

*T. A. ROSHCHEVA, E. A. MITJUSHOV*

**THE THEORY OF LINEAR TRANSFORMATIONS:  
ENGINEERING MECHANICS METHODOICAL AVAILABILITY**

The paper is about the descriptive method for motion of rigid body based on 3D space matrix structuring allowing to put into algorithm the search for many heterogeneous solutions in point of traditional (within vector algebra) Engineering Mechanics tasks statements and to use standard information resources for their solutions in full.

Получено 10.02.2008

**ISBN 978-985-468-565-6. Механика. Научные исследования  
и учебно-методические разработки. Вып. 3. Гомель, 2009**

---

УДК 531

*C. I. РУСАН*

*Баранавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт, Баранавічы*

**НЕКАТОРЫЯ ПЫТАННІ ЯКАСНАГА АНАЛІЗУ ПЛОСКАГА РУХУ ЦЕЛА**

Павышаны ў апошнія гады статус тэхнічных ВНУ ад інстытутаў да ўніверсітэтаў абавязвае агульнатэарэтычныя кафедры да паглыбленага вывучэння фундаментальных курсаў, і ў прыватнасці, — тэарэтычнай механікі. У артыкуле закранаецца адна з галоўных тэм курса — плоскапаралельны рух цела. Разглядаюцца пытанні тэрміналогіі, сутнасць кінематычных характарыстык і мадэлей плоскага руху. Паказана існаванне трох натуральных кінематычных характарыстык і адпаведных ім імгненных цэнтраў. Абмяркоўваецца магчымасць выкарыстання альтэрнатыўнай мадэлі даследавання палёў паскарэнняў. Разгледжаны на прыкладзе адпаведны ёй двухпалярны метада.

Пазітыўны досвед выкладання дысцыпліны, здабыткі ў канкрэтных пытаннях рассяяны па крупінках у педагагічным асяроддзі і натуральным спосабам назапашваюцца вельмі марудна. Таму ініцыятыву калег з Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэту транспарту выкарыстаць старонкі зборніка «Механіка» для павышэння канцэнтрацыі такога досведу варта прызнаць рацыянальнай і падтрымаць.

У змешчаным тут матэрыяле ўзнімаюцца асобныя пытанні метадыкі выкладання і ўдасканалення зместу тэмы «Плоскапаралельны рух цела». Робіцца спроба прааналізаваць магчымасці набліжэння ў святломасць студэнтаў абстрактных матэматычных мадэлей дысцыпліны да адпаведных ім рэальных механічных сістэм.

**1 Агульныя заўвагі.** На працягу многіх дзесяцігоддзяў працай некалькіх пакаленняў механікаў і матэматыкаў створаны строгі, лагічны курс вузаўскай дысцыпліны – тэарэтычнай механікі, які зараз стаў класічным. Ён арыента-

ваны пераважна на падрыхтоўку навуковых супрацоўнікаў з высокім матэматычным узроўнем адукацыі і развітым абстрактным мысленнем. На жаль, курс меней прыстасаваны для падрыхтоўкі інжынерных кадраў і, магчыма, таму застаецца адным з самых цяжкіх для студэнтаў тэхнічных ВНУ. Звяртанне да якасных пытанняў у часе вучэбнага працэсу, на наш погляд, дапамагае навучэнцам раскрыць прыхаваны ў матэматычных мадэлях механічны сэнс, спрыяе стварэнню ў іх свядомасці геаметрычных і фізічных вобразаў вывучаемых з’яў і ў выніку – фарміраванню доўгатэрміновых трывалых ведаў.

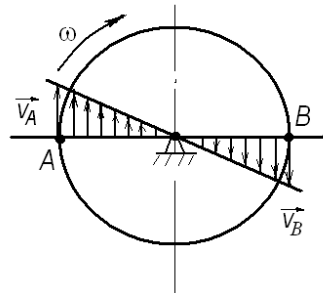
Далей спынімся на асобных пытаннях тэмы. Палі скорасцей і паскарэнняў пунктаў цела, што здзяйсняе плоскі рух, аналізуюцца, як вядома, на падставе дзвюх мадэлей руху. Згодна першай мадэлі ён раскладваецца на паступальны і вярчальны, паводле другой – разглядаецца толькі як вярчальны.

