

УДК 539.3:624.072

Т. М. МАРТЫНЕНКО¹, С. А. ПРОНКЕВИЧ², И. М. МАРТЫНЕНКО²

¹Университет гражданской защиты МЧС Республики Беларусь, Минск, Беларусь

²Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ БАЛОЧНОГО ТИПА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассматриваются методы анализа прочности стержневых конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. Представлена методика аналитического расчета балки, к которой приложена кратковременная нагрузка. Получено условие, при котором в результате импульсного нагружения возможно образование пластического шарнира. Выполнено конечно-элементное моделирование в системе ANSYS действия продольного ударного импульса на стержень прямоугольного поперечного сечения. Показано, что расчет с применением коэффициента усиления колебаний позволяет с достаточно высокой точностью определять деформации конструкции.

Ключевые слова: моделирование, прогрессирующее деформирование, динамический расчет, пластический шарнир, разрушение, конструкция балочного типа.

Строительные конструкции в процессе эксплуатации могут воспринимать различные динамические нагрузки, вызванные авариями или производственными взрывами, сейсмическими воздействиями, порывами ветра, малоцикловыми перегрузками. При импульсном приложении нагрузки в элементах конструкции возникают напряжения и деформации, большие, чем при статическом нагружении. Задача обеспечения динамической прочности и долговечности с учетом многочисленных и разнообразных внешних нагрузок важна для элементов несущих конструкций. В связи с этим существует необходимость разработки моделей и эффективных методов решения уравнений, описывающих волновые процессы в неоднородных телах и средах.

Расчет напряжений, деформаций и прогибов в элементах конструкций при импульсных и ударных нагрузках необходим для выяснения, возникнут ли повреждения при ударно-волновом нагружении. Такие нагрузки сравнительно непродолжительны. Максимум реакции в этих случаях достигается за очень короткий промежуток времени, а затухание колебаний оказывается значительно меньшим, чем при периодических и гармонических нагрузках [1]. Поэтому колебания, вызванные мгновенным или кратковременным импульсом, можно рассматривать как свободные, если за начальный принять момент прекращения действия ударного импульса [2], причем наибольшее перемещение соответствует амплитуде первого колебания.

При выборе формы колебаний требуется лишь, чтобы выбранная функция удовлетворяла соответствующим граничным условиям. В случае упру-

гой деформации Биггс [3] использует уравнение упругой линии, соответствующей действию статической нагрузки, а при пластической – выражение, описывающее образование пластических шарниров в точках с максимальными изгибающими моментами. В представленной работе анализируются условия, при которых в конструкции балочного типа под действием кратковременной нагрузки может образоваться пластический шарнир либо трещина.

Чтобы определить деформации балки, возникающие под действием ударного импульса, рассмотрим случай действия на нее некоторой внезапно приложенной нагрузки, произвольно распределенной по длине. Будем считать, что в течение некоторого короткого промежутка времени величина этой нагрузки постоянна. Это предположение соответствует расчету по среднему значению действительной нагрузки, что допустимо в случае, если длительность ее действия достаточно мала по сравнению с периодом собственных колебаний балки. В соответствии с принципом Даламбера введем в рассмотрение силы инерции, пренебрегая малыми продольными колебаниями и ограничиваясь учетом поперечных инерционных сил [4].

Балка воспринимает действие распределенной нагрузки, связанной с появлением сил инерции

$$q(x,t) = -\mu(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $\mu(x)$ – погонная масса, $\mu(x) = \rho S(x)$, ρ – плотность материала балки; $S(x)$ – переменная в общем случае площадь ее поперечного сечения.

Согласно дифференциальному уравнению изгиба балки, полученному в предположении о соблюдении гипотезы плоских сечений, действие внутренних напряжений в балке путем интегрирования приводится к изгибающему моменту, который можно представить в виде

$$M(x) = EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где E – модуль упругости материала; $J(x)$ – момент инерции поперечного сечения относительно оси z .

