

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**

Кафедра «Графика»

Г. Т. ПОДГОРНОВА, Е. Г. КАЛАШНИК

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.
ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ**

Часть 1

ТОЧКА, ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2017

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Графика»

Г. Т. ПОДГОРНОВА, Е. Г. КАЛАШНИК

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Часть 1

ТОЧКА, ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ

*Одобрено учебно-методической комиссией строительного факультета
в качестве учебно-методического пособия для студентов строительных
специальностей всех форм обучения*

Гомель 2017

УДК 514.18 (075.8)
ББК 22.151.3
П44

Рецензент – канд. техн. наук, доцент *Т. К. Королик* (БелГУТ)

Подгорнова, Г. Т.

П44 Начертательная геометрия. Позиционные задачи : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. Ч. I. Точка, прямая, плоскость / Г. Т. Подгорнова, Е. Г. Калашник; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2017. – 24 с.
ISBN 978-985-554-628-4 (ч. I)

В пособии изложены вопросы построения и решения позиционных задач для простейших геометрических образов – точек, прямых и плоскостей. Даны общие схемы решения задач и приведены примеры их решения с поэтапными пояснениями.

Предназначено для студентов строительных специальностей всех форм обучения.

УДК 514.18 (075.8)
ББК 22.151.3

ISBN 978-985-554-628-4 (ч. I)
ISBN 978-985-554-627-7

© Подгорнова Г. Т., Калашник Е. Г., 2017
© Оформление. БелГУТ, 2017

1 ПРЕДМЕТ И МЕТОДЫ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Начертательная геометрия изучает способы построения изображений пространственных форм на плоскости, воссоздания пространственных форм по их плоским изображениям и решение задач геометрического характера для пространственных форм. По своему содержанию и методам она занимает особое положение среди других наук, так как является лучшим средством развития пространственного воображения, без которого невозможно инженерное творчество.

Без методов начертательной геометрии невозможно обойтись при проектировании сложных технических форм (корпуса судов, самолетов, поверхности лопаток турбин, винтовые шнековые поверхности и т.д.), в архитектуре, строительстве (тоннели, линии электропередач, каналы), в геологии и геодезии (отображение рельефа земной поверхности). Все это изучается с помощью отображения сложных пространственных форм на плоскости.

Основным методом решения задач является метод проецирования. Проецирование – это построение изображения геометрического объекта на плоскости путем проведения через все его точки воображаемых проецирующих лучей до пересечения их с плоскостью, называемой плоскостью проекций, а полученное изображение – проекцией геометрического объекта. На рисунке 1.1 показаны методы центрального и параллельного проецирования.

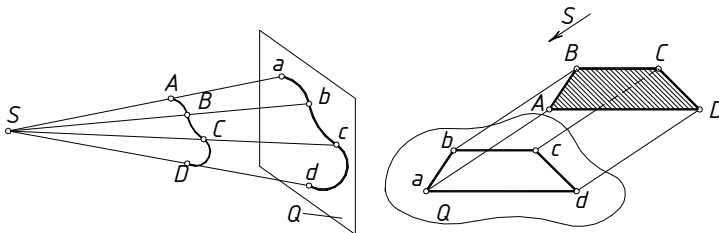


Рисунок 1.1 – Центральное и параллельное проецирование

При центральном проецировании лучи выходят из одной точки S – центра проецирования. При параллельном – эта точка удалена на бесконечное расстояние, то есть проецирующие лучи параллельны друг другу.

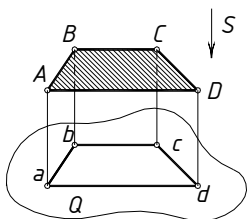


Рисунок 1.2 – Ортогональное проецирование

Частным случаем параллельного проецирования является ортогональное проецирование (рисунок 1.2), при этом проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций. Наиболее часто в инженерной деятельности применяется именно этот способ проецирования. В пособии все задачи решаются методом ортогонального проецирования.

2 ДВЕ ЗАДАЧИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ: ПОЗИЦИОННАЯ, МЕТРИЧЕСКАЯ

Начертательная геометрия составляет теоретическую базу для составления чертежа и представляет собой науку об изображении пространственных трехмерных предметов на плоскости, т.е. построении чертежа (прямая задача) и о способах решения пространственных задач по плоским изображениям (обратная задача).

К таким задачам относятся:

Позиционные – задачи на построение формы по ее параметрам. Например: построение поверхности, нахождение линии пересечения тел и т.д.

Метрические – задачи на нахождение параметров формы. Например: определение расстояния между прямыми или точками; нахождение угла наклона или радиуса кривизны поверхности.

3 ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Позиционными задачами называются задачи, связанные с определением на комплексном чертеже взаимного расположения заданных геометрических фигур, включая задачи на взаимную принадлежность и на взаимное пересечение.

В позиционных задачах можно выделить следующие группы:

- 1) задачи на принадлежность, к которым относятся задачи на определение:
 - а) принадлежность точки заданной линии;
 - б) принадлежность точки заданной плоскости;
 - в) принадлежность точки заданной поверхности;
 - г) принадлежность линии заданной плоскости;
 - д) принадлежность линии заданной поверхности.

2) задачи на пересечение:

- а) пересечение линии с линией;
- б) пересечение поверхности с поверхностью;
- в) пересечение линии с поверхностью и плоскостью.

В пособии рассматриваются задачи на принадлежность и пересечение, относящиеся к точке, линии и плоскости.

4 ЗАДАЧИ НА ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ

При решении задач этой группы используются следствия, вытекающие из свойств параллельного проецирования, а именно:

- если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит проекции линии;
- если линия принадлежит плоскости, то проекция линии принадлежит проекции плоскости;
- если точка принадлежит плоскости, то проекция точки принадлежит проекции линии, принадлежащей проекции плоскости.

4.1 Принадлежность точки заданной линии

Если точка расположена на линии, то все ее проекции лежат на соответствующих проекциях линии, причем, проекции точки лежат на одной линии связи, перпендикулярной оси (рисунок 4.1).

На рисунке 4.2 показана точка K , принадлежащая отрезку прямой линии AB .

При этом если точка лежит на одной или двух проекциях прямой, это еще не значит, что точка принадлежит этой прямой. Если проекции прямой совпадают с направлением линий связи, то для решения задачи следует строить три проекции. Например, на рисунке 4.3 точка K не лежит на прямой AB .

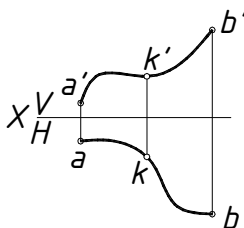


Рисунок 4.1 – Точка принадлежит линии

4.2 Принадлежность прямой заданной плоскости

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости. На пересекающихся прямых, задающих

плоскость (рисунок 4.4) отмечаем произвольные точки A и B , которые и определяют искомую прямую.

