

17 **Андреев, Н.** Кривоногая, зато прямоходящая [Электронный ресурс] / Н. Андреев, М. Калининченко, Р. Кокшаров // Телеграф «Вокруг Света», 2008. – Режим доступа: www.vokrugsveta.ru/telegraph/technics/691. – Дата доступа: 12.04.2013.

18 **Проект “Википедия”** [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://ru.wikipedia.org/>. – Дата доступа: 15.06.2013.

19 **Проект “Математические этюды”**, 2002–2013 гг. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.etudes.ru>. – Дата доступа: 22.06.2013.

G. A. KUTEEVA

THE CABINET OF APPLIED MECHANICS IN SAINT-PETERBURG STATE UNIVERSITY

Some historical facts concerning the cabinet of the applied mechanics in Saint-Petersburg State University are presented. The application of the mechanism collection of this cabinet in the modern course on theoretical mechanics is discussed.

Получено 25.09.2013

**ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 7. Гомель, 2013**

УДК 531.3

А. В. ЛОКТИОНОВ

Витебский государственный технологический университет, Беларусь

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Установлено, что при вращении тела вокруг неподвижной оси изменение осевого момента инерции является причиной появления моментов сил инерции, а моменты сил инерции применительно к отдельным телам действуют как моменты внешних сил.

Ранее подробно изучена механическая система при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси [1–6]. Однако моменты инерции системы рассматривались как постоянные величины. Влияние сил инерции на движение тел механической системы не учитывалось. В работах [7, 8] установлено, что моменты сил инерции системы применительно к отдельным телам действуют как моменты внешних сил, изменение осевого момента инерции является причиной появления моментов сил инерции. Установлено также, что угловое ускорение не всегда совпадает по направлению с моментом внешних сил. Оценка влияния сил инерции на кинетические моменты тел системы, а также взаимосвязи момента кориолисовых сил инерции при движении тела массы m в радиальном направлении с изменением момента инерции системы и ее угловой скоростью вращения ω являются предметом самостоятельного изучения.

Рассмотрим движение системы, которая состоит из двух тел, одно из которых представляет собой диск, а второе – тело точечной массы (рисунок 1). Диск характеризуется моментом инерции I_0 , тело точечной массы – массой m . Тело 2 способно перемещаться в радиальном направлении ($r = OM$) по диску 1, поэтому момент инерции системы является величиной переменной.

Момент инерции системы

$$I = I_0 + mr^2. \quad (1)$$

Кинетический момент системы

$$L = I \cdot \omega. \quad (2)$$

Продифференцируем равенство (2) по времени и получим

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} + \frac{dI}{dt} \omega = M^e. \quad (3)$$

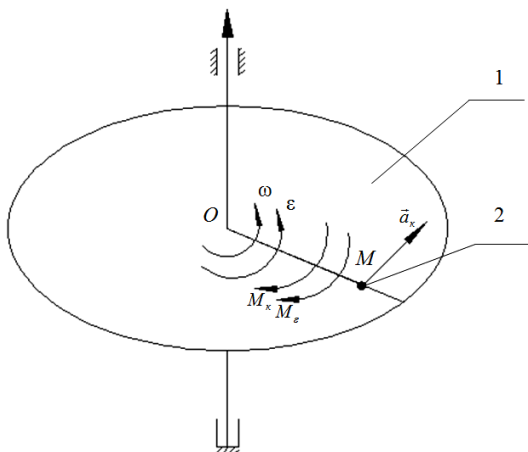


Рисунок 1 – Расчетная схема системы

Из равенства (3) следует, что ускорение системы

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M^e - \frac{dI}{dt} \omega}{I}. \quad (4)$$

Из (4) видно, что если $M^e = \frac{dI}{dt} \omega$, то $\frac{d\omega}{dt} = 0$, т. е. $\omega = \text{const}$; $M^e > \frac{dI}{dt} \omega$, то $\frac{d\omega}{dt} > 0$; $M^e < \frac{dI}{dt} \omega$, то $\frac{d\omega}{dt} < 0$. Анализ уравнения (4) показывает, что ускорение не всегда совпадает по направлению с моментом внешних сил.

Дифференцируя уравнение (1) по времени, получим

$$\frac{dI}{dt} = 2mr\dot{r} = 2mr\dot{r} = 2mr\dot{v}. \quad (5)$$

Момент кориолисовых сил инерции при движении тела 2

$$M_{\bar{e}} = 2m(\omega\dot{r}) \cdot r = 2mr\dot{v}\omega. \quad (6)$$

Из равенств (5) и (6) следует, что

$$\frac{dI}{dt}\omega = M_{\bar{e}}. \quad (7)$$

Полученная формула (7) определяет взаимосвязь геометрии масс с проявлением сил инерции. Она показывает, что изменение осевого момента инерции, наряду с угловой скоростью, также является причиной появления моментов сил инерции. Изменение осевого момента инерции вызвано перемещением точки в радиальном направлении.

Рассмотрим влияние сил инерции отдельно на каждое тело системы.

Кинетический момент первого тела

$$L_1 = I_0\omega = I_0 \frac{L}{I}, \quad (8)$$

второго тела

$$L_2 = (mv) \cdot r = mr^2\omega = mr^2 \frac{L}{I}.$$

Тогда $I_0 \frac{L}{I} + mr^2 \frac{L}{I} = L$. Следовательно, соблюдается условие $L_1 + L_2 = L$.

