УДК 656.223

Н. Б. ЧЕРНЕЦКАЯ, доктор технических наук, Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля, г. Луганск; Д. В. ПАРСОВ, начальник станции Мушкетово, Донецкая железная дорога; С. А. ВЫПЕРАЙЛЕНКО, студентка, Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля, г. Луганск

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМПОЗИЦИИ ПАССАЖИРСКИХ СОСТАВОВ НА ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГАХ УКРАИНЫ

Рассмотрена математическая модель композиции пассажирского подвижного состава, которая делает возможным повышение доходов от пассажирских поездов, уменьшение себестоимости перевозок и удовлетворение спроса. Важность решения задачи определения оптимальной композиции составов поездов обусловлена тем, что от композиции составов во многом зависят комфортность, населенность поездов, их масса, скорость и размеры движения, а также конкурентоспособность поезда.

Пассажирские перевозки убыточны, и их себестоимость с каждым годом растет, поэтому необходимо искать новые пути решения этой проблемы. Одним из способов повышения доходов пассажирских перевозок является оптимизация композиции составов пассажирских поездов.

Основная доля доходов от пассажирских поездов обусловлена продажей проездных документов, объем которой зависит от композиции составов пассажирских поездов. Именно композиция состава поезда, наряду с его категорией, позволяет гражданам с различной покупательской способностью выбрать тип вагона и поезд, удовлетворяющие потребности, требования и запросы каждого пассажира. В связи с этим управление композициями составов поездов и оперативное их регулирование по сути представляют собой систему управления экономикой пассажирского поезда.

Важность решения задачи определения оптимальной композиции составов поездов обусловлена также тем, что от композиции составов во многом зависят комфортность, населенность поездов, их масса, скорость и размеры движения, а также конкурентоспособность поезда, доходы от него, расходы и себестоимость перевозок железных дорог. Поэтому к выбору композиции составов пассажирских поездов необходимо подходить серьезно и взвешенно. Учитывая влияние композиции составов на эксплуатационные доходы и расходы, ее оптимальный выбор в странах Европы осуществляется на основе многолетних статистических данных о населенности поездов на каждом участке. Композиция выбирается, исходя из потребностей пассажиров и спроса на перевозки. Для удовлетворения потребностей пассажиров различные категории поездов формируются из вагонов разных классов, в них включаются также вагоны-бары. В зависимости от спроса курсируют короткие поезда, состоящие из одного тягового вагона и шести-семи пассажирских, или удлиненные. Технологией предусматривается и возможность соединения двух поездов.

На данном этапе учеными была изучена задача оптимизации пассажирских перевозок в дальнем сообщении с учетом густоты пассажиропотока при использовании вагонов разного типа, с учетом спроса пассажиров на проезд в вагонах различных категорий (скорые, фирменные, дневные, скоростные, улучшенного сервиса) [1]. В качестве показателя, определяющего выбор оптимального варианта структуры составов, принята прибыль, полученная от перевозки пассажиров. Однако такой показатель, как прибыль, не учитывает степень удовлетворения спроса.

В работе [2] предложен иной подход к определению структуры пассажирского состава. Здесь была рассмотрена задача векторной оптимизации, где в качестве главных показателей принимаются прибыль и потери. Прибыль определяется так же, как и в [1], а потери – двумя составляющими: потери от «холостого» пробега, когда в поезде имеются непроданные места, и потери из-за недостаточности мест в поезде для полного удовлетворения спроса. Однако решение данной задачи было представлено с учетом продажи билетов только от начальной станции следования до конечной.

В этой работе рассмотрим вопрос определения оптимальной структуры состава пассажирского поезда с учетом спроса на промежуточных станциях маршрута следования, а в качестве оценки такой оптимальности, как и в [2], рассматриваются те же два показателя – прибыль и потери.

Структура состава пассажирского поезда устанавливает количество вагонов различного типа – спальный (СВ), купейный (К), плацкартный (Пл), общий (О) – и порядок их размещения в составе. В случаях, когда на маршруте нет ограничения на длину поезда (число вагонов), каждый тип вагонов можно рассматривать независимо.

