

Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет транспорта»

УДК 539.3

**ПОДДУБНЫЙ**  
**Алексей Алексеевич**

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ,  
ЧАСТИЧНО ОПЕРТЫХ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ**

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

по специальности  
01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Гомель, 2016

Работа выполнена в Учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Научный руководитель – **Яровая Анна Владимировна**, доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Строительная механика» УО «Белорусский государственный университет транспорта»

Официальные оппоненты – **Тарлаковский Дмитрий Валентинович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний НИИ механики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»;

**Тариков Георгий Петрович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Детали машин, путевые и строительные машины» УО «Белорусский государственный университет транспорта»

Оппонирующая организация – Белорусский национальный технический университет

Защита состоится 21 октября 2016 г. в 14-00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.27.01 при Учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта» по адресу: 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34, ауд. 103, e-mail: smech@tut.by, телефон ученого секретаря совета (232) 95-39-61.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Автореферат разослан «\_\_\_» сентября 2016 г.

Ученый секретарь совета  
по защите диссертаций  
кандидат физ.-мат. наук, доцент



С. А. Воробьёв

© Поддубный А.А. 2016

## **ВВЕДЕНИЕ**

В промышленном и гражданском строительстве, транспортном машиностроении, при строительстве и восстановлении искусственных сооружений на железных и автомобильных дорогах широко используются неоднородные слоистые, в том числе трехслойные элементы конструкций. Эти конструкции изготавливают из различных материалов, среди которых в настоящее время широко распространено применение полимерных, композиционных, функционально-градиентных материалов, ауксетиков и т.д. Вопросам расчета напряженно-деформированного состояния слоистых стержней, пластин и оболочек уделяется большое внимание, так как во многих случаях эти конструкции являются элементами сложных и ответственных сооружений.

Среди слоистых, в том числе трехслойных, элементов конструкций достаточно часто встречаются стержни и пластины, контактирующие с упругим основанием. Конструкции на упругом основании испытывают часто не только воздействие поперечных, по и продольных усилий: предварительное напряжение, усилия, возникающие в результате колебаний температуры, усилия от технологического оборудования. Повышенную опасность может составить совместное влияние перечисленных факторов.

На практике приходится сталкиваться со случаями, когда конструкция не полностью опирается на основание. Причиной появления зазора между конструкцией и основанием могут быть как техногенные условия в зоне строительства, так и природные условия. Это приводит к изменению расчетной схемы и напряженно-деформированного состояния рассматриваемого элемента, что в ряде случаев может привести к его преждевременному разрушению.

Также важно учитывать, что конструкция на упругом основании может иметь переменную жесткость и испытывать действие локальных нагрузок, что может быть обусловлено расположением технологического оборудования или значительным изменением нагрузки на отдельных участках.

Деформирование упругих и физически нелинейных трехслойных стержней и пластин, полностью опирающихся на упругое основание, исследовано достаточно хорошо. Вместе с тем не исследованы процессы упругого и пластического деформирования трехслойных элементов конструкций с учетом их неполного опирания на упругое основание и переменной толщины. Решению указанной проблемы и посвящена диссертация, поэтому ее тема является актуальной.

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Связь работы с научными программами (проектами), темами**

Диссертация выполнялась в рамках следующих программ и проектов:

1) НИР «Моделирование напряженно-деформированного состояния трехслойных композитных конструкций, полностью или частично опертых на упругое основание», МО ДТрО РБ, № ГР 07.07-190/11, 22.02.2012 – 31.12.2012;

2) НИР № 6046 Т09К-012 «Ударное деформирование механическими и терморadiационными нагрузками металлокомпозитных элементов конструкций», БРФФИ, № ГР 20091504, 15.04.2009–31.03.2011;

3) НИР № 6973 «Исследование напряженно-деформированного состояния композитных элементов технических конструкций со ступенчато-переменной границей» по заданию 1.15.4 «Моделирование напряженно-деформированного состояния транспортных и машиностроительных несущих конструкций, в т.ч. автомобильных цистерн, на основе учета физических и геометрических нелинейностей с целью снижения металлоемкости и повышения надежности, безопасности и технического ресурса» ГПНИ «Механика, техническая диагностика, металлургия» № ГР 20111888, 03.01.2011 – 31.12.2012;

4) НИР № 6625 Ф10Р-084 «Свободные и вынужденные колебания однородных и слоистых оболочек в упругой среде», БРФФИ, № ГР 20102740, 01.05.2010 – 31.03.2012;

5) НИР № 7213 Ф11К-004 «Колебания металлополимерных и композитных оболочек при взаимодействии с упругим или жидкостным наполнителем», БРФФИ, № ГР 20113880, 15.04.2011–31.03.2013;

6) НИР № 10573 Т16Р-010 «Статика и динамика тонкостенных элементов конструкций при частичном контактном взаимодействии», БРФФИ, № ГР 20163256, 20.05.2016–31.03.2018.

### **Цель и задачи исследования**

*Цель работы:* разработка и экспериментальная проверка механико-математических моделей физически линейного и нелинейного деформирования изотропных и ортотропных трехслойных стержней ступенчато-переменного сечения под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок при частичном опирании на упругое основание.

К задачам исследования необходимо отнести:

- постановки краевых задач по расчету параметров напряженно-деформированного состояния упругих и физически нелинейных трехслойных изотропных и ортотропных стержней ступенчато-переменного сечения, частично опирающихся на упругое основание, включающие системы уравнений равновесия при квазистатических распределенных и сосредоточенных нагрузках, условия сопряжения участков и граничные условия;

- построение методов решения краевых задач и получение точных и итерационных аналитических формул для перемещений, деформаций и напряжений в рассматриваемых трехслойных стержнях;

- численное исследование зависимости параметров напряженно-деформированного состояния рассматриваемых трехслойных стержней от размеров участков частичного опирания на основания различных жесткостей, геометрических и механических характеристик слоев, физической нелинейности материалов, граничных условий, вида и величины нагрузки;

- разработку методики проведения эксперимента, образцов трехслойных стержней, экспериментальные исследования прогибов упругих трехслойных балок на жестких опорах и при частичном опирании на упругое основание, установление адекватности предложенной механико-математической модели.

## **Научная новизна**

Впервые разработаны и экспериментально проверены механико-математические модели физически линейного и нелинейного деформирования изотропных и ортотропных трехслойных стержней ступенчато-переменного сечения под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок, отличающиеся учетом частичного опирания стержней на участки оснований различной жесткости, физической нелинейности материалов.

## **Положения, выносимые на защиту**

- механико-математические модели физически линейного и нелинейного деформирования изотропных и ортотропных трехслойных стержней, частично опертых на участки оснований различной жесткости, при различных видах закрепления торцов, включающие уравнения равновесия, граничные условия и условия сопряжения для разрешающих функций;

- аналитические решения краевых задач, содержащие формулы для расчета перемещений, внутренних усилий, деформаций и напряжений в упругих изотропных и ортотропных трехслойных стержнях с учетом их ступенчато-переменной толщины и частичного опирания на упругое основание при произвольных распределенных, локальных и сосредоточенных нагрузках в случае различных условий закрепления торцов;

- итерационный метод, распространяющий метод упругих решений Ильюшина на рассматриваемый физически нелинейный трехслойный стержень, аналитические рекуррентные решения краевых задач, позволившие алгоритмизировать процесс исследования параметров напряженно-деформированного состояния стержня;

- численные результаты параметрического исследования напряженно-деформированного состояния упругих (изотропных и ортотропных) и физически нелинейных трехслойных стержней, частично опертых на упругое основание, в зависимости от граничных условий, геометрических и упругих параметров слоев и оснований, величины и вида нагрузки;

- экспериментальное исследование прогибов упругих трехслойных стержней на жестких опорах и при частичном опирании на упругое основание, сравнение полученных результатов с данными численного эксперимента, подтвердившее адекватность предложенной механико-математической модели.

## **Личный вклад соискателя ученой степени**

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Научный руководитель принимал участие в выборе направлений и разработке методик исследования, в анализе полученных результатов. Соавтору Э. И. Старовойтову принадлежит выбор модели деформирования ступенчатого стержня.