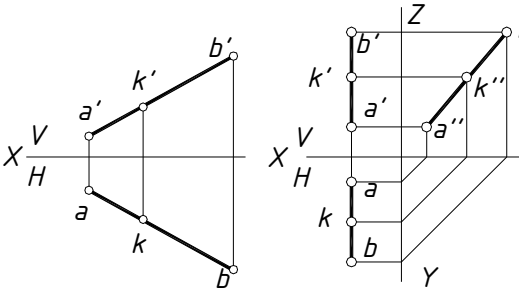


Рисунок 4.2 – Точка принадлежит прямой

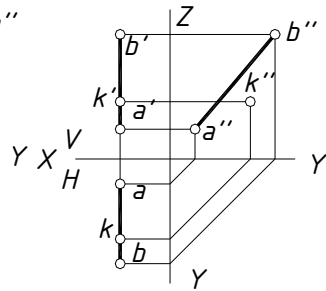


Рисунок 4.3 – Точка не лежит на прямой

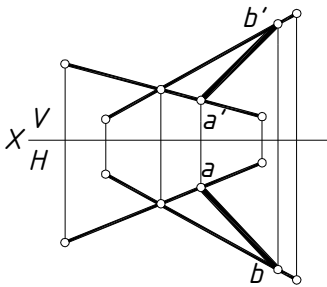


Рисунок 4.4 – Прямая принадлежит плоскости

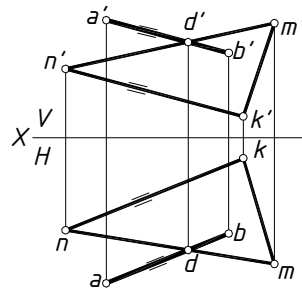


Рисунок 4.5 – Прямая принадлежит плоскости

Одна из двух точек может быть несобственной, тогда прямая принадлежит плоскости, если имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой, расположенной в этой плоскости. На рисунке 4.5 показаны проекции прямой AB , принадлежащей плоскости треугольника MNC . Эта прямая проходит через точку D , лежащую на прямой MN , и параллельна прямой NK .

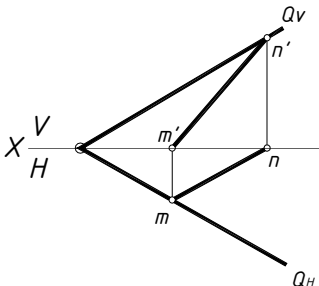


Рисунок 4.6 – Прямая принадлежит плоскости

Если прямая принадлежит плоскости, заданной следами, то следы прямой будут принадлежать соответствующим следам плоскости (рисунок 4.6).

Среди прямых линий, расположенных в плоскости, особое место занимают главные линии плоскости: линии уровня и линии наибольшего наклона.

Линии уровня – прямые, принадлежащие плоскости и параллельные какой-либо из плоскостей проекций.

В плоскости можно провести множество линий уровня и все они будут параллельны между собой.

Горизонтали – прямые, лежащие в данной плоскости и параллельные горизонтальной плоскости проекций (рисунок 4.7).

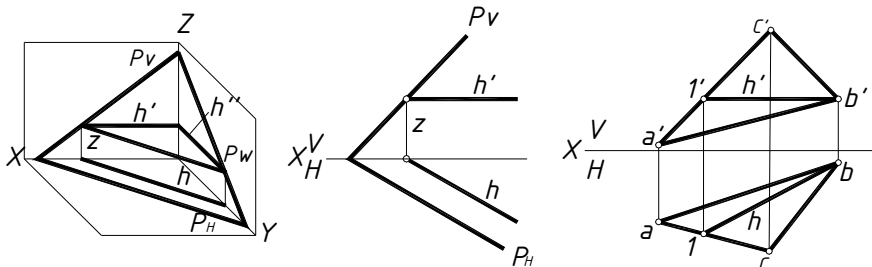


Рисунок 4.7 – Горизонталь плоскости

Фронталы – прямые, лежащие в данной плоскости и параллельные фронтальной плоскости проекций (рисунок 4.8).

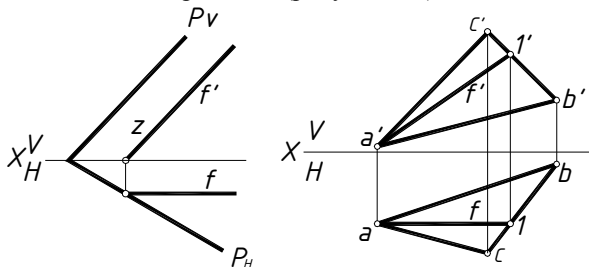


Рисунок 4.8 – Фронталь плоскости

Профильные прямые – прямые, лежащие в данной плоскости и параллельные профильной плоскости проекций (рисунок 4.9).

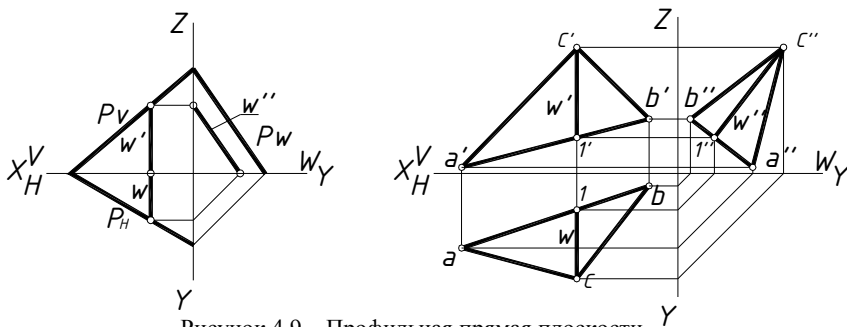


Рисунок 4.9 – Профильная прямая плоскости

Линиями наибольшего уклона плоскости к плоскостям проекций называются прямые, лежащие в ней и перпендикулярные к линиям уровня.

Линия наибольшего уклона к горизонтальной плоскости проекций (H) перпендикулярна к горизонталям плоскости. Иначе ее называют линией ската плоскости (рисунок 4.10).

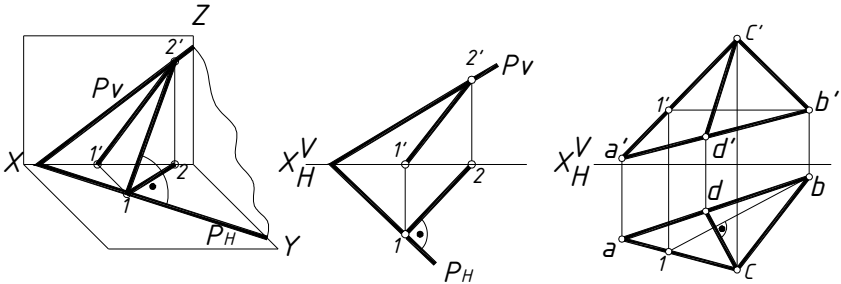


Рисунок 4.10 – Линия наибольшего уклона к горизонтальной плоскости

Линия наибольшего уклона к фронтальной плоскости проекций (V) перпендикулярна к фронталям плоскости (рисунок 4.11).

