УДК 531.391.3

А. В. ЛОКТИОНОВ, А. А. СИДОРОВИЧ
Витебский государственный технологический университет, Витебск, Беларусь

АНАЛИЗ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Выполнено решение задачи о малых колебаниях эллиптического маятника для случая заданной начальной угловой скорости его движения. С применением теоремы об изменении кинетического момента в относительном движении получено линейное неоднородное дифференциальное уравнение и установлен закон движения маятника. Получено уравнение движения ползуна в зависимости от времени при заданной начальной угловой скорости вращения маятника и скорости перемещения ползуна в горизонтальном направлении.

Ключевые слова: малые колебания, относительное движение, кинетический момент, эллиптический маятник.

В работах [1–4] получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний эллиптического маятника, состоящего из ползуна, шарика и стержня. Рассмотрено сложное движение маятника и изложен квазистатический метод решения уравнения малых колебаний с заданной начальной угловой скоростью движения. При этом использовалась основная форма условий равновесия рассматриваемой механической системы. В работе [4] принцип Даламбера использован применительно и к ползуну. Если относительное движение является вращательным и требуется определить зависимость φ = φ(t), можно применить теорему об изменении момента количества движения материальной точки в относительном движении [5].

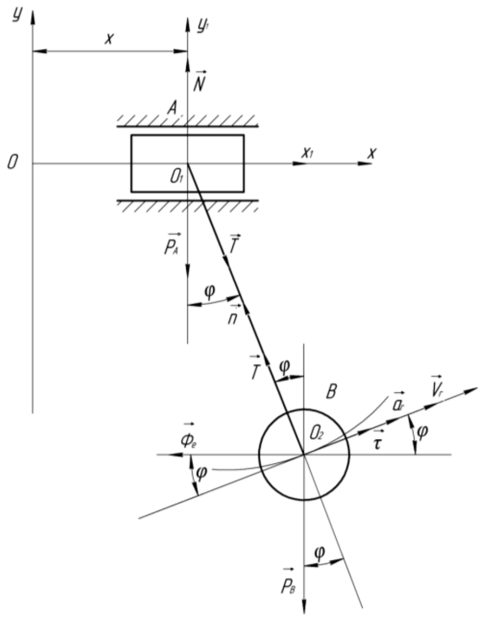

Рисунок 1 – Схема эллиптического маятника

Рассмотрим эллиптический маятник (рисунок 1), который состоит из ползуна A, перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и шарика B, подвешенного в точке O_1 к ползуну A нерастяжимым стержнем. Масса ползуна равна m_A, масса шарика – m_B, длина стержня – l.

При поступательном движении ползуна теорема моментов сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра, т. е.

$$\frac{d\vec{L}_{O_1}}{dt} = \vec{m}_{O_1}(\vec{P}_B) + \vec{m}_{O_1}(\vec{\Phi}_e) + \vec{m}_{O_1}(\vec{\Phi}_k), \tag{1}$$

где $\vec{L}_{O_1}$ – момент относительно точки O_1 вектора количества движения $(m_B\vec{v}_r)$ точки (шарика) в ее относительном движении; $\vec{m}_{O_1}(\vec{P}_B)$ – момент относительно точки O_1 силы $\vec{P}_B$ тяжести шарика; $\vec{m}_{O_1}(\vec{\Phi}_e)$ и $\vec{m}_{O_1}(\vec{\Phi}_k)$ – моменты относительно точки O_1 переносной и кориолисовой сил инерции.

Найдем закон движения маятника $\varphi = \varphi(t)$ при следующих начальных условиях движения: при $t = 0$ угол $\varphi = \varphi_0 = 0$, а угловая скорость $\dot{\varphi} = \omega_0 \neq 0$.

Точка подвеса O_1 движется по прямой OX. При этом движение материальной точки M (шарика) является относительным со скоростью $v_r = l\omega = l\dot{\varphi}$. Переносным является поступательное движение ползуна, а переносное ускорение $a_e = \ddot{x}$. Так как переносное движение является поступательным, ускорение Кориолиса равно нулю, также равна нулю сила инерции Кориолиса Φ_k. Переносная сила инерции шарика $\Phi_e = ma_e = m_B\ddot{x}$ и направлена параллельно прямой OX (рисунок 1).

