МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА"

Кафедра высшей математики

**С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
А. И. ПРОКОПЕНКО**

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ч а с т ь 2

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

Учебно-методическое пособие

Гомель 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА"

Кафедра высшей математики

С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
А. И. ПРОКОПЕНКО

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Часть 2

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

Одобрено методической комиссией электротехнического факультета в качестве учебно-методического пособия для студентов электротехнических специальностей

Гомель 2012

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6
Д81

Р е ц е н з е н т – зав. кафедрой высшей математики канд. физ.-мат. наук
С. П. Новиков (УО «БелГУТ»).

Дудко, С. А.

Д81 Системы дифференциальных уравнений : учеб.-метод. пособие : в 3 ч. / С. А. Дудко, Е. А. Задорожнюк, А. И. Прокопенко; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2012. – Ч. 2 : Операционный метод. – 58 с.
ISBN 978-985-554-101-2 (ч. 2)

Изложены классические методы интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Разобрано большое количество п римеров. Приведены упражнения для домашних заданий.

Предназначено для студентов электротехнических специальностей, а также может быть использовано студентами других факультетов.

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6

ISBN 978-985-554-101-2 (ч.2)
ISBN 978-985-554-099-2

3 МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ И ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1 Метод последовательного исключения неизвестных функций

Суть метода последовательного исключения неизвестных поясним на конкретных примерах.

***Пример* 1.** Найти общее решение системы уравнений.

а) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ \ 2x + y - \ln t; \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y + \ln t. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем по переменной t первое уравнение системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - \frac{1}{t}.$$

Подставляя в это уравнение производную $\dfrac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы, получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - 4x - 2y + \ln t - \frac{1}{t}.$$

Функцию $y\ t$ выражаем из первого уравнения системы и подставляем в полученное равенство:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} - 4x - 2\left(\frac{dx}{dt} - 2x + \ln t\right) + \ln t - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t} - \ln t.$$

Таким образом, для функции $x\ t$ мы получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{t} - \ln t.$$

Дважды интегрируя, находим функцию $x\ t$:

$$\frac{dx}{dt}=-\int\frac{dt}{t}-\int\ln t dt=\tilde{c}_1+t-\ t+1\ \ln t,$$

$$x\ \ t\ =\tilde{c}_1t+\frac{1}{2}t^2-\int\ln t d\left(\frac{1}{2}t^2+t\right)=\tilde{c}_1t+\frac{1}{2}t^2-\left(\frac{1}{2}t^2+t\right)\ln t+\frac{1}{4}t^2+t+c_2=$$

$$=(\tilde{c}_1+1)t+c_2+\frac{3}{4}t^2-\left(\frac{1}{2}t^2+t\right)\ln t=c_1t+c_2+\frac{3}{4}t^2-\left(\frac{1}{2}t^2+t\right)\ln t,$$

где мы ввели новую произвольную постоянную $c_1=\tilde{c}_1+1$.

Используя полученное выражение для функции $x\ \ t$, из первого уравнения системы находим

$$y\ \ t\ =\frac{dx}{dt}-2x=\ln t=c_1+t-1-\ t+1\ \ln t-2c_1t-2c_2-\frac{3}{2}t^2+$$

$$+\ \ t^2+2t\ \ln t+\ln t=c_1\ \ 1-2t\ \ -2c_2-1+t-\frac{3}{2}t^2-\ \ t^2+t\ \ln t.$$

Таким образом, решение данной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$x\ \ t\ =c_1t+c_2+\frac{3}{4}t^2-\left(\frac{1}{2}t^2+t\right)\ln t,$$

$$y\ \ t\ =c_1\ \ 1-2t\ \ -2c_2-1+t-\frac{3}{2}t^2-\ \ t^2+t\ \ln t.$$

б) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\ x-2y-2te^t;\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=5x-y-\ \ 2t+6\ \ e^t.\end{cases}$

Решение. Дифференцируем первое уравнение системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}-2\frac{dy}{dt}-2\ \ t+1\ \ e^t.$$

