

Анализ зависимостей вертикальных сил, действующих на колеса и пружины, а также деформаций пружин в узле подвешивания цистерны на раме от коэффициента демпфирования показал, что увеличение коэффициентов жесткости и демпфирования вертикальных упруго-диссипативных связей между цистерной и рамой автомобиля незначительно влияет на величины сил между колесами и дорогой, сил в дополнительной ступени подвешивания цистерны. Это можно объяснить тем, что амплитуды перемещений центра тяжести жидкости в цистерне во много раз больше, чем амплитуды перемещений цистерны относительно рамы.

Таким образом, выполненное исследование показывает, что изменение характеристик вертикальных связей между резервуаром цистерны и ее рамой не оказывает значительного эффекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Шимановский, А. О. Компьютерное моделирование торможения автоцистерны, частично заполненной жидкостью / А. О. Шимановский, А. В. Коваленко, Ю. М. Плещачевский // Механика машин, механизмов и материалов. – 2010. – № 2 (11). – С. 39–42.

A. V. KOVALENKO

MOTION SIMULATION FOR ROAD-TANKER WITH VERTICALLY SPRING-MOUNTED TANK

Based on computer modelling of tanker with liquid oscillations there is examined the influence of cushioning rigidity of the tank in a vertical plane on spring deflection and the values of forces acting on tanker structural elements. It has been shown that the tank cushioning practically does not affect the amplitude of car oscillations.

Получено 01.02.2011

ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011

УДК 624.072.21.7

О. В. КОЗУНОВА, Д. И. БОЧКАРЕВ, Е. А. СИГАЙ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

РАСЧЕТ СЛОИСТОГО ОСНОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАКОНЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Рассмотрено использование вариационно-разностного подхода к решению контактных задач нелинейной теории упругости (плоская деформация), который имеет важность практического применения в расчетах балок и балочных плит на упругом

основании. Слоистое основание моделируется совокупностью упругих слоев конечной ширины с переменным модулем деформации. Закон нелинейно-упругого деформирования основания описывается зависимостью в виде степенной функции. Модуль деформации упругого основания – переменный. Коэффициент Пуассона каждого слоя в силу его незначительного изменения в пределах этого слоя принимается постоянным.

Из нелинейной теории упругости известно, что при исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) инженерной системы «плита – основание» используется закон нелинейно-упругого деформирования основания [1]. В рассматриваемой работе этот закон моделируется в виде следующих зависимостей: *степенная функция Бюльфингера и альтернативная степенная функция*, встречающаяся в работах П. А. Лукаша [2], В. Е. Быховцева [3]; *функция гиперболический тангенс*, использованная в нелинейных расчетах [4, 5].

Для решения контактной задачи «балка (плита) – слоистое основание» предлагается модификация *вариационного способа* статического расчета: в нелинейной постановке и с использованием метода сеток, которая названа *вариационно-разностным подходом* (ВРП). Этот подход позволяет полностью описать напряженно-деформированное состояние (НДС) упругого основания, исследовать контактную зону «плита – основание», вычислить внутренние усилия и осадки балки (плиты).

В силу нелинейности рассматриваемая задача решается методом упругих решений в форме переменных параметров упругости, через итерационный алгоритм. Численная реализация ВРП осуществляется методом конечных разностей (МКР) в программном пакете МATHEMATICA 6.0.

Постановка контактной задачи. Рассматривается балочная плита шириной $2l$ на упругом физически нелинейном многослойном основании под действием произвольной нагрузки [4]. На контакте плиты с упругим основанием возникают только нормальные реактивные давления, силами трения пренебрегаем. Для плиты справедливы гипотезы теории изгиба.

При расчете слоистая упругая среда заменяется прямоугольной расчетной областью (рисунок 1). Основание аппроксимируется симметричной разбивочной сеткой с постоянным шагом по осям: Δx , Δy . В результате получено 203 i -тых узловых и 168 j -тых сеточных ячеек.

