

УДК 539.3

М. ХАЛЕЦКИ

Варшавский университет естественных наук – SGGW, Польша

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА «МАТЕМАТИКА» ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе представлен способ решения задач об устойчивости конструкций с помощью пакета МАТЕМАТИКА и простого матричного исчисления. Представленную программу можно использовать при проверке домашних работ студентов, а также для выполнения научно-исследовательских работ.

При изучении дисциплины «Соппротивление материалов» студенты ознакамливается с теорией продольного изгиба прямого стержня. В то же время проблема устойчивости более сложных конструкций не рассматривается. Эту тему излагают студентам строительных специальностей вузов при рассмотрении дисциплины «Механика строительных конструкций».

Для решения и проверки задач об устойчивости конструкций создана программа в пакете «МАТЕМАТИКА», которой посвящена данная работа. Использованный здесь способ вычисления критических сил разработал профессор отделения гражданского строительства Варшавского политехнического института Г. Емелита. Он не опубликовал свой способ (хотя и преподаёт его много лет на лекциях). Однако его описание можно найти в работах ассистентов профессора (например, [1]). Способ основан на применении уравнений равновесия моментов в узлах рамы и уравнений равновесия всех этажей рамы. Систему этих уравнений Г. Емелита назвал «моментной цепью» (предложена также «силовая цепь», которую, однако, лучше использовать при исследовании колебаний конструкций). Моментная цепь выводится, исходя из предположения о несжимаемости стержней рамы ($EA = \infty$, где E – модуль упругости, A – площадь поперечного сечения стержня).

Трансформационные формулы для стержней, нагруженных большими осевыми силами.

Для составления уравнений моментной цепи нужны трансформационные формулы, которые представляют зависимость так называемых узловых нагрузок (поперечных сил и изгибающих моментов в узлах) от узловых перемещений стержня (поперечных перемещений и углов поворота; продольные перемещения для $EA = \infty$ равны нулю). Применительно к моментной цепи нужны только формулы узловых моментов M . Если узлы не нагружены на-

чальными моментами, то моменты M зависят от продольной силы S (она учитывается в безразмерном параметре $\sigma = l\sqrt{S/EJ}$, где l – длина стержня; J – момент инерции поперечного сечения), начального φ_i и конечного φ_k углов поворота узлов, а также от угла поворота хорды стержня ψ . Формулы зависят от закрепления концов стержня; они представлены на рисунке 1. Для $S = 0$ получаются трансформационные формулы метода перемещений для нулевой поперечной силы [2].

	$M_i = \frac{EJ}{l} [\alpha\varphi_i + \beta\varphi_k - (\alpha + \beta)\psi]$ $M_k = \frac{EJ}{l} [\beta\varphi_i + \alpha\varphi_k - (\alpha + \beta)\psi]$ $\alpha = \sigma \frac{\sin \sigma - \sigma \cos \sigma}{2(1 - \cos \sigma) - \sigma \sin \sigma}, \quad \beta = \sigma \frac{\sigma - \sin \sigma}{2(1 - \cos \sigma) - \sigma \sin \sigma}$ <p>при $S = 0$: $\alpha = 4, \beta = 2$</p>
	$M_i = \frac{EJ}{l} \alpha'(\varphi_i - \psi), \quad M_k = 0$ $\alpha' = \frac{\sigma^2 \sin \sigma}{\sin \sigma - \sigma \cos \sigma}, \quad \text{при } S = 0: \alpha' = 3$
	$M_i = \frac{EJ}{l} \alpha''\varphi_i, \quad M_k = 0$ $\alpha'' = -\sigma \operatorname{tg} \sigma, \quad \text{при } S = 0: \alpha'' = 0$

Рисунок 1 – Трансформационные формулы для разных типов стержней

Моментная цепь.

Уравнения моментной цепи выводятся из принципа возможных перемещений. Принимая, что при потере устойчивости любая деформация вызвана только продольными силами и возникающими от их действия изгибающими моментами, то запишем уравнения равновесия моментов в узлах:

$$\sum_{e_i=1}^{L_i} M_i^e = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Изгибающий момент, который вызывает потерю устойчивости,

$$M_\psi = S \psi l = \frac{EJ}{l} \sigma^2 \psi. \quad (2)$$

Он поворачивает хорду стержня на угол ψ . Поэтому надо также записать уравнения равновесия этажей:

$$\sum_{e=1}^L (M^e + M_\psi^e) \psi_\lambda^e = 0, \quad \lambda = 1, \dots, \Lambda. \quad (3)$$

Здесь использованы следующие обозначения: i – номер узла, не являющегося опорой; n – число таких узлов; e – номер стержня (e_i – соединенного с узлом i); L – число стержней (L_i – связанных в узле i); M^e – моменты в узлах стержня e ($M^e = M_i^e + M_k^e$); ψ_λ^e – угол поворота стержня e в состоянии деформации λ ; Λ – число состояний деформации. В этой системе уравнений всего $2w + \Lambda$ неизвестных углов поворотов узлов φ и хорд стержней ψ .