**2 Вуглавая скорасць  $\omega$  і вуглавае паскарэнне  $\epsilon$ .** Гэтыя фундаментальныя кінематычныя характарыстыкі руху цела знаёмы студэнтам з сярэдняй школы, але ўяўленне аб іх сэнсе грунтуецца больш на запамінанні, чым на разуменні іх сутнасці. Паралельнае выкарыстанне велічынь  $\omega$  і  $\epsilon$  нават прыводзіць да іх атаясамлівання. Не аднойчы даводзілася заўважаць выпадкі (памяць падводзіла) у часе аналізу запаволенага руху звенняў ( $\omega$  і  $\epsilon$  накіраваны ў розныя бакі), калі студэнты не маглі вырашыць, якая з гэтых велічынь вызначае напрамак руху. У падручніках не падкрэсліваецца прынцыповая розніца паміж  $\omega$  і  $\epsilon$ . Болей таго, выкарыстоўваецца для іх агульная назва – кінематычныя характарыстыкі. Хоць у літаральным сэнсе, калі кінематыку разумець як навуку, якая вывучае рух, то вуглавае паскарэнне нельга лічыць кінематычнай характарыстыкай, таму што рух цела апісваецца толькі вуглавой скорасцю (у агульным выпадку – пераменнай). На карысць такога сцвярджэння можна прывесці наступныя доказы. Вуглавае паскарэнне можа існаваць і пры адсутнасці руху; напрыклад, паскарэнне духапорнай бэлькі, калі раптоўна прыняць адну апору. Кінетычная энергія цела, якое верціцца, выражаецца толкі праз яго скорасць. Розніцу паміж  $\omega$  і  $\epsilon$  можна заўважыць і пры аналізе прычын: калі вуглавая скорасць руху цела ў дадзены момант часу – вынік папярэдняга дзеяння сіл, то вуглавае паскарэнне – вынік дзеяння сіл толькі ў дадзены момант часу. Іншымі словамі, вуглавая скорасць у адрозненне ад вуглавога паскарэння не можа ўзнікаць імгненна.

Узнікае пытанне: што ж у такім разе ўяўляе сабою вуглавае паскарэнне? Вядома, што яно характарызуе хуткасць змянення вуглавой скорасці. Падкрэслім: не прырашчэнне скорасці, не канечная прыбаўка, а скарэй працэс яе змянення. З гэтага пункту гледжання паскарэнне можна лічыць матэматычнай характарыстыкай скорасці. Як бы ў свой час французскія фізікі Панселе і Рэзаль не ўвялі тэрмін «паскарэнне», мы і зараз свабодна апісвалі б вэрчэнне цел пераменнай вуглавой скорасцю. Такім чынам, вуглавае паскарэнне ўмоўна адносіцца да кінематычных характарыстык руху.

Прыведзеныя вышэй крытычныя меркаванні аб вуглавым паскарэнні можна цалкам аднесці і да лінейнага паскарэння пункта. Аднак іх нельга ўспрымаць як заклік да змянення прывычнай тэрміналогіі. І далей яна не парушаецца.

**3 Залежнасці паміж скорасцямі пунктаў цела.** Для аналізу скарасцей выкарыстоўваецца пераважна другая мадэль плоскага руху цела, бо яна дазваляе з дапамогай імгненнага цэнтры скарасцей (ІЦС) стварыць аглядную карціну поля скарасцей адначасова для ўсяго цела. Калі ў навучальным працэсе ўпершыню ўводзіцца словаспалучэнне «імгненны цэнтр скарасцей», то на пачатку падаецца неабгрунтаваным ужыванне ў ім слова «цэнтр» з сэнсам «нуль». Тым болей, што ў статьицы ўжо вядомы студэнтам «цэнтр» паралельных сіл не адпавядаў іх нулявым значэнням. Таму падрыхтоўку студэнтаў да ўжывання у кінематыцы паняццяў «імгненны цэнтр скарасцей», «імгненны цэнтр паскарэнняў» (ІЦП) мэтазгодна пачынаць раней. Гэта можна зрабіць пры вывучэнні вярчальнага руху цела шляхам увядзення паняццяў аб пастаянных (стацыянарных) цэнтрах скарасцей і паскарэнняў. Тады пераход ад нерухомах цэнтраў да імгненных успрымаецца натуральна. У пошуках логікі паходжання тэрміна можна звярнуцца да геаметрыі, дзе слова «цэнтр» азначае «пункт», «кропка». Далей разгледзім рысунак 1, на якім паказаны дыск, што верціцца ў плоскасці рысунка вакол цэнтральнай восі. Калі рухацца на ім па графіку скорасці ад пункта  $A$  да  $B$ , то можна ўбачыць, што вектар скорасці пры набліжэнні да восі вярчэння памяншаецца, а на самой восі ён роўны нулю, інакш кажучы, ператвараецца ў пункт – цэнтр скарасцей. Тое ж можна сказаць і аб цэнтрах паскарэнняў.

