

Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет транспорта»

УДК 539.3

**НЕСТЕРОВИЧ**  
**Алина Викторовна**

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ  
ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ**

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

по специальности  
01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Гомель, 2021

Работа выполнена в Учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Научный руководитель – **Старовойтов Эдуард Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительная механика» Учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Официальные оппоненты – **Можаровский Валентин Васильевич**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины;

**Поддубный Алексей Алексеевич**, кандидат физико-математических наук, доцент, начальник военно-транспортного факультета учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Оппонирующая организация – **Белорусский государственный университет**

Защита состоится 21 января 2022 г. в 14-00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.27.01 при Учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта» по адресу: 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34, ауд. 103, e-mail: smech@tut.by, телефон ученого секретаря совета (232) 95-39-61.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Автореферат разослан « 14 » декабря 2021 г.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций



Д.В. Леоненко

## ВВЕДЕНИЕ

Трехслойные элементы конструкций широко применяются в промышленности и строительстве, благодаря своим прочностным характеристикам при ограничении весовых параметров. Они состоят из двух тонких несущих слоев и относительно толстого заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. Несущие тонкие слои чаще всего изготавливаются из высокопрочных и жестких материалов, предназначенных для восприятия основной части механической нагрузки. Заполнитель, как связующий слой, необходим для образования цельной конструкции и предназначен для обеспечения перераспределения усилий между несущими слоями.

Основные положения в теории слоистых элементов конструкций были разработаны еще в середине прошлого века, что было вызвано бурным развитием авиакосмического комплекса, транспортного машиностроения, сети трубопроводов. Существенный вклад в развитие теории внесли А. Я. Александров, С. А. Амбарцумян, В. В. Болотин, А. Г. Горшков, Э. И. Григолюк, А. В. Дятлов, А. А. Ильюшин, В. И. Королев, С. Г. Лехницкий, В. В. Москвитин, Ю. Н. Новичков, Д. В. Тарлаковский, С. П. Тимошенко, Н. Г. Ченцов, J. K. Ebsiogly, A. C. Eringen, J. I. Foss, E. J. Plantemma, E. Reissner, J. Solvey, M. Stein, C.-T. Wang и ряд других исследователей. Весомый вклад в развитие теории внесли исследователи нашей страны: М. А. Журавков, Д. В. Леоненко, Г. И. Михасев, В. В. Можаровский, Ю. М. Плескачевский, В. Е. Старжинский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая.

На сегодняшний день опубликовано множество работ, посвященных этой проблематике. Исследования связаны с моделированием и расчетами многослойных, а также трехслойных стержней, пластин и оболочек различных конфигураций. Нагрузки, прикладываемые к элементам конструкций, принимались, как правило, осесимметричными. Необходимо отметить, что до настоящего времени не исследовалось деформирование трехслойных круговых пластин при неосесимметричном нагружении в своей плоскости. Подобные задачи возникают, например, при сжатии дисков между двумя плоскостями, воздействии косинусоидальных и синусоидальных нагрузок в плоскости пластины. Поэтому проблема разработки эффективных методик расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) многослойных и трехслойных элементов конструкций, находящихся под действием неосесимметричных нагрузок и температурных или других физико-механических полей является актуальной.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Связь работы с научными программами (проектами), темами**

Тема диссертации соответствует п. 1 «Цифровые информационно-коммуникационные и междисциплинарные технологии, основанные на них производства. Математика и моделирование сложных функциональных систем (технологических, биологических, социальных» перечня приоритетных направлений научной, научно-технической и инновационной деятельности

Республики Беларусь на 2021–2025 годы (утверждено Указом Президента Республики Беларусь от 7 мая 2020 г. № 156).

Работа входит составной частью в следующие программы:

- ГПНИ «Конвергенция-2025». Задание 1.7 «Математические модели процессов физически нелинейного деформирования композитных конструкций», № ГР 20212307, 01.04.2021–31.12.2025;

- ГБТ «Исследование процессов деформирования неоднородных систем» (01.01.2017–31.12.2021), выполняемой на кафедре «Строительная механика» Белорусского государственного университета транспорта.

### **Цель и задачи исследования**

*Целью исследования* является разработка и анализ механико-математических моделей деформирования упругих и физически нелинейных трехслойных круговых пластин под действием осесимметричных и неосесимметричных термосиловых нагрузок, приложенных в плоскости пластины, при различных граничных условиях.

*Задачи исследования:*

- изучить отечественные и зарубежные публикации последних лет о деформировании неоднородных элементов конструкций при неосесимметричных силовых нагрузках, провести анализ работ, посвященных деформированию пластин в своей плоскости;

- разработать постановки краевых задач о деформировании в своей плоскости физически линейных и нелинейных круглых трехслойных пластин под действием осесимметричных и неосесимметричных нагрузок с учетом влияния температуры, вывести уравнения равновесия и сформулировать граничные условия;

- разработать прямые и итерационные методы решения краевых задач об осесимметричном термосиловом деформировании в своей плоскости упругих и неупругих круглых трехслойных пластин, получить аналитические решения в конечном и итерационном видах ряда задач при нагрузках, полиномиально зависящих от радиальной координаты;

- разработать методы решения краевых задач о неосесимметричном термосиловом деформировании в своей плоскости упругих и неупругих круглых трехслойных пластин, основывающиеся на разложении искомого решения в ряд Фурье, а для неупругих пластин на методе упругих решений Ильюшина, получить аналитические решения при нагрузках, зависящих от радиальной и окружной координат;

- провести численную апробацию всех полученных аналитических решений и параметрический анализ НДС в зависимости от упругих параметров несущих слоев, физической нелинейности материалов, величины и вида нагрузки, температуры.

### **Научная новизна**

Разработаны новые механико-математические модели физически линейного и нелинейного деформирования в своей плоскости круглых трехслойных пластин, отличающиеся неосесимметричностью внешних нагрузок; получены новые аналитические решения ряда краевых задач при осесимметричных и

неосесимметричных нагрузках, зависящих от радиальной и окружной координат.

#### **Положения, выносимые на защиту**

- механико-математические модели упругого и физически нелинейного деформирования трехслойных круговых пластин в своей плоскости, учитывающие неосесимметричность внешних нагрузок;
- аналитические решения краевых задач для упругих круглых трехслойных пластин, деформируемых в своей плоскости осесимметричными и неосесимметричными косинусоидальными и синусоидальными термосиловыми нагрузками, полиномиально зависящими от радиальной координаты, при различных граничных условиях;
- аналитические рекуррентные решения краевых задач для физически нелинейных круглых трехслойных пластин, деформируемых в своей плоскости осесимметричными и неосесимметричными нагрузками при различных условиях закрепления контура;
- результаты численной апробации полученных аналитических решений и параметрического анализа НДС, включающие графики зависимости перемещений, деформаций и напряжений от вида и величины нагрузки, свойств материалов слоев пластины, температуры, типа граничных условий.

#### **Личный вклад соискателя ученой степени**

Все основные научные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Научный руководитель принимал участие в выборе направлений исследования, в обсуждении полученных результатов. Совместно с научным руководителем опубликовано две статьи [8, 9], двое материалов конференций и одни тезисы доклада [11, 12, 23].

#### **Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- VII Международной научно-практической конференции «Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса» (Гомель, 2015);
- XXII, XXV, XXVI и XXVII Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Вятчи, 2016, 2019, 2020, 2021);
- IV и VII Международных научных семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2016, 2018);
- IV Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов» (Гомель, 2018);
- конференции с международным участием «Современные вопросы механики сплошных сред – 2019» (Чебоксары, 2019);
- V Международной научно-технической конференции «Моделирование и инжиниринг механических и мехатронных систем» (Минск, 2019);

- IX и X Международных научно-практических конференциях «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 2019, 2020);
- XXII и XXIV Республиканских научных конференциях студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 2019, 2021);
- VI и VII Международных научно-технических конференциях «Теоретическая и прикладная механика» (Минск, 2020, 2021);
- VII Международной научно-практической конференции «Строительство и восстановление искусственных сооружений» (Гомель, 2020);
- VI и VII Международной научно-технической конференции «Теоретическая и прикладная механика» (Минск, 2020, 2021).

Отдельные результаты диссертации использованы в учебном процессе при чтении лекций по курсу «Теория упругости и пластичности» студентам специальности 1-70 01 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», также могут быть использованы в расчетной практике научно-технического центра комбайностроения ОАО «Гомсельмаш».