За *неизвестные* принимаются: $u_i(x)$, $v_i(y)$ – компоненты вектора перемещения i -той узловой точки основания; $p_y^{(i)}(x, y)$ – реактивные давления в зоне контакта балочной плиты с основанием. *Граничные условия задачи:* на границах принятой расчетной области перемещения $u = 0$, $v = 0$, в контактной зоне справедливо равенство осадок основания прогибам плиты.

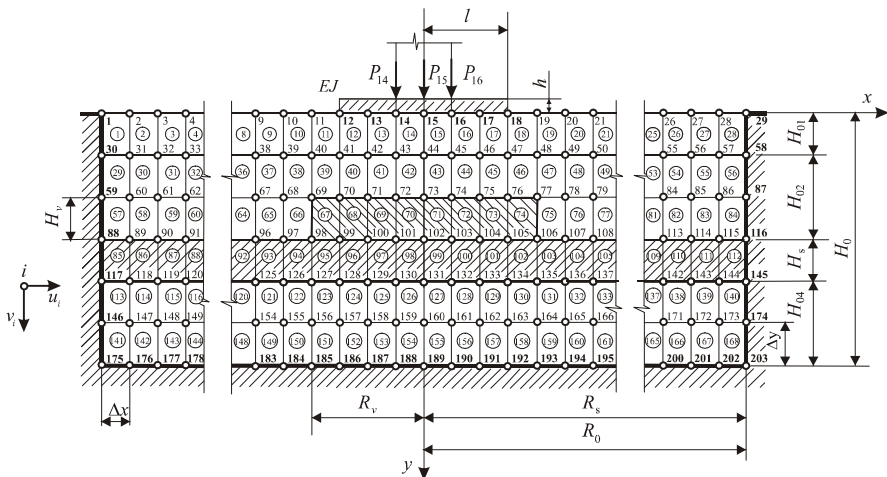


Рисунок 1 – Разбивочная сетка расчетной области

Алгоритм расчета в нелинейной постановке. Закон нелинейно-упругого деформирования основания $\sigma_i(\varepsilon_i)$ для каждого слоя основания описывается математически в виде степенной функции [3] (рисунок 2).

$$\sigma_i^{(k)} = E_{0k}^m (\sigma_{i,\text{lim}}^{(k)})^{1-m} \varepsilon_i^m, \quad (1)$$

где $\sigma_{i,\text{lim}}^{(k)}$; E_{0k} – предельное (критическое) напряжение, близкое к пределу упругости, и начальный модуль деформации k -того слоя основания; m – экспериментальный параметр, зависящий от упругих характеристик неоднородной среды.

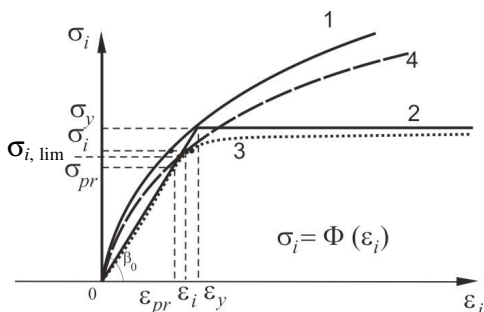


Рисунок 2 – Диаграммы нелинейно-упругого деформирования:
 1 – степенная функция; 2 – диаграмма упруго-пластического тела; 3 – функция гиперболический тангенс; 4 – альтернативная степенная функция

Основываясь на физических постулатах деформирования грунтов, в работе [3] проф. В. Е. Быховцев исследовал и математически обосновал способы определения приближённых значений параметров аппроксимаций. Для сравнения поведения неоднородной среды за пределами упругости он ввел в рассмотрение альтернативную степенную функцию в виде [3]:

$$\sigma_i^{(k)} = E_{0k}^m (\sigma_{i,\text{lim}}^{(k)})^{1-m} \varepsilon_i^m - (1-\alpha) \left(\frac{\alpha E_{0k}}{\sigma_{i,\text{lim}}^{(k)}} \right)^{m-1} E_{0k}^m \varepsilon_i^m, \quad (2)$$

