Для решения задачи на параметрической плоскости для определения трех аналитических функций $\Phi[\omega(\zeta)]$, $\Psi[\omega(\zeta)]$ и $\omega(\zeta)$ строятся общие представления решений, описывающие класс задач с распределением напряжений. Удовлетворяя граничным условиям задачи (3) получаем нелинейные алгебраические системы для определения искомых коэффициентов общих представлений решений.

Для совместного решения полученных систем уравнений преобразовываем систему (4) для параметрической плоскости. Затем, решая построенную систему, находим величины сосредоточенных сил P_{mn}.

Решая построенные алгебраические системы уравнений методом Ньютона – Рафсона, находим искомые коэффициенты.

Полученные алгебраические системы совместно с системой уравнений (4) позволяют определить искомую форму равнопрочного контура, напряженно-деформированное состояние подкрепленной пластины, а также оптимальное значение нормального тангенциального напряжения σ_* для случая упругого материала.

Таким образом, построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования формы отверстия в зависимости от геометрических и механических характеристик пластины, оценить эффекты упрочнения пластины, подкрепленной регулярной системой стрингеров.

Список литературы

1 **Черепанов, Г. П.** Обратные задачи плоской теории упругости / Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1974. – Т. 38, вып. 6. – С. 963–979.

2 **Ишлинский, А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 702 с.

3 **Мирсалимов, В. М.** Некоторые задачи конструкционного торможения трещины / В. М. Мирсалимов // Физико-химическая механика материалов. – 1986. – Т. 22, № 1. – С. 84–88.

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОВЕРХНОСТНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОКРЫТИЕМ ТИПА ПЛАСТИНЫ

Е. Ю. МИХАЙЛОВА
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, Г. В. ФЕДОТЕНКОВ
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Исследуется плоское напряжённо-деформированное состояние полупространства (основания) с покрытием типа пластины Кирхгофа при воздействии нестационарного давления $p = p(x,\tau)H(x_p - |x|)$, где $H(x)$, x_p – функция Хэвисайда и граница области нагружения соответственно. При этом контакт между пластиной и основанием происходит в условиях свободного проскальзывания.

Движение полупространства с покрытием рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, ось x_3 направлена вглубь полупространства, оси x_1, x_2 расположены на срединной поверхности пластины и составляют правую тройку векторов с x_3. Пусть основание и покрытие заполнены однородной изотропной линейно упругой средой с параметрами Ламе $\lambda,\ \mu$.

Постановка задачи включает в себя:

– уравнения движения среды

$$\Delta\varphi = \gamma_1^2\ddot{\varphi},\ \Delta\psi = \gamma_2^2\ddot{\psi};$$

– соотношение, связывающее упругие потенциалы φ, ψ с тангенциальными u (вдоль оси Ox_1), нормальными w (вдоль оси Ox_3) перемещениями,

$$u = \varphi'_{x_1} + \psi'_{x_3}, \qquad w = \varphi_{x_3} + \psi'_{x_1};$$

– соотношение, связывающее перемещения и компоненты тензора напряжений σ,

$$\sigma_{11} = u'_{x_1} + \kappa w'_{x_3},\ \sigma_{22} = \kappa\left(u'_{x_1} + w'_{x_3}\right),\ \sigma_{33} = \kappa u'_{x_1} + w'_{x_3},\ \eta^2\sigma_{13} = u'_{x_3} + w'_{x_1};$$

– уравнение движения пластины Кирхгофа

$$\ddot{v} = -\tilde{\alpha}^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x_1^4} + p + \alpha\sigma_{330},\ \sigma_{330} = \sigma_{33}\big|_{x_3=0};$$

– начальные условия

$$v\big|_{\tau=0} = \dot{v}\big|_{\tau=0} = \psi\big|_{\tau=0} = \dot{\psi}\big|_{\tau=0} = \varphi\big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}\big|_{\tau=0} = 0;$$

– граничные условия

$$\sigma_{13}\big|_{x_3=0} = 0,\ v = w\big|_{x_3=0}; \tag{1}$$

– условия, характеризующие отсутствие возмущений в бесконечно удаленной точке,

$$\lim_{r\to\infty}\varphi = \lim_{r\to\infty}\psi = 0,\ r^2 = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}.$$

В уравнениях движения точками обозначена производная по времени τ, запятой – частная производная по соответствующей пространственной переменной.

