

N. K. Modin, T. N. Modina. The prognosis of the responsible technological process safety on the basis of the Markov chains theory.

On the basis of the Markov chains theory the model of the development of the responsible technological process safety breach is worked out and the mathematical expressions for calculation and consequently prognosis of the unfavour events are concluded.

УДК 519.2

Д. Н. ШЕВЧЕНКО, кандидат технических наук; Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

МЕТОДИКА СРАВНЕНИЯ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ С ГИПОТЕТИЧЕСКИМ ЗНАЧЕНИЕМ

Предлагается методика планирования экспериментов сравнения статистической оценки вероятности случайного события с гипотетическим значением. Методика может использоваться для подтверждения соответствия вероятности безотказной работы систем нормативному значению при их разработке и сертификационных испытаниях.

Часто на практике, в частности при контроле качества технических устройств и сертификационных испытаниях технических средств встает задача определения числа изделий для экспериментальной оценки их надёжности, а также для подтверждения соответствия вероятности годности или безотказной работы устройств заданному нормативному значению. Математически данная задача может быть сформулирована как задача формирования одного из суждений:

$$\begin{cases} P(A) > P^* \\ P(A) < P^* \end{cases} \quad (1)$$

где $P(A)$ – вероятность случайного события A ; P^* – предполагаемое значение вероятности события A .

Поскольку $P(A)$ заранее не известна, то поставленная задача преобразуется в задачу определения существенности (для заданной доверительной вероятности $P_{\text{дов}}$) различий точечной оценки вероятности случайного события $P(A) = P$ и гипотетического значения P^* для формирования одного из двух суждений по результатам N повторных экспериментов, в каждом из которых событие A может наступить с вероятностью $P(A)$:

$$\begin{aligned} P(\hat{P} > P^*) &= P_{\text{дов}}, \\ P(\hat{P} < P^*) &= P_{\text{дов}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Точечная оценка вероятности случайного события ($\hat{P}(A) = \hat{P}$), полученная по результатам многократного воспроизведения вероятностного эксперимента [1, 2], является случайной величиной. При этом ошибка оценивания $|\hat{P}(A) - P(A)|$ заведомо не известна, поэтому актуальны методы доверительного оценивания вероятностей событий и планирования экспериментов для сравнения оценки $P(A)$ и гипотетического значения P^* .

Вместе с тем, существующие методы последовательного анализа $P(A)$ требуют проверки условия обеспечения заданной точности оценки $|\hat{P}(A) - P(A)|$ после проведения каждого нового эксперимента [3]. При этом заранее не определяется наименьшее количество экспериментов, достаточное для сравнения оценки $P(A)$ и P^* . В данной статье предлагается методика сравнения оценки $P(A)$ и P^* , которая позволяет существенно уменьшить временные и вычислительные затраты на исследование.

Пусть для оценки вероятности события $P(A)$ и сравнения её с гипотетическим значением P^* проводятся независимые испытания. Следует определить значение минимального количества испытаний N , достаточного для статистического суждения о существенности различий оценки $P(A)$ и P^* .

Предлагается с помощью статистического моделирования получать точечную оценку $P(A)$ методом максимального правдоподобия [2] $\hat{P}(A) = \hat{P} = N_A / N$,

где $N_A = \sum_{i=1}^N \gamma(A)$; $\gamma(A)$ – индикатор наступления случайного события A , равный 1, если в очередном эксперименте событие A наступило, и равный нулю – в противном случае.

Если $\hat{P} > P^*$, то для заданной доверительной вероятности $P_{\text{дов}}$ определяется нижняя доверительная граница вероятности события $P_{\text{ндг}}$. При этом, если $P_{\text{ндг}} > P^*$ (см. рисунок 1, а), то с доверительной вероятностью $P_{\text{дов}}$ можно утверждать, что $P(A)$ превышает гипотетическое значение P^* , т. е. $P\{P(A) > P^*\} = P_{\text{дов}}$.

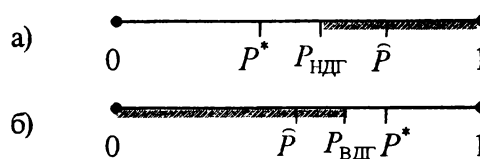


Рисунок 1 – Доверительные границы оценки вероятности

Если $\hat{P} < P^*$, то для заданной $P_{\text{дов}}$ определяется верхняя доверительная граница вероятности события $P_{\text{ВДГ}}$. При этом, если $P_{\text{ВДГ}} \leq P^*$ (рисунок 1, б), то $P\{P(A) < P^*\} = P_{\text{дов}}$.