где α – соотношение энергий деформирования при предельной нагрузке, которое является мерой близости аппроксимаций и вычисляется по формуле

$$\alpha = \frac{\Pi^e}{\Pi^n} = \frac{\frac{1}{2} \sigma_{i,\text{lim}} \cdot \varepsilon_{i,\text{lim}}}{\left(\frac{1}{1+m} \right) \sigma_{i,\text{lim}} \cdot \varepsilon_{i,\text{lim}}} = \frac{1+m}{2}. \quad (3)$$

Для грунтовых оснований в результате проведенных натуральных и лабораторных экспериментов получены некоторые зависимости деформаций от напряжений, которые могут быть аппроксимированы различными нелинейными соотношениями, чаще всего это уравнения парабол. Для каждой экспериментальной зависимости с допустимым приближением можно установить значение предельного напряжения. В данной работе использована эмпирическая формула для определения $\sigma_{i,\text{lim}}^{(k)}$, предложенная в монографии проф. Быховцева В. Е. [3] и имеющая следующий вид:

$$\sigma_{i,\text{lim}}^{(k)} = c_k + 0,03 \text{tg} \varphi_k (0,5 - \nu_k) E_{0k}, \quad (4)$$

где c_k , φ_k , ν_k – соответственно коэффициент сцепления, угол внутреннего трения и коэффициент Пуассона k -того слоя упругого основания.

При решении сформулированной задачи в силу ее нелинейности используется метод упругих решений А. А. Ильюшина, который предполагает итерационный процесс [1]. При каждой итерации модуль деформации центра j -той сеточной ячейки изменяется, и при вычислениях используется переменный модуль деформации, представленный в таблице 1.

Согласно вариационному принципу Лагранжа [1], при нагружении плиты на упругом основании статической нагрузкой ее полная потенциальная энергия в состоянии равновесия принимает минимальное значение. Величина функционала полной потенциальной энергии плиты на упругом основании состоит из трех слагаемых: функционала энергии деформаций упругого основания, функционала энергии деформаций плиты и потенциала работы внешней нагрузки, и определяется формулой

$$\mathcal{E} = U_f + \Omega_b + \Pi.$$

Таблица 1 – Переменный модуль деформации

Параметр	Степенная функция Бюльфингера	Альтернативная степенная функция
Касательный модуль	$E_i^{(n)} = m \sigma_{i,\text{lim}}^{(k)} \left(\frac{E_{0k}}{\sigma_{i,\text{lim}}^{(k)}} \right)^m \left(\epsilon_i^{(k)} \right)^{m-1}$	$E_i^{(n)} = E_{0k} - m(1 - \alpha) \left(\frac{\alpha E_{0k}}{\sigma_{i,\text{lim}}^{(k)}} \right)^{m-1} E_{0k}^m \left(\epsilon_i^{(k)} \right)^{m-1}$
Секущий модуль	$E_i^{(n)} = \sigma_{i,\text{lim}}^{(k)} \left(\frac{E_{0k}}{\sigma_{i,\text{lim}}^{(k)}} \right)^m \left(\epsilon_i^{(k)} \right)^{m-1}$	$E_i^{(n)} = E_{0k} - (1 - \alpha) \left(\frac{\alpha E_{0k}}{\sigma_{i,\text{lim}}^{(k)}} \right)^{m-1} E_{0k}^m \left(\epsilon_i^{(k)} \right)^{m-1}$

Решение контактной задачи строится в перемещениях и реализуется численно методом конечных разностей (МКР), то есть заменой дифференциальных уравнений линейными конечно-разностными соотношениями. Энергия деформаций упругого основания получается суммированием по объему основания энергий деформаций прямоугольных участков для каждой ячейки МКР. Энергия изгиба балочной плиты в контактной зоне с основанием и потенциал работы внешних сил записывается также в конечно-разностном виде. В результате система дифференциальных уравнений заменяется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка $2N$. Теория нелинейного расчета для двухслойного основания приведена в работе [4].