#### **Опубликование результатов диссертации**

По теме диссертации опубликовано 24 работы, в том числе 10 статей в научных изданиях, включенных в перечень ВАК, 12 материалов конференций, 2 тезисов докладов, общим объемом 6,4 авторских листа.

#### **Структура и объем диссертации**

Диссертационная работа состоит из введения, общей характеристики работы, перечня условных обозначений, четырех глав, заключения, библиографического списка, приложения. Полный объем диссертации составляет 144 страницы машинописного текста, в том числе: 93 рисунка, 2 таблицы, список использованных источников из 108 наименований на 8 страницах, список публикаций автора из 24 наименований на 3 страницах, приложения на 2 страницах.

### **ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

**В первой главе** приведен обзор публикаций исследователей, внесших существенный вклад в развитие теории слоистых элементов конструкций, также выполнен анализ исследований о деформировании трехслойных элементов конструкций за последние 10 лет.

Проведен обзор расчетных моделей трехслойных конструкций, базирующихся на различных кинематических и физических гипотезах. Показано, что в значительно меньшей степени изучено их деформирование при неосесимметричным нагрузкам. К подобным неисследованным проблемам, в частности, относятся краевые задачи о неосесимметричном нагружении в своей плоскости круглых упругих и физически нелинейных трехслойных пластин, решению которых и посвящена данная работа. Изгибное деформирование, которое может при этом возникать в несимметричной по толщине пластине, в дальнейшем не исследуется и рассматривается только плоская часть решения задачи.

**Во второй главе** предложена механико-математическая модель термомупругого осесимметричного деформирования трехслойной круговой пластины

в своей плоскости (рисунок 1). Приведены постановки краевых задач в усилиях и перемещениях, сформулированы граничные условия при различных видах закрепления контура, получены аналитические решения и проведена их численная апробация, предложен сравнительный анализ перемещений от степени полиномиальной зависимости нагрузки от радиальной координаты.

Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , которая связывается со срединной плоскостью заполнителя. В данной плоскости действует результирующая непрерывно распределенная осесимметричная нагрузка, проекции которой на радиальную и тангенциальную оси координат  $p_r(r), p_\varphi(r)$ .

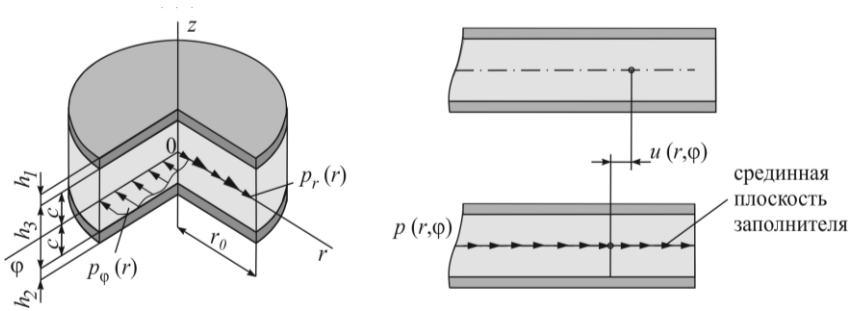


Рисунок 1. – Расчетная схема при осесимметричном нагружении

В тонких несущих слоях толщиной ( $h_1 \neq h_2$ ) и в относительно толстом заполнителе ( $h_3 = 2c$ ) в процессе деформирования нормаль к срединной плоскости слоя не изменяет своей длины, остается прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. Между слоями – склейка. Предполагается, что пластина находится в однородном температурном поле  $T$ . За искомые функции принимаются радиальные  $u_r(r)$  и тангенциальные  $u_\varphi(r)$  перемещения в слоях.

Предполагается, что физические соотношения в слоях пластины определяются законом Гука в девиаторно-шаровой форме с учетом температуры:

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta}^{(k)} &= 2G_k(T) \vartheta_{\alpha\beta}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_0^{(k)} \Delta T) \quad (\alpha, \beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $s_{\alpha\beta}^{(k)}, \vartheta_{\alpha\beta}^{(k)}, \sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций в  $k$ -м слое;

$\alpha_0^{(k)}$  – коэффициент линейного температурного расширения;

$\Delta T$  – приращение температуры;

$G_k(T), K_k(T)$  – модули сдвига и объемной деформации материалов слоев.

Система дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемой пластины получена в перемещениях с помощью вариационного принципа Лагранжа и закона Гука (1):

$$u_{r,r} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} = -\frac{1}{a_1} p_r, \quad u_{\varphi,r} + \frac{u_{\varphi,r}}{r} - \frac{u_{\varphi}}{r^2} = -\frac{1}{a_3} p_{\varphi}, \quad (2)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате;

$L_2$  – дифференциальный оператор (оператор Бесселя) и коэффициенты  $a_i$

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k \left( K_k + \frac{4}{3} G_k \right), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 h_k G_k.$$

Краевая задача замыкается добавлением к уравнениям (2) граничных условий на контуре и условий ограниченности решения в центре пластины.

При закрепленном контуре пластины ( $r = r_0$ ) должны выполняться условия

$$u_r(r_0) = 0, \quad u_{\varphi}(r_0) = 0. \quad (3)$$

При свободном контуре ограничения накладываются на внутренние обобщенные усилия:

$$T_{rr}(r_0) = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{rr}^{(k)} dz = a_1 u_{r,r}(r_0) + \frac{a_2}{r} u_r(r_0) - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_0^{(k)} \int_{h_k} K_k \Delta T dz = 0, \\ T_{r\varphi}(r_0) = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{r\varphi}^{(k)} dz = \frac{a_3}{r} (r_0 u_{\varphi,r}(r_0) - u_{\varphi}(r_0)) = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } a_2 = \sum_{k=1}^3 h_k \left( K_k - \frac{2}{3} G_k \right).$$

Решение системы (2) получено методом прямого интегрирования:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{a_1 r} \int_0^r \int_0^r p_r dr dr, \quad u_{\varphi} = C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{1}{a_3 r} \int_0^r \int_0^r p_{\varphi} dr dr, \quad (5)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  – константы интегрирования.

При закрепленном контуре

$$C_1 = \frac{1}{a_1 r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^r p_r dr dr, \quad C_2 = C_4 = 0, \quad C_3 = \frac{1}{a_3 r_0^2} \int_0^{r_0} \int_0^r p_{\varphi} dr dr.$$

*Численные результаты* получены для пластины со слоями Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т при нагрузках  $p_r = 30$  МПа,  $p_{\varphi} = 30$  МПа, радиус  $r_0 = 1$  м, толщины слоев, отнесенные к радиусу  $h_1 = h_2 = 0,02$ ,  $h_3 = 0,4$ , изменения параметров упругости материалов несущих слоев при повышении температуры определялись формулой Белла.

Рисунок 2 иллюстрирует изменение радиальных  $u_r$  – (а) и тангенциальных  $u_{\varphi}$  – (б) перемещений вдоль радиуса пластины при закрепленном контуре и различных температурах. При повышении температуры на 80 К и 180 К перемещения увеличиваются примерно на 9,6 % и 18,7 %.



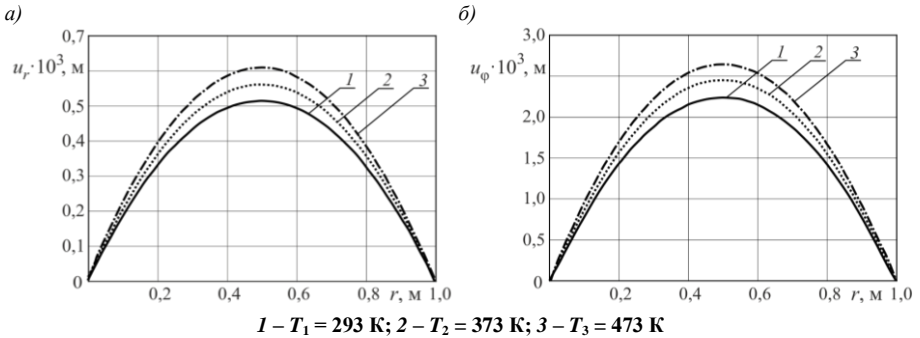


Рисунок 2. – Изменение перемещений вдоль радиуса пластины

Изменение радиальных напряжений  $\sigma_{rr}$  в несущих слоях пластины – (а) и в заполнителе – (б) иллюстрирует рисунок 3. При  $T = 333 \text{ K}$  напряжения в центре в несущих слоях остаются положительными, на контуре они отрицательные, но увеличиваются по модулю примерно 2,0 раза. В заполнителе наблюдается подобная картина – напряжения сдвигаются в отрицательную область и в центре пластины, уменьшаются по величине примерно в 3,4 раза.

