

УДК 656.212.5

Х. Т. ТУРАНОВ, доктор технических наук, С. А. СИТНИКОВ, кандидат технических наук, А. В. МЯГКОВА, аспирант Уральский государственный университет путей сообщения (УрГУПС), Екатеринбург, Россия

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЙДЁННОГО ПУТИ ПРИ СКАТЫВАНИИ ВАГОНА НА ПЕРВОМ ПРОФИЛЬНОМ УЧАСТКЕ СОРТИРОВОЧНОЙ ГОРКИ

Выполнен критический анализ исследований по расчёту геометрических параметров (высота профильного участка и крутизна) горки и кинематических параметров вагона (скорость, время и пройденный путь) при его скатывании. Представлены аналитические формулы для нахождения работы моментов трения качения колёс и тел качения подшипников в буксовых узлах тележек одиночного вагона при чистом качении колёс и сил трения при качении колёс со скольжением при его скатывании на первом профильном участке юрки при встречном и/или попутном ветре. Получена аналитическая формула для нахождения пройденного пути с учётом как активных, так и реактивных сил и моментов сил сопротивлений на первом профильном участке горки, используя которую, можно рассчитать пройденный путь лишь тогда, когда известна конечная скорость вагона. Определение скорости скатывания вагона с горки является самостоятельной задачей, требующей своего решения на основе составления дифференциального уравнения движения.

Постановка задачи. Анализируя результаты ранее выполненных исследований, посвящённых изучению динамики скатывания вагона с сортировочной горки, в [1] (см. также [2]) сделан вывод о необходимости разработки методики расчёта параметров сортировочной горки, которая позволила бы получить горку, экономически эффективную в работе, обеспечивающей выполнение требуемых объёмов работы и уровень надёжности и безопасности. Такая методика должна способствовать возможности расчёта всех параметров горки комплексно во взаимосвязи между собой. И кроме этого, методика должна учитывать особенности перерабатываемого вагонопотока и климатические условия местности, быть достаточно простой и наглядной. Однако в последующих опубликованных работах [1, 3] вовсе не разработана методика, позволяющая учитывать указанные параметры горки комплексно во взаимосвязи между собой, кроме математически необоснованных и не отвечающих классическим положениям теоретической механики высказываний. Так, например, в [4] предлагается метод расчёта уклонов профиля спускной части сортировочной горки, обеспечивающий требуемую скорость роспуска составов и заданную степень надёжности технологического процесса. При этом отмечают, что следует учитывать ограничения на значения уклонов на первом скоростном участке и на значение перелома профиля, равные $i_{1ск} = 55 \text{ ‰}$ и 20 ‰ . Далее отмечают, что при расчёте скоростных участков необходимо рассчитывать их уклоны и длину, не выполняя какие-либо расчёты. Ведь уклон же определяется в непосредственной зависимости от длины (т. е. $i_{1ск} = f(l)$), а от уклона, как главного параметра горки, зависит скорость скатывания вагона (т. е. $v_{1ск} = f(i_{1ск})$). Далее высказана мысль о том, что для

лучшей динамики отцепов на скоростных участках целесообразно рассчитать профиль, обеспечивающий максимальное ускорение отцепов на этих участках. Отсюда ясно, что пока задача нахождения скорости скатывания отцепов с горки и ускорений, как кинематических характеристик горки, математически не решена, то всегда будут предложены рекомендации сомнительного характера.

В [4] приведена формула (см. [5]), по которой рассчитывают высоту первого профильного участка (от вершины горки до первой тормозной позиции)

$$h_1^{\max} = \frac{v_{вх}^2 - v_0^2}{2g'_{ок}} + h_{очн1} + h_{ск1}, \quad (1)$$

где $v_{вх}$ – максимально допустимая скорость входа отцепа на вагонные замедлители, м/с; v_0 – наибольшая начальная скорость скатывания очень хорошего бегуна (ОХБ), м/с; $g'_{ок}$ – ускорение свободного падения с учётом инерции вращающихся масс бегуна (ОХБ), м/с²; $h_{очн1}$ и $h_{ск1}$ – потери удельной энергии при преодолении основного удельного сопротивления движению и сопротивления от стрелок и кривых в пределах головного участка, м. эн. в.

В (1) максимально допустимая скорость входа отцепа на вагонные замедлители $v_{вх}$ величина рассчитываемая. Она должна определяться по аналитической формуле (которая пока не выведена) в зависимости от геометрических параметров (уклон) первого профильного участка горки, состояния трущихся поверхностей вагона (т. е. пар трения в буксовых узлах, «колёса – рельсовые нити» и др.) с учётом состояния среды и направления ветра.

Далее на основе результатов собственных исследований в [4] отмечено, что при попутном вет-

ре удельное сопротивление движению отцепов, движущихся по первому профильному участку, от среды и ветра может принимать отрицательные значения. Отмеченное утверждение что-то не согласуется с механикой воздействия силы аэродинамического сопротивления (попутного ветра), поскольку сопротивления движению отцепов вовсе не зависит от попутного ветра, как движущей силы, а среда может только способствовать увеличению значений таких сопротивлений и, ни в коем случае не уменьшают (за исключением изменчивости температуры окружающей среды).

