

УДК 691-419:534.13

М. В. МАРКОВА

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ

В работе получена система дифференциальных уравнений, описывающая собственные колебания трёхслойной круговой пластины ступенчато-переменной толщины. Для случаев защемления и шарнирного опирания внешнего контура пластины получены однородные системы уравнений, служащие для определения собственных частот колебания. Выполнен численный анализ влияния геометрических параметров ступенчатой пластины на значения её собственных частот.

Ключевые слова: собственные колебания, собственная частота, ступенчатая трёхслойная круговая пластина.

Введение. Конкурентоспособность современного рынка материалов и различных композитов из них позволяет находить оптимальные инженерные решения при конструировании объектов в самых разных областях: строительстве зданий и сооружений, авиа-, ракето-, судостроении и т. д. Одним из актуальных конструктивных решений на сегодняшний день являются трёхслойные элементы. Они представляют собой конгломерат из внешних прочных и жёстких слоёв, связанных между собой срединным наполнителем. Внешние слои воспринимают действующие на элемент нагрузки, а срединный наполнитель обеспечивает перераспределение усилий между внешними несущими слоями и наделяет конструкцию требуемыми функциональными особенностями: звуко- и теплопроводность, легковесность и др.

Широкое применение трёхслойных элементов конструкций обуславливает необходимость исследования их статического и динамического деформирования под действующей нагрузкой. Подобного рода задачи, касающиеся трёхслойных пластин различной формы, уже были рассмотрены в работах как отечественных, так и зарубежных авторов. Так, вопросам устойчивости круговых и кольцевых пластин посвящены работы [1–4]. Изгиб плоских круговых пластин, в том числе с учётом их сопряжения с упругим основанием, был исследован в работах [5–9]. Динамическое деформирование представлено в [10–14]. Однако авторы всех упомянутых работ рассматривали в качестве объекта своего исследования круговые трёхслойные пластины, имеющие постоянную толщину, либо пластины постоянной толщины с отверстием в центральной части. Исследование сплошных трёхслойных пластин переменной вдоль радиуса толщины выполнялось лишь с точки зрения их статического деформирования [15, 16]. В данной работе анализируются собственные колебания ступенчатой трёхслойной пластины.

Постановка задачи. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) рассмотрим собственные колебания трёхслойной ступенчатой пластины, общий вид которой представлен на рисунке 1. Наружные тонкие слои пластины имеют на каждом i -м участке пластины толщину $h_{1(i)}$ и $h_{2(i)}$ и выполнены из прочного и жёсткого материала. Взаимосвязь внешних слоёв и их совместная работа обеспечивается за счёт толстого лёгкого срединного заполнителя, имеющего по всей площади пластины постоянную толщину h_3 . Срединная плоскость заполнителя соответствует координатной плоскости $r\varphi$.

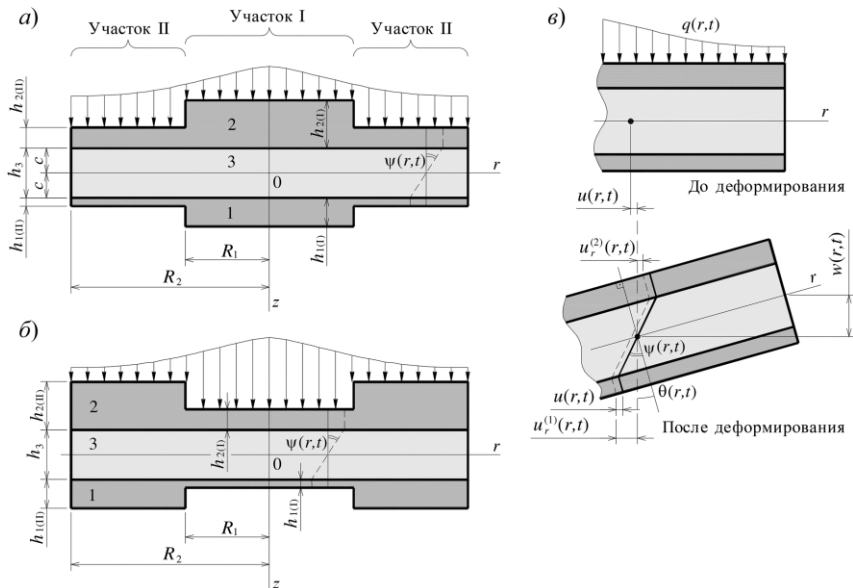


Рисунок 1 – Трёхслойная круговая ступенчатая пластина:
 а – выпуклая; б – вогнутая; в – перемещения при изгибе

Модель деформирования пластины в процессе её колебаний базируется на гипотезе «ломаной» нормали, согласно которой проведённая к срединной плоскости пластины нормаль при изгибе пластины остаётся перпендикулярной к деформированной срединной поверхности лишь в тонких внешних слоях, а в толстом заполнителе, подчиняясь гипотезе Тимошенко, поворачивается на некоторый угол ψ .

Прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u считаем малыми и не зависящими от координаты φ , то есть $w = w(r, t)$, $\psi = \psi(r, t)$, $u = u(r, t)$. На границе контакта слоёв пластины используем условие непрерывности перемещений, учитывая, что пластина не имеет расслоений и работает без проскальзывания между слоями. На контуре пластины предполагаем наличие жёсткой

диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоёв. Кроме того, при составлении уравнений пренебрегаем работой напряжений сдвига лёгкого заполнителя [17].

Уравнения движения. В работе [18] представлена система дифференциальных уравнений, описывающая колебания круговой трёхслойной пластины произвольно-переменной толщины:

$$a_1^+ L_2(u) + a_2^+ L_2(\psi) - a_3^+ L_2(w_{,r}) + a_{1,r}^+ u_{,r} + a_{2,r}^+ \psi_{,r} - a_{3,r}^+ w_{,rr} + \\ + a_{1,r}^- \frac{u}{r} + a_{2,r}^- \frac{\psi}{r} - a_{3,r}^- \frac{w_{,r}}{r} - M_1 \ddot{u} - M_2 \ddot{\psi} + M_3 \ddot{w}_{,r} = 0 ;$$

$$a_2^+ L_2(u) + a_4^+ L_2(\psi) - a_5^+ L_2(w_{,r}) + a_{2,r}^+ u_{,r} + a_{4,r}^+ \psi_{,r} - a_{5,r}^+ w_{,rr} + \\ + a_{2,r}^- \frac{u}{r} + a_{4,r}^- \frac{\psi}{r} - a_{5,r}^- \frac{w_{,r}}{r} - M_2 \ddot{u} - M_4 \ddot{\psi} + M_5 \ddot{w}_{,r} = 0 ;$$

$$a_3^+ L_3(u) + 2a_{3,r}^+ L_2(u) + a_5^+ L_3(\psi) + 2a_{5,r}^+ L_2(\psi) - a_6^+ L_3(w_{,r}) - 2a_{6,r}^+ L_2(w_{,r}) + \\ + \left(a_{3,rr}^+ + \frac{a_{3,r}^-}{r} \right) u_{,r} + \left(a_{5,rr}^+ + \frac{a_{5,r}^-}{r} \right) \psi_{,r} - \left(a_{6,rr}^+ + \frac{a_{6,r}^-}{r} \right) w_{,rr} + \\ + \left(a_{3,rr}^- - \frac{a_{3,r}^+}{r} \right) \frac{u}{r} + \left(a_{5,rr}^- - \frac{a_{5,r}^+}{r} \right) \frac{\psi}{r} - \left(a_{6,rr}^- - \frac{a_{6,r}^+}{r} \right) \frac{w_{,r}}{r} - \\ - \left[M_{3,r} + \frac{M_3}{r} \right] \ddot{u} - \left[M_{5,r} + \frac{M_5}{r} \right] \ddot{\psi} + \left[M_{6,r} + \frac{M_6}{r} \right] \ddot{w}_{,r} - \\ - M_3 \ddot{u}_{,r} - M_5 \ddot{\psi}_{,r} + M_6 \ddot{w}_{,rr} - M_1 \ddot{w} = -q , \quad (1)$$

где $L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}$ и $L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}$ – дифференциальные операторы (запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате); M_n и a_n^\pm – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв пластины; q – внешняя осесимметричная вертикальная распределённая нагрузка.

Вывод системы уравнений (1) основан на вариационном принципе Гамильтона. Рассмотренная пластина состоит из переменных по толщине внешних слоёв и постоянного по толщине срединного заполнителя $h_3 = \text{const}$. Толщина внешних слоёв задаётся некоторыми функциями, зависящими от координаты r : $h_1 = h_1(r)$ и $h_2 = h_2(r)$.