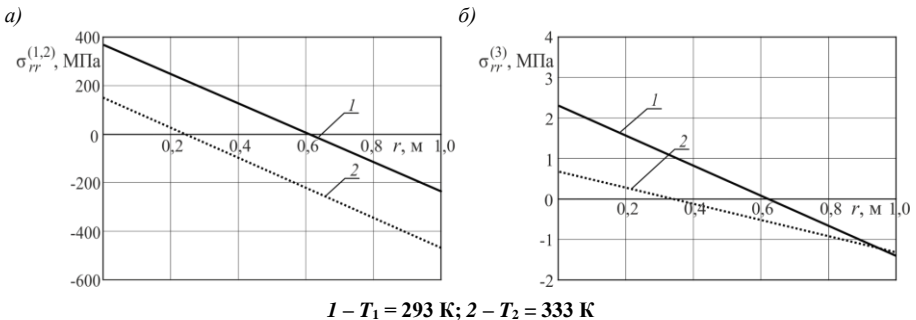


Рисунок 3. – Радиальные напряжения  $\sigma_{rr}$  в несущих слоях – (а), в заполнителе – (б)

Также в диссертации проведен анализ перемещений при различных видах зависимости интенсивности нагрузки от радиальной координаты (постоянной, линейной и квадратичной). При нагрузках с одинаковой равнодействующей максимальные перемещения увеличиваются при стягивании нагрузки к центру пластины. В случае *свободного контура* влияние температуры сказывается в гораздо большей степени, чем при закрепленном – перемещения возрастают в 1,7 раза, напряжения в несущих слоях практически не изменяются, в заполнителе при повышении температуры до 323 K – увеличиваются на 29 %.

**В третьей главе** приведены постановки и получены аналитические решения краевых задач о неосесимметричном нагружении упругой трехслойной круговой пластины в своей плоскости при закрепленном и свободном контурах. Предполагается, что к срединной плоскости заполнителя приложена непрерывно распределенная неосесимметричная нагрузка  $p_r(r, \varphi)$ ,  $p_\varphi(r, \varphi)$ .

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая перемещения в рассматриваемой пластине, имеет вид:

$$\begin{aligned}
L_2(u_r) + \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r,\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi,\varphi x} - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi,\varphi} &= -\frac{p_r r_0^2}{a_1}, \\
L_2(u_\varphi) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r,\varphi} + \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r,\varphi} &= -\frac{p_r r_0^2}{a_3},
\end{aligned} \quad (6)$$

где  $x = r/r_0$  – безразмерная радиальная координата.

Краевая задача для определения перемещений в круговой трехслойной пластине при неосесимметричном нагружении замыкается добавлением к уравнениям (6) граничных условий на контуре типа (3), (4) и условий ограниченности решения в центре пластины.

Следует отметить, что температура в явном виде в уравнения равновесия (6) не входит, она влияет на величину модулей упругости материалов слоев и содержится в граничных условиях (4).

Для решения системы уравнений (6) искомые перемещения и нагрузки раскладываются в тригонометрические ряды Фурье:

$$\begin{aligned}
u_r(x, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ u_m^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + u_m^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right], \\
u_\varphi(x, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ u_{\varphi n}^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + u_{\varphi n}^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right], \\
p_r(x, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ p_m^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + p_m^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right], \\
p_\varphi(x, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ p_{\varphi n}^{(1)}(x) \cos(n\varphi) + p_{\varphi n}^{(2)}(x) \sin(n\varphi) \right],
\end{aligned} \quad (7)$$

где  $u_m^{(1)}(x)$ ,  $u_m^{(2)}(x)$ ,  $u_{\varphi n}^{(1)}(x)$ ,  $u_{\varphi n}^{(2)}(x)$  – искомые составляющие перемещений;

$p_m^{(1)}(x)$ ,  $p_m^{(2)}(x)$ ,  $p_{\varphi n}^{(1)}(x)$ ,  $p_{\varphi n}^{(2)}(x)$  – составляющие внешних нагрузок

$$p_m^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(x, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad p_m^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(x, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi,$$

$$p_{\varphi n}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(x, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad p_{\varphi n}^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(x, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi.$$

Система из четырех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для определения искомых функций  $u_m^{(1)}(x)$ ,  $u_m^{(2)}(x)$ ,  $u_{\varphi n}^{(1)}(x)$ ,  $u_{\varphi n}^{(2)}(x)$  получена после подстановки выражений (7) в уравнения (6):

$$\begin{aligned}
L_2(u_m^{(1)}(x)) - \frac{a_3 n^2}{a_1 x^2} u_m^{(1)}(x) + \frac{(a_2 + a_3)n}{a_1 x} u_{\varphi n}^{(2),x}(x) - \frac{(a_1 + a_3)n}{a_1 x^2} u_{\varphi n}^{(2)}(x) &= -\frac{r_0^2}{a_1} p_m^{(1)}(x), \\
L_2(u_{\varphi n}^{(2)}(x)) - \frac{a_1 n^2}{a_3 x^2} u_{\varphi n}^{(2)}(x) - \frac{(a_2 + a_3)n}{a_3 x} u_m^{(1),x}(x) - \frac{(a_1 + a_3)n}{a_3 x^2} u_m^{(1)}(x) &= -\frac{r_0^2}{a_3} p_{\varphi n}^{(2)}(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2\left(u_m^{(2)}(x)\right) - \frac{a_3 n^2}{a_1 x^2} u_m^{(2)}(x) - \frac{(a_2 + a_3)n}{a_1 x} u_{\varphi n, x}^{(1)}(x) + \frac{(a_1 + a_3)n}{a_1 x^2} u_{\varphi n}^{(1)}(x) &= -\frac{r_0^2}{a_1} p_m^{(2)}(x), \\
L_2\left(u_{\varphi n}^{(1)}(x)\right) - \frac{a_1 n^2}{a_3 x^2} u_{\varphi n}^{(1)}(x) + \frac{(a_2 + a_3)n}{a_3 x} u_{m, x}^{(2)}(x) + \frac{(a_1 + a_3)n}{a_3 x^2} u_m^{(2)}(x) &= -\frac{r_0^2}{a_3} p_{\varphi n}^{(1)}(x).
\end{aligned} \tag{8}$$

При  $n = 0$  уравнения (8) соответствуют деформированию пластины от осесимметричной составляющей нагрузки. Их решение имеет вид типа (5).

В дальнейшем, общее решение краевой задачи представляется в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы  $u_{m0}^{(1)}$ ,  $u_{\varphi n0}^{(1)}$ ,  $u_{m0}^{(2)}$ ,  $u_{\varphi n0}^{(2)}$  и частного решения системы (8), которое зависит от вида правых частей уравнений. Решения однородной системы при  $n \geq 1$  получены с помощью программного пакета Maple. Их вид в случаях  $n = 1$  и  $n > 1$  будет различаться. В первом случае имеем

$$\begin{aligned}
u_{r10}^{(1)} &= -C_{11} + C_{12} \left( \frac{a_1 + a_2}{3a_1 - a_2} - \ln x \right) + C_{13} x^{-2} + C_{14} \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2} x^2, \\
u_{\varphi10}^{(2)} &= C_{11} + C_{12} \ln x + C_{13} x^{-2} + C_{14} x^2, \\
u_{r10}^{(2)} &= C_{15} - C_{16} \left( \frac{a_1 + a_2}{3a_1 - a_2} - \ln x \right) - C_{17} x^{-2} - C_{18} \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2} x^2, \\
u_{\varphi10}^{(1)} &= C_{15} + C_{16} \ln x + C_{17} x^{-2} + C_{18} x^2.
\end{aligned}$$

При  $n > 1$  решение следующее:

$$\begin{aligned}
u_{m0}^{(1)} &= -C_{n1} x^{n-1} + C_{n2} h_{n1} x^{-n+1} + C_{n3} x^{-n-1} + C_{n4} h_{n2} x^{n+1}, \\
u_{\varphi n0}^{(2)} &= C_{n1} x^{n-1} + C_{n2} x^{-n+1} + C_{n3} x^{-n-1} + C_{n4} x^{n+1}, \\
u_{m0}^{(2)} &= C_{n5} x^{n-1} - C_{n6} h_{n1} x^{-n+1} - C_{n7} x^{-n-1} - C_{n8} h_{n2} x^{n+1}, \\
u_{\varphi n0}^{(1)} &= C_{n5} x^{n-1} + C_{n6} x^{-n+1} + C_{n7} x^{-n-1} + C_{n8} x^{n+1},
\end{aligned}$$

где  $x^{n-1}$ ,  $x^{-n+1}$ ,  $x^{-n-1}$ ,  $x^{n+1}$  – фундаментальные решения однородной системы;

$$h_{n1} = \frac{(a_1 + a_2)n + 2(a_1 - a_2)}{(a_1 + a_2)n - 4a_1}, \quad h_{n2} = -\frac{(a_1 + a_2)n - 2(a_1 - a_2)}{(a_1 + a_2)n + 4a_1}.$$

В диссертации решены краевые задачи для пластин с закрепленными и свободным контурами при различных неосесимметричных радиальных и тангенциальных нагрузках.