## **Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Основные результаты работы докладывались и получили одобрение на:

– VI Международном симпозиуме по трибофатике МСТФ (Минск, 2010);

– VIII и XVI Республиканских научных конференциях студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 2010, 2013);

– Республиканской научно-технической конференции молодых ученых «Новые функциональные материалы, современные технологии и методы исследования» (Гомель, 2010);

– V Белорусском конгрессе по теоретической и прикладной механике «Механика–2011» (Минск, 2011);

– I, II, III, IV и V Международной научно-практической конференции «Строительство и восстановление искусственных сооружений» (Гомель, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016);

– VI Международной научно-практической конференции «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 2012);

– III Международной научно-практической конференции «Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса» (Гомель, 2013);

– Международной научно-технической конференции молодых ученых «Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности» (Могилев, 2013);

– XLV Международном научно-практическом семинаре коллоквиуме «Моделирование и компьютеринг в механических и мехатронных системах» (Минск, 2014);

– Международном научном семинаре «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2014, 2015, 2016);

– XXI Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова (Вятичи 2015);

– Международной научно-технической конференции «Полимерные композиты и трибология» ПОЛИКОМТРИБ-2015 (Гомель, 2015);

– Международной научно-технической конференции «Моделирование и компьютеринг в механических и мехатронных системах» (Минск, 2016).

Результаты диссертации использованы:

– в учебном процессе учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта»;

– в расчетной практике транспортных войск Республики Беларусь;

– в проектной деятельности акционерного общества «Р.О.С. СПЕЦТЕХ-МОНТАЖ»;

– в расчетной практике технологического бюро ОП НПО РУП «Гомсельмаш»;

– в проектной деятельности ИММС им. В.А. Белого НАНБ.

## Опубликование результатов диссертации

По теме диссертации опубликовано 33 работы, в том числе 6 статей в научных изданиях, включенных в перечень ВАК, 4 статьи в сборниках, 15 материалов конференций, 5 тезисов докладов, 2 патента, 1 учебник, общим объемом 10 авторских листов.

## Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка, приложения. Объем диссертации составляет 140 страниц машинописного текста, список использованных источников из 131 наименования на 11 страницах, список публикаций автора из 33 наименований на 5 страницах, приложения на 15 страницах.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

**В первой главе** выполнен обзор публикаций, посвященных расчету неоднородных слоистых элементов конструкций, а также балок и пластин на упругом основании. Было установлено, что деформирование неоднородных и трехслойных элементов конструкций, полностью опирающихся на упругое основание, при термосиловых нагрузках исследовано достаточно хорошо, однако принятые в настоящее время методы расчета трехслойных стержней и пластин на упругом основании не учитывают их частичное опирание на упругое основание. На основании этого были сделаны выводы, что необходимо исследование деформирования трехслойных элементов конструкций, частично опирающиеся на упругое основание, с учетом их переменной жесткости и физической нелинейности.

**Во второй главе** рассмотрено деформирование упругих изотропных и ортотропных трехслойных стержней, частично опертых на упругое основание.

Рассматривается трехслойный стержень длиной  $l$  и шириной  $b_0$  ступенчато-переменного сечения под действием продольных и поперечных распределенных нагрузок и сосредоточенных сил и моментов (рисунок 1).

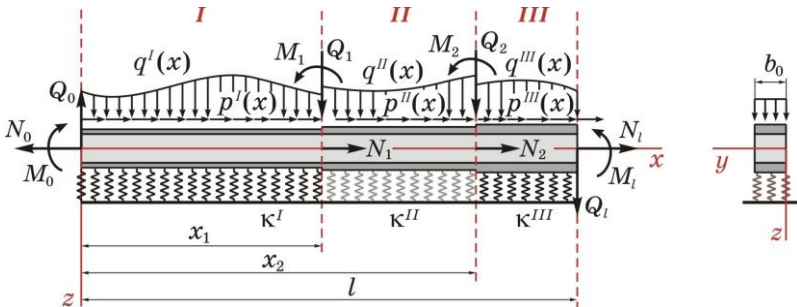


Рисунок 1. – Расчетная схема трехслойного стержня

Наружные слои являются несущими, они тонкие и выполнены из достаточно прочного материала. Менее прочный толстый наполнитель разносит несущие слои на заданное расстояние по высоте стержня и обеспечивает их совместную работу.

Система координат  $x, y, z$  связана со срединной плоскостью наполнителя. Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси  $z$ , считается первым слоем, следующий несущий слой – вторым, а наполнитель – третьим слоем (см. рисунок 1). Номер слоя обозначен индексом  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

По длине стержня выделяются три участка  $I$  ( $0 \leq x \leq x_1$ ),  $II$  ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ),  $III$  ( $x_2 \leq x \leq l$ ), каждый из которых может опираться на упругое основание, а может быть не связан с основанием. На  $n$ -м участке ( $n = I, II, III$ ) действуют  $p^n(x)$ ,  $q^n(x)$  [Па] – продольная и поперечная распределенные нагрузки, на торцах ( $x = 0$ ,  $x = l$ ) и в сечениях 1 и 2 ( $x = x_1$ ,  $x = x_2$ ) – сосредоточенные силы и моменты.

В общем случае слои трехслойного пакета имеют ступенчато-переменные по длине толщины. Координаты начала ступенек принимаются совпадающими с координатами начала участков опирания на упругое основание.

Материалы слоев в общем случае считаются ортотропными, проявляют упругие свойства, для них справедлив закон Гука. Деформации малые. Между слоями предусмотрена склейка, не допускающая взаимного проскальзывания. Для описания кинематики трехслойного пакета используется гипотеза «ломаной» линии: прямолинейная до деформирования нормаль при изгибе становится ломаной; в несущих слоях нормаль остается перпендикулярной к деформированной оси стержня; в наполнителе за счет сдвига она поворачивается на дополнительный угол.

Постановка и решение задач проводятся в перемещениях. В качестве искоемых перемещений принимаются функции  $w^n(x)$ ,  $u^n(x)$ ,  $\psi^n(x)$  – прогиб, продольное перемещение срединной плоскости наполнителя и угол сдвига в наполнителе на  $n$ -м участке.

В точках сопряжения участков должны соблюдаться условия непрерывности перемещений:

$$\begin{aligned} w^I(x_1) &= w^{II}(x_1); & w^{II}(x_2) &= w^{III}(x_2); & u^I(x_1) &= u^{II}(x_1); \\ u^{II}(x_2) &= u^{III}(x_2); & \psi^I(x_1) &= \psi^{II}(x_1); & \psi^{II}(x_2) &= \psi^{III}(x_2); \\ w^I_{,x}(x_1) &= w^{II}_{,x}(x_1); & w^{II}_{,x}(x_2) &= w^{III}_{,x}(x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Если на торцах стержня предусмотрены жесткие диафрагмы, которые препятствуют повороту нормали в наполнителе, то  $\psi^I(0) = 0$ ;  $\psi^{III}(l) = 0$ , что может служить граничными условиями для искоемых функций.

Для описания действия упругого основания используется модель Винклера, согласно которой реакция основания на  $n$ -м участке выражается через прогиб:

$$q_R^n(x) = \kappa^n w^n(x), \quad (2)$$

где  $\kappa^n$  – коэффициент жесткости упругого основания на  $n$ -м участке.



Перемещения точек стержня в направлении каждой из осей координат с использованием введенных гипотез выражаются через три искомые функции:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)n} &= u^n + c\psi^n - zw^n,_{,x} \quad (c^n \leq z \leq c^n + h_1^n); \\ u_x^{(2)n} &= u^n - c\psi^n - zw^n,_{,x} \quad (-c^n - h_2^n \leq z \leq -c^n); \\ u_x^{(3)n} &= u^n + z\psi^n - zw^n,_{,x} \quad (-c^n \leq z \leq c^n); \quad u_y^{(k)n} = 0; \quad u_z^{(k)n} = w^n. \end{aligned} \quad (3)$$

Деформации в слоях получаются с использованием соотношений Коши и выражений для перемещений (3). Внутренние силы и вводятся в виде интегралов по толщине каждого слоя через компоненты тензора напряжений.

К деформированному стержню применяется принцип возможных перемещений Лагранжа, выражающий условие равновесия внутренних и внешних сил:

$$\delta A = \delta W. \quad (4)$$

Возможная работа внешних сил  $\delta A$  складывается из возможных работ распределенных поверхностных нагрузок с учетом реакции упругого основания, сосредоточенных сил и моментов на торцах и усилий в сечениях 1 и 2 (см. рисунок 1). Возможная работа внутренних сил (напряжений)  $\delta W$  определяется как сумма возможных работ по участкам.