Каждый i -й участок представляет собой плоскую пластину, для которой $h_{1(i)} = \text{const}$ и $h_{2(i)} = \text{const}$, в этом случае для каждого такого участка ступенчатой пластины система (1) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
a_{1(i)}^+ L_2(u_{(i)}) + a_{2(i)}^+ L_2(\Psi_{(i)}) - a_{3(i)}^+ L_2(w_{,r(i)}) &= M_{1(i)} \ddot{u}_{(i)} + M_{2(i)} \ddot{\Psi}_{(i)} - M_{3(i)} \ddot{w}_{,r(i)} ; \\
a_{2(i)}^+ L_2(u_{(i)}) + a_{4(i)}^+ L_2(\Psi_{(i)}) - a_{5(i)}^+ L_2(w_{,r(i)}) &= M_{2(i)} \ddot{u}_{(i)} + M_{4(i)} \ddot{\Psi}_{(i)} - M_{5(i)} \ddot{w}_{,r(i)} ; \\
a_{3(i)}^+ L_3(u_{(i)}) + a_{5(i)}^+ L_3(\Psi_{(i)}) - a_{6(i)}^+ L_3(w_{,r(i)}) &= M_{3(i)} \left[\frac{\ddot{u}_{(i)}}{r} + \ddot{u}_{,r(i)} \right] + \\
+ M_5 \left[\frac{\ddot{\Psi}_{(i)}}{r} + \ddot{\Psi}_{,r(i)} \right] - M_{6(i)} \left[\frac{\ddot{w}_{,r(i)}}{r} + \ddot{w}_{,rr(i)} \right] + M_{1(i)} \ddot{w}_{(i)} - q_{(i)} . & \quad (2)
\end{aligned}$$

При собственных поперечных колебаниях полагаем $q_i = 0$. Инерционными силами, связанными с продольными перемещениями и поворотом нормали заполнителя пренебрегаем [19]. Система (2) сводится к виду:

$$\begin{aligned}
u_{(i)} &= b_{1(i)} w_{,r(i)} + r C_{1(i)}^* + \frac{C_{2(i)}^*}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{a_{4(i)}^+ M_{3(i)} - a_{2(i)}^+ M_{5(i)}}{a_{1(i)}^+ a_{4(i)}^+ - (a_{2(i)}^+)^2} \int r \ddot{w}_{(i)} dr ; \\
\Psi_{(i)} &= b_{2(i)} w_{,r(i)} + r C_{3(i)}^* + \frac{C_{4(i)}^*}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{a_{1(i)}^+ M_{5(i)} - a_{2(i)}^+ M_{3(i)}}{a_{1(i)}^+ a_{4(i)}^+ - (a_{2(i)}^+)^2} \int r \ddot{w}_{(i)} dr ; \\
\Delta \Delta w_{(i)} \pm D_{(i)} m_{(i)} \Delta \ddot{w}_{(i)} + D_{(i)} M_{1(i)} \ddot{w}_{(i)} &= 0 , \quad (3)
\end{aligned}$$

где $m_{(i)} = |b_{3(i)} M_{3(i)} + b_{2(i)} M_{5(i)} - M_{6(i)}|$; $b_{n(i)}$ и $D_{(i)}$ – коэффициенты, зависящие от упругих свойств слоёв пластины и их толщины; $C_{n(i)}^*$ – константы интегрирования.

Используя метод разделения переменных [20], представим функцию прогиба пластины в виде произведения двух других функций:

$$w_{(i)}(r, t) = W_{(i)}(r) \zeta(t), \quad (4)$$

где $W_{(i)}(r)$ – функция, зависящая только от радиуса r ; $\zeta(t)$ – функция, зависящая только от времени t .

После подстановки выражения (4) в последнее уравнение системы (3) получаем

$$\begin{aligned}
\Delta \Delta [W_{(i)}(r)] \mp 2\alpha_{(i)}^2 \Delta [W_{(i)}(r)] - \beta_{(i)}^4 [W_{(i)}(r)] &= 0 ; \\
\ddot{\zeta}(t) + \omega^2 \zeta(t) &= 0 , \quad (5)
\end{aligned}$$

где $\alpha_{(i)}$ и $\beta_{(i)}$ – коэффициенты, зависящие от частоты колебаний пластины ω :

$$\alpha_{(i)} = \sqrt{0,5\omega^2 D_{(i)} m_{(i)}} ; \beta_{(i)} = \sqrt{\omega^2 D_{(i)} M_{1(i)}} .$$

Решение системы (5) можно представить в виде [21]:

$$\begin{aligned}
 W_{(i)}(r) = & C_{5(i)} I_0 \left(r \sqrt{\sqrt{\alpha_{(i)}^4 + \beta_{(i)}^4} + \alpha_{(i)}^2} \right) + C_{6(i)} K_0 \left(r \sqrt{\sqrt{\alpha_{(i)}^4 + \beta_{(i)}^4} + \alpha_{(i)}^2} \right) + \\
 & + C_{7(i)} J_0 \left(r \sqrt{\sqrt{\alpha_{(i)}^4 + \beta_{(i)}^4} - \alpha_{(i)}^2} \right) + C_{8(i)} Y_0 \left(r \sqrt{\sqrt{\alpha_{(i)}^4 + \beta_{(i)}^4} - \alpha_{(i)}^2} \right); \\
 \zeta(t) = & A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $I_0(r)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда); $K_0(r)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда); $J_0(r)$ – функция Бесселя первого рода; $Y_0(r)$ – функция Бесселя второго рода (функция Неймана) [22]; $C_{n(i)}$ – константы интегрирования, определяемые из граничных условий; A и B – коэффициенты интегрирования, определяемые из начальных условий.

