УДК 531.8

А. В. ЛОКТИОНОВ, А. А. СИДОРОВИЧ
Витебский государственный технологический университет, Витебск, Беларусь

ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА МЕТОДОМ ДАЛАМБЕРА – ЛАГРАНЖА

Выполнено сравнение способов получения дифференциальных уравнений малых колебаний эллиптического маятника с помощью уравнений Лагранжа II рода и методом Даламбера – Лагранжа. Отмечается, что уравнение динамики целесообразно использовать при составлении дифференциальных уравнений механической системы с двумя и более степенями свободы.

Ключевые слова: эллиптический маятник, метод Даламбера – Лагранжа, дифференциальные уравнения.

Введение. В работах [1, 2] получено дифференциальное уравнение колебаний эллиптического маятника, состоящего из ползуна, шарика и стержня, в горизонтальной плоскости. Для решения использованы уравнение Лагранжа II рода. Продемонстрировано, что при исследовании следует рассматривать сложное движение эллиптического маятника. В работе [3] установлено максимальное давление ползуна на горизонтальную плоскость в зависимости от угла отклонения маятника и рассмотрена кинетостатическая методика составления уравнений движения маятника. Для получения уравнения малых колебаний маятника в вертикальной плоскости в работе [4] составлены уравнения Лагранжа II рода. Принято, что в начальный момент система находилась в покое, угол отклонения маятника не равен нулю. В работе [5] получены уравнения свободных колебаний маятника и закон движения ползуна в зависимости от времени при заданной начальной угловой скорости движения маятника. При кинетостатическом методе составления уравнений движения в работе [6] принцип Даламбера используется применительно только к маятнику, а для расчета динамической реакции направляющих ползуна использована теорема о движении центра масс системы. В работе [7] предложен квазистатический метод получения уравнения малых колебаний эллиптического маятника, который не требует расчета динамической реакции ползуна с использованием дифференциального уравнения движения центра масс системы по вертикали. Для упрощения расчета реакции составлено условие равновесия в виде суммы проекций приложенных к ползуну сил на ось, перпендикулярную стержню маятника. Получены уравнение свободных колебаний маятника и закон движения ползуна.

В представленной работе выполнено сравнение выводов динамических уравнений движения эллиптического маятника с использованием уравнений

Лагранжа II рода и принципа Даламбера – Лагранжа (который также называют общим уравнением динамики) [8].

Получение дифференциальных уравнений движения маятника и ползуна с использованием уравнений Лагранжа II рода. Рассмотрим малые колебания эллиптического маятника (рисунок 1), состоящего из ползуна весом P_1 и шарика весом P_2, соединенного с ползуном стержнем AB длины l. Стержень вращается вокруг оси A, связанной с ползуном и перпендикулярной плоскости рисунка.

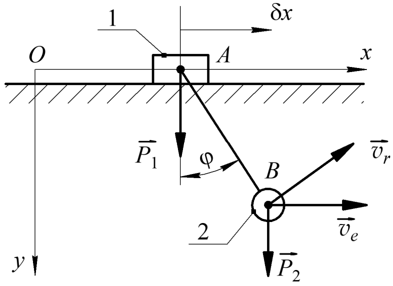

Рисунок 1 – Расчётная схема эллиптического маятника

Выберем в качестве обобщенных координат перемещение ползуна по горизонтальной плоскости $(q_1 = x)$ и угол поворота стержня AB вокруг оси A $(q_2 = \varphi)$.

Так как действующие на систему силы потенциальные, то уравнения Лагранжа представим в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0; \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Определим кинетическую энергию системы T как сумму кинетических энергий ползуна *1* $T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{P_1}{2g}\dot{x}^2$ и маятника $T_2 = \frac{m_2}{2}v_2^2$ (v_1 и v_2 – скорости ползуна и маятника соответственно, g – ускорение свободного падения).

Так как маятник совершает сложное движение, то $\vec{v}_2 = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, причем переносная скорость $\vec{v}_e$ направлена параллельно оси x, при этом $v_e = \dot{x}$, а вектор $\vec{v}_r$ относительной скорости перпендикулярен AB, ее модуль $v_r = l\dot{\varphi}$. Точки над переменными соответствуют производным по времени.