Численные результаты. Для указанного подхода составлена программа на языке *Mathematica* 6.0, проведена ее числовая апробация для двухслойных оснований, ослабленных местными полостями. При численном счете использовались следующие упругие параметры неоднородного основания и балочной плиты: *1-й слой* (песок мелкий прочный) – $\sigma_{\text{lim1}} = 0,20$ МПа; $\nu_1 = 0,30$; $E_{01} = 25$ МПа; $\varphi = 33^\circ$; $c = 0,07$ МПа; $m = 0,57$; *2-й слой* (супесь мореная прочная) – $\sigma_{\text{lim2}} = 0,25$ МПа; $\nu_2 = 0,33$; $E_{02} = 30$ МПа; $\varphi = 10^\circ$; $c = 0,1$ МПа, $m = 0,51$; *слабые полости* (торфяные линзы) – $\sigma_{\text{limv}} = 0,05$ МПа; $\nu_v = 0,35$; $E_{0v} = 6$ МПа; $m = 0,46$; *железобетонная плита* (тяжелый бетон марки С 35/20) – $P = 90\,000$ Н; $l = 1,2$ м, $h = 0,5$ м; $E_6 = 2,35 \cdot 10^{10}$ Па.

На рисунках 3–5 показано деформированное состояние слоистого основания, полученное в результате нелинейных расчетов с использованием разных функциональных зависимостей в законе нелинейно-упругого деформирования основания.

Сравнение результатов. Результаты нелинейных расчетов слоистых оснований сравниваются по показателям изменения параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) системы «плита – основание» Δ_f , расчет которых приведен в работе [5]. За базовые параметры при сравнении выбирают параметры НДС системы, рассчитанной с использованием функции гиперболический тангенс с соответствующим переменным модулем деформации.

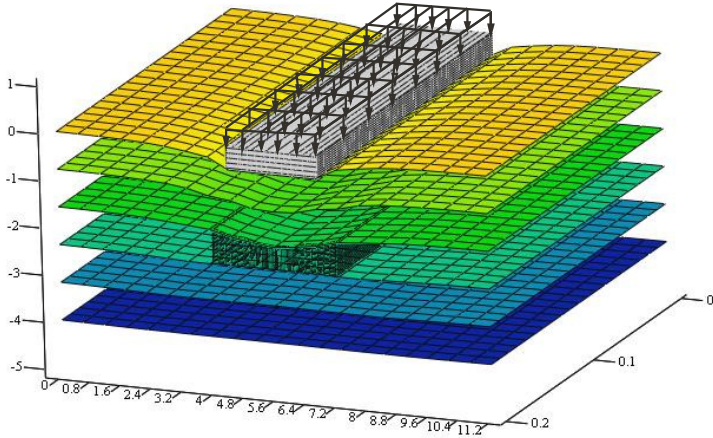


Рисунок 3 – Осадки основания и плиты (функция гиперболический тангенс)

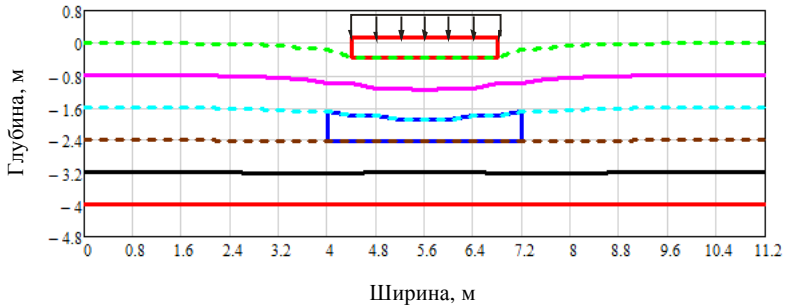


Рисунок 4 – Осадки основания и плиты (степенная функция Бюльфингера)