Пусть по маршруту следования пассажирского поезда имеются *n* станций, включая начальную и конечную. Введем следующие обозначения: $f_{ij}(x, t)$ – плотность вероятностей распределения спроса на поездки от станции A_i до A_j в момент времени (день недели) t; $\xi_{ij}(t)$ – математическая модель спроса на поездки $A_i > A_j$ в момент t (при фиксированном значении последнего ξ_{ij} – случайная величина); $y_{ij}(t)$ – число мест, которые могут быть проданы на станции A_i для поездки до A_j.

Неудовлетворенный спрос

$$(\xi_{ij}(t) - y_{ij}(t))\, \sigma(\xi_{ij}(t) - y_{ij}(t)),$$

а число непроданных билетов

$$(y_{ij}(t) - \xi_{ij}(t))\, \sigma(y_{ij}(t) - \xi_{ij}(t)),$$

где $\sigma(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ 1, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$

Потери при поездке от A_i до A_j

$$z_{ij}(t) = c_{ij}(y_{ij}(t) - \xi_{ij}(t))\, \sigma(y_{ij}(t) - \xi_{ij}(t)) + \\ + p_{ij}(\xi_{ij}(t) - y_{ij}(t))\, \sigma(\xi_{ij}(t) - y_{ij}(t)),$$

где c_{ij} – себестоимость одного места в поезде от станции A_i до A_j; p_{ij} – цена билета от A_i до A_j.

Тогда суммарные потери по всему маршруту

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} z_{ij}(t).$$

Прибыль от перевозки пассажиров от A_i до A_j

$$\Pi_{ij}(t) = p_{ij}\big(y_{ij}(t)\sigma(\xi_{ij}(t)) + \xi_{ij}(t)\sigma(y_{ij}(t) - \xi_{ij}(t))\big) - c_{ij}y_{ij}(t),$$

а суммарная прибыль на этом маршруте –

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \Pi_{ij}(t).$$

Вычислив математическое ожидание суммарных потерь, получим функцию

$$F_1 = M[z] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(c_{ij}[y_{ij} \int_{a_{ij}}^{y_{ij}} f_{ij}(x,t)dx - \int_{a_{ij}}^{y_{il}} x f_{ij}(x,t)dx] + \right. \\ \left. + p_{ij}[\int_{y_{ij}}^{b_{ij}} x f_{ij}(x,t)dx - y_{ij} \int_{y_{ij}}^{b_{ij}} f_{ij}(x,t)dx] \right).$$

При этом принято, что $f_{ij}(x, t)$ отлично от нуля, когда $x \in x[a_{ij}, b_{ij}]$ (a_{ij} – минимальный, b_{ij} – максимальный спрос в тот или иной день), а

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < a; \\ \int_a^x f(t)dt, \text{ если } a \leq x \leq b; \\ 1, \text{ если } x \geq b. \end{cases}$$

Тогда F_1 примет вид

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} \left(y_{ij}F_{ij}(y_{ij}) - \int_{a_{ij}}^{y_{ij}} x f_{ij}(x)dx \right) + p_{ij} \left(\int_{y_{ij}}^{b_{ij}} x f_{ij}(x)dx - y_{ij}(1 - F_{ij}(y_{ij})) \right).$$

Проведя математические преобразования в отношении прибыли, получим функцию

$$F_2 = M[\Pi] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(p_{ij} \left(\int_{a_{ij}}^{y_{ij}} x f_{ij}(x)dx + y_{ij}(1 - F_{ij}(y_{ij})) \right) - c_{ij}y_{ij} \right).$$

Желание сделать F_1 как можно меньше, а F_2 – как можно больше приводит к задаче векторной оптимизации

$$\begin{pmatrix} F_1(Y) \\ -F_2(Y) \end{pmatrix} \to \min, \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=3}^{n} y_{2j} \leq y_{12},$$

$$\sum_{j=4}^{n} y_{3j} \leq y_{13} + y_{23}, \qquad (2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \leq \sum_{k=1}^{i=1} y_{ki},$$

$$y \geq 0,$$

где $Y = (y_{12}, y_{13}, ..., y_{1n}, y_{24}, ..., y_{2n}, ..., y_{n-1\,n})$.