Обращаем внимание, что подсчитывая углы поворота хорд ψ , необходимо считать раму конструкцией только с шарнирными узлами, потому что она именно так ведёт себя после потери устойчивости.

Число состояний деформации (степень геометрической неопределимости), то есть число Λ уравнений равновесия этажа, определяется формулой

$$\Lambda = 2w - L - w_p, \quad (4)$$

где w – число всех узлов; w_p – число опорных узлов. Для шарнирно-подвижной опоры $w_p = 1$. Однако поскольку узлы считаем шарнирными, то как для шарнирно-неподвижной опоры, так и для жёсткой заделки $w_p = 2$. Для рамы, изображенной на рисунке 2, а, имеем $\Lambda = 2 \cdot 5 - 4 - (2 + 2 + 2) = 0$; для приведенной на рисунке 2, б – $\Lambda = 2 \cdot 5 - 4 - (1 + 1 + 2) = 2$. Каждому из уравнений равновесия этажа соответствует состояние продольного изгиба, которое может принять рама. Действительное состояние является сложением таких «частичных» состояний. Поэтому каждый угол ψ в формулах, приведенных на рисунке 1, а также в формулах (2) и (3) представляет собой сумму углов ψ_λ для отдельных частичных состояний.

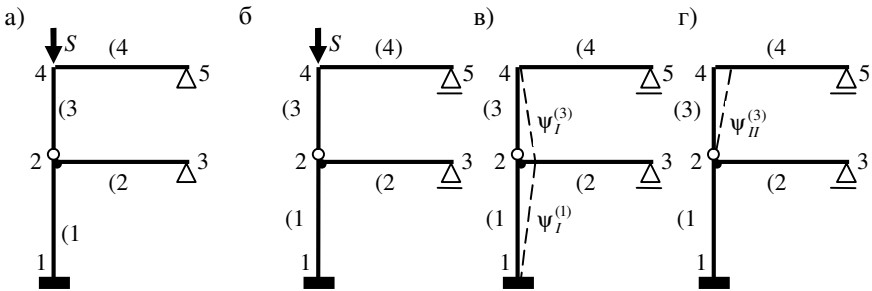


Рисунок 2 – Рама, для которой составлены уравнения моментной цепи (5) и (6)

Например, для рамы из рисунка 2, а уравнения моментной цепи являются только уравнениями равновесия узлов:

$$M_2^{(1)} + M_2^{(2)} = 0; \quad M_4^{(3)} + M_4^{(4)} = 0, \quad (5)$$

потому что тип опор 3 и 5 не допускает поворотов хорд никаких стержней. Зато для рамы из рисунка 2, б эти опоры подвижные, что делает возможным повороты хорд стержней (1) и (3), поэтому добавляются уравнения равновесия этажей (для двух частичных состояний – рисунки 2, в и 2, з):

$$\begin{cases} (M_1^{(1)} + M_2^{(1)} + M_\psi^{(1)})\psi_I^{(1)} + M_2^{(2)}\psi_I^{(2)} + (M_4^{(3)} + M_\psi^{(3)})\psi_I^{(3)} + M_4^{(4)}\psi_I^{(4)} = 0 \\ (M_1^{(1)} + M_2^{(1)} + M_\psi^{(1)})\psi_{II}^{(1)} + M_2^{(2)}\psi_{II}^{(2)} + (M_4^{(3)} + M_\psi^{(3)})\psi_{II}^{(3)} + M_4^{(4)}\psi_{II}^{(4)} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M_1^{(1)} + M_2^{(1)} + M_\psi^{(1)})\psi_I^{(1)} + (M_4^{(3)} + M_\psi^{(3)})\psi_I^{(3)} = 0 \\ (M_4^{(3)} + M_\psi^{(3)})\psi_{II}^{(3)} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Структура программы.

Программу расчёта устойчивости представим на примере рамы, изображенной на рисунке 3.

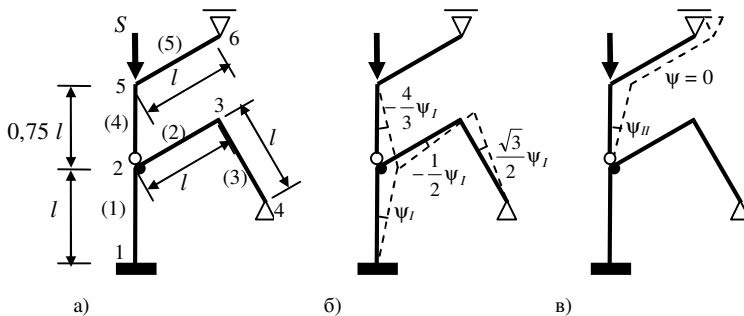


Рисунок 3 – Рама рассматриваемая в примере: а – начальное состояние; б, в – два частичных состояния потери устойчивости