Все переменные и параметры приводятся к безразмерному виду (штрих соответствует размерным величинам):

$$\tau = c_{1p}t\left(L'\right)^{-1},\ v = v'\left(L'\right)^{-1},\ h = h'\left(L'\right)^{-1},\ u = u'\left(L'\right)^{-1},\ w = w'\left(L'\right)^{-1},\ x_k = x_k{}'\left(L'\right)^{-1}\ (k = 1,2,3),$$

$$p = p'\left(c_{1p}^2\rho_{pl}h\right)^{-1},\ \gamma_k^2 = c_{1p}^2c_{kp}^{-2}\ (k = 1,2),\ \eta^2 = c_{1p}^2c_{2p}^{-2},\ \varphi = \varphi'\left(L'\right)^{-2},\ \psi = \psi'\left(L'\right)^{-2},$$

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}\left(\lambda + 2\mu\right)^{-1}\ (i, j = 1,2,3),\ \ \kappa = \lambda\left(\lambda + 2\mu\right)^{-1},\ \tilde{\alpha}^2 = h^2c_{1pl}^2\left(12c_{1p}^2\right)^{-1},\ \alpha = \rho_p\left(h\rho_{pl}\right)^{-1},\ \ c_R = c_R{}'c_{1p}^{-1}.$$

Здесь c_{kp}, c_{pl} – скорости распространения продольных и поперечных волн в полупространстве и пластине волн растяжения-сжатия, сдвига в полупространстве и пластине; v', h', ρ_{pl} – нормальные перемещения, толщина, плотность покрытия; ρ_p – плотность полупространства; L' – характерный линейный размер; $c_R{}'$ – скорость волны Рэлея.

Разрешающее интегральное уравнение вытекает из граничных условий (1) и запишется так:

$$G_{pl} * p = \sigma_{330} * \left(G_p - \alpha G_{pl}\right), \tag{2}$$

где значок (*) обозначает свертку функций, G_{pl}, G_p – функции влияния для пластины и полупространства.

G_p имеет вид [1–3]:

$$G_p(x,\tau) = \left[G_{pr}(x,\tau) + G_{ps}(x,\tau)\right]H\left(\tau - |x|\right),\ G_{pr}(x,\tau) = G_{r1}(x,\tau)H\left(\gamma_2|x| - \tau\right) - G_{r3}(x,\tau)H\left(\tau - \gamma_2|x|\right),$$

$$G_{rk}(x,\tau) = G_{pk}(x,\tau) - G_{ps}(x,\tau)\ \left(k = 1,3\right),\ G_{p1}(x,\tau) = \eta^2\left(\gamma_2^2x^2 - 2\tau^2\right)^2\left(\pi P_1(x^2,\tau^2)\right)^{-1}\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2x^2},$$

$$G_{p3}(x,\tau) = \eta^2R(x^2,\tau^2)\left(\pi P_1(x^2,\tau^2)\right)^{-1}\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2x^2},\ R(x,\tau) = \left(\gamma_2^2x - 2\tau\right)^2 + 4\tau\sqrt{\tau - \gamma_2^2x}\sqrt{\tau - \gamma_1^2x},$$

$$P_1(x,\tau) = \gamma_2^6\left(x - c_R^2\tau\right)P_2(x,\tau),\ G_{ps}(x,\tau) = a_s\left(x^2 - c_R\tau^2\right)^{-1},\ a_s = R(c_R^2,1)\sqrt{1 - c_R^2}\left(\pi\gamma_2^4P_2(c_R^2,1)\right)^{-1},$$

$$P_2(x,\tau) = x^2 - 2\alpha_1^2x\tau + \alpha_2^2\tau^2,\ \alpha_1^2 = 4\eta^{-2} - 2^{-1}c_R^2,\ \alpha_2^2 = 16\left(\eta^2 - 1\right)\eta^{-8}c_R^{-2}.$$