Подставив уравнения (4) и (6) в систему (3), получим:

– радиальное перемещение координатной поверхности

$$\begin{aligned}
 u_{(i)}(r, t) = & U_{(i)}(r) \zeta(t); \\
 U_{(i)}(r) = & C_{1(i)} r + \frac{C_{2(i)}}{r} + C_{5(i)} I_1(r\gamma_{(i)}^+) \left[b_{1(i)} \gamma_{(i)}^+ + \frac{m_{1(i)} \omega^2}{\gamma_{(i)}^+} \right] - \\
 & - C_{6(i)} K_1(r\gamma_{(i)}^+) \left[b_{1(i)} \gamma_{(i)}^+ + \frac{m_{1(i)} \omega^2}{\gamma_{(i)}^+} \right] - C_{7(i)} J_1(r\gamma_{(i)}^-) \left[b_{1(i)} \gamma_{(i)}^- - \frac{m_{1(i)} \omega^2}{\gamma_{(i)}^-} \right] - \\
 & - C_{8(i)} Y_1(r\gamma_{(i)}^-) \left[b_{1(i)} \gamma_{(i)}^- - \frac{m_{1(i)} \omega^2}{\gamma_{(i)}^-} \right];
 \end{aligned} \tag{7}$$

– относительный сдвиг в заполнителе пластины

$$\begin{aligned}
 \psi_{(i)}(r, t) = & \Psi_{(i)}(r) \zeta(t); \\
 \Psi_{(i)}(r) = & C_{3(i)} r + \frac{C_{4(i)}}{r} + C_{5(i)} I_1(r\gamma_{(i)}^+) \left[b_{2(i)} \gamma_{(i)}^+ + \frac{m_{2(i)} \omega^2}{\gamma_{(i)}^+} \right] - \\
 & - C_{6(i)} K_1(r\gamma_{(i)}^+) \left[b_{2(i)} \gamma_{(i)}^+ + \frac{m_{2(i)} \omega^2}{\gamma_{(i)}^+} \right] - C_{7(i)} J_1(r\gamma_{(i)}^-) \left[b_{2(i)} \gamma_{(i)}^- - \frac{m_{2(i)} \omega^2}{\gamma_{(i)}^-} \right] - \\
 & - C_{8(i)} Y_1(r\gamma_{(i)}^-) \left[b_{2(i)} \gamma_{(i)}^- - \frac{m_{2(i)} \omega^2}{\gamma_{(i)}^-} \right],
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $\gamma_{(i)}^+ = \sqrt{\sqrt{\alpha_{(i)}^4 + \beta_{(i)}^4} + \alpha_{(i)}^2}$; $\gamma_{(i)}^- = \sqrt{\sqrt{\alpha_{(i)}^4 + \beta_{(i)}^4} - \alpha_{(i)}^2}$.

Функции Макдональда $K_0(r)$ и Неймана $Y_0(r)$ включают в себя логарифмическую функцию, значения которой при $r = 0$, а следовательно и прогиб пластины w , стремятся к бесконечности, что невозможно. Поэтому для участка I, расположенного в центральной части ступенчатой пластины, константы интегрирования при $K_0(r\gamma_{(I)}^+)$ и $Y_0(r\gamma_{(I)}^-)$ принимаются равными нулю: $C_{6(I)} = 0$ и $C_{8(I)} = 0$.

Из условия недопущения деления на ноль при $r = 0$ необходимо также обнулить для участка I константы интегрирования $C_{2(I)}$ и $C_{4(I)}$ в выражениях (7) и (8): $C_{2(I)} = 0$ и $C_{4(I)} = 0$.

В точке сопряжения двух участков (I и II) ступенчатой пластины при $r = R_1$ (см. рисунок 1) происходит изменение толщины пластины ($h_{1(I)} \rightarrow h_{1(II)}$; $h_{2(I)} \rightarrow h_{2(II)}$) и должны выполняться следующие условия:

$$u_{(I)} = u_{(II)}; \quad \Psi_{(I)} = \Psi_{(II)}; \quad w_{(I)} = w_{(II)}; \quad w_{,r(I)} = w_{,r(II)};$$

$$T_{r(I)} = T_{r(II)}; \quad M_{r(I)} = M_{r(II)}; \quad H_{r(I)} = H_{r(II)}; \quad Q_{(I)} = Q_{(II)};$$

где $T_{r(i)}$, $M_{r(i)}$, $H_{r(i)}$ и $Q_{(i)}$ – внутренние усилия, выражаемые через перемещения, возникающие в пластине при её изгибе.