В полученное уравнение подставим выражение $\dfrac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}-2\ \ t+1\ \ e^t-10x+2y+2\ \ 2t+6\ \ e^t=\frac{dx}{dt}-10x+2y+\ \ 2t+10\ \ e^t.$$

Подставив в это равенство выражение $2y$ из первого уравнения системы, получаем уравнение для функции $x(t)$, которое имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=10e^t.$$

Общее решение этого уравнения

$$x(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t+e^t,$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Подставив $x(t)$ в первое уравнение системы, находим

$$y(t)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{dx}{dt}\right)-te^t=\frac{1}{2}(c_1-3c_2)\cos 3t+\frac{1}{2}(3c_1+c_2)\sin 3t-te^t.$$

Итак, общее решение данной системы уравнений имеет вид

$$x(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t+e^t,$$

$$y(t)=\frac{1}{2}(c_1-3c_2)\cos 3t+\frac{1}{2}(3c_1+c_2)\sin 3t-te^t.$$

Совершенно аналогичным образом метод последовательного исключения неизвестных можно использовать для решения систем дифференциальных уравнений высших порядков, не приведенных к нормальному виду.

***Пример* 2.** Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+2m^2y=\cos\omega t;\\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2}-2m^2x=0.\end{cases}$$

Решение. Дважды дифференцируем первое уравнение системы:

$$\frac{d^4x}{dt^4}+2m^2\frac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2\cos\omega t.$$

Подставляя в это уравнение производную $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ из второго уравнения системы, получаем уравнение 4-го порядка для функции $x(t)$:

$$\frac{d^4x}{dt^4}+4m^4x=-\omega^2\cos\omega t.$$

Характеристическое уравнение решаем, выполнив следующие очевидные преобразования:

$$\lambda^4+4m^4=\left(\lambda^2\right)^2+\left(2m^2\right)^2=\left(\lambda^2+2m^2\right)^2-\left(2m\lambda\right)^2=$$

$$=\left(\lambda^2-2m\lambda+2m^2\right)\left(\lambda^2+2m\lambda+2m^2\right)=0.$$

Таким образом, корни характеристического уравнения находим из уравнений

$$\lambda^2-2m\lambda+2m^2=0,\ \ \lambda_{1,\,2}=m\pm im,$$

$$\lambda^2+2m\lambda+2m^2=0,\ \ \lambda_{3,\,4}=-m\pm im.$$

Как следствие, общее решение соответствующего однородного уравнения для функции $x(t)$ имеет вид

$$x_0(t)=e^{mt}\left(c_1\cos mt+c_2\sin mt\right)+e^{-mt}\left(c_3\cos mt+c_4\sin mt\right).$$

Частное решение находим методом неопределенных коэффициентов. Получаем

$$\bar{x}(t)=-\frac{\omega^2\cos\omega t}{\omega^4+4m^4}.$$

Следовательно, функция $x(t)$ имеет вид

$$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=e^{mt}\left(c_1\cos mt+c_2\sin mt\right)+$$

$$+e^{-mt}\left(c_3\cos mt+c_4\sin mt\right)-\frac{\omega^2\cos\omega t}{\omega^4+4m^4}.$$

Используя полученное выражение для функции $x(t)$, из первого уравнения системы находим функцию $y(t)$:

$$y(t)=\frac{1}{2m^2}\left(\cos\omega t-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=e^{mt}\left(c_1\sin mt-c_2\cos mt\right)+$$

$$+e^{-mt}\left(c_4\cos mt-c_3\sin mt\right)+\frac{2m^2\cos\omega t}{\omega^4+4m^4}.$$

Таким образом, общее решение исходной системы уравнений имеет вид

$$x(t)=e^{mt}\left(c_1\cos mt+c_2\sin mt\right)+e^{-mt}\left(c_3\cos mt+c_4\sin mt\right)-\frac{\omega^2\cos\omega t}{\omega^4+4m^4},$$

$$y(t)=e^{mt}\left(c_1\sin mt-c_2\cos mt\right)+e^{-mt}\left(c_4\cos mt-c_3\sin mt\right)+\frac{2m^2\cos\omega t}{\omega^4+4m^4}.$$

3.2 Операторный метод

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} x'' + a_1 x + a_2 y = f_1(t); \\ y' + b_1 y + b_2 x = f_2(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – заданные функции.