Кроме того, и это к месту, приведённая в [5] формула (1) не имеет теоретического обоснования, поскольку её первая слагаемая, зависящая от скорости и ускорения свободного падения, не имеет никакого отношения к высоте горки. Такая слагаемая может выразить путь прохождения отцепа на первом профильном участке (от вершины горки до начала первой тормозной позиции) только при одном условии: если каким-то образом является известным величина скорости скатывания вагона v , которая в зависимости от времени движения отцепа на первом профильном участке горки должна быть найдена после решения дифференциального уравнения движения отцепа. В любом случае в (1) максимально допустимая скорость входа отцепа на вагонные замедлители – $v_{вх}$ **величина неизвестная**, определение которой является самостоятельной прикладной задачей. Вместе с тем, практические рекомендации [5] о том, что «удельное сопротивление хорошего бегуна (ХБ) при благоприятных условиях должен составить 0,5 кгс/тс»; «участок второй тормозной позиции необходимо проектировать на спуске кривизной, обеспечивающей в неблагоприятных условиях трогание с места расчётных плохих бегунов (ПБ), но не менее 7‰, а в холодных температурных зонах – не менее 10‰», видимо являются экспериментально обоснованными.

В соответствии с этим, разработка основ теории скатывания вагона с сортировочной горки созданием, например, математической модели пройденного пути вагона при скатывании на первом профильном участке горки остаётся всё ещё актуальной прикладной задачей железнодорожного транспорта и транспортной науки.

Покажем применение трения качения со скольжением в задачах, связанных с формированием-расформированием подвижного состава на первом профильном участке сортировочной горки.

Формулировка задачи. Требуется определить путь, пройденный вагоном, при его скатывании на первом профильном участке горки при условии, что известна начальная скорость v_0 и скорость скатывания вагона $v = v_e$ в момент $t = t_1$, т. е. $v = f(t)$, либо в момент остановки ($v = v_e = 0$ при $t = t_1$).

Условия задачи. Физическая модель скатывания вагона с горки представлена так, как показано на рисунке 1 [6].

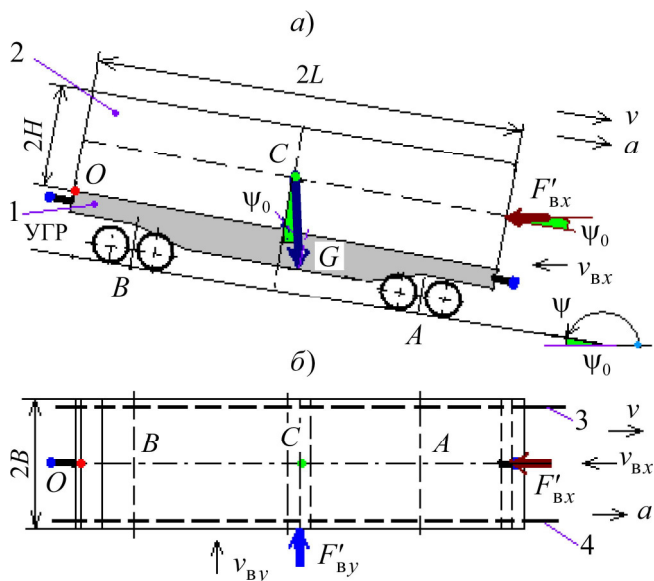


Рисунок 1 – Физическая модель скатывания вагона с горки: 1 – вагон; 2 – груз; 3 и 4 – наружная и внутренняя рельсовые нити; а – вид с боку; б – вид сверху

На рисунке 1, а и б обозначены: \bar{G} – сила тяжести вагона с грузом (или без груза), кН; $F'_{вх}$ и $F'_{вy}$ (точнее $F'_{гв.х}$ и $F'_{гв.у}$) – проекции силы аэродинамического сопротивления на продольную и поперечную оси вагона, кН; $2L$, $2B$ и $2H$ – соответственно длина, ширина и высота груза, м; ψ (или ψ_0) – уклон профиля горки относительно горизонтали, рад.

Согласно принципу освобожденности от связей, вначале выбирают объект в виде вагона, скатывающегося по первому профильному участку горки [6]. Имеют в виду, что для колёсной пары передней А (или А') и задней В (или В') тележек вагона рельсовые нити являются основными связями, удерживающими её от перемещения в поперечном направлении, т. е. вдоль подрельсового основания (шпал). Иначе, основное назначение рельсовых нитей, как внешних связей, – это направление колёс тележек вагона при движении на прямых и/или в кривых участках пути. Принимают, что на вагон действуют плоская система активных сил \bar{F} в виде проекции силы тяжести G_x и аэродинамического сопротивления $F'_{гв.х}$ и $F'_{гв.у}$ на направления скатывания вагона, т. е. $F \in \{G, F'_{гв.х}, F'_{гв.у}\}$.

Отметим, что силы аэродинамического сопротивления $F'_{гв.х}$ и $F'_{гв.у}$ находят по формулам, приведённым в [7].