Значения границ $P_{\text{НДГ}}$ и $P_{\text{ВДГ}}$ определяются следующим образом [3]. Если в результате N независимых испытаний событие A наступило k раз, то $P_{\text{НДГ}}$ вычисляется из условия, что с доверительной вероятностью $P_{\text{дов}}$ число экспериментов N_A , в которых событие A наступило, будет меньше наблюдаемого значения k , т. е.

$$P_{\text{НДГ}} : P\{N_A < k\} = P_{\text{дов}} . \quad (3)$$

Доверительная граница $P_{\text{ВДГ}}$ определяется из условия

$$P_{\text{ВДГ}} : P\{N_A > k\} = P_{\text{дов}} . \quad (4)$$

Применяя формулу Бернулли для вычисления вероятностей N_A – кратного наступления события A в N испытаниях, выражения (3) и (4) запишутся следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{k-1} C_N^i P_{\text{НДГ}}^i (1 - P_{\text{НДГ}})^{N-i} = P_{\text{дов}} ; \quad (5)$$

$$\sum_{i=k+1}^N C_N^i P_{\text{ВДГ}}^i (1 - P_{\text{ВДГ}})^{N-i} = P_{\text{дов}} . \quad (6)$$

Предполагая, что с увеличением N значения $P_{\text{НДГ}}$ и $P_{\text{ВДГ}}$ приближаются к $P(A)$, количество экспериментов N , достаточное для сравнения \hat{P} и P^* , определяется решением уравнения (7а) (рисунок 2) или уравнения (7б)

$$P_{\text{НДГ}}(N) = P^* , \text{ если } \hat{P} > P^* ; \quad (7a)$$

$$P_{\text{ВДГ}}(N) = P^* , \text{ если } \hat{P} < P^* . \quad (7b)$$

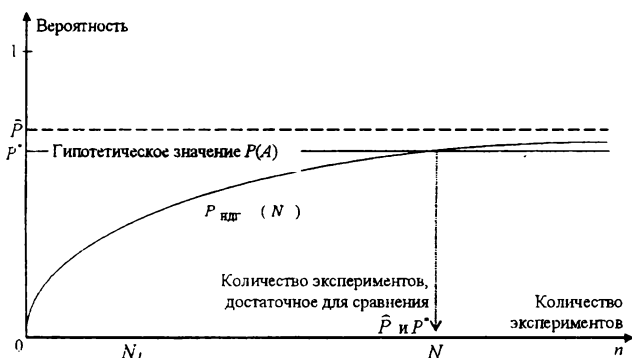


Рисунок 2 – Схема планирования экспериментов при сравнении \hat{P} с P^* при $\hat{P} > P^*$

Очевидно, что зависимости доверительных границ $P_{\text{НДГ}}$ и $P_{\text{ВДГ}}$ от N определяются единственным параметром \hat{P} , т. е.

$$P_{\text{НДГ}}(N) = \varphi_{\text{н}}(\hat{P}, N), P_{\text{ВДГ}}(N) = \varphi_{\text{в}}(\hat{P}, N). \quad (8)$$

Однако вид функций $\varphi_{\text{н}}$ и $\varphi_{\text{в}}$ априорно не известен, поэтому для планирования экспериментов

при сравнении \hat{P} с P^* в соответствии со схемой, представленной на рисунке 2, могут использоваться аппроксимации функций $\varphi_{\text{н}}$ и $\varphi_{\text{в}}$. В качестве требований к аппроксимациям $\varphi_{\text{н}}^*$ и $\varphi_{\text{в}}^*$ следует выделить то, что для любых N и $P(A)$ значения доверительных границ $\hat{P}_{\text{НДГ}}(N)$ и $\hat{P}_{\text{ВДГ}}(N)$, определяемых функциями $\varphi_{\text{н}}^*$ и $\varphi_{\text{в}}^*$, должны удовлетворять неравенствам

$$\hat{P}_{\text{НДГ}}(N) \geq P_{\text{НДГ}}(N), \hat{P}_{\text{ВДГ}}(N) \leq P_{\text{ВДГ}}(N). \quad (9)$$

В случае нестроого выполнения неравенств (9) для определения количества испытаний N , достаточного для сравнения \hat{P} с P^* , потребуется несколько итераций. В случае невыполнения неравенств (9) оценка N будет завышенной, т. е. потребуются необоснованные дополнительные исследовательские затраты.