1 Входные данные

Входные данные для программы:

– координаты узлов – матрица $wspw$, каждая строка которой включает координаты x и y данного узла:

$$wspw = \{ \{0, 0\}, \{0, 1\}, \{ \frac{\sqrt{3}}{2}_1, \frac{3}{2}_1 \}, \{ \frac{\sqrt{3}}{2}_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}_1 \}, \{0, \frac{7}{4}_1\}, \{ \frac{\sqrt{3}}{2}_1, \frac{9}{4}_1 \} \};$$

– номера стержней – матрица $e1$, в которой каждая строка включает номер начального и конечного узла данного стержня; n -я строка соответствует n -му стержню рамы и n -й строке матрицы $wspw$:

$$e1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 5\}, \{5, 6\}\};$$

– жёсткости изгиба стержней – вектор EJ:

$$EJ = \{1, 1, 1, 1, 1\}$$

(для упрощения можно все величины EJ отнести к одной выбранной, то есть ввести как относительные величины – представленный вектор обозначает, что все жёсткости равны друг другу);

– тип конца стержней – матрица kon, в которой каждая строка соответствует данному стержню и содержит два числа (для начала и конца стержня), которые обозначают так: 0 – жёсткое соединение с другими стержнями (нет возможности свободного поворота (например, на рисунке 2 – узел 4 для стержней (3) и (4) или на рисунке 3 – узел 2 для стержней (1) и (2)); 1 – шарнирное соединение (на рисунке 2 – узел 2 для стержня (3) или 3 для стержня (2)), 2 – свободный конец:

$$kon = \{\{0, 0\}, \{0, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 0\}, \{0, 1\}\};$$

– продольные силы в стержнях, вытекающие из нагружения силами S – вектор S; эти силы определяем вручную, рассчитывая раму, как ферму:

$$S = \{1, 0, 0, 1, 0\}$$

(подобно тому, как в случае вектора EJ, все величины S тоже рассматриваются как относительные, но здесь это необходимо, потому что они неизвестны и мы можем только принять их отношение друг к другу);

– опоры – матрица podp, которой каждая строка соответствует каждому узлу и включает три числа, сообщающие о возможности перемещения в горизонтальном и вертикальном направлении, а также поворота (0 – нет возможности перемещения, 1 – существует возможность перемещения); если в узле нет опоры (2, 3 и 5 на рисунке 3), соответствующей строке нужно присвоить величину {1, 1, 1}:

$$podp = \{\{0, 0, 0\}, \{1, 1, 1\}, \{1, 1, 1\}, \{0, 0, 1\}, \{1, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}\};$$

– углы поворота ψ стержней, вытекающие из потери устойчивости, – матрица psi; в ней 4 строк, то есть столько, сколько частичных состояний потери устойчивости (если конструкция рамы не допускает поворотов хорд стержней, как на рисунке 2, а, то матрица останется пустой):

$$psi = \{\{\psi, -0.5\psi, 0.86603\psi, -1.3333\psi, 0\}, \{0, 0, 0, \psi, 0\}\}.$$

Расчёт углов ψ не всегда прост и представляет собой особую задачу, для которой существует иная программа, тоже в пакете МАТЕМАТИКА (для этой задачи хорошо подходит также MATLAB). Эту программу планируем описать позднее в другой статье.

Входные данные возможно также вводить как символические величины (такой вид имеют матрицы psi и wspw) – пакет МАТЕМАТИКА предназначен именно для символических расчётов.

2 Цель расчёта.

Цель расчёта – параметр $\sigma = l\sqrt{S/EJ}$. Как видим, он зависит от длины и жёсткости стержня и от продольной силы в нём, поэтому он разный для разных стержней. В общем виде задачу невозможно решить – надо принять σ как относительную величину. Тогда для данного p -го стержня будем иметь

$$\sigma_p = (SEl)_p \sigma, \text{ где } (SEl)_p = l_p \sqrt{\frac{S_p}{(EJ)_p}} - \text{коэффициент приведения (в про-}$$

грамме – вектор SEl ; длины стержней l_p находятся в векторе $dlug$). Теперь уже ищем одну неизвестную – σ , а параметры σ_p для всех стержней делаем зависимыми от него. Очень популярна ошибка, которую допускают студенты, состоящая в применении одного параметра σ для всех стержней.

3 Трансформационные формулы.