В связи с этим вначале освобождают колёсную пару тележек вагона от рельсовых нитей, заменяя их влияние реакциями связей \bar{R}_A и \bar{R}_B ; $\bar{R}_{A'H}$ и $\bar{R}_{B'H}$. Здесь допускают, что указанные реакции связей приложены к колёсам колёсных пар передней и задней тележек вагона A (или A') и B (или B'), т. е. $\bar{R}_A \in \{\bar{R}_{A1}, \bar{R}_{A2}\}$, $\bar{R}_{A'} \in \{\bar{R}_{A'1}, \bar{R}_{A'2}\}$, $\bar{R}_B \in \{\bar{R}_{B1}, \bar{R}_{B2}\}$, $\bar{R}_{B'} \in \{\bar{R}_{B'1}, \bar{R}_{B'2}\}$, $\bar{R}_{A'H} \in \{\bar{R}_{A'H1}, \bar{R}_{A'H2}\}$, $\bar{R}_{B'H} \in \{\bar{R}_{B'H1}, \bar{R}_{B'H2}\}$.

Особо отметим, что появление реакции связей \bar{R}_A и \bar{R}_B в плоскости скатывания вагона с горки связано с воздействием на вагон с грузом вертикальных составляющих сил тяжести \bar{G}_z и силы аэродинамического сопротивления $\bar{F}'_{r_{bx}}$ и $\bar{F}'_{r_{by}}$ (как сила, оказывающая боковое давление на упорную рельсовую нить).

На механическую систему действуют внешние силы (как активные, так и реактивные): проекции силы тяжести на координатные оси $G_x = G \sin \psi_0$ и $G_z = G \cos \psi_0$, проекции силы аэродинамического сопротивления $F'_{r_{bx}} \cos \psi_0$, $F'_{r_{bx}} \sin \psi_0$ и $F'_{r_{by}}$ на оси координат; нормальная составляющая N реакции рельсовых нитей; момент трения качения колеса по рельсу $M_{трA} \in \{M_{трA1}, M_{трA2}, M_{трA'1}, M_{трA'2}\}$ и $M_{трB} \in \{M_{трB1}, M_{трB2}, M_{трB'1}, M_{трB'2}\}$.

В точке соприкосновения колеса колесной пары вагона с поверхностями рельса возникают нормальная составляющая \bar{N} ($\bar{N} \in \{\bar{N}_A, \bar{N}_B\}$) реакции связи (рельсовых нитей), противоположная проекции всех сил F_z на вертикальную ось:

$$N = -F_z; F_z = G \cos \psi_0 + F'_{r_{bx}} \sin \psi_0. \quad (2)$$

Образующаяся при этом пара сил (\bar{G}_z, \bar{N}) , называемая парой трения качения, противоположна по направлению вращения паре $(\bar{F}, \bar{F}_{тр})$ и для рассматриваемого случая скатывания вагона с горки не может её уравновесить. Именно по этой причине подшипники качения в буксовом узле и колеса колёсной пары вагона испытывают момент трения качения.

Момент трения качения колеса по рельсу $M_{тр} = f_k N$ с учётом (2) имеет вид:

$$M_{тр} = f_k (G \cos \psi_0 + F'_{r_{bx}} \sin \psi_0), \quad (3)$$

где f_k – коэффициент трения качения колеса по рельсу (обычно с учётом влияния гребней колеса принимают $0,005 \cdot 10^{-3}$), м.

Далее, как и в [6], имеют в виду, что, если активная сила \bar{F} больше предельной силы трения

$F_{пр} = F_{ци}^{max} = f_{ци} N$, т. е. $\bar{F} \geq \bar{F}_{пр}$, то одновременно с качением возможно также *скольжение*. При этом отношение $\frac{f_k}{r_k}$ будет больше коэффициента трения скольжения f , т. е. $f < \frac{f_k}{r_k}$. Такой случай возможен при воздействии на вагон проекции силы аэродинамического сопротивления $F'_{r_{bx}}$ при попутном ветре и силы $F'_{r_{by}}$ (которая стремится прижать гребни наружных колёс колёсных пар тележек к упорному рельсу), когда активная сила равна $F = G \sin \psi + F'_{r_{bx}}$ и соблюдается условие $\bar{F} \geq \bar{F}_{пр}$. Тогда расчётная модель, например, при воздействии попутного ветра, имеет вид, показанный на рисунке 2 [8].

