

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Рощанский, В. И.** Явление антирезонанса при произвольном силовом периодическом возбуждении / *В. И. Рощанский* // Динамика и прочность судовых конструкций: сб. науч. тр. / Л.: ЛКИ, 1986. – С. 116–121.

2 **Рябой, В. М.** О многокаскадной виброизоляции и динамическом гашении колебаний / *В. М. Рябой* // Колебания и виброакустическая активность машин и конструкций. – М.: Наука, 1986. – С. 11–16.

3 **Гринёв, В. Б.** Оптимизация стержней по спектру собственных значений / *В. Б. Гринёв, А. П. Филиппов*. – Киев: Наук. думка, 1979. – 211 с.

4 **Уилкинсон, Дж. Х.** Алгебраическая проблема собственных значений / *Дж. Х. Уилкинсон*. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

5 **Гур-Мильнер, С. И.** Оценки достоверности математических моделей упругих тел и их применение в численных расчётах / *С. И. Гур-Мильнер, М. У. Исмагамбетов*. – Астана: ЕНУ им. Л. Н. Гумилёва, 2005. – 268 с.

Получено 12.04.2006

**ISBN 978-985-468-276-1. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 1. Гомель, 2007**

УДК 550.347.097.34

Д. А. ЧЕРНОУС

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ МЫШЕЧНОГО МОНОВОЛОКНА

Предложена новая модель мышечного моноволокна в виде тонкого вязкоупругого стержня. Разработана методика описания механического поведения данной модели при активизации сократительной функции мышцы. В режиме свободного сокращения получена временная зависимость скорости изменения длины моделируемого моноволокна. Установлено также распределение осевого напряжения по длине моноволокна на различных стадиях сокращения.

Введение. В настоящее время интенсивно развивается раздел механики, в котором изучается механическое движение и механические свойства живых тканей, органов и организма в целом. Данный раздел механики называют биомеханикой. Одной из основных задач биомеханики является описание и прогнозирование напряженно-деформированного состояния мышц. Мышцы в организме человека существенно различаются по форме, структуре, свойствам и функциям. В частности, все движения человека обеспечиваются скелетными мышцами [1]. На рисунке 1 представлена общая структура скелетной мышцы. Основным сократительным элементом мышцы является саркомер, образованный миозиновыми и актиновыми нитями и имеющий длину d порядка 2,2 мкм.

При активизации сократительной функции мышцы взаимодействие между нитями саркомера посредством поперечных мостиков приводит к уменьшению длины саркомера. Взаимодействие нитей саркомера описывается на основе гипотезы «скользящих нитей», которую можно сформулировать в виде дифференциальных уравнений [2, 3]:

$$\dot{n} = k_1(\alpha - n - m) - \frac{v}{\delta} n; \quad \dot{m} = \frac{v}{\delta} n - k_2 m, \quad (1)$$

где k_1, k_2 – временные константы образования и разрыва мостика соответственно; α – общее число мостиков на половине длины саркомера; n, m – количество «тянущих» и «тормозящих» поперечных мостиков соответственно; v – скорость относительного скольжения нитей; δ – расстояние между положениями равновесия тянущего и тормозящего мостика.

В уравнениях (1) точкой над символом обозначена производная по времени от соответствующей величины.

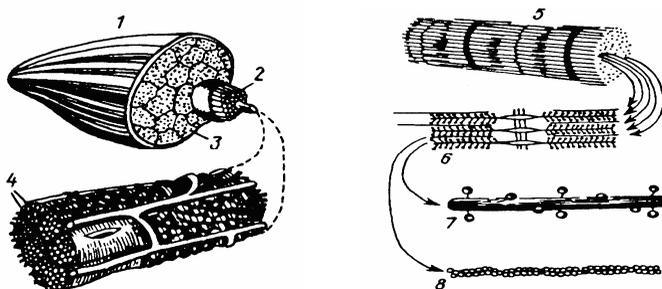


Рисунок 1 – Структура скелетной мышцы:

- 1 – мышца; 2 – пучок мышечных волокон; 3 – фасция; 4 – мышечное волокно;
5 – моноволокну; 6 – саркомер; 7 – миозиновая нить; 8 – актиновая нить