После ввода входных данных надо подсчитать степень кинематической неопределимости Λ (lambda); если она равна нулю, программа пропускает некоторые шаги. Затем программа даёт формулы узловых моментов для каждого стержня: это служит контролем действий пользователя, а, прежде всего, помогает найти ошибку в работе студента. Набор этих формул имеет вид матрицы ($wz1$), в которой каждая строка включает по очереди слагаемые A_i , B_i , C_i , A_k , B_k , C_k , причем формула для узлового момента в начальном узле имеет вид $A_i \phi_i + B_i \phi_k + C_i \psi$, а в конечном $A_k \phi_i + B_k \phi_k + C_k \psi$ (сравните с формулами на рисунке 1).

$$wz1 = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\sigma(l\sigma \cos(l\sigma) - \sin(l\sigma))}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & \frac{\sigma(\sin(l\sigma) - l\sigma)}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & \frac{2l\sigma^2 \sin^2\left(\frac{l\sigma}{2}\right)}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} \\ \frac{4}{l} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l} \\ \frac{3}{l} & 0 & -\frac{3}{l} \\ \frac{0}{l} & 0 & 0 \\ \frac{3}{l} & 0 & -\frac{3}{l} \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{ccc} \frac{\sigma(\sin(l\sigma) - l\sigma)}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & \frac{\sigma(l\sigma \cos(l\sigma) - \sin(l\sigma))}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & \frac{2l\sigma^2 \sin^2\left(\frac{l\sigma}{2}\right)}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} \\ \frac{2}{l} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0,75l\sigma^2 \sin^2(0,75l\sigma)}{-0,75l\sigma \cos(0,75l\sigma) + \sin(0,75l\sigma)} & -\frac{0,75l\sigma^2 \sin^2(0,75l\sigma)}{-0,75l\sigma \cos(0,75l\sigma) + \sin(0,75l\sigma)} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Согласно этой матрице, например, для стержня (2) момент в узле 2 (строка 2, столбцы 1, 2 и 3) равен $M_2^{(2)} = EJ \left(\frac{4}{l} \varphi_2 + \frac{2}{l} \varphi_3 - \frac{6}{l} \psi^{(2)} \right)$, а в узле 3 (строка 2, столбцы 4, 5 и 6) – $M_3^{(2)} = EJ \left(\frac{2}{l} \varphi_2 + \frac{4}{l} \varphi_3 - \frac{6}{l} \psi^{(2)} \right)$. Из строке 4 видно (в аргументах синуса и косинуса), что для стержня 4 $\sigma_4 = (SEI)_4 \sigma = 0,75l\sigma$. Однако это только общий вид – не учитывающий, что в некоторых узлах может быть заделка, а хорды стержней поворачиваются на разные углы. Заделка в узле обозначает, что угол поворота в этом узле равен нулю – поэтому равным нулю принимаем тот элемент матрицы, который соответствует узлу с заделкой. Зато разные углы поворота хорд стержней учитываем, умножая столбцов коэффициентов C_i и C_k (3 и 6) сначала на углы ψ для состояния I потери устойчивости (строка 1 матрицы psi), потом – состояния II (строка 2), и т. д. Если матрица psi пустая, то из матрицы wz1 удалятся столбцы 3 и 6 (это программа выполняет на основании величины lambda: удаляет столбцы для lambda = 0). Если существует только одно состояние потери устойчивости, то число столбцов не меняется; если более – каждое из них составляет два новых столбца.

После выполнения этого шага получается матрица wz.

$$wz = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sigma(l\sigma \cos(l\sigma) - \sin(l\sigma))}{-2 + 2\cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & \frac{2l\sigma^2 \sin^2\left(\frac{l\sigma}{2}\right)}{-2 + 2\cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & 0 & 0 \\ \frac{4}{l} & \frac{2}{l} & \frac{3}{l} & 0 & \frac{2}{l} \\ \frac{3}{l} & 0 & -\frac{2,598}{l} & 0 & 0 \\ \frac{l}{0} & 0 & \frac{l}{0} & 0 & 0 \\ \frac{3}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sigma(l\sigma \cos(l\sigma) - \sin(l\sigma))}{-2 + 2\cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} \\ \frac{4}{l} \\ 0 \\ \frac{0,75l\sigma^2 \sin(0,75l\sigma)}{-0,75l\sigma \cos(0,75l\sigma) + \sin(0,75l\sigma)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{2l\sigma^2 \sin^2\left(\frac{l\sigma}{2}\right)}{-2 + 2\cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} \\ \frac{3}{l} \\ 0 \\ \frac{l\sigma^2 \sin(0,75l\sigma)}{-0,75l\sigma \cos(0,75l\sigma) + \sin(0,75l\sigma)} \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,75l\sigma^2 \sin(0,75l\sigma) \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{0,75l\sigma^2 \sin(0,75l\sigma)}{-0,75l\sigma \cos(0,75l\sigma) + \sin(0,75l\sigma)} \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{-0,75l\sigma^2 \sin(0,75l\sigma)}{-0,75l\sigma \cos(0,75l\sigma) + \sin(0,75l\sigma)} \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 5 \end{array}$$

Появляется ещё один – последний – столбец, который содержит номера стержней, полезные для лучшего ориентирования в случае большого числа стержней. Видим, что, например, для стержня (2) момент в узле 2 для состояния I потери устойчивости (строка 2, столбцы 1, 2 и 3) равен