В качестве одного из примеров рассмотрим случай деформирования пластины с *закрепленным контуром* косинусоидальной нагрузкой с постоянной радиальной составляющей:

$$p_r(r, \varphi) = p_{r1} \cos \varphi \quad (p_{r1} = \text{const}), \quad p_{\varphi} = 0. \tag{9}$$

Соответствующие системы уравнений (8) при  $n \neq 1$  будут однородными. С принятыми нулевыми граничными условиями они дают тривиальные решения. Если  $n = 1$ , то в первом уравнении (8) появляется ненулевая правая часть

$$\begin{aligned} L_2 \left( u_{r1}^{(1)}(x) \right) - \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r1}^{(1)}(x) + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\phi 1, x}^{(2)}(x) - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\phi 1}^{(2)}(x) &= -\frac{r_0^2}{a_1} p_{r1}, \\ L_2 \left( u_{\phi 1}^{(2)}(x) \right) - \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\phi 1}^{(2)}(x) - \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r1, x}^{(1)}(x) - \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r1}^{(1)}(x) &= 0, \\ L_2 \left( u_{r1}^{(2)}(x) \right) - \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r1}^{(2)}(x) - \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\phi 1, x}^{(1)}(x) + \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\phi 1}^{(1)}(x) &= 0, \\ L_2 \left( u_{\phi 1}^{(1)}(x) \right) - \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\phi 1}^{(1)}(x) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r1, x}^{(2)}(x) + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r1}^{(2)}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Третье и четвертое уравнения в (10) образуют однородную систему, которая при нулевых граничных условиях дает тривиальное решение  $u_{r1}^{(2)} \equiv u_{\phi 1}^{(1)} \equiv 0$ .

Первое и второе уравнения в (10) образуют неоднородную систему, решение которой

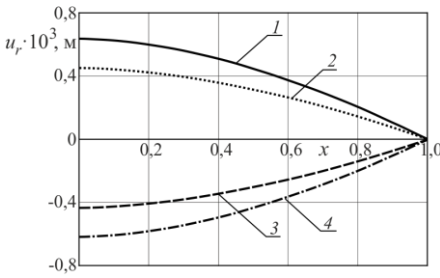
$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)} &= -C_{11} + C_{12} \left( \frac{a_1 + a_2}{3a_1 - a_2} - \ln x \right) + C_{13} x^{-2} + C_{14} \frac{a_1 - 3a_2}{5a_1 + a_2} x^2 - \\ &- \left[ (51a_1^2 + 14a_1 a_2 + 11a_2^2) + 4(a_1 - 3a_2)(5a_1 + a_2) \ln x \right] \frac{p_{r1} r_0^2 x^2}{64a_1 (a_1 - a_2)(5a_1 + a_2)}, \\ u_{\phi 1}^{(2)} &= C_{11} + C_{12} \ln x + C_{13} x^{-2} + C_{14} x^2 + \frac{5a_1 + a_2}{64a_1 (a_1 - a_2)} (5 - 4 \ln x) p_{r1} r_0^2 x^2. \end{aligned}$$

Искомые перемещения в соответствии с формулами (7) будут

$$\begin{aligned} u_r(x, \varphi) &= \left[ \frac{19a_1^2 - 14a_1 a_2 - a_2^2}{3a_1 - a_2} (1 - x^2) - 2(a_1 - 3a_2) x^2 \ln x \right] \frac{p_{r1} r_0^2 \cos \varphi}{32a_1 (a_1 - a_2)}, \\ u_\varphi(x, \varphi) &= - \left[ \frac{19a_1^2 - 14a_1 a_2 - a_2^2}{3a_1 - a_2} (1 - x^2) + 2(5a_1 + a_2) x^2 \ln x \right] \frac{p_{r1} r_0^2 \sin \varphi}{32a_1 (a_1 - a_2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

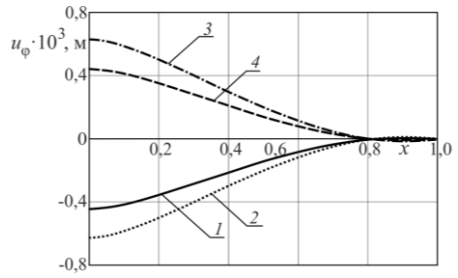
Численные исследования проведены при нагрузке (9) ( $p_{r1} = 10$  МПа) в соответствии с формулами (11). На рисунке 4 изображены радиальные перемещения  $u_r(x, \varphi)$  при различных значениях угловой координаты ( $T = 293$  К). Положительный знак соответствует перемещению точек пластины вдоль радиуса от центра, отрицательный – к центру.

Рисунок 5 иллюстрирует изменение тангенциальных перемещений  $u_\varphi(x, \varphi)$  вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты ( $T = 293$  К). Их экстремальные значения совпадают по модулю с радиальными и достигаются в центре пластины.



1 –  $\varphi = 0, 2\pi$ ; 2 –  $\varphi = \pi/4, 7\pi/4$ ;  
3 –  $\varphi = 3\pi/4, 5\pi/4$ ; 4 –  $\varphi = \pi$

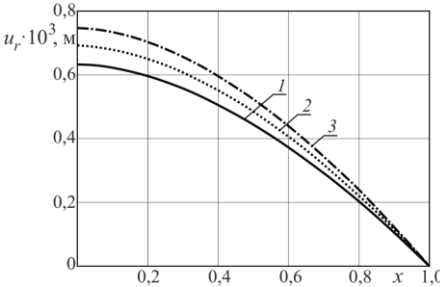
Рисунок 4. – Изменение радиальных перемещений  $u_r(x, \varphi)$  при  $T = 293$  К



1 –  $\varphi = \pi/4, 3\pi/4$ ; 2 –  $\varphi = \pi/2$ ;  
3 –  $\varphi = 5\pi/4, 7\pi/4$ ; 4 –  $\varphi = 3\pi/2$

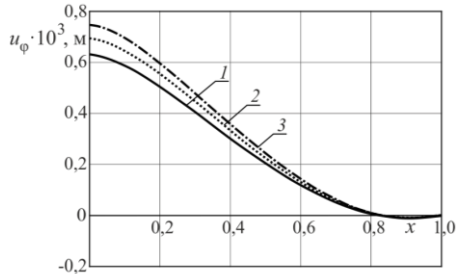
Рисунок 5. – Изменение тангенциальных перемещений  $u_\varphi(x, \varphi)$  при  $T = 293$  К

Рисунки 6 и 7 иллюстрируют влияние температуры на максимальные радиальные  $u_r(x, 0)$  и тангенциальные  $u_\varphi(x, 3\pi/2)$  перемещения. При повышении температуры на 80 К и 180 К они увеличиваются примерно на 9 % и 18 %.



1 –  $T = 293$  К; 2 –  $T = 373$  К; 3 –  $T = 473$  К

Рисунок 6. – Радиальные термосиловые перемещения  $u_r(x, 0)$



1 –  $T = 293$  К; 2 –  $T = 373$  К; 3 –  $T = 473$  К

Рисунок 7. – Тангенциальные термосиловые перемещения  $u_\varphi(x, 3\pi/2)$

Аналитические и численные результаты, полученные для упругой трехслойной пластины при неосесимметричном нагружении в ее плоскости, показали обоснованность применения метода Фурье для решения соответствующих краевых задач. При нагревании перемещения и деформации в пластине, заземленной по контуру, растут незначительно, напряжения при этом существенно увеличиваются по модулю. При свободном контуре наоборот: напряжения в несущих слоях изменяются мало, в заполнителе возрастают – в 1,5 раза, максимальные радиальные перемещения при повышении температуры на 80 К увеличиваются в несущих слоях в 3,4 раза, в заполнителе – незначительно, окружные перемещения – изменяются незначительно.

