

УДК 519.21

Л. А. СОСНОВСКИЙ, доктор технических наук, Д. Н. ШЕВЧЕНКО, кандидат технических наук, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Л-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВРЕЖДЕНИЙ СИЛОВЫХ СИСТЕМ

Представлено обоснование и результаты систематического анализа L -распределения одномерной непрерывной случайной величины повреждений элементов силовых систем при износо-усталостных испытаниях. Предложены способы его генерирования и оценки характеристик. Показан пример его практического использования.

L-распределение одномерной случайной величины было предложено более 20 лет назад [6] для анализа накопления усталостных повреждений при нерегулярном нагружении. За это время выяснилось, что (см., например [1, 2, 7]) оно не является частным случаем никакого другого известного распределения и имеет важное значение в механике повреждений [5]. Поскольку L -распределение было введено как гипотетическое, то в данной работе сделана попытка предложить его обоснование и провести первый систематический анализ.

В процессе нагружения и деформирования твердых тел наблюдается два физических явления – упрочнение и разупрочнение [4, 5]. Их изменение во времени обычно описывают соответствующим изменением подходящей характеристики механических свойств. Так, упрочнение характеризуется, например, повышением твердости материала при испытаниях и эксплуатации, а разупрочнение – снижением предела выносливости в зависимости от наработки и т. д.

Будем рассматривать функционирование и, следовательно, повреждение объекта во времени как реализацию двуединого процесса упрочнения-разупрочнения. В самом общем случае под повреждением понимается всякое изменение состава, строения и, следовательно, физико-механических свойств материала [5].

Конкретизируя это общее понимание в соответствии с основным представлением механики [3, 4], примем, что параметр поврежденности ω заключен на отрезке $[0, 1]$. Значение $\omega = 0$ соответствует неповрежденному состоянию, а значение $\omega = 1$ – предельному состоянию объекта (например, разрушению). Параметр поврежденности $\omega(t)$ объекта в момент t можно также условно отождествить с функцией отказа объекта $F(t)$ в течение наработки t .

В случае стационарного процесса накопления повреждений параметр поврежденности $\omega(t)$ и

функция отказа объекта $F(t)$ линейно зависят от наработки t :

$$F(t) \equiv \omega(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ \frac{t}{T}, & 0 < t < T; \\ 1, & t \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

где T – назначенный ресурс объекта (например, время до наступления предельного состояния, или число циклов нагружения до разрушения). Описывая далее наработку объекта относительно ресурса $x = t/T$, имеем

$$F(x) = \omega(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x, & 0 < x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

В общем случае процесс накопления повреждений может быть нелинейным, т. е. с увеличением наработки скорость накопления повреждений может изменяться, в том числе, немонотонно.

Одним из способов представления нелинейной функции, удовлетворяющей вышеуказанным требованиям, является степенная двухпараметрическая функция вида

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ [1 - (1 - x)^\eta]^\gamma, & x \in (0, 1); \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad (3)$$

где η, γ – параметры формы ($\eta > 0, \gamma > 0$) (рисунок 1). Предложенная функция (3) обладает всеми свойствами функций распределения непрерывных случайных величин [2]. При этом данное распределение, называемое в дальнейшем L -распределением, не является частным случаем других известных типовых распределений случайных величин [1, 2, 7].

Представим некоторые результаты исследования L -распределения.