$M_2^{(2)} = EJ \left(\frac{4}{l} \varphi_2 + \frac{2}{l} \varphi_3 - \frac{3}{l} \psi^{(2)} \right)$, в узле 3 (строка 2, столбцы 5, 6 и 7) –
 $M_3^{(2)} = EJ \left(\frac{2}{l} \varphi_2 + \frac{4}{l} \varphi_3 - \frac{3}{l} \psi^{(2)} \right)$; в состоянии II $M_2^{(2)} = EJ \left(\frac{4}{l} \varphi_2 + \frac{2}{l} \varphi_3 \right)$ (столб-
 цы 1, 2 и 4), $M_3^{(2)} = EJ \left(\frac{2}{l} \varphi_2 + \frac{4}{l} \varphi_3 \right)$ (столбцы 5, 6 и 8). Следовательно, коэф-
 фициенты C_i и C_k умножаются на $\psi_I^{(2)} = -0,5$ для состояния I и на $\psi_{II}^{(2)} = 0$
 для состояния II. Видим тоже, что коэффициенты A_i и A_k для стержня (1)
 стали равными 0, потому что соответствуют узлу 1, для которого $\varphi = 0$.

4 Матрица коэффициентов.

Система уравнений равновесия для подсчета критической силы имеет вид:

$$\mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (7)$$

где \mathbf{M} – матрица коэффициентов; \mathbf{u} – вектор перемещений (φ и ψ); \mathbf{f} – вектор узловых сил.

Конструкция теряет устойчивость, если определитель $\det(\mathbf{M}) = 0$. Следовательно, с формальной точки зрения, неизвестен в этой системе вектор \mathbf{u} , но в действительности мы ищем такие σ , при которых выполняется условие $\det(\mathbf{M}) = 0$.

Структура матрицы коэффициентов блочная (рисунок 4). Блок `macfi` отвечает за углы поворота узлов φ и построен следующим образом:

- в элементах с координатами jj , т.е. на диагонали, находятся коэффициенты A_i тех стержней, которые начинаются в узле j и коэффициенты B_k тех, которые кончаются в узле j (если в одном элементе найдётся несколько коэффициентов, то их надо просуммировать);

- в элементах с координатами jl находятся коэффициенты B_i стержней, начинающихся в узле j , а кончающихся в узле l ;

- в элементах с координатами lj находятся коэффициенты A_k стержней, начинающихся в узле j , а кончающихся в узле l .

Блок `macpsi` отвечает за углы поворота хорд стержней ψ . В j -й строке и в столбце η ($\lambda, \eta = 1, \dots, \Lambda$) находится сумма коэффициентов C_i и C_k для j -го стержня, соответствующих состоянию потери устойчивости η (в столбце ψ_I – появляющихся из 3-го столбца матрицы `wz`, в столбце ψ_{II} – из 4-го столбца, и т. д.). На второй стороне диагонали матрицы \mathbf{M} находится транспонированный блок `macpsi`.

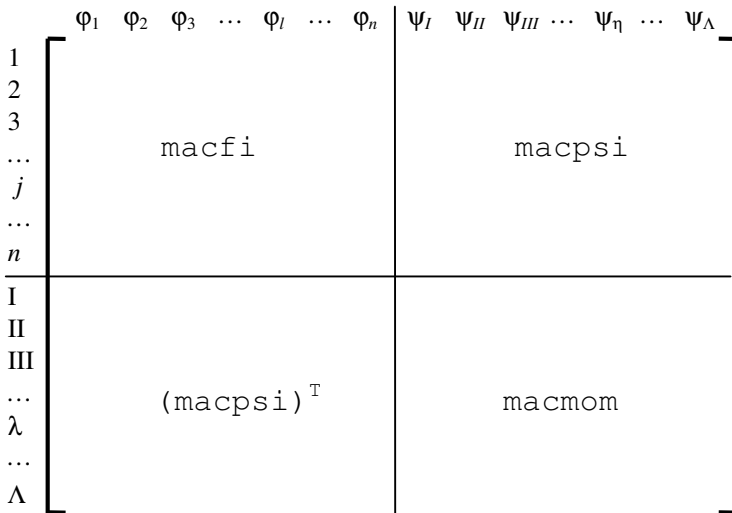


Рисунок 4 – Структура матрицы коэффициентов системы (7)

Блок `mastom` отвечает за моменты M_ψ , выводящие стержень из устойчивого состояния (формула (2)). Если угол ψ_λ^e поворота хорды стержня e в состоянии потери устойчивости λ , то представим связь с углом $\psi_\lambda^{(1)}$ для стержня (1) в этом состоянии в виде $\psi_\lambda^e = \psi_\lambda^{(1)} a_{\lambda e}$, где $a_{\lambda e}$ – коэффициент пропорциональности ($a_{\lambda 1} = 1$). Тогда в элементе блока `mastom` с координатами λ_η имеем:

$$\mathbf{M}_{\lambda\eta} = \sum_{e=1}^L (C_{ie} + C_{ke} + S_e(EJ)_e \sigma^2) a_{\lambda e} a_{\eta e},$$

где C_b , C_k – коэффициенты при угле ψ в трансформационных формулах; S_e – продольная сила в стержне e (из вектора S), $(EJ)_e$ – жёсткость этого стержня (из вектора EJ).

