

R. A. MIRZAEV, N. A. SMIRNOV

CONTROL OF THE DRIVES FOR SPATIAL MECHANISM WITH CLOSED KINEMATIC CHAINS

Kinematics and dynamics analysis for the manipulator with parallel structure (delta-mechanism) is presented in this paper. The mathematical model of the manipulator control system was created. The model includes the PID-regulator to control the motors. There were obtained the graphics of parts moving for various coefficients of PID-controller and coefficients for optimal transition process.

Получено 23.04.2013

ISSN 2227-1104. Механика. Научные исследования
и учебно-методические разработки. Вып. 7. Гомель, 2013

УДК 531.4

А. И. МУШТАРИ

*Казанский национальный исследовательский технологический университет,
Россия*

РАВНОВЕСИЕ НЕЗАКРЕПЛЕННОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ НА ШЕРОХОВОЙ ПЛОСКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИЛЫ

Решена задача о равновесии круглой пластины на горизонтальной шероховатой плоскости. Рассмотрен общий случай, когда к пластине прикладывается плоская система сил с равнодействующей, линия действия которой произвольна. Полученная система уравнений решается численно.

Общие подходы к изучению равновесия твердых тел под действием сил сухого трения подробно изложены в [1]. Одна из частных задач, а именно, о равновесии стержня на шероховатой плоскости, изучалась в [2]. Практический интерес представляет другая частная задача – о равновесии пластины в случае, если линия действия равнодействующей силы не проходит через центр пластины. Отметим, что эта задача ранее предлагалась на компьютерном конкурсе Всероссийской олимпиады по теоретической механике, где её никто не смог решить.

Рассмотрим задачу в следующей постановке. Однородная пластина в форме круглого диска лежит на шероховатой горизонтальной плоскости, причем коэффициент сухого трения f (рисунок 1). Пусть приложенные к диску внешние силы имеют равнодействующую, лежащую в плоскости диска и равную по величине $Q = kP$, где P – вес диска, k – некоторый коэффи-

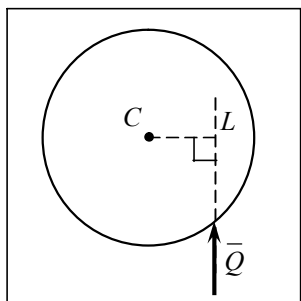


Рисунок 1 – Действие силы на шероховатую пластину

цент. Расстояние от центра диска C до линии действия этой силы $CL = \gamma R$, где R – радиус диска. Требуется определить максимальное значение k , при котором диск может находиться в равновесии.

Приведем систему сил трения, действующих на диск, к главному вектору $\bar{R}_{\text{тр}}$ и главному моменту $M_{\text{тр},L}$ относительно точки L . Из условия

$$\sum_i M_L(\bar{F}_i) = Q \cdot 0 + R_{\text{тр}} \cdot 0 + M_{\text{тр},L} = 0$$

следует, что главный момент $M_{\text{тр},L} = 0$. Следовательно, равнодействующая системы сил трения приложена к точке L .

При выходе из равновесия диск начнет совершать плоское движение. Определим положение мгновенного центра вращения K (рисунок 2). Картина распределения $d\bar{F}_{\text{тр}}$ при мгновенном вращении вокруг точки K такова, что проекции сил $d\bar{F}_{\text{тр}}$ на прямую KC на малых площадках $dS_{(1)}$ и $dS_{(2)}$, симметричных относительно KC , взаимно сокращаются: $(d\bar{F}_{\text{тр}(1)} + d\bar{F}_{\text{тр}(2)})_{KC} = 0$. Поскольку $\bar{R}_{\text{тр}} = \iint_S d\bar{F}_{\text{тр}}$, то и проекция $(\bar{R}_{\text{тр}})_{KC} = 0$. Поэтому $\bar{R}_{\text{тр}} \perp KC$. С другой стороны, $\bar{R}_{\text{тр}} = -\bar{Q}$, то есть $\bar{R}_{\text{тр}} \perp CL$. Значит, точка K лежит на прямой CL .

Обозначим $\lambda = \frac{KC}{R}$. Значение λ ищем таким, чтобы удовлетворялось условие $M_{\text{тр},L} = 0$, то есть

$$\iint_S M_L(d\bar{F}_{\text{тр}}) = 0, \quad (1)$$

где силы трения $d\bar{F}_{\text{тр}}$ на малых площадках dS направлены против возможных перемещений при возможном вращении диска под действием \bar{Q} , то есть перпендикулярно отрезкам KM (см. рисунок 2).