Аппроксимация 1. В соответствии с теоремой Муавра-Лапласа при условиях

$$N \rightarrow \infty, 0 << P(A) << 1 \quad (10)$$

оценка \hat{P} имеет нормальный закон распределения с $M[\hat{P}] = P(A)$ и $D[P(A)(1 - P(A))/N]$. В этом случае для заданного N границы $P_{\text{НДГ}}$ и $P_{\text{ВДГ}}$ определяются приближёнными значениями [4]

$$\hat{P}_{\text{НДГ}}(N) = \hat{P} - U_{1-P_{\text{дов}}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{N}}, \quad (11)$$

$$\hat{P}_{\text{ВДГ}}(N) = \hat{P} + U_{1-P_{\text{дов}}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{N}}, \quad (12)$$

где $U_{1-P_{\text{дов}}}$ – квантиль стандартного нормального распределения уровня $(1 - P_{\text{дов}})$.

Следовательно, число экспериментов N , достаточное для сравнения оценки \hat{P} с P^* , является решением уравнений (7) и определяется в соответствии с рисунком 2 из выражения

$$N = \text{int} \left(\frac{U_{1-P_{\text{дов}}} \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}}{|P^* - \hat{P}|} \right)^2 + 1 . \quad (13)$$

Экспериментальный анализ зависимостей доверительных границ от N по (11) и (12) показал, что из-за невыполнения условий (10) оценка N по (11) является, как правило, существенно заниженной, а для малых отклонений $|P^* - \hat{P}|$ оценка N является завышенной. Поэтому аппроксимации (11) и (12) не могут использоваться для планирования экспериментов по сравнению \hat{P} и P^* .

Аппроксимация 2. В случае, когда $P(A) \rightarrow 0$, а число экспериментов, в которых событие наступило, равно нулю (т.е. $N_A = \sum_{i=1}^N \gamma(A) = 0$), $P_{\text{НДГ}} = 0$, а $P_{\text{ВДГ}}$ определяется в соответствии с (4) равенством

$P_{ВДГ} : P\{N_A = 0\} = P_{дов}$. При $N \rightarrow \infty$ $P_{ВДГ}$ может быть определена по теореме Пуассона [4]

$$P\{N_A = 0\} = \frac{(N \hat{P}_{ВДГ})^0}{0!} \exp(-N \hat{P}_{ВДГ}) = \exp(-N \hat{P}_{ВДГ}) = P_{дов}. \quad (14)$$

Тогда

$$N = -\frac{\ln P_{дов}}{\hat{P}_{ВДГ}} \quad (15)$$

не зависит от \hat{P} и, следовательно, не может использоваться для планирования экспериментов при сравнении \hat{P} с P^* . Кроме того, оценка N по (15) является существенно заниженной.

Аппроксимация 3. В качестве аппроксимаций зависимостей доверительных границ оценки $P(A)$ от N в (6) предлагается использовать функции

$$\hat{P}_{НДГ}(N) = \hat{P}(1 - \exp(-\lambda_n N)), \quad (16)$$

$$\hat{P}_{ВДГ}(N) = \exp(-\lambda_v N)(1 - \hat{P}) + \hat{P}, \quad (17)$$

которые удовлетворяют неравенствам (9) для всех $P(A) \in (0; 1)$. Здесь параметры λ_n и λ_v определяются (как и \hat{P}) по предварительной выборке реализаций индикатора $\gamma(A)$ события A объёма $N_1 \ll N$ по формулам (16) и (17) для значений $P_{НДГ}$ и $P_{ВДГ}$, определённых из соотношений (5) и (6).