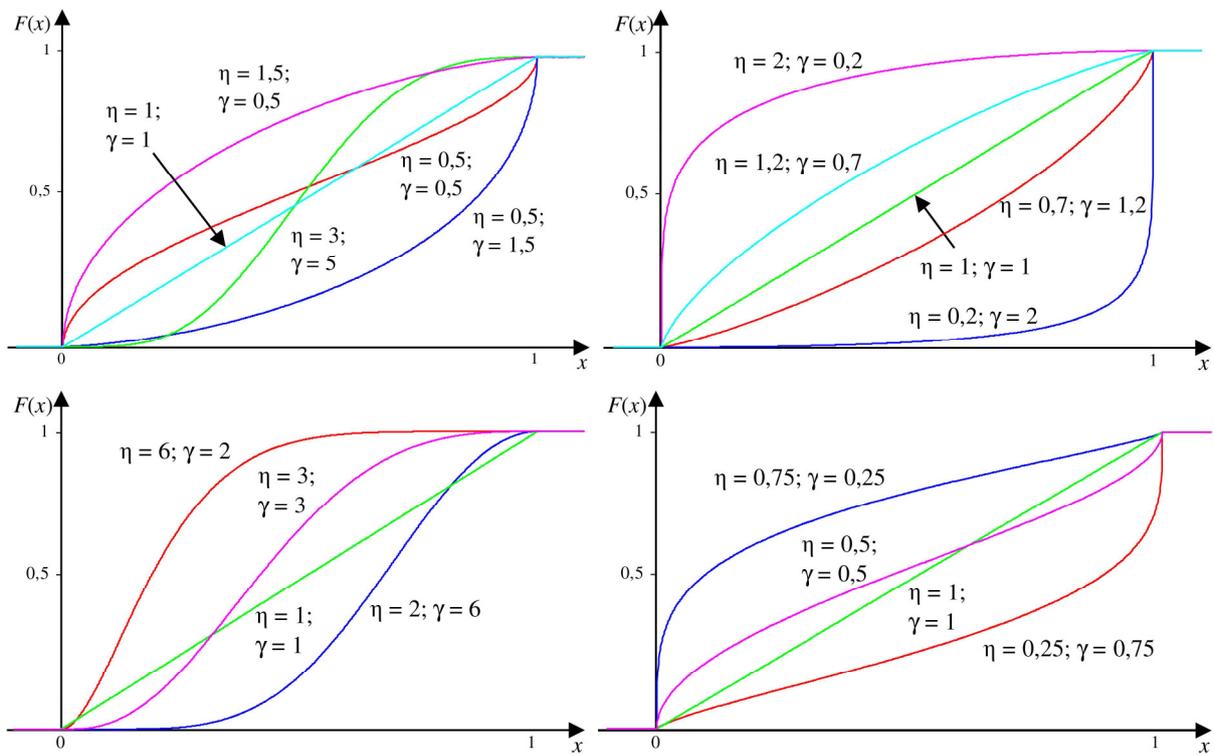


Рисунок 1 – Графики интегральной функции $F(x)$ L -распределения для различных значений параметров

В соответствии с (3) скорость накопления повреждений в объекте определяется **дифференциальной функцией распределения**, графики которой (для различных значений параметров η и γ) представлены на рисунке 2,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\gamma[1-(1-x)^\eta]^{\gamma-1}}{(1-x)^{1-\eta}}, & x \in (0;1); \\ 0, & x \notin (0;1). \end{cases} \quad (4)$$