В четвертой главе приведены постановки и получены аналитические рекуррентные решения краевых задач об осесимметричном и неосесимметричном термосиловом деформировании физически нелинейной трехслойной круговой пластины в своей плоскости, проведена численная апробация решений.

Предполагается, что в процессе деформирования материалы несущих слоев проявляют упругопластические свойства, наполнитель – нелинейно упругий. Связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций Ильюшина с учетом температуры:

$$s_{\alpha\beta}^{(k)} = 2G_k(T) \left(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)\right) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T) \left(\varepsilon^{(k)} - \alpha_0^{(k)} \Delta T\right) \quad (\alpha, \beta = r, \varphi; k = 1, 2, 3), \quad (12)$$

где  $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)$  – функции пластичности Ильюшина в несущих слоях ( $k = 1, 2$ );

$\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T)$  – универсальная функция нелинейности наполнителя;

$\varepsilon_u^{(k)}$  – интенсивность деформаций.

*Осесимметричное нагружение.* Для решения применяется метод последовательных линейных приближений, основанный на методе упругих решений Ильюшина. Соответствующая итерационная система дифференциальных уравнений равновесия имеет решение типа (2), с учетом ограниченности перемещений в начале координат:

$$u_r^{(m)} = C_1^{(m)} x - \frac{r_0^2}{a_1 x} \int_0^x \int_0^x (p_r - p_{r\varphi}^{(m-1)}) dx dx,$$

$$u_\varphi^{(m)} = C_3^{(m)} x - \frac{r_0^2}{a_3 x} \int_0^x \int_0^x (p_\varphi - p_{\varphi\varphi}^{(m-1)}) dx dx, \quad (13)$$

где  $m$  – номер приближения;

$p_{r\varphi}^{(m-1)}$ ,  $p_{\varphi\varphi}^{(m-1)}$  – дополнительные «внешние» нагрузки, служащие поправками на нелинейность материалов слоев, которые на первом шаге полагаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения с использованием соотношений (12);

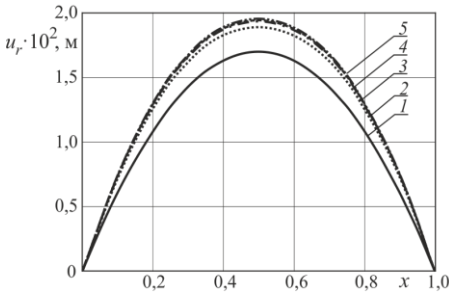
$C_1^{(m)}$ ,  $C_3^{(m)}$  – константы интегрирования, которые при закрепленном контуре

$$C_1^{(m)} = \frac{r_0^2}{a_1} \int_0^1 \int_0^1 (p_r - p_{r\varphi}^{(m-1)}) dx dx, \quad C_3^{(m)} = \frac{r_0^2}{a_3} \int_0^1 \int_0^1 (p_\varphi - p_{\varphi\varphi}^{(m-1)}) dx dx.$$

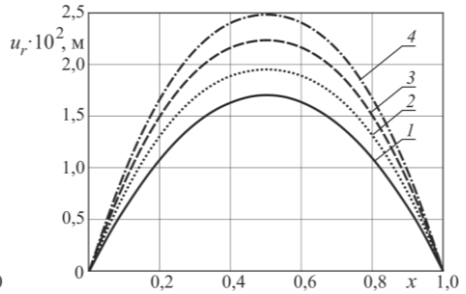
*Численные результаты* получены с использованием решения (13) для пластины единичного радиуса, материалы слоев которой Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т, при интенсивности нагрузки  $p_{r0} = 1000$  МПа,  $p_{\varphi0} = 0$ , с толщинами слоев  $h_1 = h_2 = 0,02$  м,  $h_3 = 0,4$  м.

Рисунок 8 иллюстрирует практическую сходимость итерационного метода. За искомое решение принято 5-е приближение радиального перемещения  $u_r(r)$ , которое отличается от предыдущего на 0,14 % и от упругого решения на 14,7 %. Тангенциальные перемещения в рассматриваемом случае отсутствуют.

На рисунке 9 изображены изменения радиальных перемещений  $u_r(r)$  при различных температурах. При нагревании расчетные максимальные перемещения увеличивается на 15% ( $T = 373$  К) и 28 % ( $T = 473$  К) по сравнению с упругопластической пластиной при  $T = 293$  К.



1, 2, 3, 4, 5 – номер итерации  
Рисунок 8. – Сходимость итерационного метода ( $T = 293 \text{ K}$ )



1 – упругая пластина ( $T = 293 \text{ K}$ ); 2, 3, 4 – упругопластическая ( $T = 293 \text{ K}, 373 \text{ K}, 473 \text{ K}$ )  
Рисунок 9. – Радиальные перемещения  $u_r$  в физически нелинейной пластине

Распределение областей физической нелинейности (серая заливка) в поперечном сечении пластины при различных температурах изображено на рисунке 10:  $T = 293 \text{ K}$  – (а),  $T = 373 \text{ K}$  – (б). Материалы несущих слоев полностью находятся в упругопластическом состоянии. Нагревание пластины приводит к существенному росту областей физической нелинейности в заполнителе.

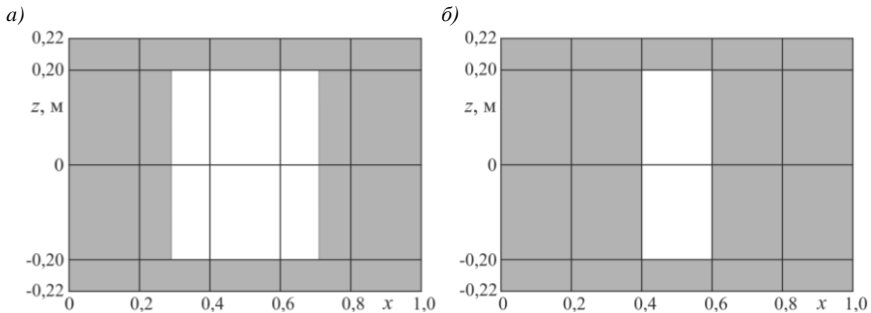


Рисунок 10. – Распределение областей пластичности и физической нелинейности при температуре  $T = 293 \text{ K}$  – (а),  $T = 373 \text{ K}$  – (б) (заделка контура)

В диссертации показано, что при *свободном опирании* контура перемещения и деформации существенно больше, и за счет повышения температуры они возрастают в 1,6 раза.

При *неосесимметричном нагружении* круговой физически нелинейной трехслойной пластины итерационная система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях следующая:

$$L_2(u_r^{(m)}) + \frac{a_3}{a_1 x^2} u_{r, \varphi\varphi}^{(m)} + \frac{a_2 + a_3}{a_1 x} u_{\varphi, \varphi x}^{(m)} - \frac{a_1 + a_3}{a_1 x^2} u_{\varphi, \varphi}^{(m)} = \frac{r_0^2}{a_1} (-p_r + p_{r\varphi}^{(m-1)}),$$

$$L_2(u_{\varphi}^{(m)}) + \frac{a_2 + a_3}{a_3 x} u_{r, x\varphi}^{(m)} + \frac{a_1}{a_3 x^2} u_{\varphi, \varphi\varphi}^{(m)} + \frac{a_1 + a_3}{a_3 x^2} u_{r, \varphi}^{(m)} = \frac{r_0^2}{a_3} (-p_{\varphi} + p_{\varphi\varphi}^{(m-1)}). \quad (14)$$