Дважды дифференцируя это выражение по координате x и используя известные дифференциальные соотношения между изгибающим моментом, поперечной силой $Q(x)$ и внешней распределенной нагрузкой $q(x)$

$\left(Q(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial x}; q(x) = -\frac{\partial Q(x)}{\partial x} \right)$, приходим к выражению

$$q(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right).$$

Учитывая, что внешней распределенной нагрузке теперь соответствует инерционная распределенная сила, получаем классическое дифференциальное уравнение изгиба балки [5]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \mu(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

В случае постоянного поперечного сечения оно упрощается:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде произведения двух функций: $X(x)$ зависит лишь от координаты, $T(t)$ – от времени,

$$y(x, t) = X(x) T(t).$$

Подстановка в уравнение (4) дает

$$EJT(t) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + \mu X(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0.$$

Условимся для упрощения записи соответствующие производные по координате обозначать римскими цифрами, а производные по времени – точками над символом, тогда получаем

$$\frac{EJ}{\mu} \frac{X^{IV}}{X} = -\frac{\ddot{T}}{T}. \quad (5)$$

Так как в полученном уравнении выражение в левой части зависит лишь от координаты x , тогда как правая часть является функцией от времени t , естественно предположить, что эти функции равны некоторой постоянной величине, которую обозначим ω^2 . С учетом такого обозначения можно (5) представить в виде двух уравнений:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0; \quad (6)$$

$$X^{IV} - \omega^2 \frac{\mu}{EJ} X = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) совпадает с уравнением свободных колебаний системы с одной степенью свободы, а это в свою очередь позволяет выявить физическую сущность величины ω , которая является числом, определяющим число колебаний балки за 2π секунды. Решение уравнения (6) представим в виде

$$T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (8)$$

где A и B – постоянные, которые определяются из начальных условий.

Решение уравнения (7) является функцией переменной x и определяет форму упругой линии балки при импульсной нагрузке, когда балка соверша-

ет свободные колебания с частотой ω . Упругая линия является кривой, которая характеризует формы собственных колебаний системы с бесконечно большим числом степеней свободы. Из уравнения (6) и сопоставления его с дифференциальным уравнением изгиба балки следует, что форма собственных колебаний обладает специфической особенностью: она является такой упругой линией, которая в каждой точке подобна нагрузке от действия сил инерции (1), а коэффициентом пропорциональности является величина $\mu\omega^2$.

Решение уравнения (7) можно представить в виде зависимости $w = w(x)$, определяющей максимальные смещения балки при воздействии инерционной нагрузки, которые зависят от физических и геометрических характеристик балки. Согласно методу аппроксимации Бубнова – Галеркина [6] выражение $w(x)$ должно также удовлетворять граничным условиям на краях балки. При шарнирном опирании ее концов на жесткие опоры получим, что перемещение w и моменты M в крайних точках равны нулю. С учетом (2) граничные условия можно записать в виде [7]

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, x = l.$$

Рассмотренным условиям удовлетворяет система координатных функций

$$w = w_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{C_1 + C_2 + \dots + C_n} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (9)$$

где w_0 – максимальный прогиб; C_n – неизвестные вариационные коэффициенты; l – длина пролета балки.

Например, при учете четырех членов ряда (9) получаем выражение

$$\frac{w}{w_0} = \frac{C_1}{C_1} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{C_4}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \sin \frac{4\pi x}{l}.$$

Для нахождения C_n запишем выражение упругой энергии деформирования

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

Подставляя сюда формулу (9), при учете четырех членов ряда получаем

$$U = -w_0 \frac{EJ \pi}{l} \frac{C_1 + 3C_3}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Согласно принципу Остроградского – Гамильтона [8] наиболее близкой к действительной будет форма упругой линии, для которой упругая энергия деформирования будет иметь минимальное значение, что приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial C_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial C_2} = 0, \frac{\partial U}{\partial C_3} = 0, \frac{\partial U}{\partial C_4} = 0.$$

Находя частные производные и решая систему уравнений, получим выражения, отражающие связь между коэффициентами C_n :

$$C_1 = -3C_2, C_2 = -C_3, C_3 = -C_4.$$

Первое главное свободное колебание, обладающее самой низкой частотой, происходит при $n = 1$, балка при этом изгибается по одной полуволне синусоиды. Второе главное свободное колебание происходит при $n = 2$, балка при этом изгибается по двум полуволнам синусоиды и так далее. Главные свободные колебания нумеруются в порядке возрастания их частот и соответственно указанным номерам носят названия главного свободного колебания первого тона, главного свободного колебания второго тона и так далее. Все главные свободные колебания являются решением уравнения (3) и могут происходить независимо друг от друга.