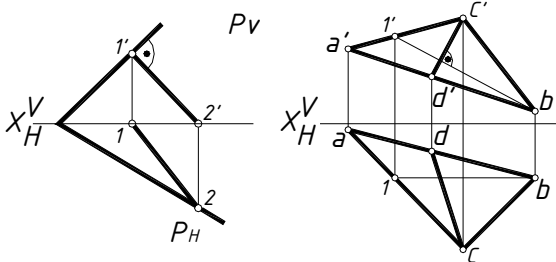


Рисунок 4.11 – Линия наибольшего уклона к фронтальной плоскости

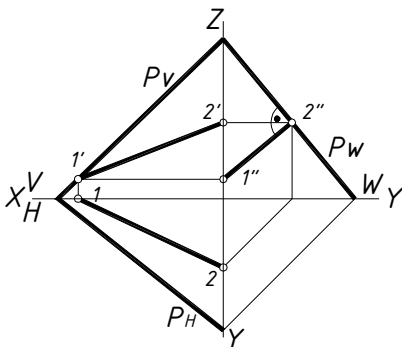


Рисунок 4.12 – Линия наибольшего уклона к профильной плоскости

Линия наибольшего уклона к профильной плоскости проекций (W) перпендикулярна к профильным прямым плоскости (рисунок 4.12).

С помощью линий наибольшего наклона определяют углы наклона плоскостей к плоскостям проекций.

4.3 Принадлежность точки плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она лежит на прямой, принад-

лежащей этой плоскости, то есть, если одноименные проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой, лежащей в плоскости, то и точка принадлежит заданной плоскости (рисунок 4.13).

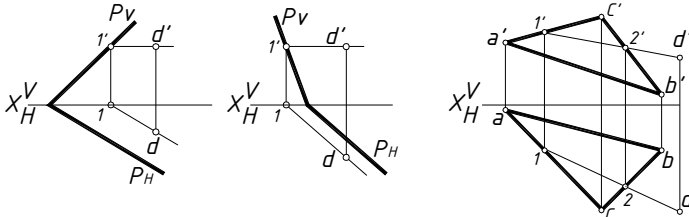


Рисунок 4.13 – Точка D принадлежит плоскости

5 ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

5.1 Параллельные прямые

Если прямые параллельны, то их одноименные проекции параллельны между собой.

Для прямых общего положения достаточно параллельности двух одноименных проекций.

На рисунке 5.1 изображены взаимно параллельные прямые AB и CD .

Для прямых частного положения двух проекций бывает недостаточно. Например, на рисунке 5.2 прямая AB не параллельна прямой CD , что хорошо видно при построении третьей проекции.

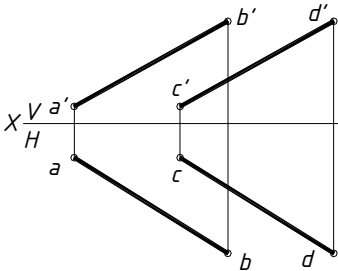


Рисунок 5.1 – Параллельные прямые

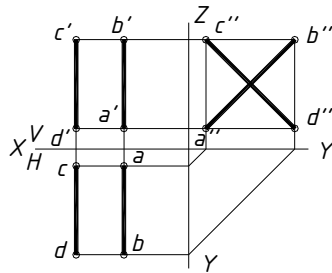


Рисунок 5.2 – Непараллельные прямые

5.2 Пересекающиеся прямые

Пересекающиеся прямые – это прямые, которые имеют одну общую точку. Одноименные проекции таких прямых пересекаются в точке, которая

является проекцией точки пересечения этих прямых. Проекция точки пересечения лежат на одной линии связи.

Для прямых общего положения достаточно двух проекций для определения взаимного положения прямых. Например, на рисунке 5.3 прямая AB пересекается с прямой CD .

Для прямых частного положения этого бывает недостаточно. Так на рисунке 5.4 прямая AB не пересекается с прямой CD .

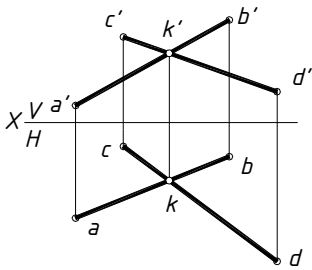


Рисунок 5.3 – Пересекающиеся прямые

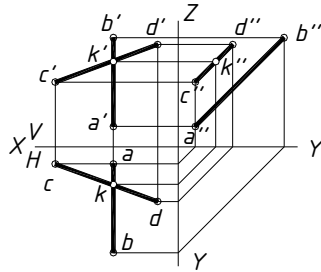


Рисунок 5.4 – Непересекающиеся прямые

5.3 Скрещивающиеся прямые

Скрещивающиеся прямые не имеют общих точек и не параллельны друг другу, то есть эти прямые не лежат в одной плоскости.

При этом одноименные проекции их могут пересекаться или быть параллельны. Например, на рисунке 5.5 одноименные проекции прямых пересекаются, но точки пересечения одноименных проекций не лежат на одной линии связи.

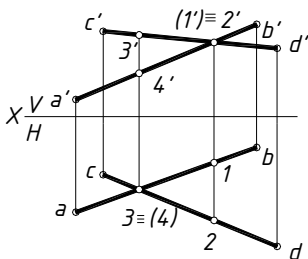


Рисунок 5.5 – Скрещивающиеся прямые

При рассмотрении скрещивающихся прямых в точках пересечения одноименных проекций происходит совмещение двух точек, принадлежащих различным прямым. Такие точки (точки $1'$, $2'$ и 3 , 4) называются конкурирующими. Возникает вопрос о том, какая из этих точек будет “видимой”, а какая “скрытой”.

“Видимой” будет та точка, которая отстоит дальше от соответствующей плоскости проекций, то есть располагается ближе к наблюдателю. Так для точек $1'$, $2'$ “видимой” является точка $2'$, так как она находится дальше от плоскости V , чем точка $1'$ (координата Y у нее больше, чем у точки $1'$, что видно по горизонтальной проекции). Заскрытая (“невидимая”) точка берется в скобки.

6 ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Задачи по определению точки пересечения (встречи) прямой с плоскостью и по построению линии пересечения двух плоскостей являются одними из основных задач начертательной геометрии.

При решении таких задач можно выделить два случая:

- пересечение с проецирующей плоскостью;
- пересечение с плоскостью общего положения.

6.1 Пересечение прямой и плоскости с проецирующей плоскостью

Одним из важных свойств проецирующей плоскости является то, что проекции всех точек такой плоскости принадлежат одному из следов этой плоскости. Следовательно, точки или линии пересечения такой плоскости с любым объектом тоже проецируются на след плоскости.