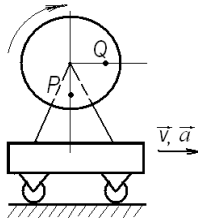
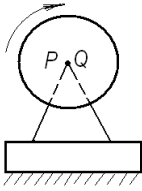


Рысунак 1

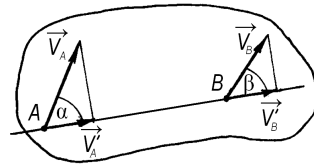
Заўважым, што ў выпадку вярчальнага руху цела цэнтры скарасцей і паскарэнняў – пункты  $P$  і  $Q$  – супадаюць паміж сабою. Яны заўжды знаходзяцца на восі вярчэння цела. На рысунку 2 паказаны пераход ад вярчальнага руху цела да плоскага, пры якім адзіны стацыянарны цэнтр скарасцей і паскарэнняў раздвойваецца на асобныя імгненныя цэнтры  $P$  і  $Q$ . Матэматычна проста даказваецца і лёгка выкарыстоўваецца на практыцы наступная залежнасць (рысунак 3):

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta, \quad (1)$$

альбо  $\vec{v}'_A = \vec{v}'_B$ . Яе называюць другой тэарэмай аб скорасцях, ці вынікам з першай тэарэмы. Апошняя роўнасць мае прасты фізічны сэнс: даўжыня адрэзка  $AB$  у часе руху застаецца пастаяннай, таму што разглядаецца рух абсалютна цвёрдага цела.



Рысунк 2



Рысунк 3

На відавочным фізічным сэнсе роўнасці (1) можа быць пабудавана яе кароткае, у адзін радок, не звязанае з папярэдняй тэарэмай, наступнае даказальства: паколькі ў межах абсалютна цвёрдага цела канцы адрэзка  $AB$  не могуць аддаляцца ці збліжацца, то  $v'_B = v'_A$ .

**4 Залежнасці паміж паскарэннямі пунктаў.** Яны ўстанаўліваюцца вядомымі формуламі, атрыманымі на падставе першай мадэлі плоскага руху цела і маюць розны выгляд у залежнасці ад спосаба задання руху полюса  $A$ ; пры натуральным спосабе

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{MA}^{ii} + \vec{a}_{MA}^{BP}; \quad (2)$$

пры каардынатым

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{Ax} + \vec{a}_{Ay} + \vec{a}_{MA}^{ii} + \vec{a}_{MA}^{BP}. \quad (3)$$

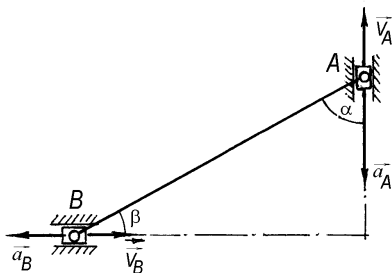
Першыя два складаемыя гэтых формул апісваюць поле паскарэнняў плоскай фігуры (што мадэліруе цела) у паступальным руху, апошнія – у вярчальным вакол полюса  $A$ . На выбар полюса, як вядома, не існуе абмежаванняў. Звычайна, гэта пункт, для якога скорасць і паскарэнне альбо вядомы, альбо лёгка вызначаюцца з умовы задачы. Чатырохкампаненты характар поля паскарэнняў, утвараемага на падставе формул (2), (3), істотна ўскладняе кінематычны аналіз руху цела. Гэтыя цяжкасці затым пераходзяць і ў дынаміку плоскага руху падчас выканання сілавога аналізу. Таму даследчыкі аддаюць перавагу другой мадэлі руху і выкарыстоўваюць ШП (калі гэта рацыянальна паводле ўмовы задачы). Заўважым, што ўсе кампаненты вектара паскарэння  $\vec{a}_M$  у прыведзеных формулах залежаць ад выбара полюса  $A$ . Мяняючы полюс можна атрымаць безліч варыянтаў фарміравання вектара  $\vec{a}_M$ . Такім чынам, асобнае складаемае формул (2), (3) не з'яўляецца стабільнай характарыстыкай руху пункта  $M$ ; яно з'яўляецца вынікам штучнага прыёму (як і сама першая мадэль плоскага руху), мэтазгоднага для атрымання рэзультату. Але студэнтам карысна ведаць, што існуюць натуральныя, адзіныя кампаненты паскарэння, уласцівыя толькі для канкрэтнага пункта  $M$ . Аб гэтым будзе сказана ніжэй у п.7.