В случае жёсткого закрепления контура пластины при $r = R_2$ должны выполняться условия: $u_{(II)} = 0$, $\Psi_{(II)} = 0$, $w_{(II)} = 0$, $w_{,r(II)} = 0$.

Подставив в граничные условия выражения (6)–(8), мы получаем однородную систему уравнений, которая имеет нетривиальное решение для констант интегрирования $C_{n(i)}$ при условии равенства нулю её детерминанта. Соответствующее трансцендентное уравнение служит для определения частот собственных колебаний ступенчатой пластины ω .

Численные исследования собственных колебаний круговой трёхслойной ступенчатой пластины были выполнены для пакетов, имеющих различную плотность материала срединного слоя: высокую ($\rho = 2150 \text{ кг/м}^3$) – Д16Т–фторопласт–Д16Т, и низкую ($\rho = 60 \text{ кг/м}^3$) – Д16Т–пенополистирол–Д16Т. Предполагалось, что механические характеристики материалов исследуемых пакетов имеют следующие значения:

- Д16Т: $K = 80 \text{ ГПа}$; $G = 26,7 \text{ ГПа}$;
- фторопласт: $K = 346 \text{ МПа}$; $G = 90 \text{ МПа}$;
- пенополистирол: $K = 10 \text{ МПа}$; $G = 15 \text{ МПа}$.

На рисунках 2 и 3 представлены графики изменения частот собственных колебаний защемлённой по внешнему контуру ступенчатой пластины при увеличении радиуса участка I (при $R_2 = 1,0 \text{ м}$). Рисунок 2 отображает зависимость

$\omega_n(R_1)$ для пакета Д16Т–фторопласт–Д16Т при выпуклой форме пластины ($h_{1(I)} = h_{2(I)} = 0,04$ м; $h_{1(II)} = h_{2(II)} = 0,02$ м; $h_3 = 0,3$ м) и вогнутой ($h_{1(I)} = h_{2(I)} = 0,02$ м; $h_{1(II)} = h_{2(II)} = 0,04$ м; $h_3 = 0,3$ м); рисунок 3 – пакета Д16Т–пенополистирол–Д16Т при тех же геометрических параметрах.

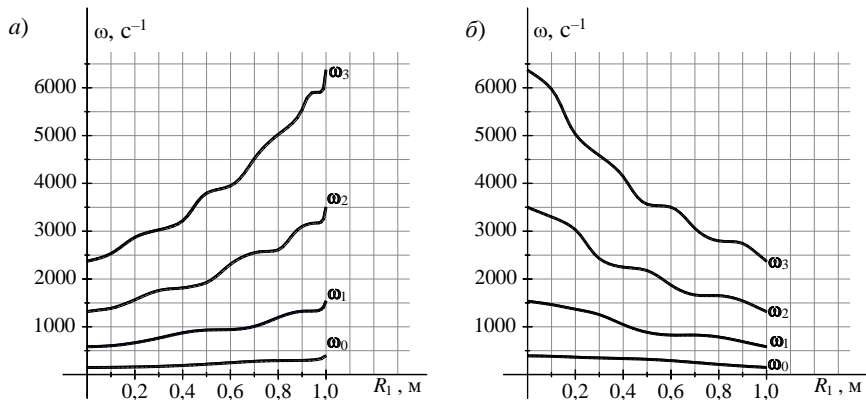


Рисунок 2 – Изменение частоты собственных колебаний защемлённой по внешнему контуру ступенчатой пластины Д16Т–фторопласт–Д16Т:
a – выпуклой; *б* – вогнутой

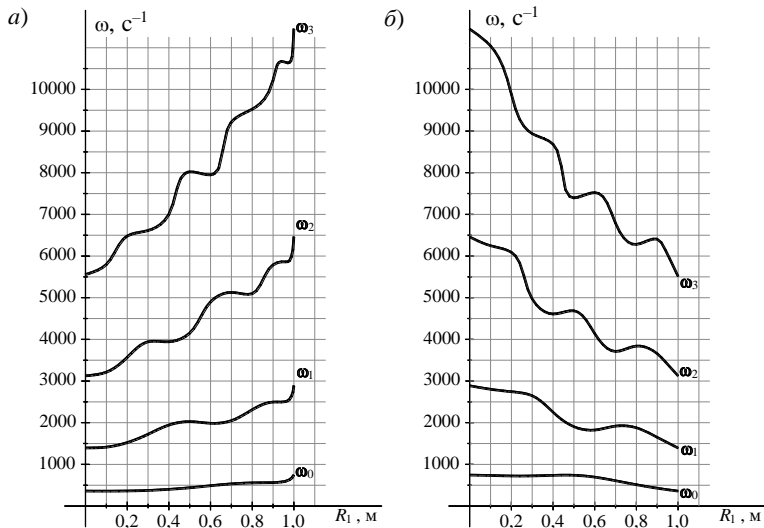


Рисунок 3 – Изменение частоты собственных колебаний защемлённой по внешнему контуру ступенчатой пластины Д16Т–пенополистирол–Д16Т:
a – выпуклой; *б* – вогнутой