После подстановки выражений возможных работ в уравнение (4) и некоторых преобразований для каждого  $n$ -го участка получаются *система обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия в усилиях*:

$$N^n,_{,x} + b_0 p^n = 0; \quad H^n,_{,x} - Q^n = 0; \quad M^n,_{,xx} - b_0 q_R^n + b_0 q^n = 0, \quad (5)$$

*силовые граничные условия*:

$$\begin{aligned} N^I(0) &= N_0; \quad M^I(0) = M_0; \quad M^I,_{,x}(0) = Q_0; \quad H^I(0) = 0; \\ N^{III}(l) &= N_l; \quad M^{III}(l) = M_l; \quad M^{III},_{,x}(l) = Q_l; \quad H^{III}(l) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

*и условия для внутренних усилий в точках сопряжения участков*  $x = x_1$  и  $x = x_2$ :

$$\begin{aligned} N^I(x_1) - N^{II}(x_1) &= N_1; \quad M^I(x_1) - M^{II}(x_1) = M_1; \quad M^I,_{,x}(x_1) - M^{II},_{,x}(x_1) = Q_1; \\ H^I(x_1) - H^{II}(x_1) &= 0; \quad N^{II}(x_2) - N^{III}(x_2) = N_2; \quad M^{II}(x_2) - M^{III}(x_2) = M_2; \\ M^{II},_{,x}(x_2) - M^{III},_{,x}(x_2) &= Q_2; \quad H^{II}(x_2) - H^{III}(x_2) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $N^n, M^n, Q^n, H^n$  – полные продольная сила, изгибающий момент, поперечная сила и момент сдвига для  $n$ -го участка.

Связь напряжений и деформаций при упругой работе материалов трехслойного пакета имеет вид:

$$\sigma_x = A_x \varepsilon_x. \quad (8)$$

Величину  $A_x$  в (8) следует принять равной:

$$A_x = \frac{E_x(1 - \nu_{yz}\nu_{zy})}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{xz}\nu_{zx} - \nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx} - \nu_{xz}\nu_{zy}\nu_{yx}} \quad \text{для ортотропного стержня};$$

$$A_x = \frac{E(1 - \nu^2)}{1 - 3\nu^2 - 2\nu^3} = \frac{E(1 - \nu)}{1 - \nu - 2\nu^2} = K + \frac{4}{3}G \quad \text{для изотропного стержня}.$$

Далее внутренние силы и моменты с учетом (8) выражаются через перемещения (искомые функции)  $w^n(x)$ ,  $u^n(x)$ ,  $\psi^n(x)$  и подставляются в уравнения (5). Для участков, опирающихся на упругое основание, учитывается реакция основания, согласно (2). Для участков, под которыми основание отсутствует,  $q_R^n = 0$ . Тогда для каждого из участков ( $n = I, II, III$ ) система (5) преобразовывается к одному из следующих видов:

$$\begin{aligned} \text{на упругом основании:} \quad & a_1^n u^n{}_{,xx} + a_6^n \psi^n{}_{,xx} - a_7^n w^n{}_{,xxx} = -p^n, \\ & a_6^n u^n{}_{,xx} + a_2^n \psi^n{}_{,xx} - a_3^n w^n{}_{,xxx} - a_5^n \psi^n = 0, \\ & a_7^n u^n{}_{,xxx} + a_3^n \psi^n{}_{,xxx} - a_4^n w^n{}_{,xxx} - \kappa^n w^n = -q^n, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{без упругого основания:} \quad & a_1^n u^n{}_{,xx} + a_6^n \psi^n{}_{,xx} - a_7^n w^n{}_{,xxx} = -p^n, \\ & a_6^n u^n{}_{,xx} + a_2^n \psi^n{}_{,xx} - a_3^n w^n{}_{,xxx} - a_5^n \psi^n = 0, \\ & a_7^n u^n{}_{,xxx} + a_3^n \psi^n{}_{,xxx} - a_4^n w^n{}_{,xxx} = -q^n, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $a_1^n, \dots, a_7^n$  – параметры, характеризующие геометрические и упругие свойства слоев на  $n$ -м участке:

$$\begin{aligned} a_1^n &= A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + 2A_x^{(3)} c^n; \quad a_2^n = c^{n2} \left[ A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^n \right]; \\ a_3^n &= c^n \left[ A_x^{(1)} h_1^n \left( c^n + \frac{1}{2} h_1^n \right) + A_x^{(2)} h_2^n \left( c^n + \frac{1}{2} h_2^n \right) + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^{n2} \right]; \dots \end{aligned}$$

Следует заметить, что системы уравнений (9) и (10) можно использовать при исследовании изгиба прямоугольной пластины по цилиндрической поверхности. В этом случае  $A_x$  в (8) следует принять  $A_x = E_x / (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$  для ортотропной пластины,  $A_x = E / (1 - \nu^2)$  для изотропной пластины.

Решения систем (9) и (10) будут различными.

При решении системы (9) было выделено бикубическое уравнение для прогиба, аналитическое решение которого зависит от знака его дискриминанта  $D$ , что определяется в большей степени жесткостью упругого основания, а также геометрическими и механическими параметрами трехслойного пакета. В связи с этим выделяются три типа оснований: малой, средней и большой жесткости. Вид аналитических выражений для искомых функций будет различным при основании средней жесткости ( $D > 0$ ) и при основании малой или большой жесткости ( $D < 0$ ). Рассмотрим эти два случая по отдельности.

Прогиб и сдвиг в заполнителе для  $n$ -го участка стержня на упругом основании малой или большой жесткости определяются выражениями:

$$\begin{aligned} w^n(x) &= C_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + w_p^n(x); \\ \psi^n(x) &= C_1^n b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^n b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_3^n b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^n b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^n b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^n b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) - C_5^n b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_6^n b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_6^n b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_7^n + f_1^n(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Прогиб и сдвиг в заполнителе  $n$ -го участка стержня на упругом основании средней жесткости определяются выражениями:

$$\begin{aligned} w^n(x) &= C_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + C_4^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + \\ &+ C_5^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_6^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + w_p^n; \\ \psi^n(x) &= C_1^n b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^n b_7^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^n b_7^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\ &+ C_5^n b_8^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^n b_8^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^n + f_1^n(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Прогиб и сдвиг в заполнителе  $n$ -го участка стержня, не связанного с упругим основанием, определяются выражениями:

$$\begin{aligned} w^n(x) &= C_1^n (\alpha_{17}^n b_{11}^n x + \alpha_{18}^n x^3 / 6) + C_2^n b_{14}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_3^n b_{14}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + \\ &+ C_4^n x^2 / 2 + C_5^n x + C_6^n + g_2^n(x); \\ \psi^n(x) &= C_1^n b_{11}^n + C_2^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + g_1^n(x). \end{aligned} \quad (13)$$

В (11)-(13)  $C_1^n, \dots, C_8^n$  – константы интегрирования;  $w_p^n, f_1^n, g_1^n, g_2^n$  – функции, зависящие от вида нагрузки. Чтобы найти константы интегрирования, необходимо учесть условия сопряжения решений на границах участков (1) и (7), а также граничные условия. При свободном крае удобны граничные условия в усилиях (6), при жестком и шарнирном закреплении торцов – в перемещениях.

**В третьей главе** было выполнено теоретическое и экспериментальное исследование изгиба упругого трехслойного стержня под действием равномерно распределенных и сосредоточенных нагрузок.

Рассмотрены стержни, *частично опертые одним и двумя участками* (рисунок 2). На каждый участок действует своя равномерно распределенная нагрузка, на торцах и в местах сопряжения участков приложены сосредоточенные усилия.

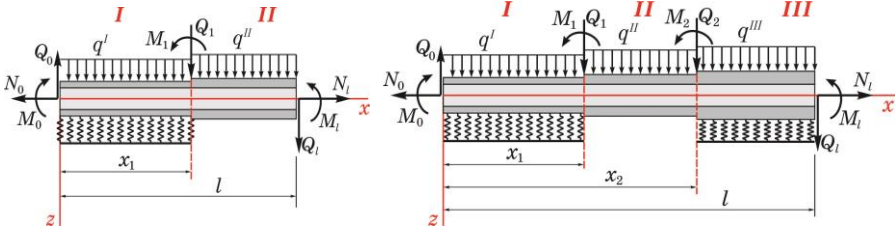


Рисунок 2. – Расчетные схемы стержней, опирающихся одним и двумя участками

С учетом того, что  $p^n = 0$ ,  $q^n = q_0^n = \text{const}$ , функции  $f_1^n, g_1^n, g_2^n$  в выражениях (11)-(13) принимают простой конкретный вид,  $w_p^n = q_0^n / \kappa^n$ .