Тогда абсолютная скорость маятника

$$v_2^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\varphi = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi.$$

Соответственно его кинетическая энергия

$$T_2 = \frac{P_2}{2g}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right).$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{P_2}{2g}\dot{x}^2 + \frac{P_1}{2g}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right) = \frac{P_1 + P_2}{2g}\dot{x}^2 + \frac{P_2}{2g}l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{P_2}{g}l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi.$$

Ее потенциальная энергия

$$\Pi = P_2 l\left(1 - \cos\varphi\right).$$

Определим члены уравнений Лагранжа II рода

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P_1 + P_2}{g}\dot{x} + \frac{P_2}{g}l\dot{\varphi}\cos\varphi;\quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0;\quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{P_1 + P_2}{g}\dot{x} + \frac{P_2}{g}l\dot{\varphi}\cos\varphi\right);\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P_2}{g}l^2\dot{\varphi} + \frac{P_2}{g}l\dot{x}\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{P_2}{g}l\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi;\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = P_2 l\sin\varphi;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{P_2 l^2}{g}\ddot{\varphi} + \frac{P_2}{g}l\ddot{x}\cos\varphi - \frac{P_2}{g}l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Подставляя их в уравнения (1), получим дифференциальные уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P_1 + P_2}{g}\dot{x} + \frac{P_2}{g}l\dot{\varphi}\cos\varphi\right) = 0,$$

$$\frac{P_2}{g}l^2\ddot{\varphi} + \frac{P_2}{g}l\ddot{x}\cos\varphi - \frac{P_2}{g}l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{P_2}{g}l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + P_2 l\sin\varphi = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P_1 + P_2}{g}\dot{x} + \frac{P_2}{g}l\dot{\varphi}\cos\varphi\right) = 0,$$

$$\frac{P_2}{g}l\ddot{x}\cos\varphi + \frac{P_2}{g}l^2\ddot{\varphi} + P_2 l\sin\varphi = 0.$$

Для случая малых колебаний в этих уравнениях положим, что $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда дифференциальные уравнения движения ползуна и маятника примут вид

$$\frac{P_1 + P_2}{g}\ddot{x} + \frac{P_2}{g}l\ddot{\varphi} = 0;$$

$$\frac{P_2}{g}l\ddot{x} + \frac{P_2}{g}l^2\ddot{\varphi} + P_2 l\varphi = 0. \qquad (3)$$

Составление дифференциальных уравнений движения эллиптического маятника методом Даламбера – Лагранжа. Для получения уравнений движения ползуна и маятника к активным силам тяжести $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ присоединим силы инерции ползуна A в поступательном движении и маятника B, учитывая его сложное движение (рисунок 2).

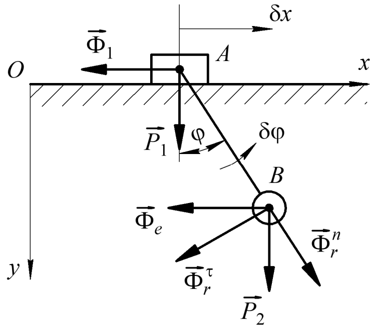

Рисунок 2 – Схема сил, действующих на эллиптический маятник

Силы инерции ползуна A прямо пропорциональна его ускорению a_1:

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = \frac{P_1}{g}\ddot{x}.$$

Сила инерции маятника B

$$\overline{\Phi}_B = -m_2\vec{a}_B = -\frac{P_2}{g}(\vec{a}_e + \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_k),$$

где $\vec{a}_e, \vec{a}_r^{\tau}, \vec{a}_r^{n}, \vec{a}_k$ – соответственно ускорения: переносное, относительные касательное и нормальное, Кориолиса.

Значение переносной силы инерции

$$\Phi_e = \frac{P_2}{g}a_e = \frac{P_2}{g}\ddot{x}.$$

Касательная составляющая силы инерции в относительном движении

$$\Phi_r^{\tau} = m_2 a_r^{\tau} = \frac{P_2}{g}l\ddot{\varphi}.$$

Нормальная составляющая силы инерции маятника B в относительном движении

$$\Phi_r^{n} = m_2 a_r^{n} = \frac{P_2}{g}l\dot{\varphi}^2.$$

Переносное движение поступательное, поэтому ускорение Кориолиса равно нулю.

Как и в решении первым способом, независимыми координатами, определяющими положение данной системы, являются перемещение x ползуна A и угол поворота φ. Сообщим системе два возможных перемещения: δx и $\delta\varphi$, направленных в сторону возрастания координат x и φ.

Составим дифференциальное уравнение движения системы, соответствующее такому приращению координаты x, что $\delta x \neq 0$, $\delta\varphi = 0$.