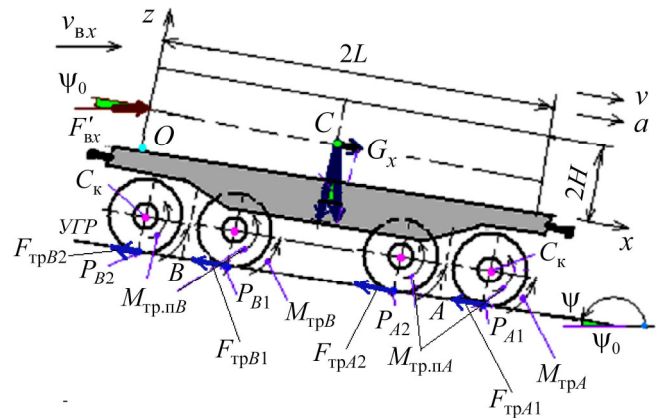


Рисунок 2 – Упрощённая расчётная модель скатывания вагона с горки при качении колёс со скольжением

Из рисунка 2 видно, что скатыванию вагона с горки противодействуют силы трения скольжения колёс о рельсовые нити в виде $F_{трA}$ ($F_{трA} \in \{F_{трA1}, F_{трA2}, F_{трA'1}, F_{трA'2}\}$) и $F_{трB}$ ($F_{трB} \in \{F_{трB1}, F_{трB2}, F_{трB'1}, F_{трB'2}\}$).

Силы трения согласно закону Кулона [8]

$$F_{тр}^{ck} = F_{трAB} + F_{трA'B'}, \quad (4)$$

где $F_{трAB} = F_{трA} + F_{трB}$ – силы трения скольжения колёс по рельсовым нитям от воздействия нормальной составляющей \bar{N} ($\bar{N} \in \{\bar{N}_A, \bar{N}_B\}$) реакции связи: $F_{трAB} = f_{ck} N$ с учётом того, что f_{ck} – коэффициент трения скольжения колеса по рельсу (обычно «металл по металлу» – $f_{ck} = 0,15 \dots 0,25$); $F_{трA'B'} = F_{трA'0} + F_{трB'0}$ – силы трения скольжения гребней колёс по упорному рельсу от воздействия проекции силы аэродинамического сопротивления с боковой стороны вагона $F'_{r_{by}}$: $F_{трA'B'} = f_{ck0} F'_{r_{by}}$ с

учётом того, что $f_{ск0}$ – коэффициент трения скольжения гребней колеса по рельсу (обычно принимают $f_{ск0} = 0,25$, а в случае применения гребнесмазывателей (или лубрикаторов) значение $f_{ск0}$ значительно меньше) (в частном случае $f_{ск} = f_{ск0}$).

Подставляя $F_{трAB}$ и $F_{трA'B'}$ в (4), получают [8]:

$$F_{тр}^{ск} = f_{ск} N + f_{ск0} F'_{рву}. \quad (4а)$$

На механическую систему также действуют внутренние силы в виде моментов трения качения $M_{трпA}$ ($M_{трпA} \in \{M_{трпA1}, M_{трпA2}, M_{трпA'1}, M_{трпA'2}\}$) и $M_{трпB}$ ($M_{трпB} \in \{M_{трпB1}, M_{трпB2}, M_{трпB'1}, M_{трпB'2}\}$) в подшипниках буксовых узлов передней A и задней B тележек вагона, причём $M_{трп} = M_{трпA} + M_{трпB}$ (см. рисунок 2).

В точках соприкосновения с телами качения внутреннего диаметра внутреннего кольца подшипника появляются внутренние силы $N_{пк}$ – нормальная составляющая реакции подшипника. В той же точке на тела качения от внутреннего кольца подшипника действует такая же по модулю, но противоположно направленная реакция $N_{п}$ (т. е. нормальная составляющая реакции, приходящейся на один подшипник качения).

Момент трения качения в подшипниках буксовых узлов передней и задней тележек вагона

$$M_{трп} = n_6 f_{к0} N_{п}, \quad (5)$$

где $n_6 = 8$ – количество буксовых узлов в тележках, шт.; $f_{к0}$ – коэффициент трения тел качения по кольцам подшипника (обычно принимают 1×10^{-6}), м; $N_{п}$ – нормальная реакция, приходящаяся на один подшипник качения, или сила, действующая на наиболее нагруженное тело качения и определяемая по формуле в виде:

$$N_{п} = \frac{k}{n_{тк}} (G \cos \psi_0 + F'_{вх} \sin \psi_0), \quad (6)$$

где $n_{тк}$ – общее количество тел качения, воспринимающих нагрузку в каждом подшипнике, шт.; k – постоянный коэффициент, принимаемый в зависимости от рядности и типа подшипников качения (для однорядных подшипников $k = 4$, для роликоподшипников с $n_{п} = 10...20$ среднее значение $k \approx 4$. Учитывая влияние зазора в подшипниках качения, для расчёта принимают $k = 4,6$ [9]).

Подставляя (6) в (5), найдём момент трения качения $M_{трп}$ в подшипниках качения во всех буксовых узлах:

$$M_{трп} = f_{к0} n_6 \frac{k}{n_{тк}} (G \cos \psi_0 + F'_{вх} \sin \psi_0). \quad (7)$$

Считают, что активные силы в виде \bar{G} и $\bar{F}'_{рвх}$ уже приложены к расчётной модели. В расчётной модели активную силу \bar{G} направляют от объекта,

а силу $\bar{F}'_{рвх}$, как силу сопротивления среды – к объекту. Все реактивные силы (реакции связи) $\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_{A'H}$ направляют к объекту. Показывают оси координат Oxz (см. рисунок 2).