Объединением решений для отдельных участков при  $n = I, II, III$  с использованием функции Хевисайда  $H_0$  получаются искомые перемещения. Для стержня, опирающегося одним участком, прогиб выражается зависимостью:

$$w(x) = w^I(x) + [w^{II}(x) - w^I(x)]H_0(x - x_1); \quad (14)$$

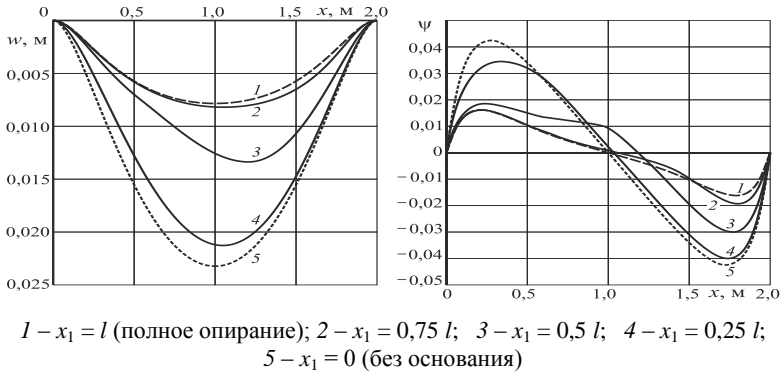
двумя участками различной жесткости:

$$w(x) = w^I(x) + [w^{II}(x) - w^I(x)]H_0(x - x_1) + [w^{III}(x) - w^{II}(x)]H_0(x - x_2). \quad (15)$$

Аналогичные выражения будут для сдвига в заполнителе  $\psi$  и продольного перемещения  $u$ .

Был составлен комплекс программ в среде MathCad, с помощью которого получены числовые результаты для двух типов трехслойных пакетов: 1) несущие слои выполнены из строительного профильного стеклопластика СППС, заполнитель – пенополистирол, 2) несущие слои – алюминиевый сплав Д16Т, заполнитель – фторопласт. Рассмотрены различные распределенные и сосредоточенные нагрузки, жесткости и длины участков опирания на упругое основание и условия закрепления торцов.

Два участка, СППС-пенополистирол-СППС. На рисунке 3 показано изменение прогиба  $w$  (а) и сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) вдоль оси стержня, защемленного по двум торцам, при различной длине участка опирания на упругое основание ( $l = 2$  м,  $h_1 = h_2 = 0,015$  м,  $q = 50$  кПа,  $\kappa = 5$  МПа/м).



**Рисунок 3. – Изменение прогиба  $w$  (а) и сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) по длине стержня при различной длине участка опирания на упругое основание:**

При полном опирании и отсутствии основания графики  $w$  симметричны,  $\psi$  антисимметричны. При частичном опирании графики становятся несимметричными, максимальные значения прогибов смещены от середины вправо, на участок без упругого основания. При опирании  $3/4$  длины стержня максимальный прогиб увеличивается на 4,2 % по сравнению с прогибом полностью опертого стержня,  $1/2$  длины – на 66 %,  $1/4$  длины – на 168 %. Максимальные прогибы полностью опертого стержня и стержня без основания отличаются в 2,93 раза. Максимальный сдвиг в заполнителе стержня без основания больше в 2,63 раза по сравнению с полностью опертым стержнем.

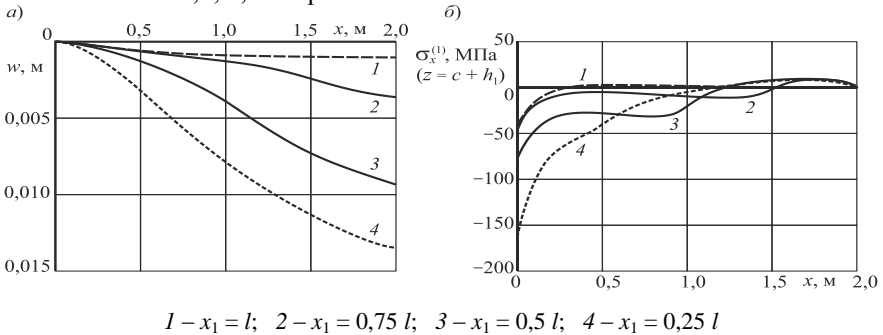
На рисунке 4 показано изменение прогиба и нормальных напряжений на нижней поверхности заполнителя при опирании его левой половины ( $x_1 = 0,5 l$ ), а также жестком и шарнирном закреплении торцов и наличии жестких диафрагм на них. При шарнирном опирании максимальный прогиб увеличивается на 15 % по сравнению с максимальным прогибом жестко закрепленного стержня. Графики напряжений для заполнителя и первого несущего слоя смещаются в поло-

жительную область, для второго слоя – в отрицательную, максимальные напряжения отличаются незначительно.



**Рисунок 4.** – Изменение прогиба (*a*) и нормальных напряжений на нижней поверхности заполнителя (*б*) по длине стержня при опирании его левой половины ( $x_1 = 0,5 l$ )

Рисунок 5 иллюстрирует изменение прогиба  $w$  (*a*) и нормальных напряжений на наружной поверхности 1-го слоя (*б*) по длине стержня (слева заделка, справа – свободный край без диафрагмы) при различной длине участка опирания. По сравнению со стержнем, полностью лежащим на упругом основании, при опирании 0,75 длины его максимальный прогиб увеличивается в 3,5 раза, 0,5 длины – в 9 раз, 0,25 длины – в 13 раз. Напряжения в заделке увеличиваются соответственно в 1,2; 1,9 и 4 раза.

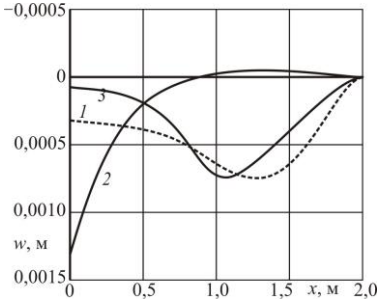


**Рисунок 5.** – Изменение прогиба  $w$  (*a*) и нормальных напряжений на наружной поверхности 1-го слоя (*б*) по длине стержня при различной длине участка опирания

На рисунке 6 показано изменение прогиба по длине стержня при распределенной и сосредоточенных (погонных) нагрузках (справа заделка, слева – свободный край без диафрагмы). При сосредоточенных нагрузках прогибы имеют максимумы в сечениях, где приложены эти нагрузки.

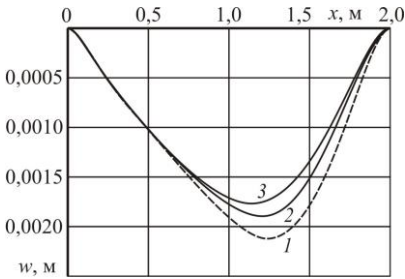
Два участка, «Д16Т-фторопласт-Д16Т». На рисунке 7 показано изменение прогибов по длине гладкого и ступенчатого стержней, защемленных по двум торцам, при нагрузке, равномерно распределенной по всей длине ( $x_1 = 0,5 l$ ,  $h_1 = h_2 = 0,02$  м  $c = 0,1$  м,  $q = 200$  кПа,  $\kappa = 150$  МПа/м). При увеличении толщин

1-го и 2-го несущих слоев прогибы уменьшаются, максимумы смещаются в сторону более тонкого участка.



- 1 – нагрузка  $q = 50$  кПа распределена по всей длине;  
 2 –  $Q_0 = 50$  кН/м на левом торце;  
 3 –  $Q_1 = 50$  кН/м посередине стержня

Рисунок 6. – Изменение прогиба  $w$  по длине стержня ( $x_1 = 0,5l$ ;  $\kappa = 150$  МПа/м)



- 1 –  $h_1^I = h_1^{II} = h_2^I = h_2^{II} = 0,02$  м;  
 2 –  $h_1^I = h_1^{II} = 0,02$  м,  
 $h_2^I = 0,02$  м;  $h_2^{II} = 0,03$  м;  
 3 –  $h_1^I = 0,02$  м;  $h_1^{II} = 0,03$  м;  
 $h_2^I = 0,02$  м;  $h_2^{II} = 0,03$  м

Рисунок 7. – Изменение прогиба  $w$  по длине стержня ( $x_1 = 0,5l$ ;  $\kappa = 150$  МПа/м)

Три участка, «Д16Т-фторопласт-Д16Т». Был рассмотрен трехслойный стержень ( $h_1 = h_2 = 0,02$  м,  $c = 0,1$  м), опирающийся на упругое основание двумя крайними участками ( $x_1 = 0,3l$ ;  $x_2 = 0,7l$ ) и защемленный по двум торцам, под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки  $q = 500$  кПа. Рисунок 8 иллюстрирует изменение прогиба  $w$  (а), сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) и нормальных напряжений на наружной поверхности 1-го слоя (в) по длине стержня.