В крайних точках графиков значения частот собственных колебаний соответствуют случаю плоской трёхслойной пластины: с $h_1 = h_2 = 0,02$ м при $R_1 = 0$ – для выпуклой пластины, при $R_1 = 1,0$ м – для вогнутой; с $h_1 = h_2 = 0,04$ м при $R_1 = 1,0$ м – для выпуклой пластины, при $R_1 = 0$ – для вогнутой.

Пакеты пластин со срединным наполнителем меньшей плотности имеют более высокие значения частот собственных колебаний. Изменение плотности внешних слоёв пластины не сопровождается таким же существенным изменением значений собственных частот пластины, как в случае с изменением плотности наполнителя. Волнообразный характер зависимости $\omega_n(R_1)$ обусловлен взаимообратным влиянием массы и жёсткости пластины на значения собственных частот.

На рисунке 4 представлены графики изменения частоты собственных колебаний защемлённой по внешнему контуру ступенчатой выпуклой пластины при увеличении толщины срединного наполнителя h_3 ($R_1 = 0,5R_2$; $R_2 = 1,0$ м; $h_{1(I)} = h_{2(I)} = 0,04$ м; $h_{1(II)} = h_{2(II)} = 0,02$ м).

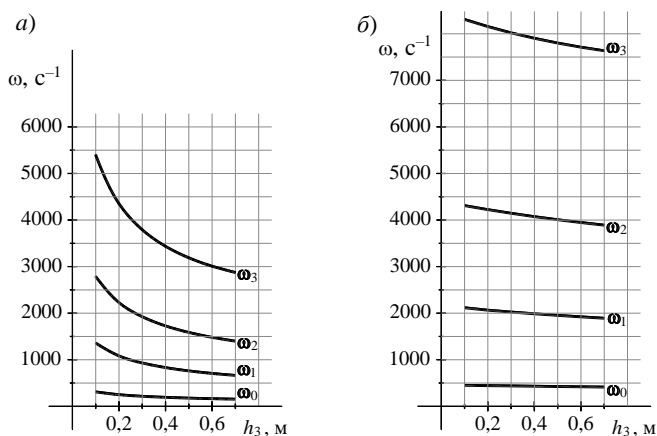


Рисунок 4 – Изменение частоты собственных колебаний защемлённой по внешнему контуру ступенчатой выпуклой пластины при $R_1 = 0,5R_2$:
 а – Д16Т–фторопласт–Д16Т; б – Д16Т–пенополистирол–Д16Т

С ростом толщины срединного наполнителя жёсткость пластины уменьшается и значения частот собственных колебаний убывают. Данный эффект тем более ярко выражен, чем выше плотность срединного наполнителя.

При вогнутой форме пластины характер изменения кривых собственных частот при варьировании толщины наполнителя подобен случаю выпуклой пластины.

На рисунке 5 представлены графики изменения частоты собственных колебаний защемлённой по внешнему контуру симметричной ступенчатой пластины, представленной пакетом из слоёв Д16Т–фторопласт–Д16Т, при увеличении толщины внешних слоёв на участке I ($h_{1(II)} = h_{2(II)} = 0,03$ м; $h_3 = 0,3$ м): с переходом от вогнутой формы пластины, приведённой на рисунке 1, б, к выпуклой, приведённой на рисунке 1, а. Зависимости ω_n ($h_{1(I)} = h_{2(I)}$) представлены для различных радиусов распространения участка I: 25, 50 и 75 % от полного радиуса пластины.