За внешние силы, ускоряющие и замедляющие движение вагона, считают проекции силы тяжести G (как движущей силы, ускоряющей движение) – $G_x = G \sin \psi_0$ и силы аэродинамического сопротивления $F'_{рвх}$ (как силы сопротивления при встречном ветре, замедляющие движение) на направление движения при скатывании вагона с горки. За внешние силы, ускоряющие движение вагона, также следует считать проекции силы аэродинамического сопротивления $F'_{рвх}$ (как движущие силы при попутном ветре, ускоряющие движение) на направление движения при скатывании вагона с горки. За внешние силы, замедляющие движение вагона, можно считать проекции силы аэродинамического сопротивления $F'_{рвх}$, независимо от того, встречный или попутный ветер.

Решение. Теорему об изменении кинетической энергии системы [10] (приращение кинетической энергии ΔE (или $E - E_0$) равно сумме работ внешних W^e и внутренних W^i сил и/или моментов сил) записывают в виде:

$$E - E_0 = W^e + W^i, \quad (8)$$

где $E = Mv^2/2$ и $E_0 = Mv_0^2/2$ – кинетические энергии системы, кДж (или кН·м), с учётом того, что v_0 – начальная скорость, а v – конечная, м/с; W^e – работы внешних сил (силы тяжести; силы трения; силы аэродинамического сопротивления; моментов внешних сил, кДж (или кН·м)); W^i – работы внутренних сил и/или моментов внутренних сил, кДж (или кН·м).

Работа момента трения качения колеса $W(M_{тр}) = W^e$ (как моменты *внешних* сил)

$$W(M_{тр}) = - \int_0^{\varphi} M_{тр} d\varphi,$$

или, учитывая, что, если колесо катится по рельсу без скольжения, то для малых углов φ элементарная длина дуги $d\varphi$ колеса равна элементарной длине отрезка ds , т. е. $ds = \varphi r_k$ [11] (r_k – радиус колеса), запишем

$$W(M_{тр}) = - \int_0^s M_{тр} \frac{ds}{r_k}. \quad (9)$$

Подставляя (7) в последнее выражение и проведя интегрирование, получим

$$W(M_{\text{тр}}) = -n_k f_k (G \cos \psi_0 + F'_{\text{вх}} \sin \psi_0) \frac{s}{r_k}. \quad (10)$$

где n_k – количество колёс в тележках, шт. ($n_k = 8$); f_k – коэффициент трения качения, м, поскольку этот коэффициент равносителен плечу пары трения качения (обычно с учётом влияния гребней колеса по рельсу принимают $f_k = 5 \cdot 10^{-6}$, сталь закаленная по стали $f_k = 1 \cdot 10^{-6}$), r_k – радиус колеса, равный для грузового вагона 0,475 м.

Работа момента трения тел качения $M_{\text{трп}}$ в подшипниках качения во всех буксовых узлах $W(M_{\text{трп}}) = W^i$ (как моменты *внутренних* сил) тележек вагона, скатывающегося с горки,

$$W(M_{\text{трп}}) = -\int_0^\varphi M_{\text{трп}} d\varphi = -\int_0^s M_{\text{трп}} \frac{ds}{r_{\text{вн}}},$$

где $r_{\text{вн}}$ – внутренний радиус внутреннего кольца подшипника качения, м.

После подстановки (7) в последнее выражение получим:

$$W(M_{\text{трп}}) = -f_{k0} n_6 \frac{k}{n_{\text{тк}}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) \frac{s}{r_{\text{вн}}}, \quad (11)$$

где f_{k0} – коэффициент трения тел качения по кольцам подшипника (обычно принимают $1 \cdot 10^{-6}$), м; $n_6 = 8$ – количество буксовых узлов в тележках, шт.; $n_{\text{тк}}$ – общее количество тел качения, воспринимающих нагрузку в каждом подшипнике, шт.; s – пройденный вагоном путь, м.

Работа силы трения скольжения колёс о рельсовые нити (см. [8]) $W(F_{\text{тр}}^{\text{ск}}) = W^e$ (как работы *внешних* сил)

$$W(F_{\text{тр}}^{\text{ск}}) = -(f_{\text{ск}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) + f_{\text{ск0}} F'_{\text{рвх}}) s. \quad (12)$$

Применяя теорему об изменении кинетической энергии системы, перепишем (8), в котором E – кинетическая энергия вагона (системы) с учётом массы вращающихся деталей (колёсных пар) [10]:

$$E = E_1 + n_{\text{кп}} E_2. \quad (13)$$

Здесь E_1 – кинетическая энергия поступательно движущихся деталей вагона (кузова с грузом и тележек), кДж; E_2 – кинетическая энергия одной колёсной пары вагона, совершающей сложное (т. е. плоскопараллельное) движение, кДж; $n_{\text{кп}}$ – количество осей (колёсных пар) вагона (для четырёхосного вагона $n_{\text{кп}} = 4$), шт.

Кинетическая энергия поступательно движущихся частей вагона:

$$E_1 = M \frac{v^2}{2}, \quad (14)$$

где M – масса поступательно движущихся частей (т. е. не вращающихся частей) вагона, кг.