Искомые перемещения, внешние и дополнительные нагрузки раскладываются в тригонометрические ряды Фурье. Подставив полученные выражения в систему (14) и проведя необходимые преобразования, получим систему из четырех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений для определения искомых функций  $u_m^{(1)(m)}(x)$ ,  $u_m^{(2)(m)}(x)$ ,  $u_{\varphi n}^{(1)(m)}(x)$ ,  $u_{\varphi n}^{(2)(m)}(x)$ :

$$\begin{aligned} L_2 \left( u_m^{(1)(m)}(x) \right) - \frac{a_3 n^2}{a_1 x^2} u_m^{(1)(m)}(x) + \frac{(a_2 + a_3)n}{a_1 x} u_{\varphi n}^{(2)(m)}, x(x) - \frac{(a_1 + a_3)n}{a_1 x^2} u_{\varphi n}^{(2)(m)}(x) &= \\ &= \frac{r_0^2}{a_1} \left( -p_m^{(1)}(x) + p_{\text{рон}}^{(1)(m-1)}(x) \right), \\ L_2 \left( u_{\varphi n}^{(2)(m)}(x) \right) - \frac{a_1 n^2}{a_3 x^2} u_{\varphi n}^{(2)(m)}(x) - \frac{(a_2 + a_3)n}{a_3 x} u_m^{(1)(m)}, x(x) - \frac{(a_1 + a_3)n}{a_3 x^2} u_m^{(1)(m)}(x) &= \\ &= \frac{r_0^2}{a_3} \left( -p_{\varphi n}^{(2)}(x) + p_{\varphi \text{он}}^{(2)(m-1)}(x) \right), \\ L_2 \left( u_m^{(2)(m)}(x) \right) - \frac{a_3 n^2}{a_1 x^2} u_m^{(2)(m)}(x) - \frac{(a_2 + a_3)n}{a_1 x} u_{\varphi n}^{(1)(m)}, x(x) + \frac{(a_1 + a_3)n}{a_1 x^2} u_{\varphi n}^{(1)(m)}(x) &= \\ &= \frac{r_0^2}{a_1} \left( -p_m^{(2)}(x) + p_{\text{рон}}^{(2)(m-1)}(x) \right), \\ L_2 \left( u_{\varphi n}^{(1)(m)}(x) \right) - \frac{a_1 n^2}{a_3 x^2} u_{\varphi n}^{(1)(m)}(x) + \frac{(a_2 + a_3)n}{a_3 x} u_m^{(2)(m)}, x(x) + \frac{(a_1 + a_3)n}{a_3 x^2} u_m^{(2)(m)}(x) &= \\ &= \frac{r_0^2}{a_3} \left( -p_{\varphi n}^{(1)}(x) + p_{\varphi \text{он}}^{(1)(m-1)}(x) \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $p_m^{(1)}$ ,  $p_m^{(2)}$ ,  $p_{\varphi n}^{(1)}$ ,  $p_{\varphi n}^{(2)}$ ,  $p_{\text{рон}}^{(1)(m-1)}$ ,  $p_{\text{рон}}^{(2)(m-1)}$ ,  $p_{\varphi \text{он}}^{(1)(m-1)}$ ,  $p_{\varphi \text{он}}^{(2)(m-1)}$  – составляющие внешних и дополнительных нагрузок.

В результате решения системы (15) искомые асимметричные составляющие перемещений при  $n > 1$  на  $m$ -ом шаге будут

$$\begin{aligned} u_m^{(1)(n)} &= -C_{m1}^{(n)} x^{m-1} + C_{m2}^{(n)} h_{m1} x^{-m+1} + C_{m3}^{(n)} x^{-m-1} + C_{m4}^{(n)} h_{m2} x^{m+1} + u_m^{(1)(n)*}, \\ u_{\varphi n}^{(2)(n)} &= C_{m1}^{(n)} x^{m-1} + C_{m2}^{(n)} x^{-m+1} + C_{m3}^{(n)} x^{-m-1} + C_{m4}^{(n)} x^{m+1} + u_{\varphi n}^{(2)(n)*}, \\ u_m^{(2)(n)} &= C_{m5}^{(n)} x^{m-1} - C_{m6}^{(n)} h_{m1} x^{-m+1} - C_{m7}^{(n)} x^{-m-1} - C_{m8}^{(n)} h_{m2} x^{m+1} + u_m^{(2)(n)*}, \\ u_{\varphi n}^{(1)(n)} &= C_{m5}^{(n)} x^{m-1} + C_{m6}^{(n)} x^{-m+1} + C_{m7}^{(n)} x^{-m-1} + C_{m8}^{(n)} x^{m+1} + u_{\varphi n}^{(1)(n)*}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $C_{n1}^{(m)}, \dots, C_{n8}^{(m)}$  – константы интегрирования;

$u_m^{(1)(m)*}$ ,  $u_{\varphi n}^{(1)(m)*}$ ,  $u_m^{(2)(m)*}$ ,  $u_{\varphi n}^{(2)(m)*}$  – частное решение неоднородной системы.

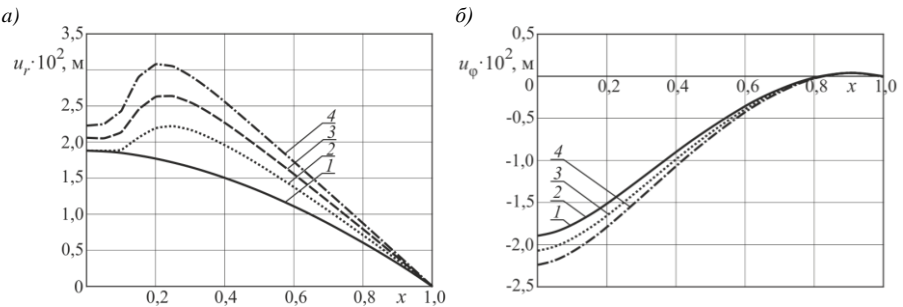
При косинусоидальной нагрузке (9) и закрепленном контуре пластины система уравнений (14) имеет решение, учитывающая (16):



$$\begin{aligned}
 u_r^{(m)}(x, \varphi) &= \left[ \frac{(19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2)(p_{r1} - p_{r1\omega}^{(m-1)}) - (13a_1^2 - 18a_1a_2 + a_2^2)(-p_{\varphi1\omega}^{(m-1)})}{2(3a_1 - a_2)} \times \right. \\
 &\quad \left. \times (1 - x^2) - (a_1 - 3a_2)(p_{r1} - p_{r1\omega}^{(m-1)} - p_{\varphi1\omega}^{(m-1)})x^2 \ln x \right] \frac{r_0^2}{16a_1(a_1 - a_2)} \cos \varphi, \\
 u_\varphi^{(m)}(x, \varphi) &= \left[ \frac{-(19a_1^2 - 14a_1a_2 - a_2^2)(p_{r1} - p_{r1\omega}^{(m-1)}) + (13a_1^2 - 18a_1a_2 + a_2^2)(-p_{\varphi1\omega}^{(m-1)})}{2(3a_1 - a_2)} \times \right. \\
 &\quad \left. \times (1 - x^2) - (5a_1 + a_2)(p_{r1} - p_{r1\omega}^{(m-1)} - p_{\varphi1\omega}^{(m-1)})x^2 \ln x \right] \frac{r_0^2}{16a_1(a_1 - a_2)} \sin \varphi, \\
 u_{r0}^{(m)}(x) &\equiv 0, \quad u_{\varphi0}^{(m)}(x) \equiv 0.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Численные результаты получены в соответствии с решением (17) для круглой трехслойной физически нелинейной пластины при косинусоидальной нагрузке (9) с постоянной интенсивностью  $p_{r1} = 300$  МПа. Они подтвердили практическую сходимость метода «упругих» решений.

На рисунке 11 изображены радиальные  $u_r(r, \varphi)$  – (а) и тангенциальные  $u_\varphi(r, \varphi)$  – (б) перемещения при различных значениях угловой координаты ( $\varphi = 0$  – (а);  $\varphi = \pi/2$  – (б)). Максимальные радиальные перемещения  $u_r$  (см. рисунок 11, а) увеличиваются за счет физической нелинейности материалов слоев при комнатной температуре ( $T = 293$  К) на 29 % по сравнению с упругими. Повышение температуры до  $T = 373$  К приводит к дополнительному росту перемещений на 20 %, и на 40 % при  $T = 473$  К. Тангенциальные перемещения в направлении  $\varphi = \pi/2$  при комнатной температуре остаются упругими. С увеличением температуры и за счет физической нелинейности материалов слоев максимальные по модулю перемещения возрастают на 9 % и 18 % соответственно.