Гипотеза скользящих нитей широко используется для описания механического поведения мышц на микроуровне [4, 5]. Однако в настоящее время отсутствует достаточно подробная, непротиворечивая и общепризнанная методика описания деформирования мышцы в целом. Данное обстоятельство обусловлено сложностью внутренней структуры исследуемого объекта и разнообразием физико-химических процессов, происходящих в мышце. В связи с этим, наиболее распространенный подход к прогнозированию механических параметров функционирования мышц заключается в построении и использовании феноменологических моделей. Феноменологическая модель мышцы представляет собой систему упругих, вязких, инерционных и сократительных элементов [6, 7]. Использование феноменологической модели позволяет определить временные зависимости длины мышцы и силы, генерируемой мышцей. Однако феноменологические модели имеют ряд ограничений. В рамках

данной модели мышца рассматривается как одномерный объект; отсутствует анализ распределения деформаций и напряжений по длине мышцы; не устанавливается связи между параметрами структуры мышечной ткани и механическими характеристиками мышцы. Отмеченные недостатки феноменологических моделей могут быть устранены при описании поведения мышцы в терминах механики деформируемого твердого тела. Сделанные ранее попытки такого описания [8, 9] не позволили получить приемлемых оценок основных параметров напряженно-деформированного состояния мышечной ткани. В качестве основных причин неадекватности известных методик можно отметить следующее:

1 Для описания сократительной функции в работах [8, 9] вводились различные искусственные допущения. Более целесообразным представляется при описании процесса активизации сократительной функции использовать соотношения гипотезы скользящих нитей (1).

2 Скелетная мышца (см. рисунок 1) образована множеством скрученных непрямолинейных моноволокон. Данное обстоятельство не позволяет рассматривать мышцу как однородное тело, а его механическое поведение как линейно упругое. При этом для перехода от микроуровня (анализа единичного саркомера) к описанию мышцы в целом необходимо рассмотреть промежуточный структурный уровень – мышечное моноволокно, образованное последовательно соединенными саркомерами.

Таким образом, целью настоящей работы является построение модели мышечного моноволоконка, которая позволит описать его механическое поведение как деформируемого твердого тела с использованием соотношений гипотезы скользящих нитей.

Описание модели. Мышечное волокно будем рассматривать как однородный вязкоупругий цилиндр с площадью поперечного сечения S и длиной L . Характерные режимы нагружения мышц и размеры моноволокон ($L = 1 \dots 10$ см; $S = 10^3 \dots 10^4$ мкм²) [1] позволяют при описании напряженно-деформированного состояния данного объекта учитывать только осевое напряжение σ_{xx} и продольную деформацию ϵ_{xx} . Ось x направлена вдоль моноволоконка. В пассивном состоянии мышца ведет себя как традиционный высокомолекулярный материал [3]. Следовательно, связь величин σ_{xx} и ϵ_{xx} можно выразить дифференциальным уравнением, используемым для описания деформирования полимеров [10],

$$\dot{\sigma}_{xx} + \frac{1}{\tau} \sigma_{xx} = E \dot{\epsilon}_{xx} + \frac{H}{\tau} \epsilon_{xx}, \quad (2)$$

где E , H – мгновенный и длительный модули упругости материала соответственно; τ – время релаксации.

Для упрощения дальнейших выкладок примем, что в пределах одного саркомера напряжение и деформация не изменяются. Тогда скорость относи-

тельного скольжения нитей саркомера при активизации мышцы v можно выразить через скорость изменения продольной деформации $v = -\dot{\epsilon}_{xx}d/2$. Тогда соотношения (1) примут вид:

$$\dot{n} = k_1(\alpha - n - m) + \frac{d}{2\delta} \dot{\epsilon}_{xx}n; \quad \dot{m} = -\frac{d}{2\delta} \dot{\epsilon}_{xx}n - k_2m. \quad (3)$$

В активном состоянии мышцы напряжение в пределах саркомера определяется не только его деформацией, но и силами, которые генерируются поперечными актомиозиновыми мостиками. Следовательно, при активизации сократительной функции осевое напряжение в (2) следует заменить выражением:

$$\sigma_{xx} \rightarrow \sigma - \frac{f}{S}(n - m),$$

где f – сила, генерируемая одним поперечным мостиком; σ – осевое напряжение, определяющееся деформированием материала.

Динамическое уравнение для бесконечно малого отрезка рассматриваемой модели моноволокна имеет вид

$$\sigma' = \rho \ddot{u}, \quad (4)$$

где $\sigma' = \frac{d\sigma}{dx}$ производная от напряжения по деформации; u – осевое перемещение точек моноволокна; ρ – плотность материала моноволокна.