6.1.1 Пересечение прямой с проецирующей плоскостью

Прямая может пересекаться с плоскостью только в одной точке. Эта точка (K) принадлежит как прямой (лежит на ее проекциях), так и плоскости P . Если плоскость P – горизонтально-проецирующая, то проекции всех ее точек (в том числе и точки K) расположены на ее горизонтальном следе. Для фронтально-проецирующей – на фронтальном следе. Вторая проекция точки K находится из условия принадлежности этой точки заданной прямой. Пересечение прямой AB с проецирующей плоскостью P , заданной следами, показано на рисунке 6.1.

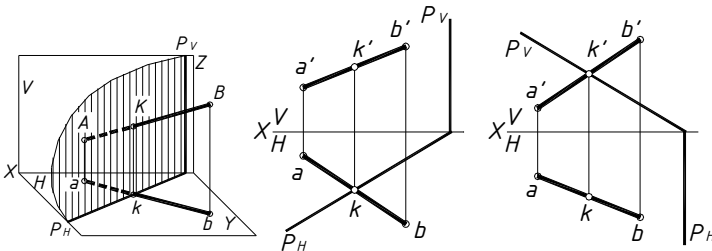


Рисунок 6.1 – Пересечение прямой с проецирующей плоскостью

Построение точки пересечения прямой MN с горизонтально-проецирующей плоскостью P , заданной треугольником ABC , приведено на рисунке 6.2.

Горизонтальная проекция треугольника abc совпадает с горизонтальным следом его плоскости P_H . Следовательно, горизонтальная проекция точки K

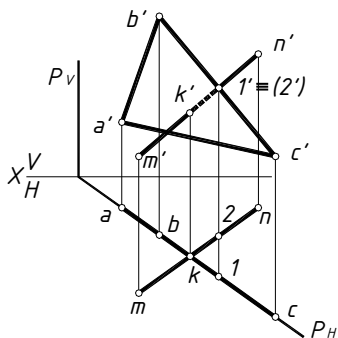


Рисунок 6.2 – Пересечение прямой с проецирующей плоскостью, заданной треугольником

после пересечения ее с треугольником ABC , то есть в точке k' . На участке от точки $2'$ до точки n' прямая будет видна. Невидимая часть прямой обозначается пунктиром.

лежит на пересечении линии abc и mn . Фронтальная проекция точки K находится на фронтальной проекции $m'n'$.

Считая треугольник ABC непрозрачным, определяем область видимости прямой $m'n'$ методом конкурирующих точек. Для этого берем конкурирующие точки $1'$ и $2'$, принадлежащие соответственно стороне BC и прямой MN . Используя горизонтальную проекцию, определяем, что точка $2'$, а следовательно, и прямая MN невидима в данной точке, так как она находится дальше от наблюдателя. Видимость MN изменится

6.1.2 Пересечение плоскости с проецирующей плоскостью

Две плоскости пересекаются по прямой, для построения которой необходимо определить две точки, одновременно принадлежащие каждой из пересекающихся плоскостей (рисунок 6.3), либо одну общую точку, если известно направление линии пересечения.

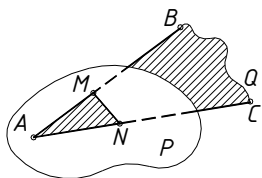


Рисунок 6.3 – Общий принцип построения линии пересечения двух плоскостей

На рисунке 6.4 показано построение линии пересечения двух плоскостей заданных треугольниками ABC и DEF . Треугольник DEF представляет собой горизонтально-проецирующую плоскость (плоскость P). Все точки этой плоскости проецируются на ее

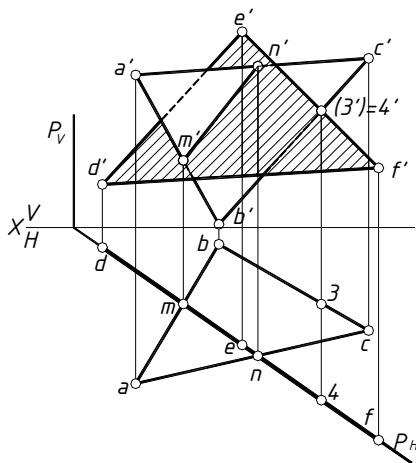


Рисунок 6.4 – Пересечение плоскостей общего положения и проецирующей, заданных треугольниками

горизонтальный след P_H . Следовательно, линия пересечения двух треугольников – линия MN тоже совпадает со следом P_H . Фронтальная проекция линии MN находится на соответствующих сторонах треугольника ABC . Взаимная видимость плоскостей определяется с помощью метода конкурирующих точек. В качестве таких точек взяты точки $3'$ и $4'$, в которых скрещиваются стороны треугольников.

В случаях, когда плоскости заданы следами, построение линии пересечения упрощается, однако принцип построения не изменяется (рисунок 6.5). Линия пересечения проводится через две точки, общие для двух плоскостей. В качестве таких точек берутся точки пересечения одноименных следов. Если одна из плоскостей – проецирующая, то линия пересечения совпадает с одним из ее следов. Другая проекция находится из условия, что искомая линия принадлежит второй плоскости.

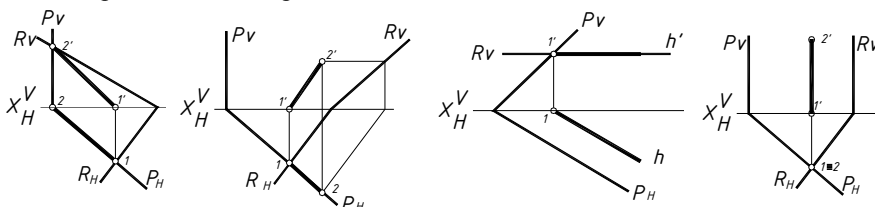


Рисунок 6.5 – Линия пересечения плоскостей, заданных следами

6.2 Пересечение прямой и плоскости с плоскостью общего положения

В случае пересечения прямой или плоскости с плоскостью общего положения точка или линия пересечения не находится сразу ни на одной из проекций. Для их нахождения в общем случае применяются вспомогательные плоскости – плоскости посредники.

6.2.1 Пересечение прямой с плоскостью общего положения

Для построения точки пересечения прямой AB с плоскостью P необходимо выполнить следующее (рисунок 6.6):

1 Заключить прямую AB во вспомогательную плоскость частного положения – плоскость посредник (на рисунке 6.6 это плоскость Q).

2 Построить линию MN пересечения заданной плоскости P со вспомогательной плоскостью Q .

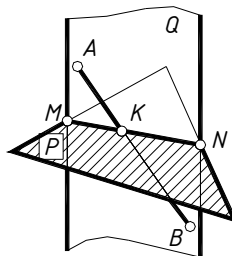


Рисунок 6.6 – Общий принцип построения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения

3 Определить точку пересечения построенной линии MN с заданной прямой AB . Это и будет точка K – точка пересечения заданной прямой AB с плоскостью P .