Введем оператор D, действующий на функцию $f(t)$ по правилу

$$Df(t) = \frac{df(t)}{dt},$$

т. е. оператор D ставит в соответствие функции $f(t)$ ее производную. Как следствие, высшие степени оператора D будут иметь вид

$$D^2 f = D(Df) = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{d^2 f}{dt^2},\ D^3 f = \frac{d^3 f}{dt^3}, \text{ и т. д.}$$

Перейдем в системе (3.1) к операторной форме записи уравнений:

$$\begin{cases} D^2 x + a_1 x + a_2 y = f_1(t); \\ Dy + b_1 y + b_2 x = f_2(t), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (D^2 + a_1)x + a_2 y = f_1(t); \\ b_2 x + (D + b_1)y = f_2(t). \end{cases} \tag{3.2}$$

На "алгебраической" стадии задачи, работая с системой уравнений (3.2), временно забываем о функциональной структуре оператора D, т. е. решаем систему уравнений (3.2), считая D условным "числом". Умножаем первое уравнение системы (3.2) на коэффициент $(D + b_1)$, второе – на коэффициент a_2, отнимаем из первого уравнения системы второе, и получаем уравнение для переменной x:

$$\left[(D^2 + a_1)(D + b_1) - a_2 b_2\right] x(t) = (D + b_1) f_1(t) - a_2 f_2(t),$$

или

$$D^3 x + b_1 D^2 x + a_1 Dx + (a_1 b_1 - a_2 b_2) x = Df_1 + b_1 f_1 - a_2 f_2.$$

Далее, возвращаясь к явной функциональной структуре оператора D, получаем дифференциальное уравнение для функции $x(t)$

$$\frac{d^3x}{dt^3}+b_1\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+\left(a_1b_1-a_2b_2\right)x=\frac{df_1}{dt}+b_1f_1(t)-a_2f_2(t).$$

Умножив второе уравнение системы (3.2) на коэффициент $\left(D^2+a_1\right)$, первое уравнение – на b_2, и отнимая из второго уравнения первое, приходим к уравнению для переменной $y(t)$

$$\left(D^3+b_1D^2+a_1D+a_1b_1-a_2b_2\right)y=\left(D^2+a_1\right)f_2-b_2f_1,$$

или, с учетом явной функциональной структуры оператора D, к уравнению

$$\frac{d^3y}{dt^3}+b_1\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+\left(a_1b_1-a_2b_2\right)y=\frac{d^2f_2(t)}{dt^2}+a_1f_2(t)-b_2f_1(t).$$

Решая полученные дифференциальные уравнения, находим функции $x(t)$ и $y(t)$.

***Пример* 3.** Найти общее решение системы уравнений.

а) $\begin{cases} y''+y'+z''-z=e^t; \\ y'+2y-z'+z=e^{-t}. \end{cases}$

Решение. Вводим оператор D, действующий на функции $y(t)$ и $z(t)$ по правилу

$$Dy=\frac{dy}{dt},\quad Dz=\frac{dz}{dt}.$$

Переходим в исходной системе дифференциальных уравнений к операторным уравнениям

$$\begin{cases} \left(D^2+D\right)y+\left(D^2-1\right)z=e^t; \\ (D+2)y-(D-1)z=e^{-t}. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение системы на коэффициент $(D+1)$ и сложив затем оба уравнения, приходим к уравнению вида

$$\left((D+2)(D+1)+D^2+D\right)y=e^t+(D+1)e^{-t}.$$

Так как $(D+1)e^{-t}=\left(e^{-t}\right)'+e^{-t}=0,$ то после приведения подобных слагаемых, содержащих оператор D, получаем

$$\left(D^2+2D+1\right)y=\frac{1}{2}e^t.$$

С учетом явной функциональной структуры оператора D приходим, таким образом, к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+y=\frac{1}{2}e^t.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(t)=\left(c_1+c_2t\right)e^{-t}+\frac{1}{8}e^t.$$

