Математическая модель состоит из связанной системы уравнений динамики оболочек, уравнений динамики вязких несжимаемых жидкостей и соответствующих граничных условий. Задача решается комбинацией аналитических и численных методов, а именно, решение уравнений гидродинамики решается аналитическими методами, а получившиеся в дальнейшем уравнения динамики упругих соосных оболочек – численными. Уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости линеаризуются методом возмущений, а далее решаются аналитически при условии неизвестности прогибов оболочек. Для решения уравнений динамики оболочек применяется метод Бубнова – Галеркина. Даже применение такой комбинации методов оставляют высокую вычислительную сложность решаемой задачи. Так, например, для задачи с перепадом давления на концах механической системы получающаяся после применения метода Бубнова – Галеркина [3, 4] система линейных алгебраических уравнений состоит из 36 уравнений, а если задача с вибрацией, то система из 42 уравнений. Конечно, такие системы уравнений достаточно тяжело решаются аналитически. Поэтому можно решать их с помощью параллельных вычислений [5, 6]. Применение современных языков программирования в значительной степени упрощает распараллеливание. Так, например, язык Python позволяет достаточно хорошо распараллелить вычисления. Кроме того, так как основные аналитические вычисления проводились в Maple, то актуальным вопросом становится применение внутренних инструментов Maple для распараллеливания вычислений.

Предварительные вычислительные эксперименты показали, что применение Python позволяет рассчитать в 1,5–2 раза быстрее, чем Maple. Тестирование производили на одном и том же компьютере без учета времени загрузки программного обеспечения. Однако формирование единого вычислительного комплекса в Maple в значительной степени дает более широкие возможности в дальнейшей применимости модели для научных исследований. Для инженерной практики лучше делать только закрытый комплекс для расчетов с использованием Python или других языков программирования. Исследование математической модели позволяет вычислить прогибы каждой из трех упругих оболочек.

Список литературы

1 **Кондратов, Д. В.** Гидроупругость силового цилиндра с полым плунжером при свободном истечении жидкости / Д. В. Кондратов // Вестник Саратовского госагроуниверситета им. Н. И. Вавилова. – 2008. – № 1. – С. 38–43.

2 **Вельмисов, П. А.** Математическое моделирование в задачах динамики виброударных и аэроупругих систем / П. А. Вельмисов, В. К. Манжосов. – Ульяновск, 2014. – 204 с.

3 **Елистратова, О. В.** Моделирование динамики трех упругих соосных оболочек свободно опертых на концах, взаимодействующих с двумя пульсирующими слоями жидкости, находящихся между ними при пульсации давления / О. В. Елистратова, Д. В. Кондратов // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2016. – № 1. – С. 11–15. – URL: mathmod.esrae.ru/1-2.

4 Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on Winkler foundation / D. V. Kondratov [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – С. 012057.

5 **Кондратов, Д. В.** Гидроупругость силового цилиндра с полым плунжером при свободном истечении жидкости / Д. В. Кондратов // Вестник Саратовского госагроуниверситета им. Н. И. Вавилова. – 2008. – № 1. – С. 38–43.

6 **Ежова, Н. А.** Обзор моделей параллельных вычислений / Н. А. Ежова, Л. Б. Соколинский // Вестник ЮУрГУ. Серия Вычислительная математика и информатика. – 2019. – Т. 8, № 3. – С. 58–91.

7 Основы параллельного программирования с использованием технологий MPI и OpenMP : учеб. пособие / Р. В. Жалнин [и др.]. – Саранск : Изд-во СВМО, 2013. – 78 с.

УДК 539.3

ОБ УРАВНЕНИЯХ СОВМЕСТНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ И ПОСТАНОВКАХ ЗАДАЧ В ОБОБЩЕННЫХ УСИЛИЯХ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК С ФАЗОВО-СТРУКТУРНЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

С. И. ЖАВОРОНОК

Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Российская Федерация

Рассматривается задача о деформировании оболочки, выполненной из сплава с эффектом памяти. Постановка и решение задач как статики, так и потери устойчивости тривиальной формы равновесного состояния тонкостенных элементов конструкций с памятью [1, 2] в обобщенных перемещениях приводит к необходимости обращения инкрементальных определяющих уравнений, описывающих термоупругие фазово-структурные переходы, в каждой точке диаграммы деформирования [2]. Альтернативным вариантом постановки задачи, не требующем обращения определяющих уравнений и вычисления матрицы касательной жесткости в точке диаграммы [2], является постановка задачи в напряжениях [3] или в обобщенных усилиях, требующая введения в рассмотрение инкрементальных уравнений совместности деформаций [4]. Уравнения совместности для компонентов малого приращения девиатора напряжения и приращения объемного напряжения, соответствующие постановке трехмерной задачи статики для сплава с памятью, получены в [3], а в работе [4] – уравнения совместности в форме записи, аналогичной уравнениям Бельтрами теории упругости, и уравнения совместности относительно тензор-функции напряжения.