В примере, приведенном на рисунке 6.7, плоскость P задана ΔDEC .

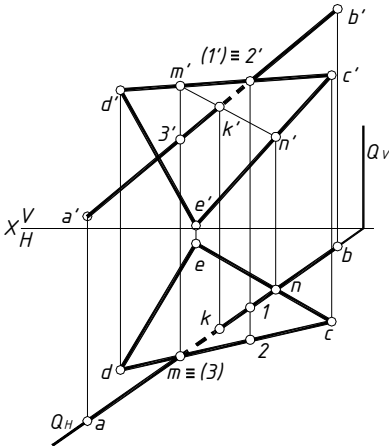


Рисунок 6.7 – Точка пересечения прямой с плоскостью общего положения, заданной треугольником

Для определения видимости на фронтальной проекции возьмем пару фронтально-конкурирующих точек, например 1 и 2. Фронтальные проекции точек совпадают $1 \equiv 2$, а горизонтальная проекция точки 2 расположена ближе к наблюдателю, чем точка 1, следовательно, на фронтальной проекции прямая AB , на которой лежит точка 1, будет перекрыта стороной DC , и значит AB до точки K будет не видна.

Для определения видимости на горизонтальной проекции поступаем аналогично, выбирая горизонтально-конкурирующую пару точек M и 3 .

В случае если плоскость задана следами, порядок действий не изменяется, что можно увидеть в задачах, представленных на рисунке 6.8:

1 Закljučаем прямую AB во вспомогательную проецирующую плоскость Q . При этом “наклонный” след плоскости совпадает с одной из проекций прямой AB .

Рассмотрим алгоритм решения задачи:

1 Закljučаем прямую AB во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость Q , при этом Q_H совпадает с ab .

2 Находим проекции линии пересечения плоскости Q и ΔDEC – mn и $m'n'$.

3 Определяем проекции точки K (k' лежит на пересечении $m'n'$ и $a'b'$, k лежит на ab).

4 Определяем видимость прямой.

Точка K – всегда видимая, т.к. является общей для геометрических образов.

Для определения видимости на фронтальной проекции возьмем пару фронтально-конкурирующих точек, например 1 и 2. Фронтальные проекции точек совпадают $1 \equiv 2$, а горизонтальная проекция точки 2 расположена ближе к наблюдателю, чем точка 1, следовательно, на фронтальной проекции прямая AB , на которой лежит точка 1, будет перекрыта стороной DC , и значит AB до точки K будет не видна.

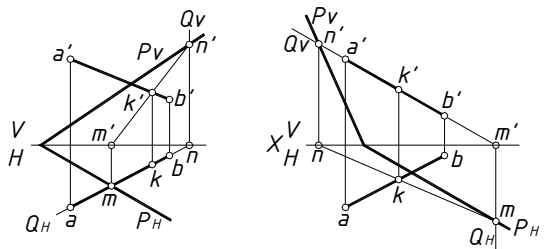


Рисунок 6.8 – Пересечение прямой с плоскостью общего положения, заданной следами

2 Находим проекции линии пересечения плоскости Q и $P - mn$ и $m'n'$.

3 Определяем проекции точки K , лежащей на пересечении AB и MN .

На рисунке 6.9 показаны случаи, когда прямая имеет частное положение (прямая уровня или проецирующая). Порядок построения точки встречи таких прямых с плоскостью остается тем же, что и в предыдущих двух задачах.

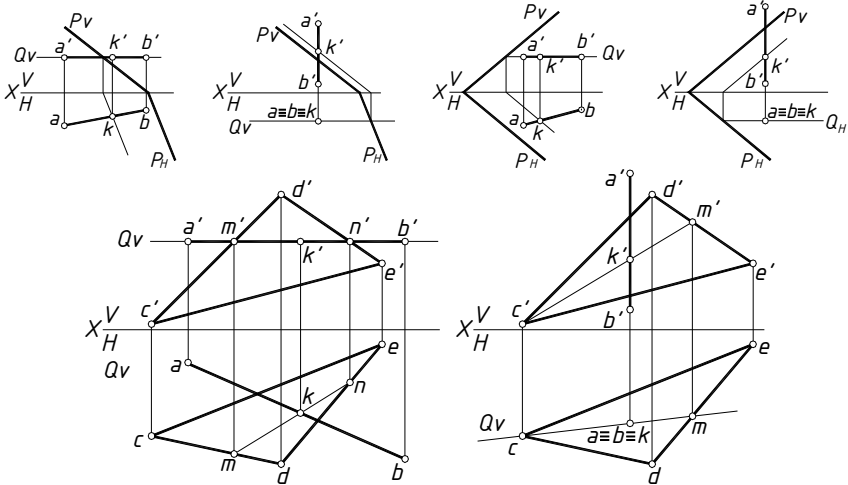


Рисунок 6.9 – Пересечение прямой частного положения с плоскостью общего положения

6.2.2 Пересечение плоскостей общего положения

Построение линии пересечения двух плоскостей может определяться различными способами. Разберем некоторые из них.

Построение линии пересечения по точкам пересечения прямых одной плоскости со второй плоскостью

Рассмотрим взаимное пересечение плоскостей треугольников ABC и DEF (рисунок 6.10) Для нахождения линии пересечения двух плоскостей можно найти точки пересечения двух любых прямых одной плоскости со второй.

Таким образом, задача сводится к задаче нахождения точки пересечения прямой и плоскости, повторенной дважды:

1 Находим точку пересечения прямой EF с плоскостью треугольника ABC – точку M . Для этого:

– через прямую EF проводим горизонтально-проецирующую плоскость P ;

- находим линию пересечения плоскости P с треугольником ABC – линию 1-2. Горизонтальная проекция 1-2 лежит на следе P_H ;
- находим точку пересечения построенной линии $1'2'$ с прямой $e'f'$. Это будет проекция m' точки пересечения прямой EF с плоскостью треугольника ABC . Горизонтальная проекция m находится на горизонтальной проекции ef .