Выполнив формальное решение задачи (1) для определения набора эффективных решений без учета (2), получим согласно [2]

$$\int_{a_{ij}}^{y_{ij}} f_{ij}(x)dx = \frac{\rho_{ij} - 1}{\rho_{ij}},$$

$$\int_{a_{ij}}^{y_{ij}} f_{ij}(x)dx = \frac{\rho_{ij}}{1 + \rho_{ij}},$$

где y_{ij} – соответствует эффективному минимальному числу мест с переменой трафарета, необходимых для удовлетворения спроса по станции A_i для поездки в A_j; y_{ij} – то же, по A_i – для поездки в A_j; $\rho_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{c_{ij}}$ – показатель рентабельности перевозки из A_i в A_j.

Тогда решение задачи сводится к определению для каждой станции интервала эффективного количества мест с переменой трафарета в конкретном поезде для удовлетворения спроса по станции A_j, на каждый тип мест, которое и будет определять рациональную структуру поезда.

Рассмотрим ситуацию для трех станций. Определим затраты и прибыль, связанные с перевозкой пассажиров для каждого промежутка пути следования:

$$\begin{gathered} z_{12}=c_{12}(y_{12}-\xi_{12})\sigma(y_{12}-\xi_{12})+ \\ +p_{12}(\xi_{12}-y_{12})\sigma(\xi_{12}-y_{12}), \\ z_{13}=c_{13}(y_{13}-\xi_{13})\sigma(y_{13}-\xi_{13})+ \\ +p_{13}(\xi_{13}-y_{13})\sigma(\xi_{13}-y_{13}), \\ z_{23}=c_{23}(y_{23}-\xi_{23})\sigma(y_{23}-\xi_{23})+ \\ +p_{23}(\xi_{23}-y_{23})\sigma(\xi_{23}-y_{23}), \end{gathered},$$

$$\Pi_{12}=p_{12}\big(\xi_{12}\sigma(y_{12}-\xi_{12})+y_{12}\sigma(\xi_{12}-y_{12})\big)-c_{12}y_{12},$$

$$\Pi_{13}=p_{13}\big(\xi_{13}\sigma(y_{13}-\xi_{13})+y_{13}\sigma(\xi_{13}-y_{13})\big)-c_{13}y_{13},$$

$$\Pi_{23}=p_{23}\big(\xi_{23}\sigma(y_{23}-\xi_{23})+y_{23}\sigma(\xi_{23}-y_{23})\big)-c_{23}y_{23}.$$

Вычислив математические ожидания, получим

$$\bar z_{12}=c_{12}\int_{a_{12}}^{y_{12}}(y_{12}-x)f_{12}(x)dx+p_{12}\int_{y_{12}}^{b_{12}}(x-y_{12})f_{12}(x)dx,$$

$$\bar z_{13}=c_{13}\int_{a_{13}}^{y_{13}}(y_{13}-x)f_{13}(x)dx+p_{13}\int_{y_{13}}^{b_{13}}(x-y_{13})f_{13}(x)dx,$$

$$\bar z_{23}=c_{23}\int_{a_{23}}^{y_{23}}(y_{23}-x)f_{23}(x)dx+p_{23}\int_{y_{23}}^{b_{23}}(x-y_{23})f_{23}(x)dx,$$

$$\overline{\Pi}_{12}(y_{12})=p_{12}\left(\int_{a_{12}}^{y_{12}}xf_{12}(x)dx+y_{12}\int_{y_{12}}^{b_{12}}f_{12}(x)dx\right)-c_{12}y_{12},$$

$$\overline{\Pi}_{13}(y_{13})=p_{13}\left(\int_{a_{13}}^{y_{13}}xf_{13}(x)dx+y_{13}\int_{y_{13}}^{b_{13}}f_{13}(x)dx\right)-c_{13}y_{13},$$

$$\overline{\Pi}_{23}(y_{23})=p_{23}\left(\int_{a_{23}}^{y_{23}}xf_{23}(x)dx+y_{23}\int_{y_{23}}^{b_{23}}f_{23}(x)dx\right)-c_{23}y_{23}.$$