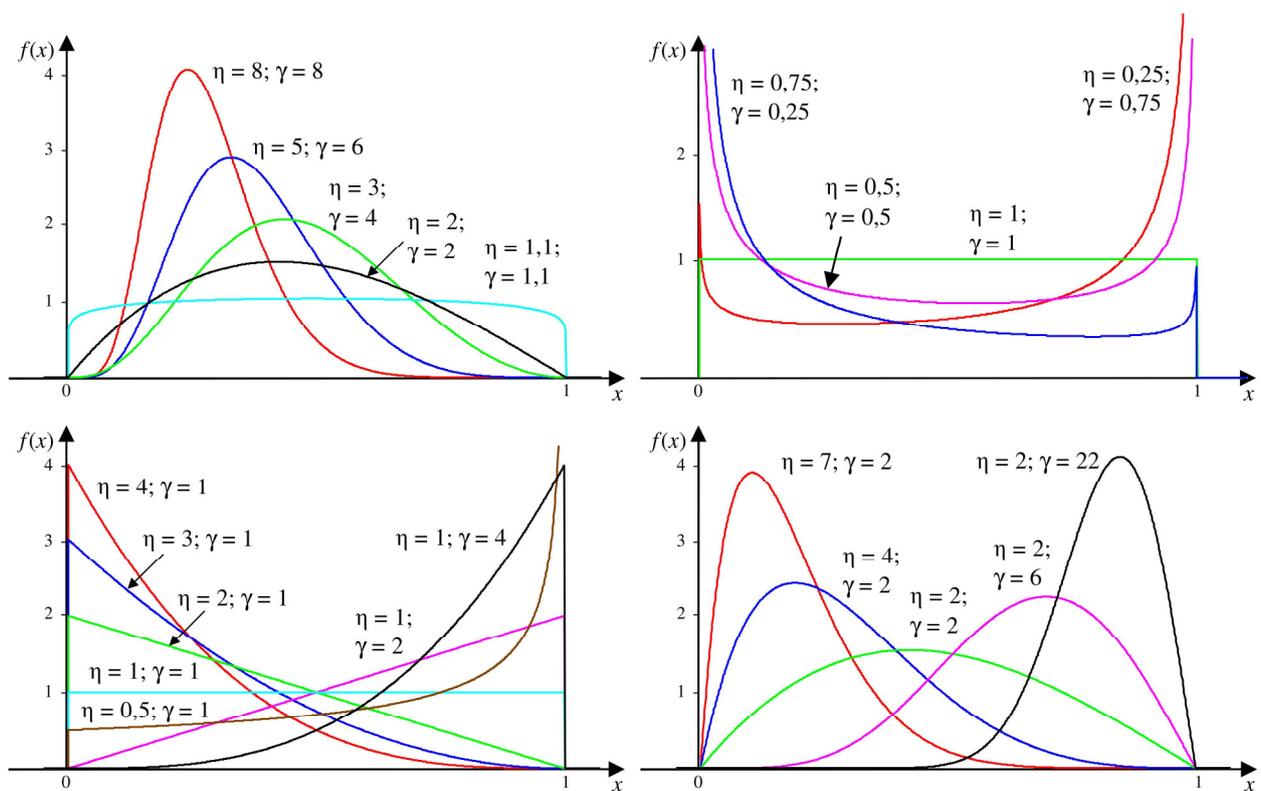


Рисунок 2 – Графики дифференциальной функции $f(x)$ L -распределения для различных значений параметров

Видно, что при $\eta = \gamma = 1$ функция $f(x)$ постоянна [при $x \in (0; 1)$] и соответствующая функция отказов $F(x)$ может описывать стационарный процесс накопления повреждений в объекте. При $\eta \leq 1$ и $\gamma \geq 1$ функция $f(x)$ монотонно возрастает, описывая процессы ускоряющегося во времени повреждения; при $\eta \geq 1$ и $\gamma \leq 1$ $f(x)$ монотонно убывает.

Если $\eta > 1$ и $\gamma > 1$, функция $f(x)$ имеет максимум при $x = 1 - \exp\left(\ln\left(\frac{\eta-1}{\gamma\eta-1}\right)/\eta\right)$, а если $\eta < 1$ и $\gamma < 1$ – минимум при том же x . Благодаря последнему свойству с помощью L -распределения можно описывать наработку до отказа объектов с ускоренным накоплением повреждений в периоде приработки и старения, например, износа.

$$\begin{aligned} v_1 = M[\xi] &= 1 - \frac{1}{\eta} B\left(\gamma+1, \frac{1}{\eta}\right); & v_2 = M[\xi^2] &= 1 - \frac{2}{\eta} B\left(\gamma+1, \frac{1}{\eta}\right) + \frac{2}{\eta} B\left(\gamma+1, \frac{2}{\eta}\right); \\ v_3 = M[\xi^3] &= 1 - \frac{3}{\eta} B\left(\gamma+1, \frac{1}{\eta}\right) + \frac{6}{\eta} B\left(\gamma+1, \frac{2}{\eta}\right) - \frac{3}{\eta} B\left(\gamma+1, \frac{3}{\eta}\right); \\ v_4 = M[\xi^4] &= 1 - \frac{4}{\eta} B\left(\gamma+1, \frac{1}{\eta}\right) + \frac{12}{\eta} B\left(\gamma+1, \frac{2}{\eta}\right) - \frac{12}{\eta} B\left(\gamma+1, \frac{3}{\eta}\right) + \frac{4}{\eta} B\left(\gamma+1, \frac{4}{\eta}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

При определении данных выражений использовалось интегрирование по частям и замены переменных. Центральные моменты случайной ве-

Среди множества существующих типовых распределений схожими свойствами обладает, пожалуй, только В-распределение [1, 2]. Кстати, случайная величина, подчиняющаяся В-распределению с параметрами $v = 1$ и произвольным ω [7], сводится к L -распределению с параметрами η и $\gamma = \omega$ с помощью нелинейного преобразования $(1 - \sqrt[\eta]{x})$.