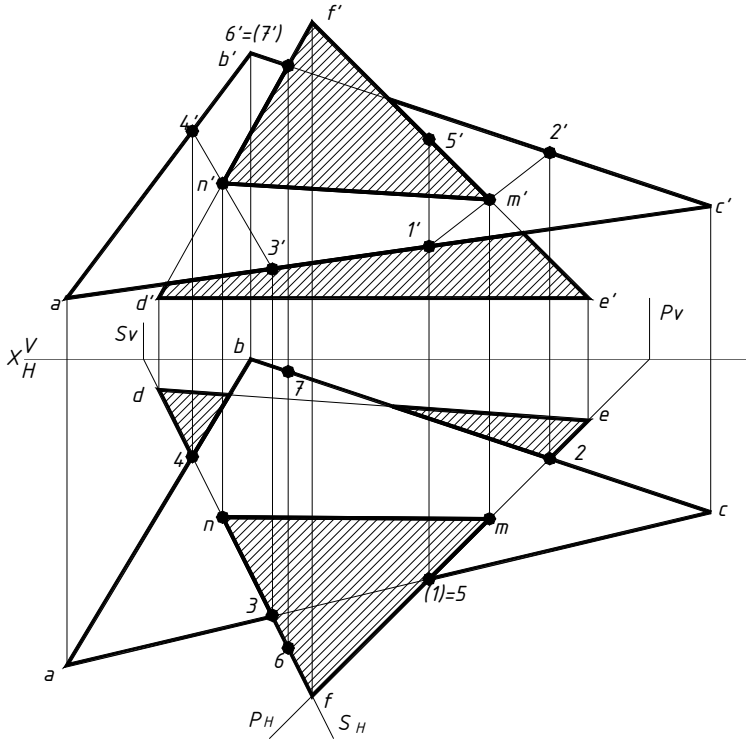


Рисунок 6.10 – Пересечение плоскостей общего положения, заданных треугольниками

2 Находим точку пересечения прямой DF с плоскостью треугольника ABC – точку N . Для этого:

- через прямую DF проводим горизонтально-проецирующую плоскость S ;
- находим линию пересечения плоскости S с треугольником ABC – линию 3-4. Горизонтальная проекция 3-4 лежит на следе S_H ;
- находим точку пересечения построенной линии $3'4'$ с прямой $d'f'$. Это будет проекция n' точки пересечения прямой DF с плоскостью треугольника ABC . Горизонтальная проекция n находится на горизонтальной проекции df .

Взаимную видимость треугольников находим с помощью метода конкурирующих точек. Для этого на горизонтальной плоскости проекций используются конкурирующие точки 1 и 5, а на фронтальной – точки $6'$ и $7'$.

Построение линии пересечения по точкам пресечения следов плоскостей

Линия пересечения плоскостей походит через точки, общие для обеих плоскостей. Такими точками являются точки пересечения одноименных следов этих плоскостей. Построение проекций таких точек, а следовательно, и линии пересечения плоскостей, заданных следами показано на рисунке 6.11.

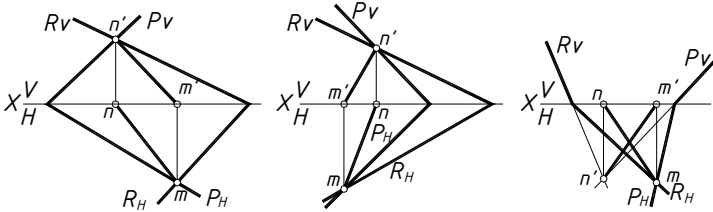


Рисунок 6.11 – Пересечение плоскостей общего положения, заданных следами

Построение линии пересечения плоскостей с помощью плоскостей-посредников

Для построения линии пересечения плоскостей иногда используют метод вспомогательных плоскостей-посредников.

Сущность метода показана на рисунке 6.12.

Чтобы найти линию пересечения двух плоскостей P и R :

1 Проводится вспомогательная плоскость S_1 .

2 Находим линии M_1N_1 и M_2N_2 пересечения заданных плоскостей P и R со вспомогательной плоскостью S_1 .

3 Находим точку K_1 пересечения линий M_1N_1 и M_2N_2 .

Эта точка принадлежит и плоскости P и плоскости R , следовательно, она лежит на линии пересечения этих плоскостей.

4 Введя вторую вспомогательную плоскость S_2 , аналогично описанному, находим вторую точку K_2 на линии пересечения P и R .

5 Через точки K_1 и K_2 проводится линия пересечения плоскостей P и R .

В качестве вспомогательных плоскостей удобнее всего брать плоскости уровня. Иногда берутся проецирующие плоскости.

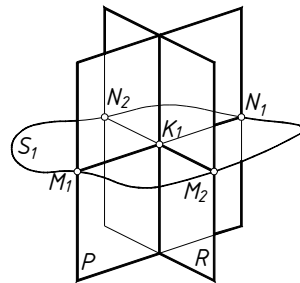


Рисунок 6.12 – Метод плоскостей-посредников

На рисунке 6.13 показано построение линии пересечения плоскостей, заданных следами. Для ее нахождения проводим горизонтальную плоскость S_1 . С плоскостями P и R она пересекается по горизонталям, проходящим соответственно через точки 1 и 2. Построив эти горизонтали, находим первую точку K_1 на линии пересечения плоскостей P и R . Аналогично, с помощью плоскости S_2 , находим точку K_2 .

Метод вспомогательных секущих плоскостей можно применять, если пересекающиеся плоскости заданы различными способами. На рисунке 6.14 одна из плоскостей задана следами (плоскость P), а другая треугольником ABC . Принцип построения линии пересечения аналогичен описанному выше.

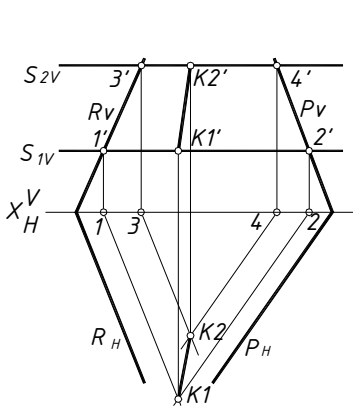


Рисунок 6.13 – Пересечение плоскостей, заданных следами

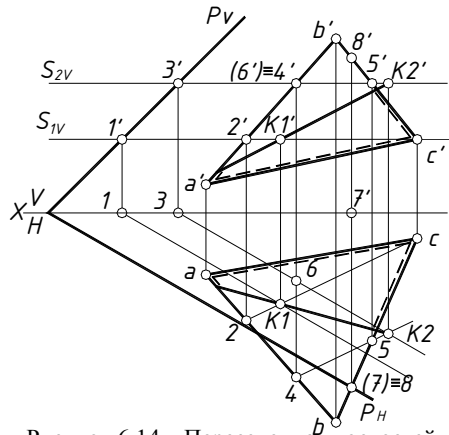


Рисунок 6.14 – Пересечение плоскостей, заданных различными способами

7 ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ (ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ)

7.1 Прямая, параллельная плоскости (пересекает плоскость в бесконечности)

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой в этой плоскости.

Через заданную точку в пространстве можно провести бесконечное множество прямых, параллельных заданной плоскости.

На рисунке 7.1 через точку M проведены прямые 2 и 3, параллельные плоскости ABC ($2 \parallel AB$, $3 \parallel BC$). Для прямой 4 соблюдено дополнительное условие: прямая 4 параллельна плоскости H , т.е. прямую 4 строим параллельно горизонтали плоскости треугольника ABC .