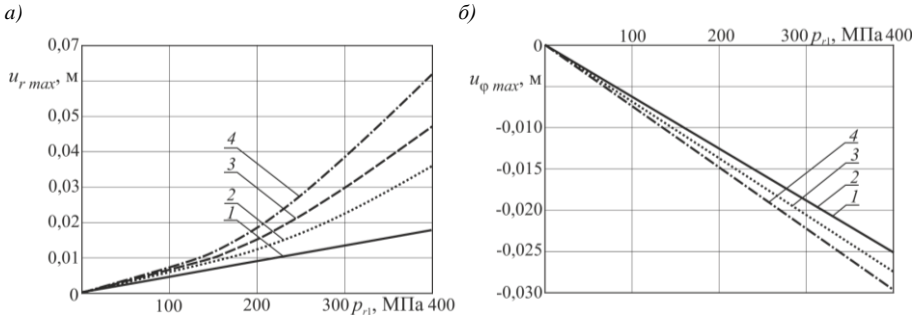


1 – упругая пластина ( $T = 293$  К); 2, 3, 4 – упругопластическая ( $T = 293$  К, 373 К, 473 К)

Рисунок 11. – Радиальные  $u_r$  и тангенциальные  $u_\varphi$  при различных температурах

Рисунок 12 отражает зависимость максимальных радиальных  $u_{r \max}$  ( $\varphi = 0$ ) – (а) и тангенциальных  $u_{\varphi \max}$  ( $\varphi = \pi/2$ ) – (б) перемещений от вели-

чины нагрузки  $p_{r1}$  при различных значениях окружной координаты. С увеличением нагрузки появляются пластические деформации, что вызывает нелинейность графиков. При росте температуры проявляется «горячая» пластичность и нелинейность усиливается (см. рисунок 12, а). Величина тангенциальных перемещений изменяется практически линейно (см. рисунок 12, б).



1 – упругая пластина ( $T = 293$  К); 2, 3, 4 – упругопластическая пластина ( $T = 293$  К, 373 К, 473 К)

**Рисунок 12. – Зависимость максимальных радиальных  $u_{r \max}$  и тангенциальных  $u_{\varphi \max}$  перемещений от величины нагрузки**

Таким образом, учет физической нелинейности материалов слоев и воздействие температуры приводит к существенному уточнению параметров напряженно-деформированного состояния трехслойной круговой пластины при осесимметричном и неосесимметричном нагружениях в своей плоскости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

В работе проведены теоретические исследования НДС трехслойных круговых пластин при деформировании в своей плоскости и получены следующие новые научные результаты, включающие:

- механико-математические модели упругого и физически нелинейного деформирования трехслойных круговых пластин в своей плоскости, которые содержат уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, формулировки граничных условий закрепления и свободного опирания контура, отличающиеся учетом неосесимметричности внешней нагрузки и температуры, что позволяет формулировать и исследовать новый класс краевых задач механики тонкостенных элементов конструкций [1–3, 6, 8, 9, 11, 12, 21–24];

- аналитические решения краевых задач для упругих круговых трехслойных пластин, деформируемых в своей плоскости осесимметричными и неосесимметричными косинусоидальными и синусоидальными термосиловыми нагрузками, полиномиально зависящими от радиальной координаты, при различных граничных условиях, подтвердившие правомерность применения метода разложения искомого решения в ряды Фурье, содержащие расчетные формулы для внутренних усилий, перемещений, деформаций и напряжений, которые позволяют проводить параметрический анализ НДС рассматриваемых пластин [1–9, 11–20, 24];

- аналитические рекуррентные решения краевых задач для физически нелинейных круглых трехслойных пластин, деформируемых в своей плоскости осе-симметричными и неосесимметричными нагрузками при различных условиях закрепления контура, что позволило алгоритмизировать процесс исследования НДС с учетом пластического и физически нелинейного деформирования материалов слоев в условиях повышенных температур [10, 21, 22];

- результаты численной апробации полученных аналитических решений и параметрического анализа НДС, подтвердившие сходимость метода упругих решений Ильюшина, включающие графики зависимости перемещений, деформаций и напряжений от вида и величины нагрузки, свойств материалов слоев, температуры, типа граничных условий, показавший, что у пластины при свободном контуре учет физической нелинейности материалов слоев добавляет к максимальным упругим расчетным перемещениям около 15 %, увеличение температуры на 30 К – вызывает рост перемещений в 1,2–1,5 раз, в случае закрепленного контура при повышении температуры на 180 К рост составляет 29–40 %, что в совокупности позволяет давать качественную и количественную оценку влияния указанных параметров на прочностные характеристики круговых трехслойных пластин, деформируемых в своей плоскости [1, 2, 4, 6–10, 13, 16, 17, 20].

### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Предложенные постановки новых краевых задач и полученные решения позволяют проводить численный параметрический анализ перемещений, деформаций и напряжений в композитных элементах конструкций, деформируемых в своей плоскости неосесимметричными нагрузками. Результаты численного эксперимента могут быть использованы для выработки практических рекомендаций при проектировании слоистых систем, что приведет к существенному снижению материальных затрат, необходимых для соответствующих натурных экспериментальных исследований. Аналитические решения представляют собой самостоятельную ценность в качестве новых фундаментальных результатов в области расчета тонкостенных конструкций.

Результаты исследований использованы в учебном процессе при чтении лекций по курсу «Теория упругости и пластичности» студентам факультета «Промышленное и гражданское строительство» и при выполнении ГБТ «Исследование процессов деформирования неоднородных систем» Учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Отдельные результаты могут быть использованы в расчетной практике НТЦК ОАО «Гомсельмаш» для оценки прочности и жесткости элементов технологического тракта кормоуборочного комбайна с износостойкими покрытиями, а также ножей измельчающего барабана с нанесенным упрочняющим слоем.

Результаты внедрения подтверждены соответствующими документами, включенными в приложение диссертации.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

### Статьи в рецензируемых журналах и сборниках трудов

1. Нестерович, А. В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–60.
2. Нестерович, А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. тр. – Гомель : БелГУТ, 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.
3. Нестерович, А. В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.
4. Нестерович, А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. тр. – Гомель : БелГУТ, 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.
5. Нестерович, А. В. Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2020. – Вып. 35. – С. 246–252.
6. Нестерович, А. В. Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 85–90.
7. Нестерович, А. В. Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. тр. – Гомель : БелГУТ, 2020. – Вып. 13. – С. 116–121.
8. Старовойтов, Э. И. Неосесимметричное деформирование круговой трехслойной пластины в своей плоскости / Э. И. Старовойтов, А. В. Нестерович // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 38–45.
9. Старовойтов, Э. И. Неосесимметричное деформирование свободно опертой трехслойной пластины в своей плоскости / Э. И. Старовойтов, А. В. Нестерович // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – № 1 (27). – С. 17–30.
10. Нестерович, А. В. Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 24–29.

### Материалы конференций

11. Старовойтов, Э. И. Неосесимметричное термосиловое нагружение круговой пластины в своей плоскости / Э. И. Старовойтов, А. В. Нестерович //

Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса : материалы VII междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 26–27 ноября 2015 г. / М-во образования Респ. Беларусь, М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. В. И. Сенько [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2015. – С. 317–319.

12. Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение круговой трехслойной пластины неосесимметричной нагрузкой / Э. И. Старовойтов, А. В. Нестерович // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова, Вятичи, 15–19 февраля 2016 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва : ООО «ТР-принт», 2016. – Т.1. – С. 163–166.

13. Нестерович, А. В. Термосиловое осесимметричное нагружение круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов : материалы IV междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 11–12 окт. 2018 г. : в 2 ч./ М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2018. – Ч. 2. – С. 175–177.

14. Нестерович, А. В. Неосесимметричное растяжение-сжатие круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXV Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова, Вятичи, 18–22 марта 2019 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва : ООО "ТР-принт", 2019. – Т. 2. – С. 122–124.

15. Нестерович, А. В. Деформирование трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XXII Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 25–27 марта 2019 г. / Гомельский гос. ун-т. им. Франциска Скорины ; редкол. : С. П. Жогаль [и др.]. – Гомель, 2019. – С. 28–29.

16. Нестерович, А. В. Осесимметричное растяжение-сжатие круговой трехслойной пластины в температурном поле / А. В. Нестерович // Современные вопросы механики сплошных сред 2019 : сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием, Чебоксары, 16–17 мая 2019 г. / Чувашский гос. ун-т имени И. Н. Ульянова. – Чебоксары : ИД Среда, 2019. – С. 42–46.

17. Нестерович, А. В. Перемещения и деформации при термосиловом осесимметричном нагружении круговой трехслойной пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы безопасности на транспорте : матер. IX Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 28–29 ноябр. 2019 г. : в 2 ч. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; редкол. Ю. И. Кулаженко [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2019. – Ч. 2. – С. 237–239.

18. Нестерович, А. В. Частные случаи неосесимметричного растяжения-сжатия круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVI Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова, Вятичи, 16–20 марта 2020 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва : ООО «ТР-принт», 2020. – Т. 1. – С. 178–180.

19. Нестерович, А. В. Неосесимметричное деформирование трехслойной пластины со свободно опертым контуром / А. В. Нестерович // Строительство и восстановление искусственных сооружений : матер. VII Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 21–22 мая 2020 г. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; редкол. : А. А. Поддубный [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2020. – С. 23–26.