Выражения моментов случайной величины, подчиняющейся L -распределению, могут быть представлены в явном виде лишь при определенных соотношениях значений параметров [9], не имеющих практической значимости. Однако они всегда могут быть выражены через В-функцию. Представим выражения для начальных моментов четырех младших порядков:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0; & \mu_2 = D[\xi] &= v_2 - v_1^2 = \frac{2}{\eta} B\left(\gamma+1, \frac{2}{\eta}\right) - \frac{1}{\eta^2} B^2\left(\gamma+1, \frac{1}{\eta}\right); \\ \mu_3 &= v_3 - 3v_2v_1 + 2v_1^3; & \mu_4 &= v_4 - 4v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4. \end{aligned} \quad (6)$$

На практике могут также использоваться известные разложения В-функции в ряд. Поэтому представим следующие численные выражения математического ожидания и дисперсии случайной величины:

$$M[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1} \gamma(\gamma-1) \dots (\gamma-k+1)}{k!(k\eta+1)} \right); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} D[\xi] &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\gamma}{k} \right) \frac{2}{(k\eta+1)(k\eta+2)} \right] - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{k!} \right) \frac{1}{(k\eta+1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Медиана непрерывной случайной величины, подчиняющейся L -распределению, определяемая выражением $F(\text{Med}[\xi]) = 0,5$,

$$\text{Med}[\xi] = 1 - (1 - 0,5^{1/\eta})^{1/\eta}. \quad (9)$$

Анализ дифференциальной функции L -распре-

личины, подчиняющейся L -распределению, удобно определять через начальные моменты с помощью известных в теории вероятностей выражений

деления (4) показывает, что она является унимодальной при $\eta > 1$ и $\gamma > 1$. В этом случае мода случайной величины определяется выражением $f'(\text{Mod}[\xi]) = 0$ и

$$\text{Mod}[\xi] = 1 - \exp\left(\ln\left(\frac{\eta-1}{\gamma\eta-1}\right)/\eta\right). \quad (10)$$

При $\eta \leq 1$ и $\gamma \leq 1$ мода L -распределенной случайной величины отсутствует.

Характеристическая функция L -распределения, как и моменты, не выражается аналитически явно. Графики данной функции (для некоторых значений параметров) представлены на рисунке 3.

Рассматривая случайную величину ξ как наработку объекта до отказа, **функция интенсивности отказов** объекта имеет вид ($x \in [0, 1]$, см. рисунок 4)

$$\lambda(x) = \frac{\eta\gamma [1 - (1-x)^\eta]^{\gamma-1} (1-x)^{\eta-1}}{1 - [1 - (1-x)^\eta]^\gamma}. \quad (11)$$

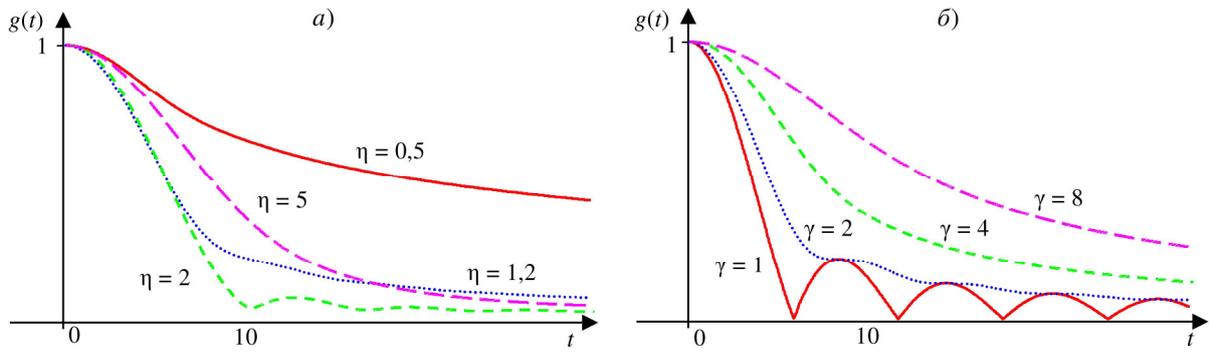


Рисунок 3 – Графики характеристической функции $g(t)$ L -распределения для различных значений параметров: $a - \gamma = 3$; $b - \eta = 1$