Для симметрично нагруженного стержня при одинаковой жесткости участков I и III все графики симметричны, посередине ( $x = 0,5l$ ) наблюдаются максимумы прогибов. Напряжения на торцах положительны, а посередине пролета ( $x = 0,5l$ ) – отрицательны, сдвиг в заполнителе переходит из положительной области в отрицательную. С уменьшением  $\kappa^I$  участка I графики меняются по форме, максимальные прогибы увеличиваются и смещаются к левой заделке. Напряжения у левой заделки имеют небольшие значения, с увеличением прогиба напряжения растут. Сдвиг в заполнителе увеличивается как в положительной области, так и в отрицательной. Чем меньше  $\kappa^I$  участка I, тем больше перемещения и напряжения. При уменьшении  $\kappa^I$  участка I с 600 до 6 МПа/м наибольший прогиб увеличивается на 43 %, сдвиг в заполнителе на 62 %, максимальные напряжения в левой заделке увеличиваются на 75 %.

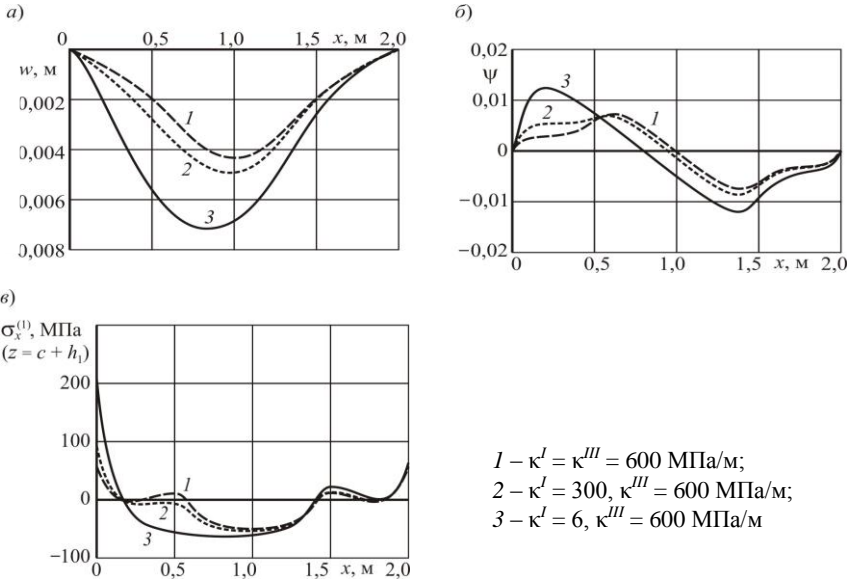
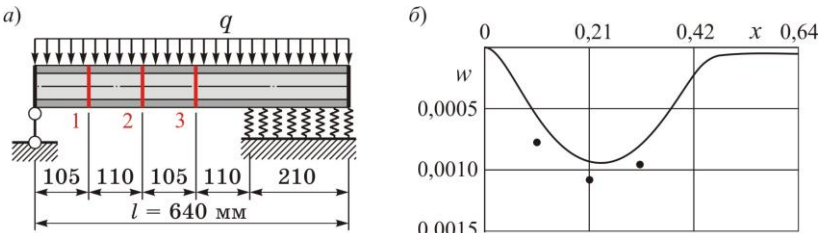


Рисунок 8. – Изменение прогиба  $w$  (а), сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) и нормальных напряжений на наружной поверхности 1-го слоя (в) по длине стержня

Экспериментально был определен коэффициент постели упругого основания и исследованы прогибы стержня прямоугольного поперечного сечения на двух шарнирных опорах и при частичном опирании на упругое основание. Испытывался стержень длиной  $l = 0,64$  м с жесткими диафрагмами на торцах, (несущие слои – фанера, заполнитель – пенополистирол) при нагрузке, равномерно распределенной по всей длине и локальной. На рисунке 9 изображены прогибы стержня, опертого одним участком, под действием нагрузки, равномерно распределенной по всей длине. Наибольший прогиб  $w_{\max}$  в сечении 2 при нагрузке, равномерно распределенной по всей длине балки, составил: по методике, разработанной соискателем – 0,93 мм; по результатам собственного эксперимента – 1,15 мм. Погрешность составляет не более 19%.



Кривая – по данным расчета, точки – по данным эксперимента

Рисунок 9. – Расчетная схема стержня при частичном опирании на упругое основание (а), прогибы по разработанной методике и данным собственного эксперимента (б).

Числовые значения прогибов, полученных теоретически, достаточно хорошо согласуются с данными проведенного испытания, что подтверждает точность и достоверность предложенной методики расчета трехслойного стержня при ее частичном опирании на упругое основание.

**В четвертой главе** исследовано деформирование упругопластического трехслойного стержня, частично опертого на упругое основание.

Для связи напряжений и деформаций в слоях используются уравнения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина ( $i, j = x, y, z$ ):

$$s_{ij}^{(k)n} = 2G_k(1 - \omega^{(k)n})\varepsilon_{ij}^{(k)n}; \quad \sigma^{(k)n} = 3K_k 3\varepsilon^{(k)n}, \quad (16)$$

где  $s_{ij}^{(k)n}, \varepsilon_{ij}^{(k)n}$  – девиаторы тензоров напряжений и деформаций на  $n$ -м участке,  $\sigma^{(k)n}, \varepsilon^{(k)n}$  – их шаровые части;

$G_k, K_k$  – модуль сдвига и объемный модуль материала  $k$ -го слоя;

$\omega^{(1)n}, \omega^{(2)n}$  – функции пластичности в несущих слоях;

$\omega^{(3)n}$  – функция нелинейности в заполнителе.

В тензоре напряжений и внутренних усилиях выделяются «упругие» (индекс «e») и «неупругие» (индекс «w») слагаемые, после чего подставляются в уравнения равновесия (5), граничные условия (6) и условия сопряжения участков (7). Далее внутренние усилия выражаются через перемещения и подставляются в уравнения (5). Получаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия частично опертого упругопластического трехслойного стержня в перемещениях, для решения которых используется *метод последовательных приближений*. Для любого  $m$ -го приближения получают системы уравнений:

участок на упругом основании

$$\begin{aligned} a_1^n u^{n(m)},_{,xx} + a_6^n \psi^{n(m)},_{,xx} - a_7^n w^{n(m)},_{,xxx} &= -p^n + p_\omega^{n(m-1)}, \\ a_6^n u^{n(m)},_{,xx} + a_2^n \psi^{n(m)},_{,xx} - a_3^n w^{n(m)},_{,xxx} - a_5^n \psi^{n(m)} &= h_\omega^{n(m-1)}, \\ a_7^n u^{n(m)},_{,xxx} + a_3^n \psi^{n(m)},_{,xxx} - a_4^n w^{n(m)},_{,xxx} - \kappa^n w^{n(m)} &= -q^n + q_\omega^{n(m-1)}, \end{aligned} \quad (17)$$

участок без упругого основания

$$\begin{aligned} a_1^n u^{n(m)},_{,xx} + a_6^n \psi^{n(m)},_{,xx} - a_7^n w^{n(m)},_{,xxx} &= -p^n + p_\omega^{n(m-1)}, \\ a_6^n u^{n(m)},_{,xx} + a_2^n \psi^{n(m)},_{,xx} - a_3^n w^{n(m)},_{,xxx} - a_5^n \psi^{n(m)} &= h_\omega^{n(m-1)}, \\ a_7^n u^{n(m)},_{,xxx} + a_3^n \psi^{n(m)},_{,xxx} - a_4^n w^{n(m)},_{,xxx} &= -q^n + q_\omega^{n(m-1)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Величины  $p_\omega^{n(m-1)}, h_\omega^{n(m-1)}, q_\omega^{n(m-1)}$  служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев, на первом шаге ( $m = 1$ ) они принимаются равными нулю, в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения.

В результате решения систем (17) и (18) получены рекуррентные формулы для прогиба, сдвига в заполнителе и продольного перемещения  $n$ -го участка стержня. Например, для участка на упругом основании средней жесткости рекуррентные формулы для прогиба и сдвига в заполнителе имеют вид:



$$w^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) +$$

$$+ C_5^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + w_p^{n(m)} ;$$

$$\Psi^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)} b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^{n(m)} b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^{n(m)} b_7^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^{n(m)} b_7^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) +$$

$$+ C_5^{n(m)} b_8^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^{n(m)} b_8^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^{n(m)} + f_1^n(x) - f_1^{\omega n(m-1)}(x) . \quad (19)$$

Для определения констант интегрирования в (19) необходимо учесть граничные условия и условия для внутренних усилий в точках сопряжения участков также в рекуррентном виде.