В случае нетонкой оболочки произвольной формы с эффектом памяти, претерпевающей фазовое превращение, формулируются приближенные уравнения совместности, вытекающие из общего условия равенства нулю компонентов тензора кривизны [5] при проекции компонентов тензора приращения деформации, заданного в базисе, нормально связанном с реперной поверхностью оболочки, на конечномерное подпространство, натянутое на $N+1$ базисную функцию $\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$ безразмерной нормальной координаты $\zeta\in[-1,1]$ в соответствии с подходом [6–9], т. е. $\delta e_{ij}(\xi^1,\xi^2,\zeta)=\delta e_{ij}^{(k)}(\xi^1,\xi^2)\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$, при аддитивном разложении приращения деформации на упругую, температурную и фазовую составляющие в виде $\delta e_{ij}=\delta e_{ij}^{E}+\delta e_{ij}^{T}+\delta e_{ij}^{\pm}$, аналогично [1, 2]. Уравнения совместности деформаций, соответствующие теории оболочек *N*-го порядка [8, 9], получены проекционным методом Галеркина. В рамках однократно связной модели термоупругих фазовых превращений в сплавах с памятью поле температуры предполагается известным и задается $N+1$ полями моментов $T^{(k)}(\xi^1,\xi^2)$ относительно той же базисной системе функций $\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$. Построены инкрементальные определяющие уравнения теории оболочек N -го порядка для приращений моментов компонентов тензора деформаций $\delta e_{ij}^{(k)}$, линейные относительно приращений моментов компонентов тензора напряжения $\delta\sigma_{(k)}^{ij}$ и температуры $\delta T^{(k)}$ и нелинейные относительно накопленной величины объемной доли мартенситной фазы q, напряжения σ_0^{ij} и накопленной фазовой деформации [3, 4]. Рассмотрен частный случай теории оболочек первого порядка [5], учитывающей трансверсальные сдвиговые и нормальные деформации, и соответствующие ему различные варианты переменных поля – моментов компонентов приращения тензора суммарной деформации и соответствующих им моментов приращения компонентов тензора напряжения [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00695-а).

Список литературы

1 Устойчивость стержней из никелида титана, нагружаемых в режиме мартенситной неупругости / А. А Мовчан [и др.] // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2012. – № 3. – С. 72–80.

2 **Nushtaev, D. V.** Dynamics of martensite phase transitions of shape memory beams under buckling and postbuckling conditions / D. V. Nushtaev, S. I. Zhavoronok // IFAC-PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, no. 2. – P. 873–878.

3 **Zhavoronok, S. I.** On the coupled model of the thermoelastic behavior of a shape memory alloy in intrinsic variables and some statements of buckling problems of shape memory elements / S. I. Zhavoronok // AIP Conference Proceedings. – 2021. – P. 120004.

4 **Жаворонок, С. И.** Уравнения совместности деформаций для сплавов с памятью, претерпевающих термоупругие фазовые превращения / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т. 26, № 3. – С. 403–408.

5 **Tarlakovskii, D. V.** On the compatibility equations in shell theories considering transverse shear and normal strains / D. V. Tarlakovskii, S. I. Zhavoronok // Shell Structures: Theory and Applications. Vol. 4. Proceedings of the 11th Conference, 11–13 October, 2017, Gdansk, Poland. CRC Press / Balkema, Taylor & Francis Gr. – Leiden, 2018. – P. 173–176.

6 **Амосов, А. А.** К проблеме редукции плоской задачи теории упругости к последовательности одномерных краевых задач / А. А. Амосов, С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 1. – С. 69–80.

7 **Амосов, А. А.** О решении некоторых краевых задач о плоском напряженном состоянии криволинейной трапеции / А. А. Амосов, А. А. Князев, С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 1. – С. 60–72.