20. Нестерович, А. В. Деформирование трехслойной пластины со свободным контуром осесимметричной нагрузкой в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы безопасности на транспорте : матер. X Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 26–27 ноябр. 2020 г. : в 5 ч. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; редкол. Ю. И. Кулаженко [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2020. – Ч. 1. – С. 110–111.

21. Нестерович, А. В. Физически нелинейная круговая трехслойная пластина при деформировании в своей плоскости / А. В. Нестерович // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова, Вятчи, 17–21 мая 2021 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва : ООО «ТРИ», 2021. – Т. 1. – С. 176–178.

22. Нестерович, А. В. Деформирование физически нелинейной трехслойной круговой пластины в ее плоскости / А. В. Нестерович // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XXIV Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 22–24 марта 2021 г. / Гомельский гос. ун-т. им. Франциска Скорины ; редкол. : С. П. Жогаль [и др.]. – Гомель, 2021. – С. 10–11.

### Тезисы докладов

23. Старовойтов, Э. И. Уравнения равновесия трехслойной пластины при неосесимметричной термосиловой нагрузке / Э. И. Старовойтов, А. В. Нестерович // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы : тез. докл. IV Междунар. науч. семинара, Москва, 15–19 февраля 2016 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва, 2016. – С. 143–145.

24. Нестерович, А. В. Трехслойная круговая пластина при неосесимметричном деформировании / А. В. Нестерович // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы : тез. докл. VII Междунар. науч. семинара, Москва, 12–13 ноября 2018 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва, 2018. – С. 97–99.



## РЕЗЮМЕ

### Нестерович Алина Викторовна Деформирование круглой трехслойной пластины в своей плоскости

*Ключевые слова:* круглая трехслойная пластина, неосесимметричное нагружение в своей плоскости, упругость, пластичность, температура, аналитические решения, численный анализ.

*Объект исследования:* круглые трехслойные пластины под действием осесимметричных и неосесимметричных термосиловых нагрузок при различных способах закрепления контура; *предмет исследования:* напряженно-деформированное состояние объекта.

*Цель работы:* разработка и создание механико-математических моделей деформирования в своей плоскости упругих и физически нелинейных трехслойных круговых пластин под действием осесимметричных и неосесимметричных термосиловых нагрузок при различных способах закрепления контура.

Впервые приведены механико-математические модели упругого и физически нелинейного деформирования в своей плоскости трехслойных круговых пластин при неосесимметричном нагружении. В конечном виде получены аналитические решения соответствующих краевых задач для упругой пластины, в итерационном виде – для физически нелинейной пластины. Решения содержат расчетные формулы для параметров напряженно-деформированного состояния, отличающиеся неосесимметричностью внешних нагрузок и учетом влияния температуры на упругие и нелинейные свойства материалов слоев. Рассмотрены случаи жесткой заделки, шарнирного или свободного опирания контура пластины. Разработаны алгоритмы решения поставленных задач.

Численно исследованы параметры напряженно-деформированного состояния упругих и физически нелинейных трехслойных пластин при воздействии осесимметричных и неосесимметричных нагрузок с учетом влияния температуры. Приведен анализ зависимости от величины внешней нагрузки, геометрических и упругих параметров слоев, характеристик физической нелинейности, граничных условий.

Результаты исследований являются новыми и вносят существенный вклад в развитие механики деформируемого твердого тела, могут быть использованы заинтересованными проектными организациями в строительстве и машиностроении, в курсах теории упругости и пластичности высшей школы.

## РЭЗІЮМЭ

### Несцяровіч Аліна Віктараўна Дэфармаванне круглай трохслаёвай пласціны ў сваёй плоскасці

*Ключавыя словы:* круглая трохслаёвая пласціна, нявосесіметрычнае нагружэнне ў сваёй плоскасці, пругкасць, пластычнасць, тэмпература, аналітычныя рашэнні, лікавы аналіз.

*Аб'ект даследавання:* круглыя трохслаёвыя пласціны пад дзеяннем восесіметрычных і нявосесіметрычных тэрмасілавых нагрузак пры розных спосабах замацавання контуру; прадмет даследавання: напружана-дэфармаваны стан аб'екта.

*Мэта работы:* распрацоўка і стварэнне механіка-матэматычных мадэляў дэфармавання ў сваёй плоскасці пругкіх і фізічна нелінейных трохслаёвых кругавых пласцін пад дзеяннем восесіметрычных і нявосесіметрычных тэрмасілавых нагрузак пры розных спосабах замацавання контура.

Упершыню прыведзены механіка-матэматычныя мадэлі пругкага і фізічна нелінейнага дэфармавання ў сваёй плоскасці трохслаёвых кругавых пласцін пры нявосесіметрычным нагружэнні. У канчатковым выглядзе атрыманы аналітычныя рашэнні адпаведных крайвых задач для пругкай пласціны, у ітэрацыйным выглядзе – для фізічна нелінейнай пласціны. Рашэнні змяшчаюць разліковыя формулы для параметраў напружана-дэфармаванага стану, якія адрозніваюцца нявосесіметрычнасцю знешніх нагрузак і ўлікам ўплыву тэмпературы на пругкія і нелінейныя ўласцівасці матэрыялаў слаёў. Разгляджаны выпадкі жорсткага заладжвання, шарнірнага або вольнага абалірання контуру пласціны. Распрацаваны алгарытмы рашэння пастаўленых задач.

Лікавы даследаваны параметры напружана-дэфармаванага стану пругкіх і фізічна нелінейных трохслаёвых пласцін пры ўздзеянні восесіметрычных і нявосесіметрычных нагрузак з улікам уплыву тэмпературы. Прыведзены аналіз залежнасці ад велічыні знешняй нагрузкі, геаметрычных і пругкіх параметраў слаёў, характарыстык фізічнай нелінейнасці, межавых умоў.

Вынікі даследаванняў з'яўляюцца новымі і ўносяць істотны ўклад у развіццё механікі дэфармуемага цвёрдага цела, могуць быць выкарыстаны зацікаўленымі практычнымі арганізацыямі ў будаўніцтве і машынабудаўніцтве, у курсах тэорыі пругкасці і пластычнасці вышэйшай школы.



## SUMMARY

Nestsiarovich Alina Viktorovna  
**Deformation of a round three-layer  
plate in its plane**

*Keywords:* round three-layer plate, non-axisymmetric loading in its plane, elasticity, plasticity, temperature, analytical solutions, numerical analysis.

*Object of research:* round three-layer plates under the influence of axisymmetric and non-axisymmetric thermal force loads with various methods of fixing the contour; *subject of research:* the stress-strain state of the object.

*The purpose of the work:* to develop and create mechanical and mathematical models of deformation of elastic and physically nonlinear three-layer circular plates in their plane under the influence of axisymmetric and non-axisymmetric thermal force loads with various methods of fixing the contour.

For the first time, mechanical and mathematical models of elastic and physical nonlinear deformation of three-layer circular plates in their plane under non-axisymmetric loading were presented. In the final form, analytical solutions of the corresponding boundary value problems for an elastic plate were obtained, in an iterative form-for a physically nonlinear plate. The solutions contain calculation formulas for the parameters of the stress-strain state, which differ in the non-axisymmetry of external loads and taking into account the influence of temperature on the elastic and nonlinear properties of the layer materials. Cases of rigid sealing, hinged or free support of the plate end were considered. Algorithms for solving the tasks have been developed.

The parameters of the stress-strain state of elastic and physically nonlinear three-layer plates under the influence of axisymmetric and non-axisymmetric loads were numerically studied, taking into account the influence of temperature. The analysis of the dependence on the magnitude of the external load, the geometric and elastic parameters of the layers, the characteristics of physical nonlinearity, and boundary conditions was given.

The results of the research are new and make a significant contribution to the development of the mechanics of a deformable solid, can be used by design organizations interested in construction and mechanical engineering, in courses of the theory of elasticity and plasticity of higher school.

Научное издание

*НЕСТЕРОВИЧ Алина Викторовна*

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ  
ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

по специальности

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Подписано в печать 10.12.2021 г. Формат бумаги 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать на ризографе.

Усл. печ. л. 1,4. Тираж 70 экз. Зак. 3005.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский государственный университет транспорта.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий

№ 1/361 от 13.06.2014.

№ 3/1583 от 14.11.2017.

Ул. Кирова, 34, 246653. Гомель