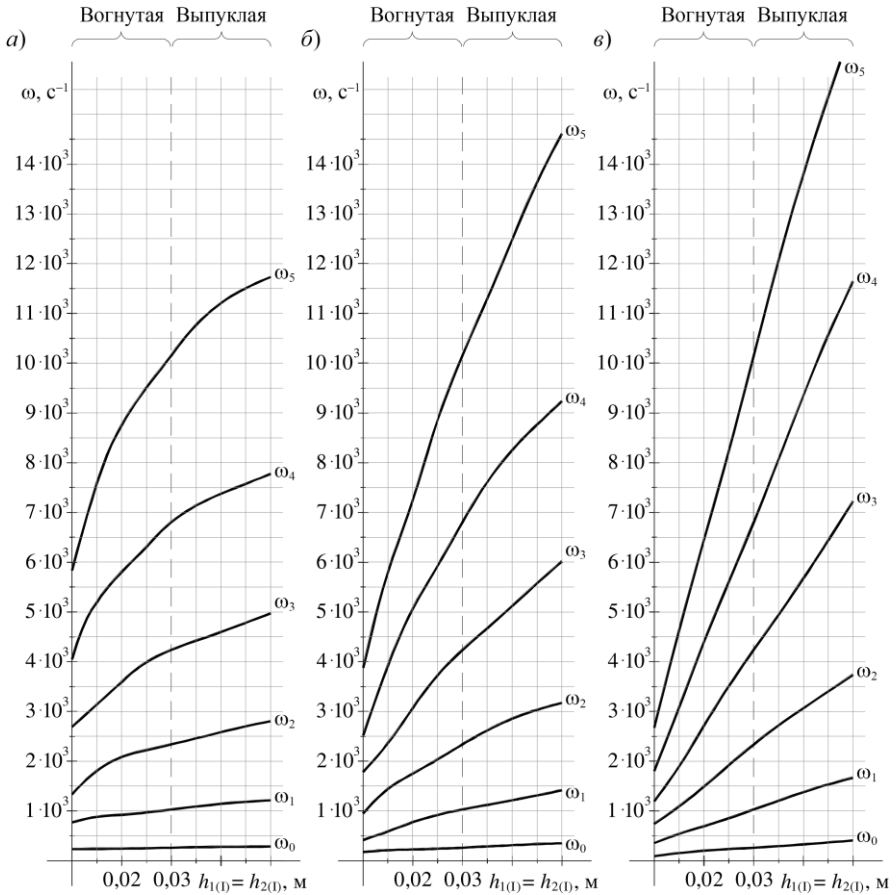


Рисунок 5 – Изменение частоты собственных колебаний защемлённой по внешнему контуру ступенчатой пластины:

а – при $R_1 = 0,25 R_2$; б – при $R_1 = 0,5 R_2$; в – при $R_1 = 0,75 R_2$

Увеличение толщины внешних слоёв пластины на участке I сопровождается увеличением её жёсткости и, как следствие, ростом значений собственных частот. Для небольших радиусов I участка (до 50 %) рост значений собственных частот для вогнутой формы пластины имеет большую скорость, чем для выпуклой. При $R_1 = 0,75 R_2$ данный эффект наблюдается в значительно меньшей степени.

Для пакета Д16Т–пенополистирол–Д16Т характер изменения кривых подобен пакету Д16Т–фторопласт–Д16Т.

В случае увеличения толщины внешних слоёв на участке II при их фиксированной толщине на участке I: с переходом от выпуклой формы пластины к вогнутой – при $R_1 = 0,25 R_2$ характер зависимости $\omega_n (h_{1(II)} = h_{2(II)})$ подобен зависимости $\omega_n (h_{1(I)} = h_{2(I)})$ при $R_1 = 0,75 R_2$, т. е. скорость роста значений собственных частот для выпуклой и вогнутой форм пластин одинакова. В то же время для больших радиусов распространения участка I (более 50 %) наблюдается более быстрое увеличение значений собственных частот для выпуклой пластины, чем для вогнутой.

В случае шарнирного опирания внешнего контура пластины должны выполняться следующие условия: $u_{(II)} = 0$, $\psi_{(II)} = 0$, $w_{(II)} = 0$, $M_{r(II)} = 0$.

Совместно с граничными условиями в точке сопряжения двух участков ступенчатой пластины, так же как и в случае с защемлением внешнего периметра, получаем однородную систему уравнений, а трансцендентное уравнение, полученное при приравнении детерминанта этой системы к нулю, служит для определения частот собственных колебаний при шарнирном опирании. Характер изменения частот собственных колебаний при варьировании радиуса первого участка, толщины срединного заполнителя и внешних слоёв при этом подобен случаю с защемлённым внешним контуром. Однако численные значения частот несколько ниже, чем у защемлённой пластины, что указывает на уменьшение жёсткости при шарнирном закреплении контура.

Заключение. В работе была представлена система дифференциальных уравнений, описывающая собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины через перемещения, возникающие на каждом участке пластины при её деформировании. Совместно с граничными условиями и выражениями для обобщённых внутренних усилий, возникающих в пластине при колебании, была сформирована однородная система уравнений, позволяющая определять частоты собственных колебаний ступенчатых пластин при различном способе закрепления внешнего периметра.

В результате численных исследований было установлено, что способ закрепления внешнего края пластины несущественно влияет на жёсткость и собственную частоту.