Выберем начало координат в точке K . По теореме Вариньона:

$$M_L(d\bar{F}_{\text{тр}}) = -dF_{\text{тр}} \sin \varphi \cdot y + dF_{\text{тр}} \cos \varphi \cdot (KL - x). \quad (2)$$

Здесь $dF_{\text{тр}} = f dN$. Полагаем, что давление пластины на опорную плоскость распределено равномерно по площади. Тогда нормальная реакция dN

определяется из пропорции: $\frac{dN}{N} = \frac{dS}{\pi R^2}$. Здесь $dS = dx dy$. Из уравнения равновесия $\sum_i F_{iz} = 0$ следует: $N = P$. Тогда

$$dF_{\text{тр}} = f dN = \frac{fP}{\pi R^2} dx dy; \quad (3)$$

$$KL = KC + CL = (\lambda + \gamma)R, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (4)$$

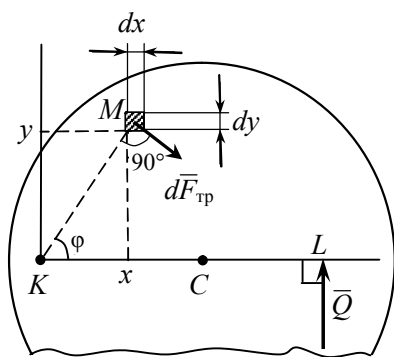


Рисунок 2 – Силы трения на малых участках пластины

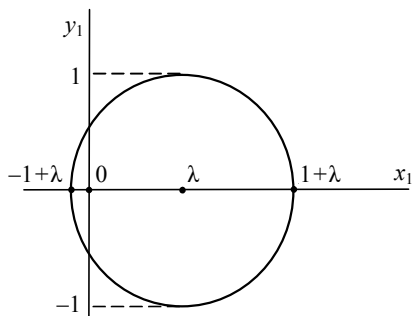


Рисунок 3 – Область интегрирования в безразмерных координатах

Подставим (2), (3), (4) в (1). При этом удобно перейти к безразмерным координатам (рисунок 3):

$$x_1 = \frac{x}{R}, \quad y_1 = \frac{y}{R}. \quad (5)$$

После сокращения коэффициента получим:

$$\iint_{S_1} \frac{-y_1^2 + (\lambda + \gamma - x_1)x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} dx_1 dy_1 = 0, \quad (6)$$

где область интегрирования S_1 задана соотношением $(x_1 - \lambda)^2 + y_1^2 \leq 1$.

Соотношение (6) представляет собой нелинейное уравнение вида $f(\lambda) = 0$. Как выясняется из анализа интеграла в (6) либо из численного экс-

перимента, функция $f(\lambda)$ монотонно возрастает и уравнение (6) имеет единственное решение.

Заметим, что аналитическое интегрирование в (6) было бы весьма громоздко, особенно с учетом того, что область интегрирования зависит от λ . Даже если произвести такое интегрирование, то получившееся нелинейное уравнение относительно λ можно было бы решить лишь численно.

Поэтому удобнее решить уравнение (6) полностью численно, применив, например, метод деления отрезка пополам. При этом численно интегрировать удобнее не по кругу, а по квадрату. Для этого интеграл в (6) удобно представить в виде

$$I = \iint_{S_{\text{КВ}}} F(x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

где область интегрирования $S_{\text{КВ}}$ определяется соотношениями: $-1 + \lambda \leq x_1 \leq 1 + \lambda$, $-1 \leq y_1 \leq 1$, а подынтегральная функция:

$$F(x_1, y_1) = \begin{cases} \frac{-y_1^2 + (\lambda + \gamma - x_1)x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, & \text{при } (x_1 - \lambda)^2 + y_1^2 \leq 1; \\ 0, & \text{при } (x_1 - \lambda)^2 + y_1^2 > 1. \end{cases}$$

Для вычисления интеграла достаточно использовать квадратурную формулу прямоугольников (для удобства записи индекс «1» опущен):

$$I \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F(x_i, y_j) \cdot h^2,$$

где h – малый шаг метода, $h = \frac{2}{N}$ (учтено, что длина стороны квадрата равна 2), $x_{i+1} = x_i + h$, $y_{i+1} = y_i + h$; начальные узлы: $x_1 = -1 + \lambda$, $y_1 = -1$. Для получения ответа с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,001, достаточно выбрать, например, $N = 300$.

Легко выяснить, что при любых γ точка K находится левее C . Иначе было бы $(\bar{R}_{\text{Тр}})_y > 0$, $\sum_i F_{iy} = (\bar{R}_{\text{Тр}})_y + Q > 0$, то есть не было бы равновесия.