Кинетическую энергию одной колёсной пары вагона, совершающего плоскопараллельное движение, находят по теореме Кёнига [10]:

$$E_2 = M_{\text{кп}} \frac{v_C^2}{2} + J_C \frac{\omega^2}{2}, \quad (15)$$

где $M_{\text{кп}}$ – масса одной колёсной пары вагона, кг; v_C – линейная скорость центра колеса, совпадающая со скоростью скатывания вагона $v = v_e$, м/с; J_C – момент инерции колёсной пары вагона относительно оси, проходящий через центр масс C_k , кг·м²; ω – угловая скорость колёсной пары ($\omega = v_C/r_k$, так как мгновенный центр скоростей (МЦС) P ($P \in \{P_{A1}, P_{A2}, P_{A'1}, P_{A'2}\}$ и $P \in \{P_{B1}, P_{B2}, P_{B'1}, P_{B'2}\}$) колёсной пары (см. рисунок 2) расположен в полюсе, т. е. в точке ее соприкосновения с рельсом), рад/с. Отметим, что МЦС – это та точка, где происходит касание колеса с рельсом, поскольку является общей точкой двух тел. При этом так как рельс неподвижен, а колесо не проскальзывает, то точка (полюс) P имеет нулевую скорость в данный момент времени. Вокруг этой точки происходит поворот колеса в заданный момент времени [10].

Учитывая, что $\omega = v_C/r_k$, преобразуем (15)

$$E_2 = \left(M_{\text{кп}} + \frac{J_{Ck}}{r_k^2} \right) \frac{v^2}{2}. \quad (15a)$$

Подставляя (14) и (15, а) в (13), после преобразований получим

$$E = M_0 \frac{v^2}{2}, \quad (16)$$

где M_0 – масса вагона с грузом с учётом массы вращающихся частей (колёсных пар), кг,

$$M_0 = M + n_{\text{кп}} \left(M_{\text{кп}} + \frac{J_{Ck}}{r_{\text{кп}}^2} \right). \quad (17)$$

Отметим, что момент инерции колёсной пары вагона J_{Ck} относительно оси, проходящей через центр масс C_k , находят экспериментально либо способом физического маятника с добавочным грузом, либо методом разгона.

Чтобы аналитически найти приближённое значение J_{Ck} принимают, что $J_{Ck} = M_{\text{кп}} i^2$ (i – радиус инерции, м). Считают, что колесо является однородным и сплошным диском радиусом r_k . Далее, в первом приближении пренебрегают моментом инерции собственно оси колёсной пары. Тогда момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к нему и проходящей через центр масс C_k [10], равен $J_{Ck} = M_{\text{кп}} r_k^2 / 2$. Теперь, приравняв найденные значения J_{Ck} , находят радиус инерции – $i^2 = r_k^2 / 2$ (или $i = r_k / \sqrt{2}$).

С учётом выполненных выкладок перепишем (17) в виде

$$M_0 \approx M + \frac{3}{2} n_{\text{кп}} M_{\text{кп}},$$

или, учитывая, что для четырёхосных вагонов $n_{\text{кп}} = 4$, $M_0 \approx M + 6M_{\text{кп}}$.

Вагон скатывается с горки поступательно. Если его начальная скорость v_0 , а конечная – v , то, подставляя (10)–(12) в (8), будем иметь

$$\begin{aligned} M_0 \frac{v^2}{2} - M_0 \frac{v_0^2}{2} = & Mg \sin \psi_0 s \mp F'_{\text{рвх}} \cos \psi_0 s - \\ & - n_{\text{к}} f_{\text{к}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) \frac{s}{r_{\text{к}}} - \\ & - f_{\text{к0}} \frac{n_{\text{б}}}{n_{\text{тк}}} k (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) \frac{s}{r_{\text{вн}}} - \\ & - (f_{\text{ск}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) + f_{\text{ск0}} F'_{\text{рвы}}) s. \end{aligned}$$

Здесь знак «минус» перед силой $F'_{\text{рвх}}$ при встречном ветре (при этом сила стремится замедлить скорость скатывания вагона с горки), а «плюс» – при попутном ветре (при этом сила ускоряет движение вагона с горки).

После преобразований последнее выражение примет вид

$$M_0 \frac{v^2}{2} - M_0 \frac{v_0^2}{2} = F_0 s, \quad (18)$$

где F_0 – разность движущих сил и сил сопротивлений, приложенных к системе «груз – вагон – путь», кН:

$$\begin{aligned} F_0 = & Mg \sin \psi_0 \mp F'_{\text{рвх}} \cos \psi_0 - \\ & - \left(n_{\text{к}} f_{\text{к}} \frac{1}{r_{\text{к}}} + f_{\text{к0}} \frac{n_{\text{б}}}{n_{\text{тк}}} k \frac{1}{r_{\text{вн}}} \right) (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) - \\ & - f_{\text{ск}} (G \cos \psi_0 + F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0) - f_{\text{ск0}} F'_{\text{рвы}}, \end{aligned}$$