При численной реализации полученного решения в качестве материала несущих слоев принят алюминиевый сплав Д16Т, заполнителя – фторопласт. Аналитический вид функций  $\omega^{(k)n}$  в (16) и константы материалов взяты из работ Э.И. Старовойтова. Величина нагрузки, толщины слоев, жесткость упругого основания подбирались таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени ( $h_1 = h_2 = 0,02$  м,  $c = 0,09$  м,  $q = 4,5$  МПа,  $\kappa^I = 200$  МПа/м).

Рисунок 10 демонстрирует практическую сходимость итерационного метода «упругих» решений при опирании 0,25 длины стержня. Номер кривой  $m$  соответствует номеру итерации,  $m = 0$  – упругому решению. Здесь второе приближение отличается от первого на 10 % для прогиба и 11 % сдвига. За искомое решение принято 9-е приближение, которое отличается от предыдущих двух менее чем на 1 % – как для прогибов  $w$ , так и для сдвигов  $\psi$ . Упругопластический прогиб и сдвиг в заполнителе стержня превосходят упругие перемещения на 46 % и 49 % соответственно.

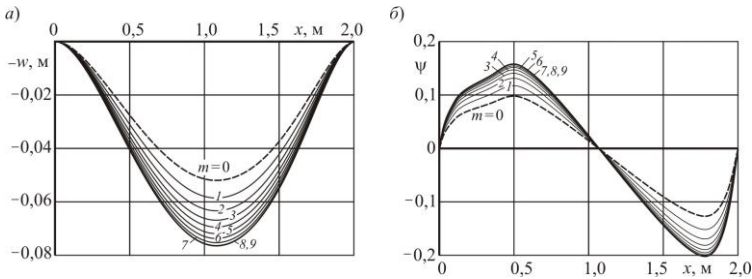
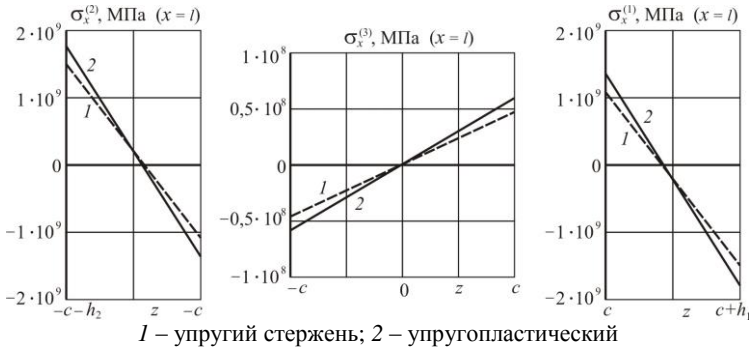


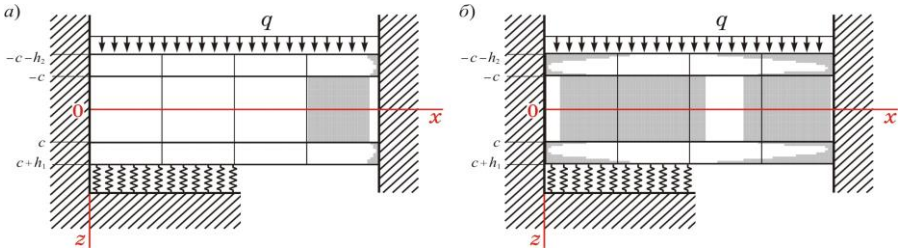
Рисунок 10. – Сходимость метода последовательных приближений ( $x_1 = 0,25$  l) на примере а – прогиба  $w$ , б – относительного сдвига  $\psi$

На рисунке 11 показано изменение напряжений в правой заделке стержня при опирании 0,5 длины. В упругопластическом стержне напряжения увеличиваются на 21 % по сравнению с упругим стержнем.



**Рисунок 11. – Распределение нормальных напряжений по толщине слоев в правой заделке ( $x = l$ ) при опирании 0,5 длины стержня**

Рисунок 12 иллюстрирует распределение областей пластичности в несущих слоях и нелинейности в заполнителе при опирании половины стержня при нагрузке 3 МПа (*а*) и 6 МПа (*б*). В несущих слоях при меньшей нагрузке пластичность возникает у правой заделки на верхней и нижней поверхностях, при увеличении нагрузки в два раза аналогичная картина наблюдается и возле левой заделки. В заполнителе при меньшей нагрузке нелинейность возникает на правом участке, не опирающемся на упругое основание. При увеличении нагрузки в два раза нелинейность наблюдается и на левом участке, опирающемся на упругое основание. В несущих слоях области пластичности составляют 6 % при меньшей нагрузке, 17 % при большей, в заполнителе области нелинейности достигают 19 % и 78 % соответственно.



**Рисунок 12. – Распределение областей пластичности в несущих слоях и физической нелинейности в заполнителе (темная заливка) при опирании 0,5 длины стержня:  
 $a - q^I = q^{II} = 3 \text{ МПа}$ ;  $b - q^I = q^{II} = 6 \text{ МПа}$**

Увеличение длины участка опирания на упругое основание приводит к уменьшению перемещений и напряжений в упругопластическом стержне по сравнению с соответствующими величинами в упругом стержне.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

В работе проведены теоретические и экспериментальные исследования деформирования трехслойных частично опертых на упругое основание стержней, включающие:

- механико-математические модели физически линейного и нелинейного деформирования изотропных и ортотропных трехслойных стержней постоянного и ступенчато-переменного прямоугольного сечения, содержащие уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, формулировки граничных условий, отличающиеся учетом частичного опирания на участки различной жесткости основания Винклера [1, 2, 4, 6-8, 10-14, 16, 20-28, 30];

- аналитические решения ряда краевых задач, содержащие формулы для расчета перемещений, внутренних усилий, деформаций и напряжений в упругих изотропных и ортотропных трехслойных стержнях постоянной и ступенчато-переменной толщины при произвольных распределенных, локальных и сосредоточенных нагрузках в случае различных условий закрепления торцов, учитывающие возможность частичного опирания на участки основания различной жесткости [1, 2, 6-8, 11-13, 16, 18, 20, 21, 25-28, 30];

- итерационный метод решения нелинейных краевых задач для рассматриваемого трехслойного стержня, разработанный на основе метода упругих решений Ильющина и включающий процедуру вычисления констант интегрирования на каждом шаге, с помощью которого получено аналитическое рекуррентное решение задачи о деформировании трехслойного стержня с упругопластическими несущими слоями и физически нелинейно-упругим наполнителем, частично опертого на основание Винклера [4, 10, 22, 23, 24];

- параметрический анализ напряженно-деформированного состояния упругих изотропных и ортотропных трехслойных стержней, графики, отражающие законы изменения перемещений и напряжений по длине и высоте стержней при различных видах нагрузок и граничных условий, в случае опирания на один или два участка основания различной жесткости, установивший рост перемещений и напряжений при уменьшении участков опирания и жесткостей упругих оснований и показавший, что прогибы неопертого стержня больше в среднем в 3 раза по сравнению со стержнем, полностью лежащим на основании, жесткость которого соответствует слежавшемуся песку или насыпному граввию, и в 1,7 раза, если половина стержня оперта, напряжения при этом больше соответственно в 2 и 1,3 раза [2, 6-8, 13, 14, 21, 25];

- численный анализ параметров напряженно-деформированного состояния физически нелинейных трехслойных стержней, частично опирающихся на упругое основание, в зависимости от величины нагрузки, длин участков опирания, параметров физической нелинейности материалов слоев, подтвердивший практическую сходимость метода последовательных приближений, установивший рост прогибов за счет физической нелинейности до 46 %, а напряжений – до 21% в рамках малых деформаций [4, 10, 22, 24].

- методику проведения эксперимента, макеты трехслойных балок, результаты экспериментальных исследований прогибов упругих трехслойных балок на жестких опорах и при частичном опирании на упругое основание, сравнение полученных данных с результатами численного анализа, подтвердившее адекватность предложенной механико-математической модели [5, 9, 15-17, 19, 29, 30].

### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Полученные результаты позволяют численно моделировать перемещения, деформации и напряжения в изотропных и ортотропных трехслойных стержнях, частично или полностью опирающихся на участки упругого основания различной жесткости, давать практические рекомендации при их проектировании, что приводит к существенному снижению материальных затрат, необходимых для проведения экспериментальных исследований. Аналитические решения представляют самостоятельную ценность как новые фундаментальные результаты и могут служить для проверки численных решений подобных задач. Разработанные методики могут использоваться в проектных организациях строительного и машиностроительного профиля при расчетах сборно-разборных настилов, SIP-панелей при возведении жилых зданий и хозяйственных ангаров, панелей из пенометаллов для строительства бронемашин и авиастроения, мостовых конструкций.

Результаты исследований использованы в учебном процессе учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта» [33].

При выполнении НИР «Сэндвич» в интересах Департамента транспортного обеспечения МО РБ была рассчитана и спроектирована новая конструкция сборно-разборного дорожного настила, который может быть использован для устройства проезжей части колеиного или сплошного типа. Для приспособления верхнего строения пути пролетных строений при необходимости пропуска по железнодорожному мосту автомобильной и гусеничной техники была рассчитана и спроектирована новая конструкция сборно-разборного автодорожного настила. По результатам исследования получены патенты на изобретение № 19687 «Сборно-разборный дорожный настил» и полезную модель № 10312 «Сборно-разборный автодорожный настил» [31, 32].

При взаимодействии с акционерным обществом «Р.О.С. СПЕЦТЕХМОНТАЖ» РФ с помощью разработанных методик и компьютерных программ были определены прогибы и напряжения в трехслойных панелях, что позволило оценить их прочность и жесткость, а также дать практические рекомендации при проектировании и использовании указанных панелей в создании быстровозводимых модулей.

С помощью разработанных методик и программ численного счета рассчитаны рациональные параметры подземных резервуаров для хранения нефтепродуктов на ОП НПО РУП «Гомсельмаш». Отдельные результаты диссертации использованы в ИММС им. В. А. Белого НАНБ для оптимизации композитных элементов индивидуальных средств защиты от ударного воздействия.

Результаты внедрений подтверждены соответствующими актами.

## СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Статьи в научных изданиях, включенных в перечень изданий ВАК

1. Старовойтов, Э. И. Изгиб трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей, частично опертого на упругое основание / Э. И. Старовойтов, А. А. Поддубный // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 1(14). – С. 51–55.
2. Поддубный, А. А. Расчет трехслойной плиты, полностью или частично опирающейся на участки упругого основания различной жесткости / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Актуальные вопросы машиноведения. – 2012. – № 1. – С. 259–262.
3. Яровая, А. В. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов трехслойной балки, частично опертой на упругое основание / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – № 29. – С. 141–147.
4. Яровая, А. В. Механико-математическая модель деформирования неупругой трехслойной балки, частично опертой на упругое основание / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Теоретическая и прикладная механика. – 2015. – № 30. – С. 256–262.
5. Поддубный, А. А. Теоретическое и экспериментальное определение перемещений трехслойной балки при неполном контакте с упругим основанием / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Мир транспорта и технологических машин. – 2015. – № 3(50). – С. 256–262.
6. Яровая, А. В. Деформирование упругой трехслойной балки, частично опертой на упругое основание, под действием равномерно распределенной нагрузки / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Теоретическая и прикладная механика. – 2016. – № 31. – С. 242–246.

### Статьи в других научных изданиях

7. Яровая, А. В. Изгиб трехслойной балки, частично опертой на упругое основание / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. – 2011. – № 1(22). – С. 93–97.
8. Яровая, А. В. Изгиб локальной нагрузкой трехслойного стержня, частично опертого на упругое основание / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – № 26. – С. 70–75.
9. Яровая, А. В. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов упругой шарнирно опертой трехслойной балки / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. – 2012. – № 2(25). – С. 93–98.
10. Яровая, А. В. Расчет частично опертой трехслойной плиты с учетом нелинейных свойств материалов / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. – 2014. – № 2(29). – С. 87–90.

### Материалы конференций

11. Старовойтов, Э. И. Изгиб трехслойного стержня частично опертого на упругое основание / Э. И. Старовойтов, А. А. Поддубный // Труды VI Междуна-

родного симпозиума по трибофатике МСТФ 2010, Минск, 25 октября – 1 ноября 2010 г. / в 2 ч. / БГУ ; редкол.: М. А. Журавков (пред.) [и др.]. – Минск, 2010. – Ч. 2. – С. 409–414.

12. Поддубный, А. А. Уравнения равновесия трехслойного стержня с нерегулярной границей на упругом основании / А. А. Поддубный // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 15–17 марта 2010 г. / Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2010. – Ч. 1. – С. 236–238.

13. Яровая, А. В. Изгиб трехслойного стержня ступенчато-переменного сечения, частично опертого на упругое основание / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Механика – 2011: сборник научных трудов V Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике. – Минск, 2011. – Том II. – С. 355–360.

14. Яровая, А. В. Расчет прямоугольной трехслойной плиты, работающей в условиях цилиндрического изгиба при частичном опирании на упругое основание / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Строительство и восстановление искусственных сооружений: материалы I Международной научно-практической конференции, Гомель, 28–29 марта 2012 г. / Белорусский государственный университет транспорта ; редкол.: А. Г. Гордюк [и др.]. – Гомель, 2012. – Ч.1. – С. 27–33.

15. Поддубный, А. А. Применение сборно-разборной дорожной площадки при оборудовании мостового полотна для совмещенного железнодорожного и автомобильного проезда / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Проблемы безопасности на транспорте: материалы VI Международной научно-практической конференции, Гомель, 29–30 ноября 2012 г. / Белорусский государственный университет транспорта ; редкол.: В. И. Сенько [и др.]. – Гомель, 2012. – С. 140–141.

16. Поддубный, А. А. Расчет трехслойной композитной панели при оборудовании мостового полотна для совмещенного железнодорожного и автомобильного проезда / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Проблемы безопасности на транспорте: материалы VI Международной научно-практической конференции, Гомель, 29–30 ноября 2012 г. / Белорусский государственный университет транспорта ; редкол.: В. И. Сенько [и др.]. – Гомель, 2012. – С. 141–143.

17. Поддубный, А. А. Теоретическое и экспериментальное исследование перемещений при изгибе трехслойной балки / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Строительство и восстановление искусственных сооружений: материалы II Международной научно-практической конференции, Гомель, 29–30 марта 2013 г. / Белорусский государственный университет транспорта ; редкол.: А. Г. Гордюк [и др.]. – Гомель, 2013. – Ч.1. – С. 121–127.

18. Поддубный, А. А. Дифференциальные уравнения изгиба трехслойной балки при ее неполном контакте с упругим основанием / А. А. Поддубный // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 25–27 марта 2013 г. / Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2013. – Ч.1. – С. 11–12.

19. Поддубный, А. А. Теоретическое исследование прогибов трехслойной балки и их экспериментальная проверка / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса: материалы III Международной научно-практической конференции, Гомель, 17–18 октября 2013 г. / Белорусский государственный университет транспорта; редкол.: В. И. Сенько [и др.]. – Гомель, 2013. – С. 387–389.

20. Поддубный, А. А. Расчет трехслойной панели при неполном контакте с упругим основанием / А. А. Поддубный // Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности: материалы Международной научно-технической конференции молодых ученых, Могилев, 30–31 октября 2013 г. / Белорусско-Российский университет; редкол.: И. С. Сазонов [и др.]. – Могилев, 2013. – С. 8–15.

21. Поддубный, А. А. Математическая модель деформирования сборно-разборной дорожной площадки из трехслойных плит при неполном контакте с упругим основанием / А. А. Поддубный // Строительство и восстановление искусственных сооружений: материалы III Международной научно-практической конференции, Гомель, 24–25 апреля 2014 г. / Белорусский государственный университет транспорта; редкол.: А. М. Куксо [и др.]. – Гомель, 2014. – Ч.1. – С. 21–31.

22. Яровая, А. В. Изгиб трехслойной балки, частично опертой на упругое основание, с учетом нелинейных свойств материала / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Строительство и восстановление искусственных сооружений: материалы III Международной научно-практической конференции, Гомель, 24–25 апреля 2014 г. / Белорусский государственный университет транспорта; редкол.: А. М. Куксо [и др.]. – Гомель, 2014. – Ч.1. – С. 133–137.

23. Поддубный, А. А. Изгиб частично опертой трехслойной пластины с учетом нелинейных свойств материалов / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXI Международного симпозиума имени А. Г. Горшкова, Москва, 16–20 февраля 2015 г. / МАИ, Национальный исследовательский университет. – Москва, 2015. – С. 166–168.