При выводе (4) учтено, что силы, действующие со стороны поперечных мостиков, в пределах саркомера уравниваются. Используя геометрическое уравнение связи деформации и перемещения ($\epsilon_{xx} = u'$), соотношения (2–4) можно записать в виде системы четырех дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \dot{n} &= k_1(\alpha - n - m) + n \frac{d}{2\delta} \dot{u}'; & \dot{m} &= -k_2m - n \frac{d}{2\delta} \dot{u}'; & \ddot{u} &= \frac{\sigma'}{\rho}; \\ \dot{\sigma} &= -\frac{1}{\tau} \sigma + E \dot{u}' + \frac{H}{\tau} u' + \frac{f}{S} \left[k_1(\alpha - n - m) + k_2m + n \frac{d}{\delta} \dot{u}' + \frac{1}{\tau}(n - m) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) позволяет определить четыре функции координаты x и времени t : осевое напряжение σ , смещение u , количество тянущих n и тормозящих m поперечных мостиков. Численное решение системы (5) было реализовано в программном пакете MathCAD 7.0.

Пример расчета. В качестве примера использования разработанной математической модели мышечного моноволокна (5) рассмотрим свободное сокращение моноволокна длиной $L = 7$ см, площадью поперечного сечения $S = 5 \cdot 10^{-9}$ м². Характерное значение мгновенного модуля упругости мышеч-

ной ткани [1] $E = 10^5$ Па. Согласно данным работы [11] время релаксации мышечной ткани можно выбрать $\tau = 50$ мс. Для высокомолекулярных материалов с ярко выраженными реономными свойствами $H = 0,1E$ [10]. Параметры актомиозинового взаимодействия выберем следующие [5]: $\alpha = 7,91 \cdot 10^9$; $k_1 = 0,7 \text{ с}^{-1}$; $k_2 = 682 \text{ с}^{-1}$; $f = 3 \cdot 10^{-12} \text{ Н}$; $\delta = 8 \cdot 10^{-9} \text{ м}$. При свободном сокращении моноволокна один его конец жестко закреплен, а второй — свободен. Граничные условия при этом имеют вид: $u(0,t) = \dot{u}(0,t) = \sigma(L,t) = 0$. В начальный момент времени $u(x,0) = \dot{u}(x,0) = \sigma(x,0) = n(x,0) = m(x,0) = 0$.

На рисунке 2 представлена зависимость от времени скорости сокращения моноволокна $v_L(t) = -\dot{u}(L,t)$ для рассматриваемого режима нагружения. Можно отметить, что при активизации сократительной функции происходит быстрый рост скорости сокращения от 0 до некоторого максимального значения. Время, необходимое для достижения максимальной скорости сокращения, не превышает 5 мс. При дальнейшем сокращении модуль скорости перемещения свободного конца моноволокна снижается и экспоненциально стремится к некоторому постоянному значению. При экспериментальных исследованиях деформирования мышц также обнаруживается участок равномерного (с постоянной скоростью) изотонического сокращения [12]. Данное обстоятельство свидетельствует об адекватности предложенной математической модели (5).

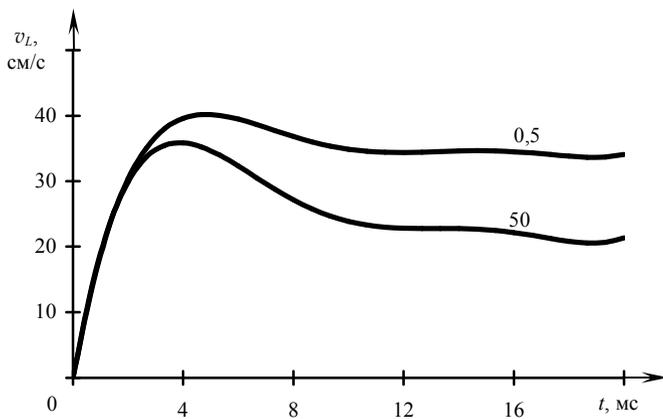


Рисунок 2 – Временная зависимость скорости сокращения длины моноволокна. Цифры у кривых соответствуют времени релаксации τ , мс

Решение системы (5) позволяет изучить влияние на скорость сокращения моноволокна вязкоупругих свойств материала мышечной ткани. В частности, для тканей с большим временем релаксации τ установившаяся скорость сокращения меньше (см. рисунок 2).