Как выбрать отрезок варьирования для λ в методе деления отрезка пополам? Полагаем $\gamma \geq \varepsilon > 0$. Верхняя граница для λ определяется из численного эксперимента при минимальном допустимом значении $\gamma = \varepsilon$. Действительно, если было бы $\gamma = 0$, то возможное движение диска было чисто поступательным. При этом мгновенный центр вращения K устремился бы к беско-

нечности. Поэтому при неограниченно малых значениях γ задать верхнюю границу для λ не представлялось бы возможным. Ограничение $\gamma \geq \varepsilon$ эту проблему снимает. В качестве примера возьмем $\varepsilon = 0,1$. Вначале можно искать λ , например, на отрезке $\lambda \in [0,100]$. Выясняется, что при $\gamma = 0,1$ получаем $\lambda = 2,582$, а при $\gamma = 1$ будет $\lambda = 0,547$, причем функция $\lambda(\gamma)$ монотонно убывает. Поэтому для ускорения счета можно оставить отрезок $\lambda \in [0, 3]$.

Переходим ко второму этапу решения задачи. При равновесии диска

$$\sum_i M_K(F_i) = M_{\text{тр},K} + Q \cdot KL = 0. \quad (7)$$

$$\text{Здесь } M_{\text{тр},K} = \iint_S M_K(d\bar{F}_{\text{тр}}) = -\iint_S (dF_{\text{тр}} \cdot h).$$

Так как $h = MK = \sqrt{x^2 + y^2}$, с учетом (3) получим:

$$M_{\text{тр},K} = -\frac{fP}{\pi R^2} \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

При переходе к безразмерным координатам (5)

$$M_{\text{тр},K} = -\frac{fPR}{\pi} \iint_{S_1} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} dx_1 dy_1 = -\frac{fPR}{\pi} I, \quad (8)$$

где область интегрирования и методика нахождения присутствующего в формуле интеграла $I = \iint_{S_1} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} dx_1 dy_1$ те же, что и для интеграла в (6).

Теперь учтем в (7) соотношения $KL = (\lambda + \gamma)R$, $Q = kP$ и (8):

$$-\frac{fPR}{\pi} I + k P(\lambda + \gamma)R = 0,$$

откуда после сокращения P, R получим окончательно:

$$k = \frac{f I}{\pi(\lambda + \gamma)}. \quad (9)$$

Коэффициент f входит в (9) как множитель. Поэтому для анализа результатов достаточно выбрать какое-то фиксированное значение f . Далее результаты приведены для $f = 0,5$. Параметр γ сложным образом влияет на значение интеграла I , а также входит в знаменателе выражения (9).

В предельном случае $\gamma = 0$, то есть при приложении силы Q к центру диска, при выходе из равновесия движение, очевидно, будет поступатель-

ным, то есть $\lambda = \infty$. При этом $F_{\text{тр}} = fN = Q = kN$, откуда $k = f$. Этому соответствует численное решение задачи: при малом $\gamma = 0,001$ получаем значения $\lambda = 250,3$ (радиус возможного вращения диска велик) и $k = 0,4999 \approx f$.

При увеличении значения γ имеем следующие результаты:

– при $\gamma = 0,2$: $\lambda = 1,408$ и $k = 0,466$;

– при $\gamma = 0,5$: $\lambda = 0,827$ и $k = 0,374$;

– при $\gamma = 0,8$: $\lambda = 0,635$ и $k = 0,301$.

При $\gamma = 1$ для случая приложения силы Q к краю диска по касательной получаем $\lambda = 0,546$ (центр возможного вращения диска находится внутри круга) и $k = 0,263$. Таким образом, при увеличении γ от 0 до 1 величина k монотонно уменьшается от f до значения, равного $0,526f$.

При дальнейшем увеличении γ (при $\gamma > 1$ линия действия силы Q лежит вне пластины) величина k будет дальше монотонно убывать, стремясь к нулю при $\gamma \rightarrow \infty$. (Например, при $\gamma = 2$ получаем $k = 0,155$, а при $\gamma = 10$ находим $k = 0,033$.)

Таким образом, задача о равновесии круглой пластины на шероховатой плоскости имеет однозначное решение, которое находится численно в два этапа. На первом этапе определяется положение центра мгновенного вращения пластины. На втором этапе находится значение искомой силы, соответствующее предельному равновесию пластины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Иванов, А. П.** Основы теории систем с трением / А. П. Иванов. – М.: Регулярная и хаотическая динамика; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2011. – 302 с.

2 **Розенблат, Г. М.** Динамические системы с сухим трением / Г. М. Розенблат. – М.: Регулярная и хаотическая динамика; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2006. – 204 с.

A. I. MUSHTARI

THE EQUILIBRIUM OF THE NONFIXED CIRCULAR PLATE ON THE ROUGH PLANE UNDER THE ARBITRARY FORCE ACTION

The problem of the circular plate equilibrium on horizontal rough plane is solved. The general case, when forces system has a resultant force with arbitrary line of action, was considered. The obtained system of equations is solved numerically.

Получено 14.11.2013