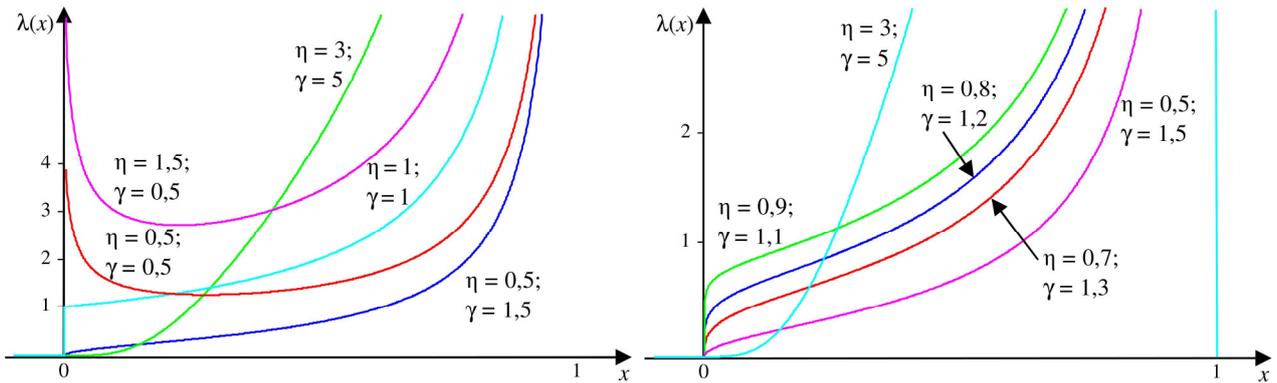


Рисунок 4 – Графики функции интенсивности отказов объектов $\lambda(x)$, наработка до отказа которых подчиняется L -распределению

Функция интенсивности отказов (11) монотонно возрастает при $\gamma \geq 1$, поэтому L -распределение может использоваться в качестве адекватной модели постепенных (износных) отказов объектов.

При $\gamma < 1$ функция (11) имеет U -образную форму, что позволяет использовать L -распределение для описания наработки объектов до отказа на всех этапах жизненного цикла объекта: в периоде приработки, нормальной эксплуатации и старения.

Статистическая оценка параметров $\hat{\eta}$ и $\hat{\gamma}$ L -распределения предполагает численное решение системы уравнений (5) и (6):

$$\begin{cases} \hat{M}[\xi] = 1 - \frac{1}{\hat{\eta}} B\left(\hat{\gamma} + 1, \frac{1}{\hat{\eta}}\right); \\ \hat{D}[\xi] = \frac{2}{\hat{\eta}} B\left(\hat{\gamma} + 1, \frac{2}{\hat{\eta}}\right) - \frac{1}{\hat{\eta}^2} B^2\left(\hat{\gamma} + 1, \frac{1}{\hat{\eta}}\right); \end{cases} \quad (12)$$

где $\hat{M}[\xi]$ и $\hat{D}[\xi]$ – несмещенные и состоятельные оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины [2]. Определение свойств полученных из (12) оценок (несмещенность, состоятельность, эффективность) представляет отдельную, пока не решенную задачу.

Генерирование случайной величины ξ , подчиняющейся L -распределению, возможно мето-

дом обратной функции [2] с использованием значений R базовой случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$:

$$R = F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0]; \\ [1 - (1 - x)^\eta]^\gamma, & x \in [0; 1]; \\ 1, & x \in [1; \infty). \end{cases} \quad (13)$$

Выражая x , получим

$$x = 1 - (1 - R^{1/\gamma})^{1/\eta}. \quad (14)$$

Представим **пример использования L -распределения** для описания количества циклов ξ до разрушения 25 образцов из алюминиевого сплава В 95 при уровне напряжения 22,8 кГ/мм² [8, с. 152].