Запишем второе уравнение исходной системы дифференциальных уравнений в виде

$$\frac{dz}{dt}-z=y'+2y-e^{-t}.$$

Подставив в это уравнение найденную функцию $y(t)$ и ее производную

$$y'(t)=\left(c_2-c_1-c_2t\right)e^{-t}+\frac{1}{8}e^t,$$

получим уравнение 1-го порядка для функции $z(t)$

$$\frac{dz}{dt}-z=\left(c_1+c_2-1+c_2t\right)e^{-t}+\frac{3}{8}e^t.$$

Решаем это уравнение методом Бернулли, т. е. через подстановку $z(t)=u(t)v(t)$. Получаем

$$u'v+u\left(v'-v\right)=\left(c_1+c_2-1+c_2t\right)e^{-t}+\frac{3}{8}e^t.$$

Из уравнения $\frac{dv}{dt}-v=0$ находим функцию $v(t)=e^t$. Подставляя эту функцию в уравнение

$$\frac{du}{dt}v=\left(c_1+c_2-1+c_2t\right)e^{-t}+\frac{3}{8}e^t,$$

получаем уравнение для функции $u(t)$

$$\frac{du}{dt}=\left(c_1+c_2-1+c_2t\right)e^{-2t}+\frac{3}{8}.$$

Интегрируя полученное равенство, находим требуемую функцию

$$u(t)=\frac{3}{8}t-\frac{1}{2}\left(c_1+\frac{3}{2}c_2-1+c_2t\right)e^{-2t}+c_3.$$

Тогда для функции $z(t)$ получаем следующее выражение:

$$z(t)=u(t)v(t)=\left(\frac{3}{8}t+c_3-\frac{1}{2}\left(c_1+\frac{3}{2}c_2-1+c_2t\right)e^{-2t}\right)e^{t}=$$

$$=\left(\frac{3}{8}t+c_3\right)e^{t}-\frac{1}{2}\left(c_1+\frac{3}{2}c_2-1+c_2t\right)e^{-t}.$$

Таким образом, решение данной системы уравнений имеет вид

$$y(t)=(c_1+c_2t)e^{-t}+\frac{1}{8}e^{t},\ z(t)=\left(\frac{3}{8}t+c_3\right)e^{t}-\frac{1}{2}\left(c_1+\frac{3}{2}c_2-1+c_2t\right)e^{-t}.$$

б) $\begin{cases} x''-x'+6x+y''-y'+2y=0; \\ 2x''+x'+3x+y''+y=t-1. \end{cases}$

Решение. Вводим оператор D и переходим в системе дифференциальных уравнений к соответствующим операторным уравнениям

$$\begin{cases} (D^2-D+6)x+(D^2-D+2)y=0; \\ (2D^2+D+3)x+(D^2+1)y=t-1. \end{cases}$$

Преобразуем систему операторных уравнений к более удобному виду. Отнимаем из второго уравнения системы первое, получаем уравнение

$$(D^2+2D-3)x+(D-1)y=t-1.$$

Используя разложение $D^2+2D-3=(D-1)(D+3)$, представим систему операторных уравнений в виде

$$\begin{cases} (D-1)(D+3)x+(D-1)y=t-1; \\ (D^2-D+6)x+(D^2-D+2)y=0. \end{cases}$$

Определитель системы

$$\Delta=(D-1)(D+3)(D^2-D+2)-(D-1)(D^2-D+6)=$$

$$=(D-1)(D^3+D^2)=D^2(D-1)(D+1)=D^2(D^2-1).$$

По формулам Крамера для системы алгебраических уравнений получаем

$$x=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} t-1 & D-1 \\ 0 & D^2-D+2 \end{vmatrix}=\frac{\left(D^2-D+2\right)(t-1)}{D^2\left(D^2-1\right)},$$