Тогда суммарные средние потери и прибыль

$$\overline{Z}(y_{12},y_{13},y_{23})=M(Z)=\bar z_{12}(y_{12})+\bar z_{13}(y_{13})+\bar z_{23}(y_{23}),$$

$$\overline{\Pi}(y_{12},y_{13},y_{23})=M(\Pi)=\overline{\Pi}_{12}(y_{12})+\overline{\Pi}_{13}(y_{13})+\overline{\Pi}_{23}(y_{23}).$$

Необходимым условием для нахождения эффективного решения является

$$\frac{\nabla\overline{Z}}{\left|\nabla\overline{Z}\right|}-\frac{\nabla\overline{\Pi}}{\left|\nabla\overline{\Pi}\right|}=0.$$

В силу сепарабельности функций $\overline{Z}$ и $\overline{\Pi}$ имеем

$$\nabla\overline{Z}=\begin{pmatrix}\dfrac{d\bar z_{12}}{dy_{12}}\\ \dfrac{d\bar z_{13}}{dy_{13}}\\ \dfrac{d\bar z_{23}}{dy_{23}}\end{pmatrix},$$

$$\nabla\overline{\Pi}=\begin{pmatrix}\dfrac{d\overline{\Pi}_{12}}{dy_{12}}\\ \dfrac{d\overline{\Pi}_{13}}{dy_{13}}\\ \dfrac{d\overline{\Pi}_{23}}{dy_{23}}\end{pmatrix}.$$

Определим производные:

$$\frac{d\bar z_{12}}{dy_{12}}=c_{12}\int_{a_{12}}^{y_{12}}f_{12}(x)dx-p_{12}\int_{y_{12}}^{b_{12}}f_{12}(x)dx,$$

$$\frac{d\overline{\Pi}_{12}}{dy_{12}}=p_{12}\int_{y_{12}}^{b_{12}}f_{12}(x)dx-c_{12}.$$

Через функцию $F_{12}(x)$ производные принимают вид

$$\frac{d\bar z_{12}}{dy_{12}}=(c_{12}+p_{12})F_{12}(y_{12})-p_{12},$$

$$\frac{d\overline{\Pi}_{12}}{dy_{12}}=p_{12}(1-F_{12}(y_{12}))-c_{12}.$$

Из необходимого условия имеем

$$\frac{(c_{12}+p_{12})F_{12}(y_{12})-p_{12}}{\left|\nabla\overline{Z}\right|}-\frac{p_{12}(1-F_{12}(y_{12}))-c_{12}}{\left|\nabla\overline{\Pi}\right|}=0.$$

Если положить

$$\lambda=\left|\frac{\nabla\overline{Z}}{\nabla\overline{\Pi}}\right|>0,$$

то

$$F_{12}(y_{12})=\frac{\rho_{12}(1+\lambda)-\lambda}{\rho_{12}(1+\lambda)+1}.$$

Или в общем случае

$$F_{ij}(y_{ij})=\frac{\rho_{ij}(1+\lambda)-\lambda}{\rho_{ij}(1+\lambda)+1}. \qquad (3)$$