Для случая $n = 1$ согласно (9) получим первое приближение

$$\frac{w}{w_0} = \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Четвертое приближение, соответствующее случаю $n = 4$, дает

$$\frac{w}{w_0} = \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l} - \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi x}{l}.$$

Соответственно наибольшая величина возникающего в сечении изгибающего момента

$$M_{\max} = EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{\max} = 6EJw_0 \frac{\pi^2}{l^2}. \quad (10)$$

Предельное состояние статически определимых балок наступает при появлении пластического шарнира или трещины по всему сечению. Разрушение происходит при предельных значениях внутренних изгибающих моментов M и поперечных сил Q в сечении. Значение такого изгибающего момента можно рассчитать по формуле

$$M = \sigma_{\text{пр}} W,$$

где σ – предельное напряжение; W – пластический момент сопротивления сечения.

В частности, для балки прямоугольного поперечного сечения, имеющего ширину b и высоту h , $W = \frac{bh^2}{4}$ [9]. Поэтому предельное напряжение с учетом формулы (10) определяется выражением

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{24EJw_0\pi^2}{l^2bh^2}.$$

Помимо рассмотренного выше аналитического подхода для оценки максимальной реакции системы с одной степенью свободы на действие импульсной нагрузки может быть использована методика, построенная на использовании коэффициентов усиления колебаний [10, 11]. В качестве примера рассмотрим стальной стержень прямоугольного поперечного сечения 20×30 мм и длиной 1 м (рисунок 1), нагруженный переменной силой P , амплитудное значение которой составляет 1 Н (рисунок 2).

Force
Time: 0,01, s
Force: 1, N
Component: 0,0;1, N

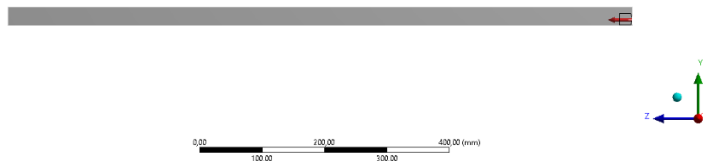


Рисунок 1 – Расчетная схема прямоугольной балки в программе ANSYS

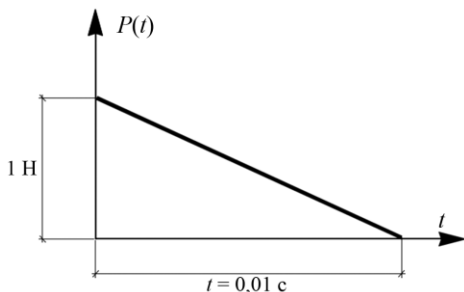


Рисунок 2 – Схема импульсного нагружения.

Период собственных продольных колебаний рассматриваемого стержня

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,0146 \text{ с.}$$

При продолжительности действия силы 0,01 с отношение времени импульса к периоду собственных колебаний $\frac{t}{T} = \frac{0,01}{0,0146} = 0,68$.

В соответствии с графиком [10], который представлен на рисунке 3, для треугольного импульса получаем значение динамического коэффициента $D = 1,33$,

откуда максимальное перемещение $W = D \frac{P}{k} = 1,1 \cdot 10^{-8}$ м (здесь коэффициент

$k = ES / l$). Перемещение, полученное методом конечных элементов (см. рисунок 4), составляет $W = 0,83 \cdot 10^{-8}$ м, что достаточно близко к полученному аналитически значению.

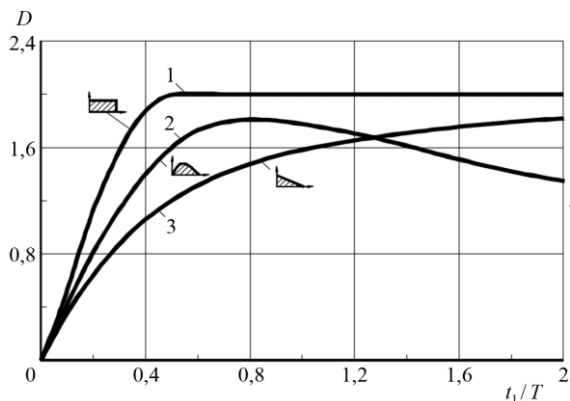


Рисунок 3 – Коэффициент усиления колебаний при трех видах импульсов

Z Axis - Directional Deformation - 1.1
 Type: Directional Deformation(Z Axis)
 Unit: mm
 Global Coordinate System
 Time: 1

8,3333e-6 Max
 7,4074e-6
 6,4815e-6
 5,5556e-6
 4,6296e-6
 3,7037e-6
 2,7778e-6
 1,8519e-6
 9,2593e-7
 -1,9009e-13 Min



Рисунок 4 – Результат расчета методом конечных элементов

Результаты расчетов показывают, что в случае действия импульса очень небольшой продолжительности значительная часть приложенной нагрузки воспринимается силами инерции, а вызываемые напряжения намного меньше напряжений при длительных воздействиях.

Таким образом, в работе проанализированы динамические напряжения в стержнях, вызванные действием кратковременных нагрузок. В явном виде получено решение для поперечного прогиба, причем внутренние силовые факторы определяются путем дифференцирования выражения, задающего форму упругой линии балки при ее свободных колебаниях. Получено условие, при котором в балке образуется пластический шарнир. Представлены численное и аналитическое решения задачи о продольном ударе по стержню, воспринимающему ударно-волновые нагрузки, которые показали достаточно близкие результаты.

Разработанные методики позволят повысить точность оценки прочности и жесткости строительных конструкций и прогнозировать их поведение при чрезвычайных ситуациях природного и техногенного характера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Skinner, R. I.** An introduction to seismic isolation / R. I. Skinner, W. H. Robinson, G. H. McVerry. – New York : Wiley, 2003. – 398 p.
- 2 **Рабинович, И. М.** Расчет сооружений на импульсное воздействие / И. М. Рабинович. – М. : Стройиздат, 1970. – 303 с.
- 3 **Biggs, J. M.** Introduction to Structural Dynamics / J. M. Biggs // New York : McGraw-Hill Book Company, 1964. – 334 p.
- 4 Справочник по динамике сооружений / под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – М. : Стройиздат, 1972. – 511 с.
- 5 **Бидерман, В. М.** Прикладная теория механических колебаний / В. М. Бидерман. – М. : Высш. шк., 1972. – 416 с.
- 6 **Шиманский, Ю. А.** Справочник по строительной механике корабля. В 3 т. / Ю. А. Шиманский. – Л. : Судпромгиз, 1958. – Т. 2. – 528 с.
- 7 **Тимошенко, С. П.** Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1967. – 442 с.
- 8 **Бердичевский, В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. – М. : Наука, 1983. – 448 с.
- 9 **Ржаницын, А. Р.** Составные стержни и пластины / А. Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1986. – 316 с.
- 10 **Newmark, N. M.** Earthquake Spectra and Design / N. M. Newmark, W. J. Hall. – Oakland, CA : Earthquake Engineering Research Inst., 1982. – 103 p.
- 11 **Курбацкий, Е. Н.** Динамические коэффициенты или спектры реакций (ответов) сооружений на сейсмические воздействия? / Е. Н. Курбацкий, В. Л. Мондрус // Academia. Архитектура и строительство. – 2019. – № 1. – С. 107–114.
- 12 **Клаф, Р.** Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. – М. : Стройиздат, 1979. – 320 с.

T. M. MARTYNENKO¹, S. A. PRONKEVICH², I. M. MARTYNENKO²

¹The University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk, Belarus

²Belarusian State University, Minsk, Belarus

SIMULATION OF DEFORMATION AND FAILURE PROCESSES FOR A BEAM-TYPE STRUCTURE UNDER PULSE LOADING

Methods for analyzing the strength of rod structures under the influence of shock and impulse loads are considered. The analytical calculation technique for a beam under a short-term load is presented. There is obtained the condition when the formation of a plastic hinge is possible as a result of impulse loading. There is performed a finite element modeling in the ANSYS system of the longitudinal shock pulse action on a rod of rectangular cross-section. It is shown that the calculation with the use of the vibration amplification factor makes it possible to determine the structure deformations with a sufficiently high accuracy.

Keywords: modeling, progressive deformation processes, dynamic calculation, plastic hinge, destruction, a beam-type structure.

Получено 22.09.2021