Получим общее уравнение динамики

$$\left(-\Phi_1-\Phi_e-\Phi_r^\tau\cos\varphi+\Phi_r^n\sin\varphi\right)\delta x=0.$$

Так как $\delta x\neq 0,$ должно быть равным нулю выражение, стоящее в скобках. Подставив значения сил инерции, получим

$$-\frac{P_1+P_2}{g}\ddot{x}-\frac{P_2}{l}\ddot{\varphi}\cos\varphi+\frac{P_2}{g}l\dot{\varphi}^2\sin\varphi=0. \tag{4}$$

Теперь составим дифференциальное уравнение движения системы, соответствующее приращению координаты φ, при котором $\delta\varphi\neq 0,$ $\delta x=0.$

Тогда общее уравнение динамики примет вид

$$-\left(\Phi_e l\cos\varphi+\Phi_r^\tau l+P_2 l\sin\varphi\right)\delta\varphi=0.$$

Полагая в этом выражении $\delta\varphi\neq 0$, подставляя значения сил инерции и приравняв к нулю выражение, стоящее в скобках, получим

$$\frac{P_2}{g}l\ddot{x}\cos\varphi-\frac{P_2}{l}l^2\ddot{\varphi}+P_2 l\sin\varphi=0. \tag{5}$$

Считая колебания малыми, полагаем, что $\cos\varphi\approx 1,$ $\sin\varphi\approx\varphi.$ Пренебрегая величинами второго порядка малости, получаем, что уравнения (4) и (5) принимают вид

$$\frac{P_1+P_2}{g}\ddot{x}+\frac{P_2}{l}\ddot{\varphi}=0,$$

$$\frac{P_2}{g}l\ddot{x}+\frac{P_2}{g}l^2\ddot{\varphi}+P_2 l\varphi=0.$$

Таким образом полученная методом Даламбера – Лагранжа система дифференциальных уравнений полностью соответствует системе (3). Имея эти уравнения и задавая начальные условия движения системы, можно получить уравнения, описывающие малые колебания ползуна и стержня с грузом.

Выводы.

Проанализированы аналитические методы расчёта малых колебаний маятника. Предложен вариант решения задачи о колебаниях эллиптического маятника методом Даламбера – Лагранжа. Получены дифференциальные уравнения движения ползуна и стержня маятника с помощью уравнений Лагранжа II рода и общего уравнения динамики. Выполненный анализ показывает, что метод Даламбера – Лагранжа (общее уравнение динамики) удобно использовать при расчетах механических систем с двумя и более степенями свободы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Локтионов, А. В**. Расчет уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – № 26. – С. 138–143.

2 **Локтионов, А. В.** Расчет уравнения малых колебаний при сложном движении эллиптического маятника / А. В. Локтионов // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – № 29. – С. 290–293.

3 **Москалёв, С. А.** Методы расчета малых колебаний эллиптического маятника / С. А. Москалёв, А. В. Локтионов // Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности : материалы междунар. науч.-техн. конф. молодых ученых / М-во образования Респ. Беларусь, М-во образования и науки Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2013. – С. 40.

4 **Локтионов, А. В.** Решение уравнения малых колебаний эллиптического маятника / А. В. Локтионов // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 224–227.

5 **Локтионов, А. В.** Расчет уравнения малых колебаний с учетом сил тяжести и заданной начальной угловой скорости движения маятника / А. В. Локтионов // Горная механика и машиностроение. – 2018. – № 1. – С. 43–48.

6 **Локтионов, А. В.** Кинетостатический метод расчета уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника / А. В. Локтионов // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – № 30. – С. 226–229.

7 **Локтионов, А. В.** Квазистатический метод расчёта уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника / А. В. Локтионов // Горная механика и машиностроение. – 2018. – № 2. – С. 43–48.

8 **Локтионов, А. В.** Аналитические методы расчета малых колебаний маятника / А. В. Локтионов, С. В. Рубик // Современные проблемы машиноведения: тезисы докл. XI Междунар. науч.-техн. конф. (науч. чтения, посвящ. П. О. Сухому). – Гомель : ГГТУ, 2016. – С. 215.

A. V. LOKTIONOV, A. A. SIDOROVICH
Vitebsk State Technological University, Vitebsk, Belarus

DERIVATION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION FOR AN ELLIPTIC PENDULUM SMALL OSCILLATIONS BY THE D'ALEMBERT-LAGRANGE METHOD

Comparison of methods for obtaining differential equations for the elliptical pendulum small oscillations using the Lagrange equations of the second kind and the d'Alembert-Lagrange method is performed. It is noted that the dynamics equation is advisable to be used when compiling differential equations of a mechanical system with two or more degrees of freedom.

Keywords: elliptic pendulum, d'Alembert-Lagrange method, differential equations.

Получено 05.06.2020