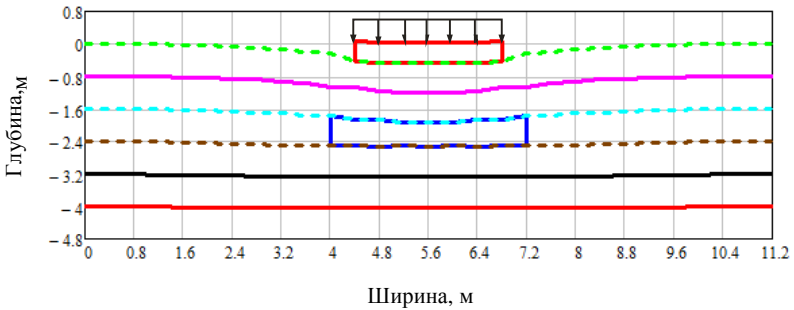


Рисунок 5 – Осадки основания и плиты (альтернативная степенная функция)

Сравнение результатов расчетов с использованием степенных функций с аппроксимациями на основе функции гиперболический тангенс приведено в таблицах 2, 3.

Таблица 2 – Параметры деформированного состояния

Вид аппроксимации упругого основания		v_{\max} , М	$\epsilon_{i \max}$	Вертикальный срез $j = 15 \dots 155$	
				$E_{1\max}$, МПа	$E_{2\max}$, МПа
Гиперболический тангенс	Касательный модуль	0,017890	0,0037827	23,8752	29,8635
	Секущий модуль	0,0150091	0,0038691	13,5028	18,2124
Степенная функция	Касательный модуль	0,021444	0,00518340	20,5659	35,6899
	Показатель Δ_f	16,56 %	27,02 %	13,86 %	16,33 %
	Секущий модуль	0,0058828	0,00146418	84,5550	316,124
	Показатель Δ_f	60,81 %	62,16 %	84,03 %	94,24 %
Альтернативная степенная	Касательный модуль	0,018188	0,0040478	18,0751	18,5382
	Показатель Δ_f	1,64 %	6,55 %	24,29 %	37,92 %
	Секущий модуль	0,0172421	0,00395209	12,5355	2,5138
	Показатель Δ_f	12,95 %	2,09 %	7,16 %	86,19 %

Таблица 3 – Параметры напряженного состояния

Вид аппроксимации упругого основания		$\sigma_{y\max}$, Па	$p_{y\max}$, Па	Q_y , Н	M_x , Нм
Гиперболический тангенс	Касательный модуль	166701	340697	146546	108492
	Секущий модуль	163342	442574	158200	125966
Степенная функция	Касательный модуль	151518	332679	144603	105091
	Показатель Δ_f	9,11 %	2,35 %	1,33 %	3,14 %
	Секущий модуль	148039	301916	140314	100404
	Показатель Δ_f	9,37 %	31,78 %	11,31 %	20,29 %
Альтернативная степенная	Касательный модуль	170040	339939	146565	108447
	Показатель Δ_f	1,96 %	0,22 %	0,01 %	0,04 %
	Секущий модуль	171822	342723	147067	109072
	показатель Δ_f	4,94 %	22,56 %	7,04 %	13,41 %

Алгоритм и методика нелинейного расчета с использованием степенных функций в аналогичной вариационно-разностному подходу постановке рассматриваются в монографии проф. В. Е. Быховцева [3]. Однако компьютерная программа ЭНЕГИЯ-3D, предложенная для соответствующего нелинейного расчета, основывается на другом численном методе – МКЭ. В таб-

лице 4 приведено сравнение полученных нами результатов со значениями, найденными с помощью программы ЭНЕРГИЯ-3D.