На маятник (шарик) в произвольном положении действует сила тяжести $\vec{P}_B = m_B\vec{g}$ и реакция нити $\vec{T}$. Чтобы составить дифференциальное уравнение относительного движения маятника, введем переносную силу инерции $\vec{\Phi}_e$. Поскольку маятник совершает поворот на угол φ, то его движение определяется этим углом.

Применим теорему об изменении момента количества движения материальной точки в относительном движении (1). В рассматриваемом случае момент количества движения $L_{O_1} = m_B v_r \cdot O_1O_2 = m_B v_{rr} \cdot l = m_B l^2\dot{\varphi}$. Моменты сил тяжести $\vec{P}_B$ и переносной силы инерции $\vec{\Phi}_e$ относительно точки O_1 определяются соответственно из выражений

$$m_{O_1}(\vec{P}_B) = -P_B l \sin\varphi, \; m_{O_1}(\vec{\Phi}_e) = -\Phi_e l \cos\varphi .$$

Тогда $M_{O_1} = -P_B l \sin\varphi - \Phi_e l \cos\varphi = -m_B g l \sin\varphi - m_B\ddot{x}l\cos\varphi$. Так как при малых колебаниях $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$, имеем $M_{O_1} = -m_B g l \varphi - m_B\ddot{x}l$. Подставляя в уравнение (1), получим $m_B l^2\ddot{\varphi} = -m_B g l\varphi - m_B\ddot{x}l$, или

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=-\frac{\ddot{x}}{l}. \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad (3)$$

где φ_1 – общее решение однородного уравнения $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0$, или $\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0$, которое имеет вид

$$\varphi_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

где C_1 и C_2 постоянные интегрирования; $k=\sqrt{\frac{g}{l}}$ – частота колебаний.

С учетом принятых начальных условий $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi}=\omega=\omega_0$ получим

$$C_1=\varphi_0,\ \ \dot{\varphi}_1=-C_1 k\sin kt+C_2 k\cos kt,\ \ C_2=\frac{\omega_0}{k}.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\varphi_1=\varphi_0\cos kt+\frac{\omega_0}{k}\sin kt.$$

Принимая $\varphi_0 = 0$, получаем $C_1 = 0$ и, следовательно,

$$\varphi_1=\frac{\omega_0}{k}\sin kt.$$

Частное решение φ_2 линейного неоднородного дифференциального уравнения (2) по методу неопределенных коэффициентов $\varphi_2 = A$, $\dot{\varphi}_2=0$, $\ddot{\varphi}_2=0$. Подставляя в уравнение (2), получаем $\varphi_2=A=-\frac{\ddot{x}}{g}$. Отсюда

$$\varphi=\frac{\omega_0}{k}\sin kt-\frac{\ddot{x}}{g}.$$

При относительном движении эллиптического маятника мысленно останавливаем подвижную систему координат $X_1O_1Y_1$ и для того, чтобы при этом не изменилось взаимодействие маятника с ползуном, связанным с подвижной системой координат $X_1O_1Y_1$, вводим в уравнение (1) переносную и кориолисову силы инерции.

Задача об определении движения относительно подвижной системы координат после приложения к материальной точке переносной и кориолисовой сил инерции формально сводится к задаче об определении движения относительно неподвижной системы координат. Уравнение (1) можно рассматривать как методику исследования относительного движения с помощью его фиктивного приведения к абсолютному движению.

В работе [3] с использованием принципа Даламбера, получено дифференциальное уравнение перемещения ползуна элиптического маятника при $\varphi = \varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$, которое при перемещении ползуна в положительном направлении оси Ox (рисунок 1) имеет вид $\ddot{x} = \frac{m_B}{m_A}\left(g + \omega_0^2 l\right)\varphi$. Подставляя значение φ при относительном перемещении маятника, получим:

$$\ddot{x} = \frac{m_B}{m_A}(g + \omega_0^2 l)\left(\frac{\omega_0}{k}\sin kt - \frac{\ddot{x}}{g}\right).$$