Из соотношения (3) в параметрической форме определяем эффективные значения количества мест для продажи в A_i для поездки в A_j. Для учета ограничений (2) необходимо определить такое множество $\Lambda \subseteq [0, \infty]$, чтобы для любого $\lambda \in \Lambda$ выполнялись условия распределения мест для продажи билетов на каждой станции, которые принимают вид

$$\sum_{j=3}^{n} y_{2j}(\lambda) \le y_{12}(\lambda),$$

$$\sum_{j=4}^{n} y_{3j}(\lambda) \le y_{13}(\lambda) + y_{23}(\lambda), \qquad (4)$$

$$\sum_{j=i+1}^{n} y_{ij}(\lambda) \le \sum_{k=1}^{i=1} y_{ki}(\lambda).$$

Рассмотрим самый неблагоприятный вариант, когда спрос распределен по равномерному закону

$$f_{ij}(x) = \frac{1}{b_{ij} - a_{ij}},$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a_{ij}, \\ \dfrac{x - a_{ij}}{b_{ij} - a_{ij}}, & a_{ij} \le x \le b_{ij}, \\ 1, & x > b_{ij}. \end{cases}$$

Для упрощения расчета примем рентабельность одинаковой для всех станций

$$\rho_{ij} = \rho.$$

Определим y_{ij} из выражения (3), т. е.

$$y_{ij}(\lambda) = (1 - \varphi(\lambda))a_{ij} + \varphi(\lambda)b_{ij}, \qquad (5)$$

где $\varphi(\lambda) = \dfrac{\rho(1+\lambda) - \lambda}{\rho(1+\lambda) + 1}$.

Получено 12.01.2010

Необходимо проверить условия распределения мест для каждой станции (4), если значение y_{ij} определяется по (5):

$$\sum_{j=3}^{n} y_{ij}(\lambda) \le \sum_{k=1}^{i=1} y_{ki}(\lambda),$$

$$\sum_{j=i+1}^{n} ((1 - \varphi(\lambda))a_{ij} + \varphi(\lambda)b_{ij}) \le \sum_{k=1}^{i=1} a_{ij} + \varphi(\lambda)(b_{ij} - a_{ij})),$$

$$\frac{1 - \varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)} \left(\sum_{k=1}^{i=1} a_{ij} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \right) + \left(\sum_{k=1}^{i=1} b_{ij} - \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} \right) \ge 0.$$

Вывод. При имеющейся статистической информации о распределении пассажироемкости поездов на участке можно определить рациональную пассажироемкость с учетом цены и времени поездки, и на основании вариации категории, типов и количества поездов выбрать оптимальную композицию состава каждого поезда с тем, чтобы максимально удовлетворить спрос на пассажирские перевозки и оптимизировать доходные поступления пассажирского комплекса как на участке, так и на всем направлении или сети железных дорог Украины.

Список литературы

1 **Пазойский, Ю. О.** Математическая модель оптимизации пассажирских перевозок в дальнем сообщении / Ю. О. Пазойский, Д. В. Глазков – М. : ВНИИЖТ, 2002.

2 **Босов, А. А.** Определение эффективной структуры пассажирского поезда // А. А. Босов, Е. А. Момот. – Вестн. ДНУЖТ им. акад. В. Лазаряна. – 2003. – С. 91–95.

3 **Босов, А. А.** О Парето оптимальных решениях задач векторной оптимизации / А. А. Босов, В. В. Скалозуб // Дифференциальные уравнения и их применение. – Днепропетровск : ДДУ, 1998. – С. 66–70.

4 **Аксенов, И. М.** Оптимизация пассажироемкости поездов на железнодорожном участке / И. М. Аксенов // Железнодорожный транспорт. – 2004. – № 6. – С. 33–35.

5 **Босов, А. А.** Производная функции множества / А. А. Босов // Железнодорожный транспорт Украины. – 2004. – № 4. – С. 16–18.

N. B. Chernetskaya, D. V. Parsov, S. A. Vyperaylenko. Mathematical model of passenger traffic composition on the railways of Ukraine.

The mathematical model of composition of passenger rolling stock is considered in the article. The purpose of the use of composition of passenger rolling stock is an increase of profits from passenger trains, diminishing of prime price of transportations, satisfaction of demand. Importance of decision of task of determination of optimum composition of constitution of trains is conditioned by that on composition of constitution a comfort, population density of trains, their mass, speed and sizes of motion, and also competitiveness of train, depend in a great deal.