Рассматривая наработку образцов относительно назначенного ресурса $T = 10^7$ циклов, для проверки гипотезы о согласовании L -распределения с экспериментальными данными был использован критерий согласия χ^2 Пирсона.

Статистические оценки параметров L -распределения по (12) составили соответственно $\hat{\eta} = 3,306$ и $\hat{\gamma} = 1,136$. Количество интервалов разбиения вариационного ряда определялось формулой Стерджесса и для выборки объема $n = 25$ составило $k = 6$.

Интервалы разбиения вариационного ряда предполагались «равнонаполненными» (рисунок 5). При этом интервалы имели различную длину h_i , а границы интервалов $\{0; 0,068; 0,135; 0,211; 0,305; 0,439; 1\}$ определялись из условия равенства теоретической вероятности попадания в каждый из них $(1/k)$. Фактические частоты m_i попадания выборочных значений в каждый из интервалов составили $\{5; 4; 3; 4; 5; 4\}$, а расчетное значение критерия Пирсона – $\tilde{\chi}^2 = 0,680$.

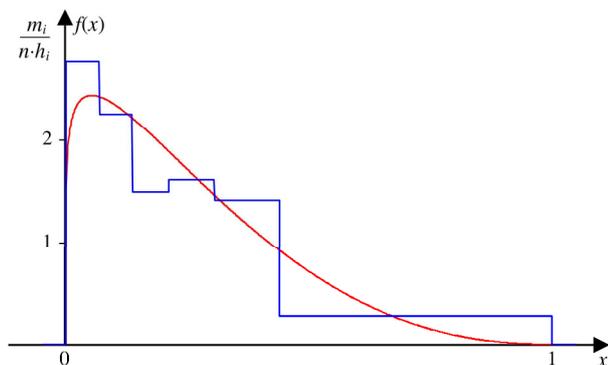


Рисунок 5 – Гистограмма количества циклов до разрушения образцов с наложенной дифференциальной функцией L -распределения

Максимальный уровень значимости P -value, для которого гипотеза о согласовании L -распределения с экспериментальными данными еще не отклоняется, P -value = 0,8780. Аналогичная проверка гипотезы о W -распределении показала значение P -value = 0,8779.

Выводы. В работе предложено двухпараметрическое распределение непрерывной одномерной

случайной величины, которое может служить адекватной моделью наработки до отказа (или ресурса) технических объектов, подверженных износоусталостному повреждению с произвольными функциями накопления повреждений. Данное распределение может использоваться для описания наработки до отказа (или ресурса) технических объектов как в периоде приработки, так и в периоде нормальной эксплуатации и старения.

Список литературы

- 1 **Большев, Л. Н.** Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1983. – 416 с.
- 2 Вероятность и математическая статистика : энциклопедия / под ред. Ю. В. Прохорова. – М. : Большая Российская энциклопедия, 2003. – Репр. изд. – 912 с.
- 3 **Качанов, Л. М.** Основы механики разрушения / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1974.
- 4 **Работнов, Ю. Н.** Введение в механику разрушения / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1987.
- 5 **Сосновский, Л. А.** Механика износоусталостного повреждения : [монография] / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 434 с.
- 6 **Сосновский, Л. А.** Статистическая механика усталостного разрушения / Л. А. Сосновский. – Мн. : Наука и техника, 1987. – 288 с.
- 7 **Сосновский, Л. А.** К унификации типовых распределений случайных величин / Л. А. Сосновский, Д. Н. Шевченко // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: сб. ст. Междунар. науч. конф. – Мн. : Издательский центр БГУ, 2008. – С. 321–325.
- 8 **Степнов, М. Н.** Статистическая обработка результатов механических испытаний / М. Н. Степнов. – М. : Машиностроение, 1972. – 232 с.
- 9 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 810 с.

Получено 22.01.2010

L. A. Sosnovsky, D. N. Shevchenko. L-distribution of the damages of the tribo-fatigue systems.

The presented motivation and systematic analysis L-distribution of the random variable damages of the element tribo-fatigue systems in wear-fatigue tests. The ways to generations and estimations of its parameters is offered. Example of the practical use the L-distribution is shown.