или, после преобразований,

$$\begin{aligned} F_0 = & Mg \sin \psi_0 \mp F'_{\text{рвх}} \cos \psi_0 - \\ & - \left(n_{\text{к}} f_{\text{к}} \frac{1}{r_{\text{к}}} + f_{\text{к0}} \frac{n_{\text{б}}}{n_{\text{тк}}} k \frac{1}{r_{\text{вн}}} + f_{\text{ск}} \right) Mg \cos \psi_0 - \\ & - \left(n_{\text{к}} f_{\text{к}} \frac{1}{r_{\text{к}}} + f_{\text{к0}} \frac{n_{\text{б}}}{n_{\text{тк}}} k \frac{1}{r_{\text{вн}}} + f_{\text{ск}} \right) F'_{\text{рвх}} \sin \psi_0 - f_{\text{ск0}} F'_{\text{рвы}}. \end{aligned}$$

Вынося в последнем равенстве за скобку Mg , $\cos \psi_0$, и учитывая, что $\operatorname{tg} \psi_0 = i$, получим

$$\begin{aligned} F_0 = & Mg \left(i \mp \frac{1}{Mg} F'_{\text{рвх}} - \right. \\ & - \left. \left(n_{\text{к}} f_{\text{к}} \frac{1}{r_{\text{к}}} + f_{\text{к0}} \frac{n_{\text{б}}}{n_{\text{тк}}} k \frac{1}{r_{\text{вн}}} + f_{\text{ск}} \right) - \right. \\ & - \left. \left(n_{\text{к}} f_{\text{к}} \frac{1}{r_{\text{к}}} + f_{\text{к0}} \frac{n_{\text{б}}}{n_{\text{тк}}} k \frac{1}{r_{\text{вн}}} + f_{\text{ск}} \right) \frac{F'_{\text{рвх}}}{Mg} i \right. \\ & \left. - f_{\text{ск0}} \frac{F'_{\text{рвы}}}{Mg \cos \psi_0} \right) \cos \psi_0. \quad (19) \end{aligned}$$

Принимая на спускной части горки крутизну профиля $i = 1,5 \dots 5 \text{ ‰}$ и $\cos \psi_0 \approx 1$ (как для малых углов), будем иметь

$$\begin{aligned} F_0 = & Mg \left(\mp \frac{1}{Mg} F'_{\text{рвх}} - \left(n_{\text{к}} f_{\text{к}} \frac{1}{r_{\text{к}}} + f_{\text{к0}} \frac{n_{\text{б}}}{n_{\text{тк}}} k \frac{1}{r_{\text{вн}}} + f_{\text{ск}} \right) - \right. \\ & \left. - f_{\text{ск0}} \frac{F'_{\text{рвы}}}{Mg} \right). \quad (19a) \end{aligned}$$

Разделив обе части (18) на силу тяжести вагона с грузом $G = Mg$, получим выражение, имеющее размерность длины, м:

$$\frac{M_0}{2Mg} (v^2 - v_0^2) = ws, \quad (20)$$

где w – удельные безразмерные движущие силы и силы сопротивлений:

– при попутном ветре

$$w = i + C_0 - \sum_{k=1}^n w_k, \quad (21)$$

где C_0 – удельная безразмерная движущая сила, появление которой связано с действием попутного ветра $C_0 = \frac{1}{Mg} F'_{\text{рвх}}$;

– при встречном ветре

$$w = i - \sum_{k=1}^n w_k, \quad (21a)$$

где $\sum_{k=1}^n w_k = w_0$ – основное удельное сопротивление при качении колёс со скольжением по рельсу;

$$\begin{aligned} w_0 = & \left[\frac{1}{Mg} F'_{\text{рвх}} + \left(n_{\text{к}} f_{\text{к}} \frac{1}{r_{\text{к}}} + f_{\text{к0}} \frac{n_{\text{б}}}{n_{\text{тк}}} k \frac{1}{r_{\text{вн}}} + f_{\text{ск}} \right) \left(1 + \frac{F'_{\text{рвх}}}{Mg} i \right) + \right. \\ & \left. + f_{\text{ск0}} \frac{F'_{\text{рвы}}}{Mg \cos \psi_0} \right] \cos \psi_0. \quad (22) \end{aligned}$$

Для частного случая (см. (19a)), соответствующей спускной части горки, где крутизны профиля $i = 1,5 \dots 5 \text{ ‰}$, $\sin \psi_0 \approx 0$ и $\cos \psi_0 \approx 1$ (как для малых углов), (22) запишется в виде:

$$w_0 = \frac{1}{Mg} F'_{\text{рвх}} - \left(n_{\text{к}} f_{\text{к}} \frac{1}{r_{\text{к}}} + f_{\text{к0}} \frac{n_{\text{б}}}{n_{\text{тк}}} k \frac{1}{r_{\text{вн}}} + f_{\text{ск}} \right) - f_{\text{ск0}} \frac{F'_{\text{рвы}}}{Mg}. \quad (22a)$$

Подставляя (19) в (18), после преобразований найдём путь, который пройдёт вагон при скатывании с горки за некоторое время $t = t_1$ (вплоть до остановки, где $v = 0$ при $t = t_k$):