тогда

$$\left(D^4-D^2\right)x=D^2(t-1)-D(t-1)+2t-2.$$

Так как

$$D(t-1)=(t-1)'=1,\ \ D^2(t-1)=(t-1)''=0,$$

то, переходя от операторного уравнения к дифференциальному, получаем для функции $x(t)$ дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$\frac{d^4x}{dt^4}-\frac{d^2x}{dt^2}=2t-3.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t)=c_1+c_2t+c_3e^{-t}+c_4e^{t}+\frac{1}{6}\left(9t^2-2t^3\right).$$

Запишем первое уравнение исходной системы дифференциальных уравнений в виде

$$y''-y'+2y=-x''+x'-6x.$$

Подставляя в это уравнение найденную функцию $x(t)$, ее первую и вторую производные, приходим к уравнению вида

$$y''-y'+2y=-8c_3e^{-t}-6c_4e^{t}+2t^3-10t^2+(5-6c_2)t+(c_2-6c_1-3).$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_0(t)=e^{t}\left(c_5\cos t+c_6\sin t\right).$$

Частное решение ищем, используя принцип суперпозиции решений

$$\bar{y}(t)=\bar{y}_1(t)+\bar{y}_2(t)+\bar{y}_3(t).$$

Функция $\bar{y}_1(t)=At^3+Bt^2+Ct+D$ является решением уравнения

$$y''-y'+2y=2t^3-10t^2+(5-6c_2)t+(c_2-6c_1-3).$$

Подставляя функцию $\bar{y}_1(t)$, ее производные $\bar{y}_1'(t)=3At^2+2Bt+C,$ $\bar{y}_1''(t)=6At+2B$ в это уравнение, получаем

$$2At^3+(2B-3A)t^2+(6A-2B+2C)t+(2B-C+2D)=$$

$$= 2t^3 - 10t^2 + (5 - 6c_2)t + (c_2 - 6c_1 - 3).$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} 2A = 2; \\ 2B - 3A = -10; \\ 6A - 2B + 2C = 5 - 6c_2; \\ 2B - C + 2D = c_2 - 6c_1 - 3, \end{cases}$$

находим коэффициенты $A = 1$, $B = -\dfrac{7}{2}$, $C = -(3c_2 + 4)$, $D = -(c_2 + 3c_1)$.

Поэтому получаем

$$\overline{y}_1(t) = t^3 - \frac{7}{2}t^2 - (3c_2 + 4)t - (c_2 + 3c_1).$$

Решением уравнения

$$y'' - y' + 2y = -8c_3e^{-t}$$

будет функция $\overline{y}_2(t) = -2c_3e^{-t}$.

Аналогичным образом находим функцию $\overline{y}_3(t) = Fe^t$, являющуюся решением уравнения

$$y'' - y' + 2y = -6c_4e^t.$$

Получаем

$$\overline{y}_3(t) = -3c_4e^t.$$

Таким образом, функция $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}_1(t) + \overline{y}_2(t) + \overline{y}_3(t) =$$

$$= t^3 - \frac{7}{2}t^2 - (3c_2 + 4)t - c_3 - 3c_1 - 2c_3e^{-t} - 3c_4e^t + e^t(c_5\cos t + c_6\sin t).$$

Итак, решение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$x(t) = c_1 + c_2t + c_3e^{-t} + c_4e^t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3,$$

$$y(t) = t^3 - \frac{7}{2}t^2 - (3c_2 + 4)t - c_3 - 3c_1 - 2c_3e^{-t} - 3c_4e^t + e^t(c_5\cos t + c_6\sin t).$$

Пример **4.** Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x'' + n^2 y = \cos nt; \\ y'' + n^2 x = \sin nt. \end{cases}$$

Решение. Переходим от системы дифференциальных уравнений к операторным уравнениям

$$\begin{cases} D^2 x + n^2 y = \cos nt; \\ D^2 y + n^2 x = \sin nt. \end{cases}$$