Тогда определение количества экспериментов N , достаточного для сравнения \hat{P} с P^* , состоит в решении уравнений (7), которые преобразуются следующим образом:

$$\hat{P}(1 - \exp(-\lambda_n N)) = P^*, \text{ если } \hat{P} > P^*, \quad (18)$$

$$\exp(-\lambda_v N)(1 - \hat{P}) + \hat{P} = P^*, \text{ если } \hat{P} < P^*. \quad (19)$$

Логарифмируя уравнения (18) и (19) и подставляя в них выражения λ_n и λ_v из (16) и (17), необходимое количество экспериментов N вычисляется из соотношений:

$$N = N_1 \left. \begin{aligned} & \frac{\ln\left(\frac{\hat{P} - P^*}{\hat{P}}\right)}{\ln\left(\frac{\hat{P} - P_{НДГ}}{\hat{P}}\right)}, \text{ если } \hat{P} > P^* \\ & \frac{\ln\left(\frac{P^* - \hat{P}}{1 - \hat{P}}\right)}{\ln\left(\frac{P_{ВДГ} - \hat{P}}{1 - \hat{P}}\right)}, \text{ если } \hat{P} < P^* \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Алгоритм планирования экспериментов для сравнения \hat{P} с P^* представлен на рисунке 3. Снача-

чала (шаг 2) получают предварительную выборку реализаций $\gamma(A)$ малого объёма N_1 . По полученной выборке на шагах 3-6 определяют \hat{P} , а также $P_{НДГ}$ и $P_{ВДГ}$ из условий (5) и (6) или как квантили β -распределения [1, 2]. На шагах 7-8 проверяется условие $P_{НДГ} < P^* < P_{ВДГ}$. Если неравенство выполняется, то для сравнения вероятностей \hat{P} и P^* необходимо получение дополнительных реализаций $\gamma(A)$. На шагах 9-12 по (20) определяется количество реализаций $\gamma(A)$, достаточное для суждения о различии \hat{P} и P^* . На шаге 13 в выборку реализаций $\gamma(A)$ объёмом N_1 добавляются $(N - N_1)$ новых реализаций. Затем на шаге 14 значению N_1 присваивают значение N и переходят на шаг 3.

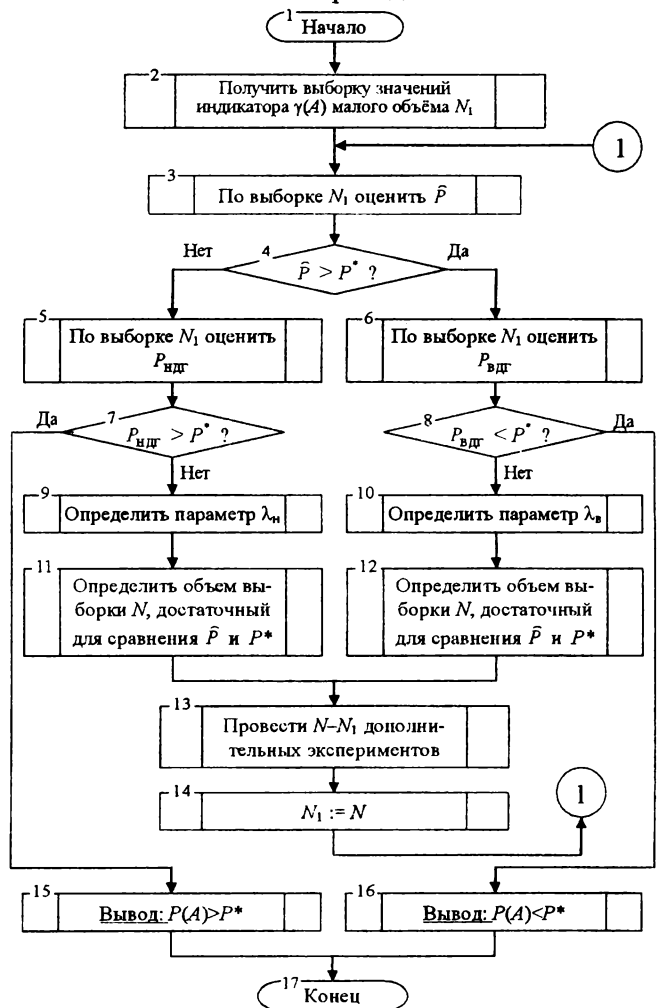


Рисунок 3 – Алгоритм планирования экспериментов при сравнении \hat{P} и P^*

Если на шагах 7-8 неравенство $P_{НДГ} < P^* < P_{ВДГ}$ не выполняется, то переходят в конец алгоритма (шаги 15-16) для анализа результатов. Если $P^* < P_{НДГ}$, то с вероятностью ошибки $(1 - P_{дов})$ можно утверждать, что $P(A) > P^*$; если же $P^* > P_{ВДГ}$, то $P\{P(A) < P^*\} = P_{дов}$.