Если необходимо провести прямую, параллельную сразу двум пересекающимся плоскостям, то необходимо предварительно найти линию пересечения этих плоскостей, а затем параллельно ей провести искомую прямую (рисунок 7.2).

Обратная задача: через точку A провести плоскость параллельно заданной прямой 1 (рисунок 7.3).

Задача не имеет однозначного решения, так как через заданную точку можно провести бесконечное множество плоскостей, параллельных заданной прямой. На рисунке 7.3 представлено одно из возможных решений. Через точку A проводим прямую 2 параллельно прямой 1 и любую другую прямую (две пересекающиеся прямые задают плоскость).

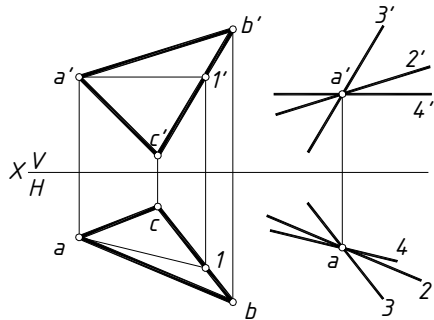


Рисунок 7.1 – Прямая, параллельная плоскости

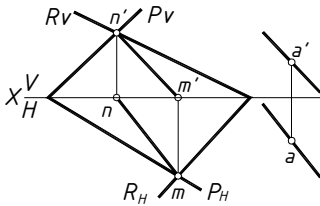


Рисунок 7.2 – Прямая, параллельная двум плоскостям

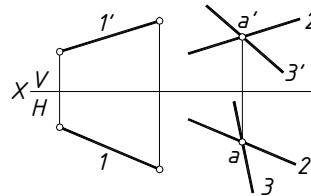


Рисунок 7.3 – Плоскость, параллельная прямой

7.2 Взаимно параллельные плоскости (пересекаются в бесконечности)

Если для любых двух пересекающихся прямых одной плоскости можно найти две параллельные прямые в другой плоскости, то эти плоскости взаимно параллельны.

Из этого следует, что одноименные следы параллельных плоскостей параллельны между собой.

Задача: Через точку A провести плоскость P параллельно заданной плоскости BCD (рисунок 7.4).

Через точку A проводим две пересекающиеся прямые 1 и 2 параллельно сторонам BC и CD соответственно.

Задача: Через точку A провести плоскость P параллельно плоскости R , заданной следами (рисунок 7.5).

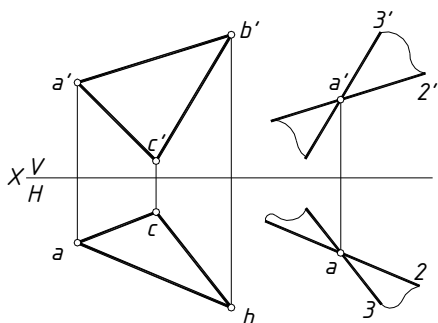


Рисунок 7.4 – Взаимно параллельные плоскости

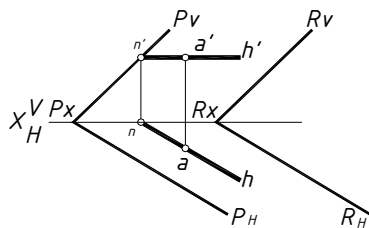


Рисунок 7.5 – Взаимно параллельные плоскости, заданные следами

Следы плоскости P параллельны следам плоскости R , следовательно, направление их известно. Для нахождения точек, через которые они проходят, воспользуемся известным свойством: если прямая принадлежит плоскости, то ее следы лежат на одноименных следах этой плоскости. Поэтому достаточно через точку A провести прямую, заведомо параллельную плоскости R . Такой прямой может быть горизонталь (или фронталь). В нашем примере проведена горизонталь с проекциями h и h' , причем $h' \parallel R_H$. Так как точка n является фронтальным следом этой горизонтали, то через n' пройдет след $P_V \parallel R_V$, а через точку P_X – след $P_H \parallel R_H$. Плоскости P и R взаимно параллельны, так как их одноименные пересекающиеся следы взаимно параллельны.

7.3 Прямая, перпендикулярная плоскости

Прежде чем построить прямую, перпендикулярную плоскости, рассмотрим теорему о проецировании прямого угла.

Теорема. Прямой угол проецируется на плоскость проекций в натуральную величину (без искажения), если одна из его сторон параллельна этой плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна к этой плоскости

На рисунке 7.6 угол между прямыми AB и CD прямой, так как в одном случае одна из прямых – горизонталь (прямой угол не искажается на горизонтальной проекции), а во втором – обе прямые – фронталы (прямой угол не искажается на фронтальной проекции).

На рисунке 7.7 несмотря на то, что проекции прямых AB и CD расположены под прямым углом друг к другу, сами прямые не перпендикулярны между собой, так как обе являются прямыми общего положения и угол между ними искажается на обеих проекциях.

Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. Из свойства проецирования прямого угла получаем: у перпендикуляра к плоскости его горизон-

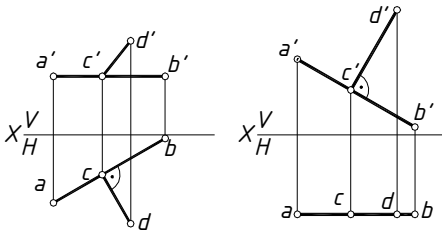


Рисунок 7.6 – Взаимно перпендикулярные прямые

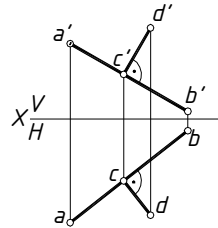


Рисунок 7.7 – Прямые не перпендикулярны между собой

тальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали, фронтальная проекция перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали, профильная проекция перпендикулярна профильной проекции профильной прямой этой плоскости.

Задача: Через точку K провести прямую, перпендикулярную плоскости треугольника ABC (рисунок 7.8).

Проекции перпендикуляра должны располагаться под прямым углом к проекциям горизонтали и фронтали, поэтому:

- а) строим горизонталь $A1$ и фронталь $B2$;
- б) из точки K проводим прямую так, чтобы ее горизонтальная проекция была перпендикулярна горизонтали ($a1$), а фронтальная – перпендикулярна фронтали $b'2'$.

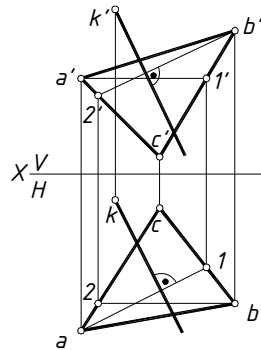


Рисунок 7.8 – Перпендикуляр к плоскости, заданной треугольником

Очевидно, в случае, когда плоскость задана следами, прямая перпендикулярна к плоскости, если горизонтальная проекция этой прямой перпендикулярна к горизонтальному следу плоскости, а фронтальная проекция перпендикулярна к фронтальному следу плоскости.