Первое уравнение системы умножаем на коэффициент n^2, второе – на D^2, затем из второго уравнения системы отнимаем первое, получаем

$$\left(D^4 - n^4\right) y = D^2 \sin nt - n^2 \cos nt.$$

Как следствие, дифференциальное уравнение для функции $y(t)$ будет иметь вид

$$\frac{d^4 y}{dt^4} - n^4 y = -n^2 \cos nt - n^2 \sin nt.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - n^4 = \left(\lambda^2 - n^2\right)\left(\lambda^2 + n^2\right) = (\lambda - n)(\lambda + n)\left(\lambda^2 + n^2\right) = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm n$, $\lambda_{3,4} = \pm in$,

поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения будет

$$y_0(t) = c_1 e^{-nt} + c_2 e^{nt} + c_3 \cos nt + c_4 \sin nt.$$

Частное решение уравнения ищем в виде

$$\bar{y}(t) = t\left(A\cos nt + B\sin nt\right).$$

Вычисляем производные:

$$\bar{y}'(t) = A\cos nt + B\sin nt + t\left(-An\sin nt + Bn\cos nt\right),$$

…………………………………………………………..

$$\bar{y}^{\mathrm{IV}}(t) = 4An^3 \sin nt - 4Bn^3 \cos nt + n^4 t\left(A\cos nt + B\sin nt\right).$$

Подставляем $\bar{y}(t)$ и $\bar{y}^{\mathrm{IV}}(t)$ в исходное уравнение и получаем

$$4An^3 \sin nt - 4Bn^3 \cos nt = n^2 \cos nt - n^2 \sin nt.$$

Из этого уравнения находим требуемые коэффициенты

$$A=-\frac{1}{4n},\quad B=\frac{1}{4n}.$$

Поэтому частное решение уравнения имеет вид

$$\bar{y}(t)=\frac{1}{4n}t\,(\sin nt-\cos nt),$$

а общее решение неоднородного уравнения –

$$y(t)=y_0(t)+\bar{y}(t)=c_1e^{-nt}+c_2e^{nt}+\left(c_3-\frac{1}{4n}t\right)\cos nt+\left(c_4+\frac{1}{4n}t\right)\sin nt.$$

Зная функцию $y(t)$, из второго уравнения системы находим функцию $x(t)$, для которой получаем

$$x(t)=\frac{1}{n^2}(\sin nt-y'')=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2}\sin nt-\frac{1}{2}\cos nt-n^2(c_1e^{-nt}+c_2e^{nt})+\right.$$

$$\left.+n^2\left(c_3-\frac{1}{4n}t\right)\cos nt+n^2\left(c_4+\frac{1}{4n}t\right)\sin nt\right)=-(c_1e^{-nt}+c_2e^{nt})+$$

$$+\left(c_3-\frac{1}{4n}t-\frac{1}{2n^2}\right)\cos nt+\left(c_4+\frac{1}{4n}t+\frac{1}{2n^2}\right)\sin nt.$$

Таким образом, решение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$x(t)=-(c_1e^{-nt}+c_2e^{nt})+\left(c_3-\frac{1}{4n}t-\frac{1}{2n^2}\right)\cos nt+\left(c_4+\frac{1}{4n}t+\frac{1}{2n^2}\right)\sin nt,$$

$$y(t)=c_1e^{-nt}+c_2e^{nt}+\left(c_3-\frac{1}{4n}t\right)\cos nt+\left(c_4+\frac{1}{4n}t\right)\sin nt.$$

ЗАДАЧИ

***Упражнение* 1.** Проинтегрировать системы дифференциальных уравнений:

1.1 $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-\cos t,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-x+\sin t.\end{cases}$$

Отв. $x\ \ t\ = c_1\cos t + c_2\sin t - t\cos t,\ y\ \ t\ = -c_1\sin t + c_2\cos t + t\sin t.$

$$\textbf{1.2}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y, \\ \dfrac{dz}{dt} = -z. \end{cases}$$

Отв. $x\ \ t\ = c_1e^{t} - 2c_2e^{2t},\ \ y\ \ t\ = c_2e^{2t},\ z\ \ t\ = c_3e^{-t}.$

$$\textbf{1.3}\ \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2m^2y = e^{mt}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2m^2x = e^{-mt}. \end{cases}$$