Увеличение толщины срединного заполнителя уменьшает жёсткость пластин и снижает их собственную частоту. Данный эффект тем более выражен, чем больше плотность материала срединного заполнителя.

Увеличение толщины внешних несущих слоёв пластины увеличивает её жёсткость и, как следствие, собственную частоту. Выпуклая ступенчатая пластина более чувствительна к изменению толщины внешних слоёв на различных участках при $R_1 > 0,5 R_2$, а вогнутая пластина – при $R_1 < 0,5 R_2$.

Зависимость собственных частот выпуклых и вогнутых ступенчатых пластин от изменения радиуса внутреннего участка не носит монотонный характер ввиду совместного взаимообратного влияния на колебания пластины её массы и жёсткости.

Работа выполнена в рамках задания 1.08 ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Андреев, А. Н.** Осесимметричное выпучивание трёхслойных круговых пластин / А. Н. Андреев // Динамика твёрдого деформируемого тела (Динамика сплошной среды, вып. 66). – 1984. – С. 3–11.

2 **Byon, O.** Axial compressive buckling of hybrid FRP sandwich circular cylinders with soft core / O. Byon, H. Ohta, M. Uemura // Journal of the Japan society for composite materials. – 1986. – Vol. 12, no. 3. – P. 116–122.

3 Global and local buckling of sandwich circular and beam-rectangular plates with metal foam core / P. Jason [et al.] // Thin-walled structures. – 2012. – Vol. 61. – P. 154–161.

4 Buckling of a sandwich symmetrical circular plate with varying mechanical properties of the core / E. Magnucka [et al.] // Applied mathematics and mechanics. – 2018. – Vol. 39, no. 7. – P. 981–992.

5 **Захарчук, Ю. В.** Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – Вып. 34. – С. 259–265.

6 **Козел, А. Г.** Нелинейный изгиб сэндвич-пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 106–113.

7 **Кудин, А. В.** Осесимметричный изгиб круговых и кольцевых трёхслойных пластин с нелинейно-упругим заполнителем / А. В. Кудин, С. В. Чопоров, С. И. Гоменюк // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, № 2. – С. 63–78.

8 Bending and buckling of circular sandwich plates with a hardened core / Z. Pi [et al.] // Materials. – 2021. – Vol. 14, no. 16. – P. 4741–4755.

9 **Starovoitov, E. I.** Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, no. 9. – P. 1032–1040.

10 **Громыко, Ю. В.** Колебания трехслойной круговой пластины с отверстием при резонансе / Ю. В. Громыко // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 41–48.

11 **Леоненко, Д. В.** Собственные колебания трехслойной круговой пластины, скрепленной с инерционным основанием / Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – Вып. 34. – С. 143–149.

12 **Alipour, M. M.** Transient forced vibration response analysis of heterogeneous sandwich circular plates under viscoelastic boundary support / M. M. Alipour // Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 18, no. 1. – P. 12–31.

13 **Heshmati, M.** Effect of radially graded porosity on the free vibration behavior of circular and annular sandwich plates / M. Heshmati, S. K. Jalali // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2019. – Vol. 74. – P. 417–430.

14 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya, D. V. Leonenko // Strength of materials. – 2003. – Vol. 35, no. 4. – P. 346–352.

15 **Парфёнова, В. С.** Деформирование круговой трёхслойной пластины со ступенчато-переменной границей / В. С. Парфёнова // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 157–163.

16 **Leonenko, D. V.** Elastic bending of a three-layer circular plate with step-variable thickness / D. V. Leonenko // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 25–29.

17 **Старовойтов, Э. И.** Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости : учеб. для студентов строительных спец. вузов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.

18 **Маркова, М. В.** Уравнения движения трехслойной круговой пластины переменной толщины / М. В. Маркова // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Междунар. симпоз. им. А. Г. Горшкова, Вятчи, 17–21 мая 2021. – М. : ООО «ТРП», 2021. – Т. 1. – С. 157–158.

19 **Гольденвейзер, А. Л.** Свободные колебания тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

20 **Араманович, И. Г.** Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 288 с.

21 **Власов, В. З.** Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Физматгиз, 1960. – 491 с.

22 **Бейтман, Г.** Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1974. – 296 с.

M. V. MARKOVA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

SELF-OSCILLATIONS OF THE CIRCULAR THREE-LAYERED STEPPED PLATE

In this paper, a system of differential equations governing the self-oscillations of a three-layered circular plate of step-variable thickness is obtained. For the cases of anchoring and hinge support of the plate outer circuit, the homogeneous equations systems that serve to determine the eigen frequency of a stepped-thickness plate are obtained. A numerical analysis of the plate geometrical parameters effect on the eigen frequency is performed.

Key words: self-oscillations, eigen frequency, stepped three-layered circular plate.

Получено 06.10.2021