Если матрица `psi` пустая (т. е. `lambda = 0`), то матрица \mathbf{M} состоит только из блока `macfi`. Матрица \mathbf{M} представляется в программе как `mac`.

$$\text{mac} = \begin{pmatrix}
0 & \frac{\sigma(l\sigma \cos(l\sigma) - \sin(l\sigma))}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{4}{l} + \frac{\sigma(l\sigma \cos(l\sigma) - \sin(l\sigma))}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & \frac{2}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{2}{l} & \frac{7}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{l} + \frac{0.75l\sigma^2 \sin(0.75l\sigma)}{-0.75l\sigma \cos(0.75l\sigma) + \sin(0.75l\sigma)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2l\sigma^2 \sin^2\left(\frac{l\sigma}{2}\right)}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & \frac{3}{l} + \frac{2l\sigma^2 \sin^2\left(\frac{l\sigma}{2}\right)}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & \frac{0.4}{l} & 0 & \frac{l\sigma^2 \sin(0.75l\sigma)}{-0.75l\sigma \cos(0.75l\sigma) + \sin(0.75l\sigma)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{0.75l\sigma^2 \sin(0.75l\sigma)}{-0.75l\sigma \cos(0.75l\sigma) + \sin(0.75l\sigma)} \\
0 & \frac{2l\sigma^2 \sin^2\left(\frac{l\sigma}{2}\right)}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{l} + \frac{2l\sigma^2 \sin^2\left(\frac{l\sigma}{2}\right)}{-2 + 2 \cos(l\sigma) + l\sigma \sin(l\sigma)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{0.4}{l} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{l\sigma^2 \sin(0.75l\sigma)}{-0.75l\sigma \cos(0.75l\sigma) + \sin(0.75l\sigma)} & 0 & 0 & \frac{0.75l\sigma^2 \sin(0.75l\sigma)}{-0.75l\sigma \cos(0.75l\sigma) + \sin(0.75l\sigma)} \\
0 & \frac{5.25}{l} - \frac{3.37\sigma^2}{l} + \frac{1.3333l\sigma^2 \sin(0.75l\sigma)}{-0.75l\sigma \cos(0.75l\sigma) + \sin(0.75l\sigma)} - \frac{2l\sigma^2 \sin\left(\frac{l\sigma}{2}\right)}{l\sigma \cos\left(\frac{l\sigma}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{l\sigma}{2}\right)} & \frac{\sigma^2}{l} \left(1.7777 - \frac{l \sin(0.75l\sigma)}{-0.75l\sigma \cos(0.75l\sigma) + \sin(0.75l\sigma)} \right) & 0 & 0 \\
0 & \frac{\sigma^2}{l} \left(1.7777 - \frac{l \sin(0.75l\sigma)}{-0.75l\sigma \cos(0.75l\sigma) + \sin(0.75l\sigma)} \right) & 0 & -\frac{1.3333\sigma^2}{l} + \frac{0.75l\sigma^2 \sin(0.75l\sigma)}{-0.75l\sigma \cos(0.75l\sigma) + \sin(0.75l\sigma)} & 0
\end{pmatrix}$$

5 Редуцированная матрица коэффициентов.

Из матрицы \mathbf{M} удаляются столбцы и строки, соответствующее тем узлам, в которых возможен свободный поворот (т. е. нет узловых моментов), а также тех, в которых находится заделка. Первый тип узлов приводит к тому, что в матрице \mathbf{M} существуют нулевые столбцы и строки (здесь – 4 и 6), которые надо удалить, чтобы определитель матрицы не был равен 0. Если же не удалим строки и столбцы, соответствующие узлам второго типа, то задача решится правильно, но таким образом мы вводим добавочные неизвестные – углы в заделках, о которых знаем, что они равны нулю, т. е. напрасно увеличиваем размер задачи.

Матрица \mathbf{M} редуцируется подобно тому, как это осуществляется в методе конечных элементов – в матрице kon нужно найти номера элементов отличных от 0 (т. е. соответствующих узлам, в которых возможен свободный поворот), а в матрицы rodpr – номера тех строк, в которых последний элемент равен 1 (т. е. соответствующих закрепленным узлам), и затем вычеркнуть из матрицы \mathbf{M} строки и столбцы с такими же номерами. В нашем примере – это

Именно из-за сложности этого уравнения невозможно использовать типичную для решения уравнений команду `Solve` – вместе нее используется команда `FindRoot`, которая требует ввода начальной величины, от которой программа начнёт поиск решения. Начальную величину находим из эпюры функции $f(\sigma) = \det(\mathbf{M}_{\text{red}})$, но если прежде векторы l , S или EJ были введены в символическом виде, теперь надо придать их элементам какие-то численные величины. В нашем примере таким образом введены координаты узлов, по этому надо принять некоторое значение l (принято $l = 2$).