На рисунке 7.9 показано построение перпендикуляра к плоскостям различного положения, заданным следами.

Для профильно-проецирующей плоскости надо рассматривать взаимное положение профильной проекции прямой и профильного следа данной

плоскости и лишь после этого установить, будут ли перпендикулярны между собой данная прямая и плоскость.

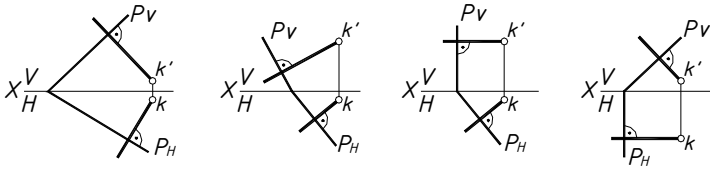


Рисунок 7.9 – Перпендикуляр к плоскости, заданной следами

7.4 Взаимно перпендикулярные плоскости

Построение плоскости Q , перпендикулярной плоскости P , может быть произведено двумя способами:

- а) плоскость Q проводится через прямую, перпендикулярную плоскости P ;
- б) плоскость Q проводится перпендикулярно к прямой, лежащей в плоскости P или параллельной этой плоскости.

Через точку пространства можно провести бесконечное множество плоскостей, перпендикулярных данной.

Для получения единственного решения требуются дополнительные условия.

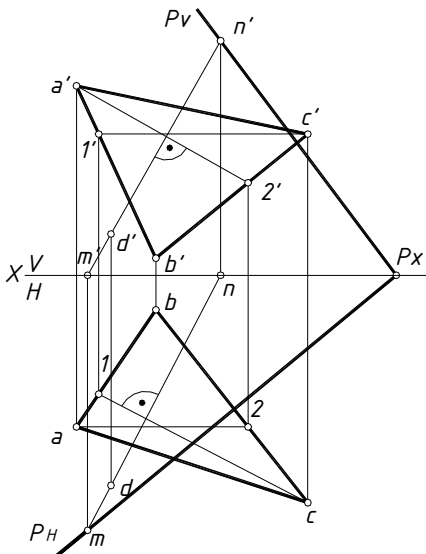


Рисунок 7.10 – Взаимно перпендикулярные плоскости

Задача: Построить следами плоскость P перпендикулярно плоскости треугольника ABC , и проходящую через точку D (рисунок 7.10).

Задача имеет множество решений, поэтому дополнительно задана точка схода следов P_x .

Через точку D проводим прямую перпендикулярно плоскости треугольника ABC (см. подразд. 7.3).

Через построенную прямую проводим плоскость P . Для этого:

- а) находим следы M и N прямой;
- б) через соответствующие проекции следов и точку P_x проводим следы плоскости P , перпендикулярной плоскости треугольника ABC .

Как видно из решения, следы плоскости неперпендикулярны про-

екциям горизонтали и фронтоли. Следовательно, одноименные следы взаимно перпендикулярных плоскостей не перпендикулярны друг другу.

На рисунке 7.11 в обоих случаях через точку K и точку схода следов R_x проведена плоскость R , перпендикулярная плоскости P . Хорошо видно, что, не зависимо от положения точки R_x , одноименные следы перпендикулярных плоскостей не перпендикулярны между собой.

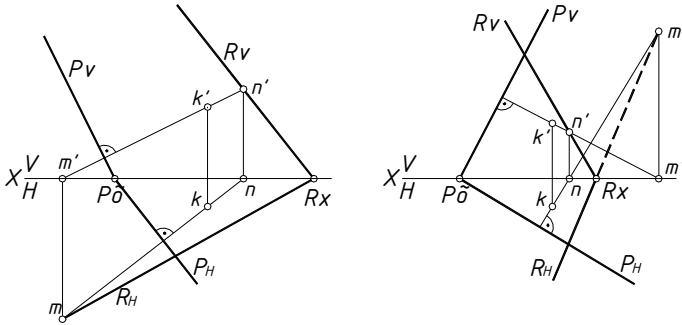


Рисунок 7.11 – Взаимно перпендикулярные плоскости, заданные следами

На рисунке 7.12 показаны случаи перпендикулярных плоскостей, когда одна или обе плоскости занимают частное положение.

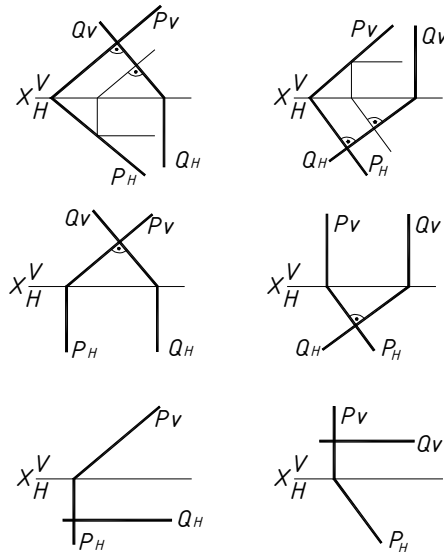


Рисунок 7.12 – Взаимно перпендикулярные плоскости

О Г Л А В Л Е Н И Е

1	Предмет и методы начертательной геометрии	3
2	Две задачи начертательной геометрии: позиционная, метрическая	4
3	Позиционные задачи	4
4	Задачи на принадлежность	5
4.1	Принадлежность точки заданной линии	5
4.2	Принадлежность прямой заданной плоскости	5
4.3	Принадлежность точки плоскости	8
5	Взаимное положение прямых	9
5.1	Параллельные прямые	9
5.2	Пересекающиеся прямые	9
5.3	Скрещивающиеся прямые	10
6	Взаимное пересечение геометрических фигур	11
6.1	Пересечение прямой и плоскости с проецирующей плоскостью	11
6.1.1	Пересечение прямой с проецирующей плоскостью	11
6.1.2	Пересечение плоскости с проецирующей плоскостью	12
6.2	Пересечение прямой и плоскости с плоскостью общего положения	13
6.2.1	Пересечение прямой с плоскостью общего положения	13
6.2.2	Пересечение плоскостей общего положения	15
7	Взаимное положение прямых и плоскостей (частные случаи пересечения)	18
7.1	Прямая, параллельная плоскости (пересекает плоскость в бесконечности)	18
7.2	Взаимно параллельные плоскости (пересекаются в бесконечности)	19
7.3	Прямая, перпендикулярная плоскости	20
7.4	Взаимно перпендикулярные плоскости	22

Учебное издание

ПОДГОРНОВА Галина Тадеушевна, КАЛАШНИК Елена Геннадиевна

Начертательная геометрия. Позиционные задачи

Часть 1

Точка, прямая, плоскость

Учебно-методическое пособие

Редактор Т. М. Маруняк. Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 30.06.2017 г. Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 1,40. Уч.-изд. л. 1,26. Тираж 250 экз. Зак. № Изд. № 121.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель