)_x$, $(\textit{л}_0)_y$ (стр. 92) количествъ движенія такого симметричнаго твердаго тѣла вокругъ осей OX, OY, заключащихся въ плоскости симметріи.

Предполагаемъ, что въ моментъ начала дѣйствія мгновенной силы тѣло было въ покоѣ, причемъ центръ инерціи его C находился на оси OY. Означимъ разстояніе центра C отъ O черезъ ξ_c. Моментъ инерціи тѣла вокругъ оси вращенія означимъ черезъ C_0, а моментъ инерціи вокругъ параллельной оси, проведенной черезъ центръ инерціи, означимъ черезъ C_c. Какъ уже упомянуто на стр. 97-й, по формулѣ (18) стр. 85-й (выражающей зависимость между моментами инерціи вокругъ параллельныхъ осей), зависимость между C_0 и C_c такая:

$$C_0 = C_c + M\xi_c^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

гдѣ M — масса тѣла.

Вслѣдствіе симметріи и тѣла и точекъ опоры относительно плоскости XOY, а также и вслѣдствіе того, что импульсъ мгновенной силы заключается въ этой плоскости, реакціи опоръ K_1 и K_2 должны быть равны и параллельны между собою, такъ что $\lambda_1 = \lambda_3$, $\lambda_2 = \lambda_4$, а потому проэкціи мгновенныхъ импульсовъ этихъ реакцій должны быть равны между собою. Означимъ проэкціи этихъ импульсовъ (за время отъ $t = 0$ до $t = \vartheta$) на оси OX и OY такъ:

$$\mu_1 = \mu_3 = \int_0^\vartheta \lambda_1\, dt = \int_0^\vartheta \lambda_3\, dt,$$

$$\mu_2 = \mu_4 = \int_0^\vartheta \lambda_2\, dt = \int_0^\vartheta \lambda_4\, dt.$$

Точка приложенія импульса пусть будетъ на оси OY, такъ что координаты ея суть $x = 0$, и y, а проэкціи импульса мгновенной силы на эти оси означимъ черезъ J_x и J_y. Моменты этого импульса вокругъ осей координатъ равны: вокругъ OX — нулю, вокругъ OY — нулю и вокругъ OZ равенъ $-yJ_x$.

Взявъ квадратуры за время дѣйствія мгновенной силы отъ обѣихъ частей равенствъ (20; 1), (20; 2), (20; 6) стр. 92-й, получимъ:

$$M\,\frac{dx_c}{dt} = J_x + 2\mu_1$$

$$M\,\frac{dy_c}{dt} = J_y + 2\mu_2$$

$$C_0\omega = -yJ_x;$$

квадратуры же отъ обѣихъ частей равенствъ (20, 4), (20, 5) даютъ тождества $0 = 0$.

Такъ какъ твердое тѣло можетъ только вращаться вокругъ оси OZ, а угловая скорость, сообщенная импульсомъ, равна ω и центръ инерціи находится на оси OY, то скорость его перпендикулярна къ оси Y и равна

$$\frac{dx_c}{dt} = -\xi_c\omega,$$

поэтому первое и второе изъ предыдущихъ равенствъ получатъ такой видъ:

$$-M\xi_c\omega = J_x + 2\mu_1$$

$$0 = J_y + 2\mu_2.$$

Для того, чтобы точки опоры K_1 и K_2 при дѣйствіи мгновенной силы не получили удара, то есть, чтобы $2\mu_2$ и $2\mu_1$ были равны нулю, необходимо, чтобы было:

$$J_y = 0, \quad -M\xi_c\omega = J_x,$$

слѣдовательно, мгновенная сила должна быть перпендикулярна къ прямой OC.

На основаніи же третьяго изъ полученныхъ равенствъ:

$$\omega = -\frac{yJ_x}{C_0},$$

поэтому:

$$-M\xi_c\omega = M\xi_c\,\frac{yJ_x}{C_0}.$$