– при попутном ветре –

$$s = \frac{M_0}{2Mg} \frac{1}{i + C_0 - \sum_{k=1}^n w_k} (v^2 - v_0^2); \quad (23)$$

– при встречном ветре –

$$s = \frac{M_0}{2Mg} \frac{1}{i - \sum_{k=1}^n w_k} (v^2 - v_0^2), \quad (23a)$$

или, обозначив $\frac{M_0}{Mg} = \frac{1}{g'}$ или $g' = \frac{M}{M_0} g$ (где

$g' < g$, поскольку $M < M_0$) – доля ускорения свободного падения, m/c^2 , получим:

– при попутном ветре

$$s = \frac{1}{2g'} \frac{1}{i + C_0 - \sum_{k=1}^n w_k} (v^2 - v_0^2); \quad (24)$$

– при встречном ветре

$$s = \frac{1}{2g'} \frac{1}{i - \sum_{k=1}^n w_k} (v^2 - v_0^2). \quad (25)$$

Отметим, что (25) *по форме* совпадает с формулой (5.1), полученной в [5]. Значит в [5, 12] рассмотрен только случай воздействия на вагон встречного ветра.

Замечание. При этом допускают, что конечная скорость вагона $v_k = v$ должна быть известной величиной, в противном случае дальнейшее решение задачи в такой постановке окажется также бессмысленной, как это выполнено в [5, 12].

Выводы. На основе выполненных исследований можно отметить, что теорема об изменении кинетической энергии системы для решения задачи определения пройденного пути при скатывании вагона с сортировочной горки применима только тогда, когда известна конечная скорость вагона. Определение скорости скатывания вагона с горки является самостоятельной

задачей, требующей своего решения на основе составления дифференциального уравнения движения.

Список литературы

1 **Правдин, Н. В.** Анализ существующих методов расчёта сортировочных горок / Н. В. Правдин // Транспорт: Наука, техника и управление, 2004. – № 5. – С. 22–27.

2 Воздействие силы аэродинамического сопротивления на вагон при его скатывании с горки / Х. Т. Туранов [и др.] // Проблемы безопасности на транспорте : материалы V междунар. науч.-практ. конф. / под общ. ред. В. И. Сенько. – Гомель : БелГУТ, 2010. – С. 86–90.

3 **Бессоненко, С. А.** Принципы оптимизации параметров сортировочных горок / С. А. Бессоненко // Транспорт: Наука, техника и управление. – 2010. – № 5. – С. 17–20.

4 **Правдин, Н. В.** Определение уклонов скоростных участков и тормозных позиций на спускной части сортировочной горки / Н. В. Правдин, С. А. Бессоненко // Транспорт: Наука, техника и управление. – 2008. – № 9. – С. 6–10.

5 Правила и нормы проектирования сортировочных устройств на железных дорогах колеи 1520 мм. – М. : Техинформ, 2003. – 168 с.

6 **Туранов, Х. Т.** Динамика скатывания вагона с горки / Х. Т. Туранов, А. В. Мягкова // Вісник Східноукраїнського національного ун-ту ім. В. Даля. – 2010. – № 10 (152). – С. 229–237.

7 **Туранов, Х. Т.** Теоретическая механика в задачах грузовых перевозок / Х. Т. Туранов. – Новосибирск : Наука СО РАН, 2009. – 376 с.

8 **Туранов, Х. Т.** Математическое моделирование скорости скатывания вагона на первом профильном участке горки / Х. Т. Туранов, С. А. Ситников, А. В. Мягкова // Транспорт Урала. – 2010. – № 6. – С. 49–53.

9 **Решетов, Д. Н.** Детали машин / Д. Н. Решетов. – М. : Машиностроение, 1989. – 496 с.

10 **Комаров, К. Л.** Теоретическая механика в задачах железнодорожного транспорта / К. Л. Комаров, А. Ф. Яшина. – Новосибирск : Наука, 2004. – 296 с.

11 **Бронштейн, И. Н.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1980. – 976 с.

12 Железнодорожные станции и узлы : учеб. для вузов ж.-д. трансп. / В. Г. Шубко [и др.]. – М. : УМК МПС России, 2002. – 368 с.

Получено 01.10.2010

H. T. Turanov, S. A. Sitnikov, A. V. Myahkova. Mathematical modelling of the distance run by car rolling on the first profile section of the double incline.

Critical analysis of the earlier studies on the calculation of geometrical parameters of the hill (profile section height and gradient of slope) and kinematic parameters of the car (speed, time and distance run) by its rolling was carried out. Here we give analytical formulas for calculation of friction torque of wheel and axle bearings rolling in the cart of the car by clear wheel rolling and of friction force by wheel rolling with slipping on the first profile section with contrary or/and following wind. Analytical formula for calculation of distance run taking into account active and reactive force and resistive force torque on the first profile section was derived, using this formula we can calculate distance run only when the final speed of the car is known. Calculation of the speed of car rolling is another problem which can be solved only with the help of differential equation of motion.