На рисунке 4 представлена иллюстрация методики статистического сравнения \hat{P} с $P^* = 0,775$ для

$P_{дог} = 0,95$ и $P(A) = 0,8$. Здесь «ряд 1» характеризует значение $\hat{P}(N)$, «ряд 2» – $P_{ндд}(N)$, «ряд 3» – P^* .

Из рисунка видно, что $\hat{P} > P^*$; причём для сравнения потребовалось 11 итераций и 811 экспериментов.

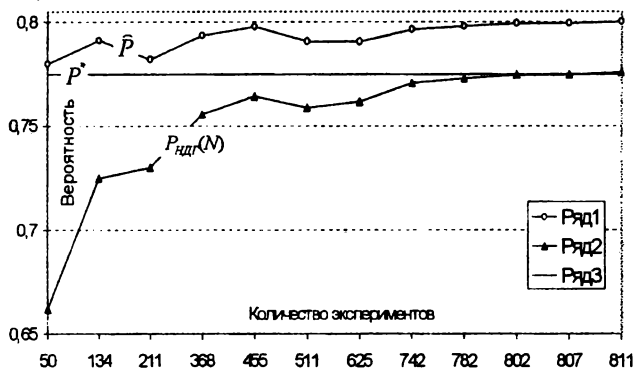


Рисунок 4 – Иллюстрация методики планирования экспериментов при сравнении \hat{P} и P^*

Выводы. В работе предложен подход к определению минимального числа экспериментов, достаточного для статистического сравнения оценки

Получено 06.06.2003

D.N. Shevchenko. The methods of comparison probability's evaluation with hypothetical value.

To offer the methods of experiment's planning for comparison probability's evaluation with hypothetical value. The methods a makes for proofing of accordance probability faultless system's work with norms.

$P(A)$ с гипотетическим значением P^* . Для решения задачи предложена аппроксимация функций изменения доверительных границ $P(A)$, которая по сравнению с известными аппроксимациями Муавра-Лапласа и Пуассона требует меньше вычислительных и временных затрат. Предлагаемая методика применима для определения объёма контрольной выборки изделий из партии, а также для статистического моделирования надёжности технических систем на этапах их разработки и сертификационных испытаний.

Список литературы

- 1 *Большев Л. Н.* Об оценках вероятностей // Теория вероятностей и её применения. – 1960. – V. №4. – С. 453–457.
- 2 *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
- 3 *Надёжность и эффективность в технике: Справочник: В 10 т. Т.2: Математические методы в теории надёжности и эффективности / Под ред. Б. В. Гнеденко.* – М.: Машиностроение, 1987. – 280 с.
- 4 *Пугачёв В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 496 с.

УДК 625.1

В. Д. БОЙКО, аспирант; Киевский университет экономики и технологий транспорта, г. Киев

ИССЛЕДОВАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ НЕРОВНОСТЕЙ НА КРЕСТОВИНАХ СТРЕЛОЧНЫХ ПЕРЕВОДОВ С ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫМИ БРУСЬЯМИ

Приведены очертания вертикальной неровности крестовины стрелочных переводов на железобетонных брусках в зависимости от пропущенного тоннажа для пошерстного и противощерстного движения.

До последнего времени считалось, что деревянные брусья практически являются одним из наиболее рациональных подрельсовых оснований для стрелочных переводов. С 90-х годов в Украине на железных дорогах начата массовая укладка стрелочных переводов на железобетонных брусках. Необходимость в изменении стратегии ведения стрелочного хозяйства вызвана, в первую очередь, острым дефицитом собственной древесины и дороговизной экспортной, которая в 1,5–2 раза дороже, чем железобетонные брусья собственного производства.

Цель исследования – изучение работы стрелочных переводов с железобетонными брусками, ко-

торые значительно отличаются приведенной массой пути и жесткостью рельсовых нитей от переводов с деревянным подстрелочным основанием.

Одним из факторов, влияющих на силовое воздействие подвижного состава в зоне крестовины, является вертикальная динамика взаимодействия колеса и рельса, которая зависит от величины вертикального перемещения колеса при его поступательном движении по неровностям, обусловленным особенностями поверхности катания жестких желобчатых крестовин.

Вертикальные силы на крестовинах зависят, в первую очередь, от формы, уклонов и глубины неровности, а также эксплуатационных характери-