Этот шаг указан на рисунке 6. Напомним, что критическая сила $S = \frac{EJ}{l^2} \sigma^2$. Согласно пункту 2, если длина, продольная сила и жёсткость для p -го стержня равны соответственно $l_p = k_{lp} l_0$, $S_p = k_{Sp} S_0$ и $(EJ)_p = k_{EJp} (EJ)_0$ (где l_0 , S_0 , $(EJ)_0$ – базовые значения, k – коэффициенты пропорциональности), то получаем:

$$\sigma_i^2 = \frac{S_i l_i^2}{(EJ)_i} = \frac{k_{si} k_{li}^2 S l^2}{k_{EJi} EJ} \Rightarrow S_i = \frac{(EJ)_i}{l_i^2} \sigma_i^2 = \frac{k_{EJi} (EJ)_0}{(k_{li} l_0)^2} \frac{k_{si} k_{li}^2}{k_{EJi}} \sigma_0^2 = k_s \frac{(EJ)_0}{l_0^2} \sigma_0^2.$$

То есть критическая сила не зависит от соотношений между жёсткостями и длинами стержней. Поэтому для обеих стержней (1) и (4) критическая сила равна $S_{kr} = \frac{(1,0808)^2}{2^2} EJ = 0,817 EJ$.

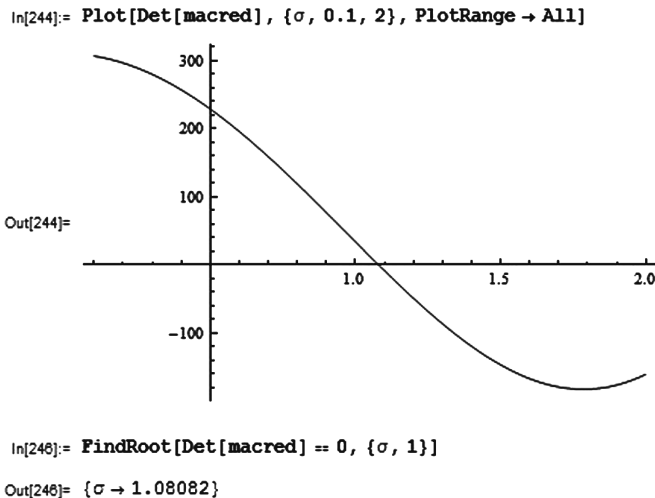


Рисунок 6 – Эпюра функции $f(\sigma) = \det(\mathbf{M}_{\text{red}})$ и решение уравнения $\det(\mathbf{M}_{\text{red}}) = 0$

Исследование площади безопасности конструкции.

Интересной для инженера-строителя проблемой является анализ комбинаций действия продольных сил в конструкции. Описанная выше программа даёт возможность исследовать ситуации, когда в разных стержнях действуют разные продольные силы. Предельные значения этих сил в случае их одновременного действия составляют так называемую площадь безопасности. Эту задачу студенты тоже решают в домашних работах.

Проблема представляется на примере рамы из рисунка 7. Продольные силы возникают здесь в стержнях (2), (3) и (4). Для исследования площади безопасности можем принять вектор сил следующим образом: $S = \{0, k_2, k_3, k_2\}$, т. е. принимаем, что величины сил по очереди $S_2 = k_2 S$ и $S_3 = k_3 S$, и каждая из них может меняться без ограничений. Выполняем расчёт вплоть до вычисления определителя $\det(M_{\text{ред}})$ – он будет функцией σ , k_2 и k_3 (а также возможно l и EJ).

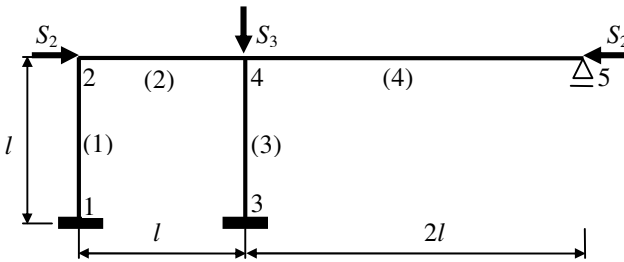


Рисунок 7 – Рама, нагруженная большими продольными силами

Чтобы подсчитать σ , принимаем $k_2 = 0, k_3 = 1$ и $k_2 = 1, k_3 = 0$ – таким образом мы определяем граничные значения сил. Нулевые величины k могут вызвать ситуацию, при которой программа не вычислит определителя из-за присутствия выражения типа $1/0$ – тогда надо подсчитать границу определителя для $k \rightarrow 0$ (команда `Limit`). Затем в определитель подставляются пары $k_2 = 1, k_3 = 0,5$; $k_2 = 1, k_3 = 1$; $k_2 = 1, k_3 = 2$ – и т. д., по своему усмотрению.