**5 На памылках вучацца.** Тут мы пераканемся, што гэтая бытавая ісціна знаходзіць абсалютнае падцверджэнне і ў вучэбным працэсе. Адзначаныя вышэй цяжкасці ў выкарыстанні формул (2), (3) часам падштурхоўваюць студэнтаў на пошукі «рацыянальных» рашэнняў. Запамятаўся адзін выпадак, які меў месца пры выкананні студэнтамі задання К.3 [1]. Паколькі ён можа быць павучальным і для выкладчыкаў, то разгледзім змест задачы падрабязна. На рысунку 4  $v_A = 20$  см/с,  $a_A = 10$  см/с<sup>2</sup>,  $AB = l = 45$  см,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ . Ведаючы механічны сэнс роўнасці (1), студэнт вырашыў, што такім чынам можна абгрунтаваць і аналагічную залежнасць для паскарэнняў:

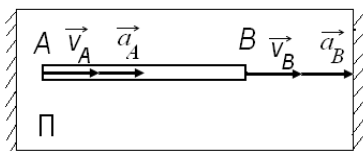
$$a_B \cos \beta = a_A \cos \alpha \quad (4)$$

Сваю ўпэўненасць студэнт падцвярджаў элементарным прыкладам (рысунк 5), у якім стрыжань  $AB$  рухаецца па гарызантальнай плоскасці  $\Pi$  паступальна. Калі стрыжань абсалютна цвёрды, то павінны быць роўны не толькі скорасці яго канцоў ( $\vec{v}_B = \vec{v}_A$ ), але і паскарэнні ( $\vec{a}_B = \vec{a}_A$ ) – даводзіў ён. І гэта правільна. А калі ж рух стрыжня плоскі, а скорасці і паскарэнні канцоў накіраваны не па восі стрыжня, – працягваў студэнт – тады трэба выкарыстаць роўнасці (1), (4). Гэта дазволіла яму знайсці паскарэнне  $a_B$  (гл. рысунк 5) гэтак жа лёгка, як і скорасць  $v_B$ . Пры такім падыходзе паскарэнне  $a_B$  не залежала ад скорасці  $v_A$ .

Паходжанне памылкі ў рашэнні па формуле (4) хутчэй было давесці, звярнуўшыся да кінематыкі пункта. Там высвятляецца, што паскарэнне любога пункта  $M$  у адрозненне ад яго скорасці ўтвараецца з двух кампанентаў, якія маюць розную прыроду:  $\vec{a}_M = \vec{a}_M^\tau + \vec{a}_M^n$ . Першы з іх уяўляе хуткасць змянення вектара скорасці па велічыні, другі — па напрамку.



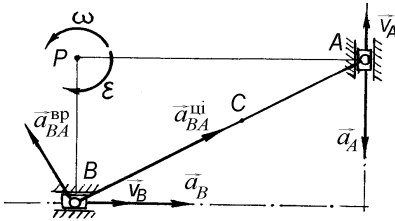
Рысунк 4



Рысунк 5

Вось яраз другі кампанент і скасоўвае прывабную залежнасць (4). У тых выпадках, калі ён адсутнічае,  $a_M = \vec{a}_M^\tau = \dot{v}_M$ , залежнасць (4) захоўваецца. Такі прыклад мы бачылі на рысунку 5. Але студэнт не здаваўся. У яго задачы канцы стрыжня  $A, B$  рухаюцца па прамых і паскарэнні  $a_A^n, a_B^n$  раўны нулю.