Обозначим $\frac{m_B}{m_A}(g + \omega_0^2 l) = A$. Тогда $\ddot{x} = A\frac{\omega_0}{k}\sin kt - A\frac{\ddot{x}}{g}$, или $\ddot{x}\left(\frac{g+A}{g}\right) = A\frac{\omega_0}{k}\sin kt$. Обозначим $\frac{g+A}{g} = B$. Тогда приходим к уравнению

$$\ddot{x} = \frac{A}{B}\frac{\omega_0}{k}\sin kt.$$

Интегрируя его, получим

$$v_x = -\frac{A}{B}\frac{\omega_0}{k^2}\cos kt + C_3.$$

Для ползуна при относительном движении маятника принято, что при $t = t_0 = 0$, $x = x_0 = 0$, $v_x = v_0$, поэтому

$$C_3 = v_0 + \frac{A}{B}\frac{\omega_0}{k^2}, \quad v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{A}{B}\frac{\omega_0}{k^2}\left(1 - \cos kt\right), \quad dx = v_0 dt + \frac{A}{B}\frac{\omega_0}{k^2}\left(1 - \cos kt\right)dt.$$

Интегрируя, находим

$$x = v_0 t + \frac{A}{B}\frac{\omega_0}{k^2}\left(t - \frac{1}{k}\sin kt\right) + C_4 .$$

При $t = t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $C_4 = 0$, поэтому

$$x = v_0 t + \frac{A}{B}\frac{\omega_0}{k^2}\left(t - \frac{\sin kt}{k}\right).$$

Подстановка значений A и B дает окончательное выражение закона движения ползуна при относительном движении эллиптического маятника:

$$x = v_0 t + \frac{m_B(g + \omega_0{}^2 l)}{(m_A + m_B + \omega_0{}^2 l/g)}\frac{\omega_0}{k^2}\left(t - \sqrt{\frac{l}{g}}\sin kt\right).$$

Выводы. Представлено решение уравнения малых колебаний при поступательном движении ползуна эллиптического маятника. Интегрированием линейного неоднородного дифференциального уравнения получен закон движения маятника при заданной начальной угловой скорости его движения. При относительном вращательном движении маятника для определения зависимости угла его поворота от времени применена теорема об изменении момента количества движения материальной точки в относительном движении. Получено уравнение движения ползуна, позволяющее при заданных начальных значениях угловой скорости вращения маятника и скорости перемещения ползуна в горизонтальном направлении находить смещение ползуна в зависимости от времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Локтионов, А. В.** Расчет уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – Вып. 26. – С. 138–143.

2 **Локтионов, А. В.** Расчет уравнения малых колебаний при сложном движении эллиптического маятника / А. В. Локтионов // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 29. – С. 290–293.

3 **Локтионов, А. В.** Расчёт уравнения малых колебаний с учётом сил тяжести и заданной начальной угловой скорости движения маятника / А. В. Локтионов // Горная механика и машиностроение. – 2018. – № 1. – С. 43–48.

4 **Локтионов, А. В.** Квазистатический метод расчета уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника / А. В. Локтионов // Горная механика и машиностроение. – 2018. – № 2. – С. 47–51.

5 **Локтионов, А. В.** Применение принципа Даламбера при рассмотрении сил инерции и относительного движения эллиптического маятника / А. В. Локтионов // Горная механика и машиностроение. – 2019. – № 1. – С. 24–28.

A. V. LOKTIONOV, A. A. SIDOROVICH
Vitebsk State Technological University, Vitebsk, Belarus

ANALYSIS OF SMALL OSCILLATIONS OF AN ELLIPTICAL PENDULUM USING THE THEOREM OF KINETIC MOMENT CHANGE IN RELATIVE MOTION

The problem of small oscillations of an elliptic pendulum is solved for the case of its given initial angular velocity. Using the theorem of the kinetic moment change in relative motion, a linear non-homogeneous differential equation is obtained and the pendulum law motion is established. The slider motion equation as a function of time is obtained for a given initial angular velocity of pendulum rotation and the slider's movement velocity in the horizontal direction.

Keywords: small oscillations, relative motion, angular moment, elliptical pendulum.

Получено 29.08.2020