При перемещении тела 2 на тело 1 действует кориолисова сила инерции и сила инерции углового ускорения. Рассмотрим влияние сил инерции на тело 1. Производная от кинетического момента первого тела

$$\frac{dL_1}{dt} = -M_{\bar{e}} - M_{\varepsilon}, \quad (9)$$

где $M_{\bar{e}} = \frac{\dot{I}L}{I}$. Моменты реакций связей и силы тяжести равны нулю. Найдем

момент M_{ε} сил инерции углового ускорения. При этом

$$a_{\tau} = \varepsilon r = \frac{d\omega}{dt} r, \quad \Phi_{\tau} = ma_{\tau} = m \left(\frac{d\omega}{dt} \right) \cdot r,$$

$$M_{\varepsilon} = (ma_{\tau}) \cdot r = m \frac{d\omega}{dt} \cdot r^2,$$

где $\omega = \frac{L}{I}$, а $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{I} \right) = L \frac{d}{dt} (I^{-1}) = -LI^{-2} \dot{I} = -\frac{\dot{I}}{I^2} L$.

Следовательно, $M_{\varepsilon} = -m\left(\frac{\dot{i}}{I^2}L\right)r^2 = -\frac{\dot{i}}{I^2}mr^2L$.

Представим уравнение (9) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} &= -\frac{\dot{i}L}{I} - \left(-\frac{\dot{i}}{I^2}mr^2L\right) = -\frac{\dot{i}L}{I} + \frac{\dot{i}}{I^2}mr^2L = -\frac{\dot{i}L}{I} + \frac{\dot{i}}{I^2}L(mr^2 + I_0 - I_0) = \\ &= -\frac{\dot{i}L}{I} + \frac{\dot{i}L}{I} - \frac{\dot{i}}{I^2}LI_0. \end{aligned}$$

Тогда $\frac{dL_1}{dt} = -\frac{\dot{i}LI_0}{I^2}$. Откуда $L_1 = -I_0L \int \frac{\dot{i}}{I^2} dt$. Введем замену $\frac{1}{I} = Z$;
 $-\frac{\dot{i}}{I^2} dt = dZ$.

Получим $L_1 = -I_0L \int dZ = I_0LZ + c = \frac{I_0L}{I} + c$.

При $t = 0$ $L_1 = \frac{I_0L}{I_0 + mr^2}$, $I = I_0 + mr^2$. Откуда $c = 0$. Окончательно получим

$$L_1 = \frac{LI_0}{I},$$

что соответствует равенству (8).

Следовательно, моменты инерции сил системы применительно к отдельным телам системы действуют как моменты внешних сил.

Рассмотрим влияние сил инерции на тело 2. Производная от кинетического момента второго тела

$$\begin{aligned} \frac{dL_2}{dt} &= M_{\bar{e}} + M_{\varepsilon} = \frac{\dot{i}L}{I} - \frac{\dot{i}}{I^2}mr^2L = \frac{\dot{i}L}{I} - \frac{\dot{i}}{I^2}L(mr^2 + I_0 - I_0) = \\ &= \frac{\dot{i}L}{I} - \frac{\dot{i}L}{I} + \frac{\dot{i}}{I^2}LI_0 = \frac{\dot{i}LI_0}{I^2}. \end{aligned}$$

Тогда $\frac{dL_2}{dt} = \frac{\dot{i}LI_0}{I^2}$. Из данного уравнения найдем $L_2 = I_0L \int \frac{\dot{i}}{I^2} dt$ и, введя замену $\frac{1}{I} = Z$; $\frac{\dot{i}}{I^2} dt = -dZ$, получим $L_2 = -I_0L \int dZ = -I_0LZ + c = -\frac{I_0L}{I} + c$.

При $t = 0$ $L_2 = \frac{mr^2L}{I}$. Откуда $c = L$, а

$$L_2 = L - \frac{LI_0}{I} = L - L_1.$$

Следовательно, и в рассматриваемом случае также соблюдается условие $L_1 + L_2 = L$.

Вывод. При исследовании кинетических моментов тел системы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси и условии, что момент инерции системы является переменной величиной, установлено, что изменение осевого момента инерции наряду с угловой скоростью вращения системы является причиной появления моментов сил инерции, а моменты сил инерции системы применительно к отдельным телам действуют как моменты внешних сил. Установлено также, что угловое ускорение не всегда совпадает по направлению с моментом внешних сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Добронравов, В. В.** Курс теоретической механики / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – М.: Высш. шк., 1983. – 528 с.
- 2 **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М.: Высш. шк., 2003. – 416 с.
- 3 **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 2 / А. А. Яблонский, В. А. Никифоров. – М.: Высш. шк., 1984. – 423 с.
- 4 **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 2. Динамика / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2006. – 736 с.
- 5 **Гернет, М. М.** Курс теоретической механики : учеб. для вузов / М. М. Гернет. – М.: Высш. шк., 1981. – 440 с.
- 6 **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. В 3 ч. Ч. 2 / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М.: Наука, 1984. – 560 с.
- 7 **Локтионов, А. В.** Исследование кинетических моментов тел системы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси / А. В. Локтионов, А. С. Соколова // Материалы докладов XLII науч.-техн. конф. преподавателей и студентов университета / УО «ВГТУ». – Витебск : УО «ВГТУ», 2009. – С. 63–66.
- 8 **Локтионов, А. В.** Оценка методов расчета уравнения относительного радиального перемещения тела по вращающемуся диску / А. В. Локтионов, А. С. Соколова // Теоретическая и прикладная механика: Междунар. науч.-техн. журнал. – Минск, 2010. – № 25. – С. 103–106.

A. V. LOKTIONOV

MECHANICAL SYSTEMS RESEARCH AT THE SOLID BODY ROTATION AROUND A FIXED AXIS

It was established that at the solid body rotation around a fixed axis the axial inertia moment change is the cause of the inertia forces moments. At the same time these inertia forces moments applied to individual bodies act as moments of external forces.

Получено 27.05.2013