Чаму ж нельга выкарыстаць роўнасць (4)? Гэтае пытанне паказвае, што на прыкладзе з кінематыкі пункта, які быў выкарыстаны тут, можна патлумачыць толькі паходжанне памылкі. Таму што цела нельга замяніць пунктам. У прыкладзе на рысунку 4 стрыжань  $AB$  паварочваецца, а вектары  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{a}_B$  ўяўляюць сабою сумарныя – вярчальныя і цэнтраімклівыя паскарэнні. Сутнасць гэтых паскарэнняў будзе ўдакладняцца ў п. 6.



Рысунк 6

Студэнт вымушаны быў прымяніць формулу (3), спадзяючыся атрымаць неістотныя папраўкі да вынікаў, знойдзеных па формуле (4). Кампаненты вектара (3) паказаны на рысунку 6. Пры вылічэнні паскарэння  $a_{BA}^{ii}$  спатрэбілася зададзеная скорасць  $v_A$ . Якое ж было здзіўленне навучэнца, калі высвятлілася, што новы вынік не мае нічога агульнага з папярэднім. Нават напрамак вектара  $a_B$

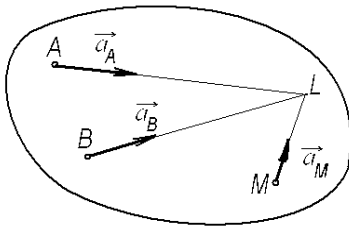
процілеглы ранейшаму. Прыводзім лікавыя значэнні некаторых велічынь, паказаных на рысунку 6:  $\omega_{AB} = 0,5132$  рад/с;  $v_B = 5,9259$  см/с;  $\epsilon_{AB} = 0,1045$  рад/с<sup>2</sup>;  $a_B = 7,9118$  см/с<sup>2</sup>. Тут скорасці тыя ж, што і на рысунку 4.

**6 Натуральныя цэнтры і адпаведныя ім натуральныя кінематычныя характарыстыкі.** Студэнт, які адстойваў сваё рашэнне, усё ж меў рацыю. І памыляўся толькі часткова. Сапраўды, існуе кампанент вектара паскарэння, для якога справядліва залежнасць віду (4). І яе выкарыстанне можа ў некаторых выпадках істотна аблегчыць атрыманне рэзультату.

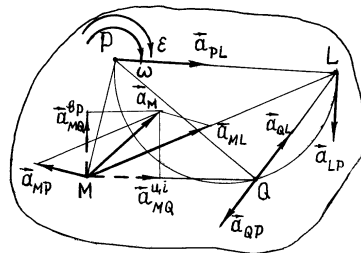
Для далейшых разважанняў неабходна канкрэтызаваць тэрміналогію. Найперш правядзем класіфікацыю кінематычных цэнтраў. Кінематычныя цэнтры, якія выбіраюцца даследчыкамі суб'ектыўна для рашэння канкрэтнай задачы, і адпаведныя ім кінематычныя характарыстыкі – скорасці, паскарэнні – будзем называць штучнымі. У разгледжаным вышэй прыкладзе штучным цэнтрам служыць полюс  $A$  і паскарэнні адносна яго  $a_{BA}^{ii}$ ,  $a_{BA}^{BP}$ . Калі б спатрэбілася вызначыць паскарэнне пункта  $C$ , то цэнтрам кінематычных характарыстык мог быць выбраны пункт  $B$ . Кінематычныя цэнтры, палажэнне якіх вызначаецца толькі сувязямі, накладзенымі на цела, будзем называць натуральнымі. Натуральныя цэнтры не выбіраюцца, а знаходзяцца. Пры вярчальным руху цел нерухомыя натуральныя цэнтры змешчаны на восях вярчэння. У выпадку плоскага руху цела імі з'яўляюцца ЦС і ЦП – пункты  $P$  і  $Q$ . Гэтым цэнтрам адпавядаюць натуральныя кінематычныя характарыстыкі адвольных пунктаў  $M$  – скорасці  $v_M$ , поўныя паскарэнні  $a_M$  і іх складаемыя: цэнтраімклівае  $a_{MQ}^{ii}$  і вярчальнае  $a_{MQ}^{BP}$  паскарэнні.