Таблица 4 – Результаты сравнения осадки плиты, рассчитанной разными методами

Вид аппроксимации упругого основания		v_{\max} , см
По программе проф. В. Е. Быховцева (ЭНЕРГИЯ-3D)		1,91
Функция гиперболический тангенс	Касательный модуль	1,79
	Показатель Δ_f	6,28 %
	Секущий модуль	1,50
	Показатель Δ_f	21,47 %
Степенная функция	Касательный модуль	2,14
	Показатель Δ_f	10,75 %
	Секущий модуль	0,59
	Показатель Δ_f	69,11 %
Альтернативная степенная функция	Касательный модуль	1,82
	Показатель Δ_f	4,71 %
	Секущий модуль	1,72
	Показатель Δ_f	9,95 %

Таким образом, выполненные исследования показывают, что:

1 За базовую зависимость при использовании вариационно-разностного подхода (ВРП) целесообразно принимать функцию гиперболический тангенс, так как диаграмма нелинейно-упругого деформирования при ее использовании приближается к диаграмме упругопластического тела, что было заедложено в постановке задачи.

2 Переменный модуль деформации в виде касательного модуля позволяет получить результаты нелинейных расчетов при использовании степенных функций, близкие к базовым показателям.

3 Параметры деформированного состояния, полученные в результате расчета по двум компьютерным программам (с использованием ВРП и МКЭ), достаточно близки по своим значениям для функции гиперболический тангенс и особенно для альтернативной степенной функции. Такое совпадение объясняется тем, что в алгоритме нелинейного расчета по методике В. Е. Быховцева также используется альтернативная степенная функция.

Следовательно, слоистое основание можно корректно и с достаточной точностью рассчитать разными численными методами, но с использованием одной и той же функциональной зависимости в законе нелинейно-упругого деформирования. Полученные результаты демонстрируют достоверность нелинейного расчета, основанного на ВРП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990 – 400 с.
- 2 Лукаш, П. А. Основы нелинейной строительной механики / П. А. Лукаш. – М.: Стройиздат, 1971. – 271 с.
- 3 Быховцев, В. Е. Компьютерное объектно ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твердых тел / В. Е. Быховцев. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007.– 219 с.
- 4 Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход к решению контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – № 1. – 2009. – С. 5–13.
- 5 Козунова, О. В. Нелинейный расчет балочных плит на слоистых основаниях с биогенными включениями / О. В. Козунова // Геотехника Беларуси: теория и практика. – Минск: БНТУ, 2008. – С. 37–65.

O. V. KOZUNOVA, D. I. BOCHKAREV, E. A. SIGAI
**COMPUTATION OF LAMINATED FOUNDATION USING POWER
FUNCTIONS IN THE LAW OF NONLINEAR-ELASTIC DEFORMATION**

In the present paper we use the variation-differential approach to solving the contact problems nonlinear to the theory of elasticity (plane strain) which is important as a practical application in computations of beams and beam-plates on elastic foundation. The laminated foundation is modelled by a set of elastic layers of finite width with a variable modulus of deformation. The law of nonlinear-elastic deformation of the foundation is described as the dependence in the power functional form. The deformation modulus of the elastic foundation is variable. Poisson's ratio of each layer because of its minor changes within the layer is assumed to be constant.

Получено 25.02.2011

**ISBN 978-985-468-924-1. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 5. Гомель, 2011**

УДК 539.4.015.2

Г. М. КУЗЁМКИНА, О. И. ЯКУБОВИЧ, А. О. ШИМАНОВСКИЙ
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ

В работе на основе анализа литературных источников установлены факторы, влияющие на прочность конструкций, изготовленных из железобетонного композита. Выполнено конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния армированной балки с учетом возможного изменения модуля упругости бетона, обусловленного изменением его свойств в процессе эксплуатации.