При описании механического поведения мышечного моноволокна в терминах механики деформируемого твердого тела есть возможность не только определять изменение длины исследуемого объекта, но и анализировать распределение параметров напряженно-деформированного состояния (σ и ϵ) по длине волокна. Так на рисунке 3 представлена зависимость от координаты x осевого напряжения σ на различных стадиях сокращения. При резком росте скорости сокращения ($t = 1$ мс) напряжение в точке крепления моноволокна ($x = 0$) значительно превосходит напряжение вблизи свободного края ($x = L$). При достижении скоростью $v(t)$ максимального значения ($t = 4,2$ мс) напряжение в точке крепления равно нулю. Однако при этом по длине моноволокна наблюдаются отклонения напряжения от граничных значений

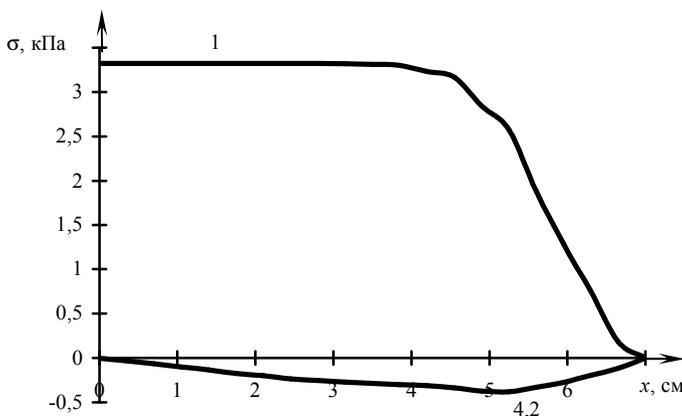


Рисунок 3 – Распределение осевого напряжения по длине моноволокна.
Цифры у кривых соответствуют моменту времени в миллисекундах

Заключение. В результате использования разработанной математической модели механического поведения мышечного моноволокна при активизации сократительной функции установлено, что скорость установившегося сокращения моноволокна во многом определяется вязкостью материала мышечной ткани. Также обнаружено, что при отсутствии внешней нагрузки в процессе сокращения в моноволокне возникают осевые напряжения. Характер распределения напряжения по длине моноволокна зависит от времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Дубровский, В.И. Биомеханика: учебник для средних и высших учебных заведений / В.И. Дубровский, В.Н. Федорова. – М.: «ВЛАДОС-ПРЕСС», 2003. – 672 с.
- 2 Wong, A.Y.K. Mechanics of cardiac muscle, based on Huxley's model: mathematical simulation of isometric contraction / A. Y. K. Wong // Journal of Biomechanics. – 1971. – Vol. 4, № 6. – P. 529–540.

3 **Дещеревский, В.И.** Математические модели мышечного сокращения / В.И. Дещеревский. – М.: «Наука», 1977. – 160 с.

4 **Шестаков, Д.А.** Математическая модель механических свойств волокон скелетной мышцы с учетом растяжимости актиновых нитей / Д. А. Шестаков, А. К. Цатурян // Биофизика. – 1998. – Т. 43, № 2. – С. 329–334.

5 **Лавендел, Э. Э.** Моделирование процесса сокращения сердечной мышцы / Э. Э. Лавендел, Л. И. Мачабели, И. О. Типанс // Механика композитных материалов. – 1981. – № 6. – С. 1088–1092.

6 **Черноус, Д. А.** Моделирование сократительной активности мышечной ткани / Д. А. Черноус, С. В. Шилько // Российский журнал биомеханики. – 2006. – Т. 10, № 3. – С. 53–62.

7 **Чигарев, А. В.** Биомеханика: учебное пособие / А. В. Чигарев, Г. И. Михасев. – Минск: УП «Технопринт», 2004. – 306 с.

8 **Пальцев, Е. И.** Теоретическое изучение некоторых особенностей динамики поведения скелетной мышцы как одномерной вязкоупругой среды / Е. И. Пальцев // Механика полимеров. – 1975. – № 4. – С. 618–625.

9 **Blemker, S. S.** A 3D model of muscle reveals the causes of nonuniform strains in the biceps brachii / S. S. Blemker, P. M. Pinsky, S. L. Delp // Journal of Biomechanics – 2005. – V. 38, № 4. – С. 657–665.

10 **Ferry, J. D.** Viscoelastic properties of polymers / J. D. Ferry. – New York-London, 1961. – 530 p.

11 **Левик, Ю. С.** Влияние последовательности активирующих импульсов на сократительные свойства мышцы / Ю. С. Левик // Механика полимеров. – 1975. – № 4. – С. 613–617.

12 **Hill, A.V.** First and last experiments in muscle mechanics / A. V. Hill. – Cambridge, 1970. – 140 p.

Получено 12.01.2007