Вышэй (у п.5) адзначалася, што паскарэнням асобных пунктаў уласціва дваістае паходжанне. Тое ж справядліва і для пунктаў, якія належаць цэлу. Рух цэла, як вядома, цалкам вызначаецца вуглавой скорасцю і вуглавым паскарэннем. Гэта яго натуральныя кінематычныя характарыстыкі. Кожнай з іх адпавядаюць свае натуральныя паскарэнні для пунктаў цэла: вуглавой скорасці – цэнтраімклівыя паскарэнні, вуглавому паскарэнню – вярчальныя. Іх абазначэнні будуць уведзены ніжэй. Такім чынам, мы ўстанавіваем аб'ектыўнае існаванне трох відаў натуральных паскарэнняў пунктаў: вярчальнага, цэнтраімклівага і поўнага (сумарнага). Для кожнага віда існуе свой імгненны цэнтр. Імгненны цэнтр вярчальных паскарэнняў (ШВП) супадае з ШС; будзем абазначаць яго той жа літарай  $P$ . Для абсалютнага ШП захаваем існуючае абазначэнне  $Q$ . Імгненны цэнтр цэнтраімклівых паскарэнняў (ШЦП) абазначым літарай  $L$ . Яго палажэнне знаходзіцца таксама, як і абсалютнага ШП, калі  $\varepsilon = 0$ ,  $\omega \neq 0$  (рысунак 7). Усе названыя ШП у агульным выпадку не супадаюць паміж сабою. Адзначым істотную перавагу цэнтраў  $P$  і  $L$ : іх палажэнне вызначаецца толькі геаметрычнымі параметрамі, у той час як палажэнне цэнтра  $Q$  залежыць ад кінематычных характарыстык цэла і пунктаў.

Прыведзеная тут дэталізацыя паняццяў дазваляе ўдакладніць значэнне абсалютнага ШП: гэта пункт плоскай фігуры, у якім сума вярчальнага і цэнтраімклівага паскарэнняў раўна нулю. Такім чынам, у пункце  $Q$  вярчальнае і цэнтраімклівае паскарэнні раўны па велічыні і процілеглы па напрамках. Апошняя ўласцівасць пункта  $Q$  дазваляе зрабіць выснову, што прамыя  $PQ$  і  $LQ$  перасякаюцца пад прамым вуглом, а сам цэнтр  $Q$  знаходзіцца на акружнасці дыяметра  $PL$  (рысунак 8).



Рысунак 7



Рысунак 8

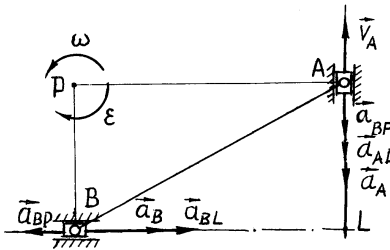
Паскарэнні адвольнага пункта  $M$  адносна цэнтраў  $P$  і  $L$  будзем абазначаць без верхніх індэксаў літарамі  $a_{MP}$ ,  $a_{ML}$ . Поўнае паскарэнне пункта раўна геаметрычнай суме

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{MP} + \vec{a}_{ML}. \quad (5)$$

На рисунку 8 пункцірам паказаны і кампаненты таго ж вектара  $\vec{a}_M$  адносна цэнтра  $Q$ :  $\vec{a}_{MQ}^{BP}$  і  $\vec{a}_{MQ}^{LI}$ . Як відаць з рысунка, у імгненых цэнтрах  $P$  і  $L$  толькі адпаведныя ім паскарэнні роўны нулю; іх поўныя паскарэнні знаходзяцца па формулах:  $a_{LP} = \varepsilon \cdot PL$ ,  $a_{PL} = \omega^2 \cdot PL$ .

**7 Метад двух цэнтраў.** Як адзначалася ў п. 6, скорасці і вярчальныя паскарэнні пунктаў маюць агульны імгненны цэнтр  $P$  і прапарцыянальны адлегласцям ад гэтага цэнтра. І скорасць пункта, і яго вярчальнае паскарэнне выражаюцца аднолькава (лінейна) адпаведна праз  $\omega$  і  $\varepsilon$ . На гэтай падставе, не ўзнаўляючы доказаў, прыведзеных у падручніках для скорасцей, можна сцвярджаць: усе залежнасці паміж скорасцямі пунктаў цела і ўсе спосабы вызначэння вуглавой скорасці  $\omega$  праз скорасці пунктаў сапраўдны і для вярчальных паскарэнняў, і для вуглавога паскарэння  $\varepsilon$ . Іншымі словамі, каб атрымаць залежнасці паміж вярчальнымі паскарэннямі пунктаў цела, ці іх сувязь з вуглавым паскарэннем  $\varepsilon$ , неабходна ва ўсіх вядомых залежнасцях для скорасцей замяніць літары  $v$  на  $a$  і  $\omega$  і  $\varepsilon$ . Такім чынам, можна лічыць рэабілітаванай і залежнасць (4), калі замяніць у ёй паскарэнні  $a_A$  і  $a_B$  на вярчальныя:  $a_A = a_{AP}$ ,  $a_B = a_{BP}$ .