24. Поддубный, А. А. Механико-математическая модель деформирования трехслойной панели, частично опертой на упругое основание, с учетом нелинейных свойств материалов / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Строительство и восстановление искусственных сооружений: материалы IV Международной научно-практической конференции, Гомель, 16–17 апреля 2015 г. / Белорусский государственный университет транспорта; редкол.: А. М. Куксо [и др.]. – Гомель, 2015. – Ч.1. – С. 412–416.

25. Поддубный, А. А. Деформирование неоднородных панелей при неполном контакте с упругим основанием / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Строительство и восстановление искусственных сооружений: материалы V Международной научно-практической конференции, Гомель, 16–17 апреля 2016 г. / Белорусский государственный университет транспорта; редкол.: А. М. Куксо [и др.]. – Гомель, 2016. – Ч.1. – С. 15–21.

### **Тезисы докладов**

26. Поддубный, А. А. Деформирование несимметричного по толщине трехслойного упругого стержня частично опертого на упругое основание /

А. А. Поддубный // Новые функциональные материалы, современные технологии и методы исследования: тезисы Республиканской науч.-техн. конференции молодых ученых, Гомель, 5–7 октября 2010 г. / ИММНС НАН Беларуси. – Гомель, 2010. – С. 90–92.

27. Поддубный, А. А. Изгиб частично опертой трехслойной балки под действием локальных нагрузок / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тезисы докладов Международного научного семинара, Москва, 8–10 декабря 2014 г. / Российский научный фонд, МАИ, Национальный исследовательский университет. – Москва, 2014. – С. 71–72.

28. Поддубный, А. А. Деформирование несимметричного по толщине трехслойного упругого стержня частично опертого на упругое основание / А. А. Поддубный // ПОЛИКОМТРИБ-2015: тезисы докладов международной научно-технической конференции «Полимерные композиты и трибология», Гомель, 23–26 июня 2015 г. / ИММНС НАН Беларуси. – Гомель, 2015. – С. 259.

29. Поддубный, А. А. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов трехслойных панелей, частично опертых на упругое основание / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тезисы докладов III Международного научного семинара, Москва, 19–21 октября 2015 г. / Российский научный фонд, МАИ, Национальный исследовательский университет. – Москва, 2015. – С. 101–103.

30. Поддубный, А. А. Напряженно-деформированное состояние плит сборно-разборного дорожного настила, частично опертых на упругое основание / А. А. Поддубный, А. В. Яровая // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тезисы докладов IV Международного научного семинара, Москва, 15–19 февраля 2016 г. / Российский научный фонд, МАИ, Национальный исследовательский университет. – Москва, 2016. – С. 121–122.

### **Патент на изобретение**

31. Сборно-разборный дорожный настил : пат. ВУ 19687 / А. В. Яровая, А. А. Поддубный. – Опубл. – 30.12.2015.

### **Патент на полезную модель**

32. Сборно-разборный автодорожный настил : полез. модель ВУ 10312 / А. В. Яровая, А. А. Поддубный. – Опубл. – 30.10.2014.

### **Учебник**

33. Новиков, С. И. Учебник сержанта транспортных войск. Часть III. Тактико-специальная, специальная и техническая подготовка дорожно-мостовых подразделений : учебник : в 3 ч. / С. И. Новиков, А. А. Поддубный, А. В. Яровая [и др.]. – Гомель : М-во обор. Респ. Беларусь, М-во обр. Респ. Беларусь, Бел.ГУТ., 2014. – С. 797–808.



## РЕЗЮМЕ

Поддубный Алексей Алексеевич

**Деформирование трёхслойных стержней, частично опертых на упругое основание**

*Ключевые слова:* изотропный трехслойный стержень, ортотропный трехслойный стержень, упругость, пластичность, упругое основание, изгиб, частичное опирание, ступенчато-переменное сечение.

*Цель работы:* разработка и экспериментальная проверка механико-математических моделей физически линейного и нелинейного деформирования изотропных и ортотропных трехслойных стержней ступенчато-переменного сечения под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок при частичном опирании на упругое основание.

Приведены постановки новых краевых задач о физически линейном и нелинейном деформировании изотропных и ортотропных трехслойных стержней ступенчато-переменного сечения под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок при частичном опирании на упругое основание. Разработаны методы решения поставленных задач. Получен ряд точных решений для упругих стержней и итерационных решений для физически нелинейных трехслойных стержней.

Численно исследованы параметры напряженно-деформированного состояния упругих и физически нелинейных трехслойных стержней, частично опирающихся на упругое основание, в зависимости от граничных условий, геометрических и упругих параметров слоев, величины и вида нагрузки, длин участков упругих оснований. Экспериментально определены прогибы трехслойных стержней на жестких опорах и при частичном опирании на упругое основание, проведено сравнение результатов.

Результаты исследований являются новыми и могут быть использованы заинтересованными проектными организациями при строительстве и восстановлении искусственных сооружений.

## РЭЗІУМЭ

Паддубны Аляксей Аляксеевіч

**Дэфармаванне трохслаёвых стрыжняў, часткова абапёртых на пругкае заснаванне**

*Ключавыя словы:* ізатропны трохслаёвы стрыжань, артатропны трохслаёвы стрыжань, пругкасць, пластычнасць, пругкае заснаванне, выгіб, частковае абапіранне, ступеніста-пераменнае сячэнне.

*Мэта работы:* распрацоўка і эксперыментальная праверка механіка-матэматычных мадэляў фізічна лінейнага і нелінейнага дэфармавання ізатропных і артатропных трохслаёвых стрыжняў ступеніста-пераменнага сячэння пад дзеяннем размеркаваных і засяроджаных нагрузак пры частковым абапіранні на пругкае заснаванне.

Приведены постановки новых крайних задач аб фізічна лінейным і нелінейным дэфармаванні ізатропных і артагропных трохслаёвых стрыжняў ступеніста-пераменнага сячэння пад дзеяннем размеркаваных і засяроджаных нагрузак пры частковым абапіранні на пругкае заснаванне. Распрацаваны метады рашэння пастаўленых задач. Атрыманы шэраг дакладных рашэнняў для пругкіх стрыжняў і ітэрацыйных рашэнняў для фізічна нелінейных трохслаёвых стрыжняў.

Колькасна даследаваны параметры напружана-дэфармаванага стану пругкіх і фізічна нелінейных трохслаёвых стрыжняў, якія часткова абапіраюцца на пругкае заснаванне, у залежнасці ад межавых умоў, геаметрычных і пругкіх параметраў пластоў, велічыні і выгляду нагрузкі, даўжыні участкаў пругкіх заснаванняў. Эксперыментальна вызначаны прагіны трохслаёвых стрыжняў на цвёрдых апорах і пры частковым абапіранні на пругкае заснаванне, праведзена параўнанне вынікаў.

Вынікі даследаванняў з'яўляюцца новымі і могуць быць выкарыстаны зацікаўленымі практычнымі арганізацыямі пры будаўніцтве і аднаўленні штучных збудаванняў.

## ABSTRACT

Poddubny Alexei Alexeyevich

### **Deformation of Sandwich Rods, Partially Resting on Elastic Foundation**

*Keywords:* isotropic sandwich rod, orthotropic sandwich rod, elasticity, plasticity, elastic foundation, bending, partial resting, step-variable cross-section.

*Work objectives:* the creation and experimental verification of mechanical-mathematical models of linear and physically non-linear deformation of isotropic and orthotropic sandwich rods with step-variable section under distributed and concentrated loads, partially resting on elastic foundation.

New boundary value problems on linear and physically nonlinear deformation of orthotropic and isotropic sandwich rods with step-variable section under distributed and concentrated loads, partially resting on elastic foundation, have been set up. The methods of problem solving have been developed. We have obtained exact solutions for elastic rods and iterative solutions for physically nonlinear sandwich rods.

The parameters of the stress-strain state of elastic physically nonlinear three-layer cores, partially resting on elastic foundation have been numerically investigated depending on boundary conditions, geometrical and elastic parameters of layers, size and type of load, the lengths of the parts of elastic foundations. The deflections of sandwich rods in fixed bearings and those partially resting on elastic foundation have been experimentally determined, the results have been compared.

The research results are new and can be used by interested project organizations in construction or reconstruction of artificial structures.

Научное издание

*ПОДДУБНЫЙ Алексей Алексеевич*

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ,  
ЧАСТИЧНО ОПЕРТЫХ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

по специальности

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Подписано в печать 20.09.2016 г. Формат бумаги 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 1,39. Тираж 90 экз. Зак. № 3294.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский государственный университет транспорта  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий  
№ 2/104 от 01.04.2014.  
Ул. Кирова, 34, 246653. Гомель