G_{pl} запишется так:

$$G_{pl}(x,\tau)=\frac{|x_1|}{\tilde{\alpha}\sqrt{2}}\left\{g\left(|x_1|\sqrt{\frac{2b}{\pi}}\right)\cos\left(bx_1^{\,2}+\frac{\pi}{4}\right)+\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{b}}-f\left(|x_1|\sqrt{\frac{2b}{\pi}}\right)\right]\sin\left(bx_1^2+\frac{\pi}{4}\right)\right\},\ b=\frac{1}{4\tilde{\alpha}\tau}.$$

При расчетах удобнее использовать аппроксимации рациональными функциями, гарантирующие абсолютную ошибку $|\varepsilon(y)|\le 2\cdot 10^{-3}$ на интервале $0\le y<\infty$:

$$g(y)\approx\left(2+4{,}142y+3{,}492y^2+6{,}670y^3\right)^{-1},\ f(y)\approx(1+0{,}926y)\left(2+1{,}792y+3{,}104y^2\right)^{-1}.$$

Для определения напряжений σ_{330} и нормальных перемещений v построен и реализован численно-аналитический алгоритм, основанный на методе квадратур. Интегралы от сингулярных составляющих вычисляются с помощью метода весовых коэффициентов с использованием канонической регуляризации, от регулярных – методом Гаусса [3–5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-08-01099 А).

Список литературы

1 **Mikhailova, E. Yu.** Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) / E. Yu. Mikhailova, G. V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, no. 2. – P. 239–247.

2 **Михайлова, Е. Ю.** Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства / Е. Ю. Михайлова, Г. В. Федотенков, Д. В. Тарлаковский // Труды МАИ : электронный журнал. – 2014. – Вып. 78 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53499. – Дата доступа : 23.09.2021.

3 **Горшков, А. Г.** Динамические контактные задачи с подвижными границами / А. Г. Горшков. – М. : Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.

4 **Михайлова, Е.** Контактные напряжения в нестационарной задаче для полупространства с покрытием / Е. Ю. Михайлова, Э. И. Старовойтов, Г. В. Федотенков // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVI междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 2. – М., 2020. – С. 97–99.

5 **Mikhailova, E.Yu.** Impact of transient pressure on a half-space with membrane type coating // Proceedings of the Third International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, ICTAEM 2020. Structural Integrity. – Springer, Cham. – 2020. – Vol. 16. – P. 312–315.

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ОКРУЖЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДОЙ

Л. И. МОГИЛЕВИЧ, Е. В. ЕВДОКИМОВА, Е. В. ПОПОВА
Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, Российская Федерация

Рассмотрена задача гидроупругости цилиндрической оболочки с квадратичной физической нелинейностью неограниченной длины, окруженной упругой средой. Оболочка заполнена вязкой несжимаемой жидкостью. Считается, что в оболочке была возбуждена уединенная волна деформации, например, воздействием пьезоэлектрического элемента или ударным воздействием на ее торец. Рассматриваем упругую среду с учетом нелинейной реакции среды в продольном направлении. В этом случае реакция такой среды в нормальном направлении характеризуется безразмерным коэффициентом жесткости k_1, как основание Винклера. Однако в продольном направлении среда обладает жесткостью с мягкой кубической нелинейностью, характеризуемой безразмерными коэффициентами жесткости k_2, k_3. Оболочка характеризуется следующими параметрами: R_1 – внутренний радиус оболочки; R – радиус ее срединной поверхности; h_0 – толщина оболочки. При этом выполняется условие $h_0/R << 1$.

Сформулирована осесимметричная задача гидроупругости рассматриваемой оболочки, включающая в себя: уравнения динамики рассматриваемой оболочки, а также уравнения Навье – Стокса и уравнение неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости, которые дополнены