У п. 6 паказана, што натуральныя паскарэнні пунктаў цела, якое здзяйсняе плоскі рух, можна прадставіць двума цэнтральнымі палямі з цэнтрамі ў пунктах  $P$  і  $L$ . Тады поўныя паскарэнні пунктаў знойдзем шляхам накладання гэтых палёў. У выніку поўнае паскарэнне адвольнага пункта  $M$  будзе ўяўляць двухкампанентны вектар. Метад даследавання паскарэнняў, заснаваны на выкарыстанні формулы (5), назавем двухпалярным, ці метадам двух цэнтраў.



Рысунк 9

Методыку прымянення двухпалярнага метада разгледзім на прыкладзе, змешчаным у п. 5 (рысунк 9).

1 Знаходзім цэнтр  $P$  і вуглавую скорасць  $\omega_{AB}$ :  $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = 0,5132$  рад/с.

2 Вызначаем палажэнне цэнтра  $L$  такім чынам, як паказана на рысунку 7.

3 Знаходзім цэнтраімклівыя паскарэнні пунктаў  $A$  і  $B$ :

$$a_{AL} = \omega_{AB}^2 \cdot AL = 0,5132 \cdot 22,5 = 5,9259 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{BL} = \omega_{AB}^2 \cdot BL = 0,5132^2 \cdot 38,9711 = 10,2640 \text{ см/с}^2.$$

4 Вызначаем вярчальнае паскарэнне пункта  $A$  з формулы (5) і паскарэнне  $\varepsilon_{AB}$ :



$$a_{AP} = a_A - a_{AL} = 10,0000 - 5,9259 = 4,0741 \text{ см/с}^2;$$

$$\epsilon_{AB} = \frac{a_{AP}}{AP} = \frac{4,0741}{38,9711} = 0,1045 \text{ рад/с}^2.$$

5 Вилічваем вярчальнае і поўнае паскарэнні пункта  $B$ :

$$a_{BP} = \epsilon_{AB} \cdot BP = 0,1045 \cdot 22,5 = 2,3513 \text{ см/с}^2;$$

$$a_B = 10,2640 - 2,3513 = 7,9127 \text{ см/с}^2.$$

Атрыманыя значэнні  $\epsilon_{AB}$ ,  $a_B$  супадаюць з рэзультатамі, прыведзенымі ў п. 5. Прымяненне двухполоснага метада для даследавання поля паскарэнняў пры качэнні кола прыведзена ў артыкуле [2].

### СПИС ЛІТАРАТУРЫ

1 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. проф. А. А. Яблонского. – М. : Высш. шк., 1985. – 367 с.

2 Русан, С. И. Методика изучения кинематических характеристик качения колеса / С. И. Русан // Теоретическая и прикладная механика : науч.-техн. междунар. журнал. – Минск, 2004. – Вып.17. – С.174–178.

*С. И. РУСАН*

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

Повышение в последние годы статуса технических вузов от институтов к университетам обязывает общетеоретические кафедры к углубленному изучению фундаментальных курсов, в частности, теоретической механики. В статье затрагивается одна из главных тем курса – плоскопараллельное движение тела. Рассматриваются вопросы терминологии, суть кинематических характеристик и моделей плоского движения. Показано существование трех естественных кинематических характеристик и соответствующих им мгновенных центров. Обсуждается возможность использования альтернативной модели исследования полей ускорений.

*S. I. RUSAN*

### SOME QUESTIONS OF BODY PLANE MOTION QUALITATIVE ANALYSIS

The recent transformation of technical institutes into universities require from general-theoretical chairs a deeper study of fundamental courses and engineering mechanics in particular. In the paper one of the main course topics - plane-parallel motion of a body is being touched. Questions of terminology, the main points of motion characteristics and plain motion models are being considered. The existence of three natural motion characteristics and their correspondent instantaneous centers is shown. The opportunity to use the alternative research model of acceleration fields is discussed. The bipolar method as an example of this model has been considered.

Получено 29.04.2008