Для примера, изображенного на рисунке 7, получаются результаты, приведенные в таблице 1.

Им соответствуют пары критических сил (для $k_2 = 1; S_3 = k_3 S_2$), содержащиеся в таблице 2.

Таблица 1 – Результаты расчета безразмерного параметра σ

k_2	0	1								
k_3	1	0	0,5	1	1,5	2	3	6	10	50
σ^2	14,90	4,353	4,321	4,283	4,235	4,174	3,953	2,409	1,469	0,297

Таблица 2 – Результаты расчета критических сил

k_2	0	1									
k_3	1	0	0,5	1	1,5	2	3	6	10	50	
S_2	0	4,353	4,321	4,283	4,235	4,174	3,953	2,409	1,469	0,297	
S_3	14,90	0	2,16	4,283	6,353	8,347	11,86	14,45	14,69	14,87	

Безопасная площадь представлена на эпюре на рисунке 8. В случае, когда существуют только сжимающие силы, она всегда ниже указанных точек. Очевидно, она всегда включает точку (0, 0). Если силы принимают значения за пределами этой площади, то конструкция подвергнется разрушению – например, рама из рисунка 7 выдержит действие силы $S_2 = 4,2 \frac{EJ}{l^2}$ или $S_3 = 14 \frac{EJ}{l^2}$, если эти силы действуют отдельно, но если вместе – вызвут разрушение, потому что точка (4,2; 14) находится выше безопасной площади.

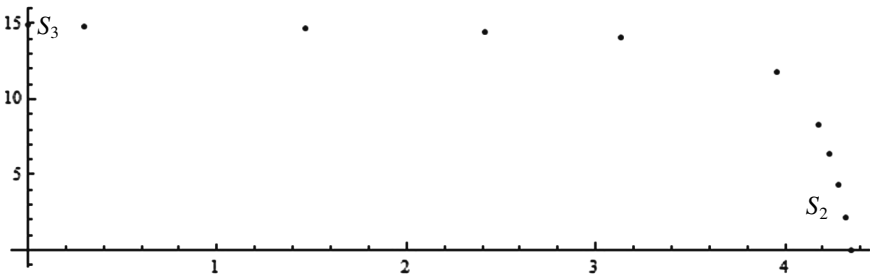


Рисунок 8 – Безопасная площадь для рамы из рисунка 7

Подобная эпюра составляется для ситуации, когда коэффициент k_3 отрицателен, т. е. сила S_3 растягивает стержень (3), – рисунок 9.

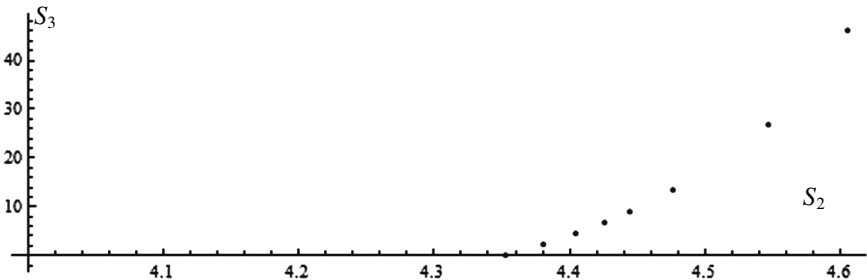


Рисунок 9 – Безопасная площадь для рамы из рисунка 7 в случае $k_3 < 0$

Безопасная площадь включает точку $(0, 0)$, т. е. находится выше указанных точек. Это означает, что если сила растягивает стержень, то она укрепляет конструкцию: рама не выдержит силы $S_2 = 4,5 \frac{EJ}{l^2}$, если эта сила действует самостоятельно, но выдержит, если на нее действует растягивающая сила $S_3 > 20 \frac{EJ}{l^2}$.

Таким образом, в статье описаны методика решения задач об устойчивости рамных конструкций и созданная на ее основе программа в среде пакета «MATHEMATICA».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Hetmański, K. Zastosowanie Microsoft Excel w mechanice konstrukcji / K. Hetmański. – Warszawa: Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, 2004. – 88 s.

2 Халецки, М. Применение компьютера для проверки работ студентов / М. Халецки // Механика. Научные исследования и методические разработки. – Гомель: БелГУТ, 2010. – Вып. 4. – С. 183–197.

M. CHALECKI

APPLICATION OF MATHEMATICA® IN THE STABILITY ANALYSIS OF FRAME CONSTRUCTIONS

The paper presents a way to solve problems concerning the stability of frames with the application of MATHEMATICA and a simple matrix calculus. The presented programme can also be used to check the students' homework concerning this topic.

Получено 27.10.2012