8 **Амосов, А. А.** О решении некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных оболочек вращения в трехмерной постановке / А. А. Амосов, С. И. Жаворонок, К. А. Леонтьев // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т. 10, № 3. – С. 301–310.

9 **Жаворонок С. И.** Анализ сходимости решения при расчете толстостенных оболочек вращения произвольной формы / С. И. Жаворонок, А. Н. Леонтьев, К. А. Леонтьев // Int. J. for Comput. Civil and Struct. Engineering. – 2010. – Vol. 6, nos. 1–2. – P. 105–111.

10 **Мовчан, А. А.** Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы / А. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко, Т. Л. Сильченко // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 2. – С. 44–56.

11 **Zhavoronok, S. I.** On different definitions of strain tensors in general shell theories of Vekua-Amosov type / S. I. Zhavoronok // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol. 17, no. 1. – P. 72–81.

УДК 539.3

О РАЗЛИЧНЫХ ФОРМАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА

С. И. ЖАВОРОНОК
Институт прикладной механики РАН, г. Москва

А. С. КУРБАТОВ
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Рассмотрена линейная задача динамики нетонкой оболочки, описываемой общей теорией неоднородных анизотропных оболочек N-го порядка [1–3]. Модель оболочки [2, 3] как двумерной континуальной системы определена на касательном расслоении двумерного многообразия, соответствующего реперной поверхности оболочки, множеством переменных поля первого рода $u_i^{(k)}$, порождаемых разложением вектора перемещения по базисной системе функций $p_{(k)}(\zeta)$ безразмерной нормальной координаты $\zeta \in [-1,1]$, поверхностной $\mathcal{L}_S$ и контурной $\mathcal{L}_\Gamma$ плотностями функционала Лагранжа, зависящими от переменных поля $u_\alpha^{(k)}, u_\zeta^{(k)}$ и их производных. Уравнения движения оболочки являются уравнениями Лагранжа второго рода двумерной континуальной системы [2, 3] и имеют второй порядок как по времени, так и по пространственным переменным ξ^α. С другой стороны, в работе [4] получены уравнения в производных первого порядка, являющиеся квазиканоническими уравнениями Гамильтона континуальной системы в соответствии с терминологией [5] и вытекающие из уравнений [3] в результате преобразования Лежандра плотностей функционала Лагранжа $\mathcal{L}_S, \mathcal{L}_\Gamma$ по всем производным [4, 5] всех переменных поля первого рода $u_\alpha^{(k)}$. Ниже рассмотрен частный случай, заключающийся в преобразовании Лежандра плотности функционала Лагранжа только по производным переменных поля $u_\alpha^{(k)}$ по одной из криволинейных координат ξ^α, $\alpha = 1,2$, которым ставятся в соответствие обобщенные усилия $s_{(k)}^{\alpha i}$ аналогично [4]. Полученная система уравнений движения разрешена относительной производных первого порядка обобщенных перемещений и обобщенных усилий по одной из криволинейных координат ξ^1 (аналогично методу [6], где, однако, преобразование задачи к уравнениям первого порядка осуществлено в трехмерной постановке, и система разрешена относительно производных компонентов перемещения u_j по нормальной координате ζ). В отличие от [6] предложенные уравнения теории оболочек порождаются некоторой скалярной функцией – поверхностной плотностью функционала R_s, зависящей от обобщенных перемещений $u_\alpha^{(k)}$ и обобщенных усилий $s_{(k)}^{\alpha i}$ и в определенном смысле аналогичной функции Рауса в аналитической динамике дискретных систем, а уравнения движения представляют собой обобщенные уравнения Рауса. Рассмотрено приложение полученных уравнений к решению задач о дисперсии нормальных волн в плоском слое [7–10]. Предполагается, что волновой вектор κ сонаправлен координате ξ^1. Полученные уравнения движения на плоскости «частота – волновое число» приводят к линейной относительно волнового числа задаче о собственных значениях, что существенно при исследовании как распространяющихся, так и затухающих мод нормальных волн [6, 11]. При этом в отличие от подхода [6, 11] уравнения движения следуют из принципов аналитической динамики, обобщенной на континуальные системы [5]. Рассмотрены примеры задач для градиентно-неоднородных упругих слоев симметричной и несимметричной структуры, построены дисперсион-