Отв.

$$x\ \ t\ = e^{mt}(c_1\cos mt + c_2\sin mt + \frac{1}{5m^2}) + e^{-mt}(c_3\cos mt + c_4\sin mt - \frac{2}{5m^2}),$$

$$y\ \ t\ = e^{mt}(c_1\sin mt - c_2\cos mt + \frac{1}{2m^2}) + e^{-mt}(-c_3\sin mt + c_4\cos mt + \frac{1}{5m^2}).$$

$$\textbf{1.4}\ \ a)\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2m^2y = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2m^2x = 0. \end{cases}$$

Отв. $x\ \ t\ = c_1e^{-mt\sqrt{2}} + c_2e^{mt\sqrt{2}} + c_3\cos(mt\sqrt{2}) + c_4\sin(mt\sqrt{2}),$

$y\ \ t\ = c_3\cos(mt\sqrt{2}) + c_4\sin(mt\sqrt{2}) - c_1e^{-mt\sqrt{2}} - c_2e^{mt\sqrt{2}}.$

$$\text{б)}\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2m^2y = \cos nt,\ (n \neq m), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2m^2x = \sin nt. \end{cases}$$

Отв.

$$x\ \ t\ = c_1e^{-mt\sqrt{2}} + c_2e^{mt\sqrt{2}} + c_3\cos(mt\sqrt{2}) + c_4\sin(mt\sqrt{2}) + \frac{n^2\cos nt + 2m^2\sin nt}{4m^4 - n^4},$$

$$y\ \ t\ = c_3\cos(mt\sqrt{2}) + c_4\sin(mt\sqrt{2}) - c_1e^{-mt\sqrt{2}} - c_2e^{mt\sqrt{2}} + \frac{2m^2\cos nt + n^2\sin nt}{4m^4 - n^4}.$$

1.5 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

Отв. $x(t) = \dfrac{1}{2}(c_1 + c_3)e^{-t} + \dfrac{1}{2}c_2 e^{2t}, \quad y(t) = \dfrac{1}{2}(c_1 - c_3)e^{-t} + \dfrac{1}{2}c_2 e^{2t},$

$z(t) = \dfrac{1}{2}c_2 e^{2t} - c_1 e^{-t}.$

1.6 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt} = 2z, \\ 3\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt} = y + 9z. \end{cases}$

Отв. $y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}t}{2} + c_2 \sin\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right),$

$z(t) = \dfrac{1}{7}e^{-\frac{1}{2}t}\left((\sqrt{3}c_2 - c_1)\cos\dfrac{\sqrt{3}t}{2} - (2c_2 + \sqrt{3}c_1)\sin\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right).$

1.7 $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 3(y - x - z), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x - y, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -z. \end{cases}$

Отв. $x(t) = \dfrac{3}{4}c_3 \cos 2t + \dfrac{3}{4}c_4 \sin 2t + \dfrac{1}{2}c_5 t + \dfrac{1}{2}c_6,$

$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \dfrac{1}{4}c_3 \cos 2t - \dfrac{1}{4}c_4 \sin 2t + \dfrac{1}{2}c_5 t + \dfrac{1}{2}c_6,$

$z(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$

$$\textbf{1.8}\ \ a)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^{t} + e^{-t}. \end{cases}$$

Отв. $x\ \ t\ \ = (c_1 + \frac{1}{2}t)e^{t} + (c_2 - \frac{1}{2}t)e^{-t},$

$$y\ \ t\ \ = (c_1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2})e^{t} - (c_2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2})e^{-t}.$$

$$б)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \cos t + \sin t. \end{cases}$$

Отв. $x\ \ t\ \ = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t),$

$$y\ \ t\ \ = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}(\cos t - \sin t).$$

$$\textbf{1.9}\ \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -x + y + z, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x - y + z, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = x + y - z. \end{cases}$$

Отв. $x\ \ t\ \ = \frac{1}{3}(c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}) + \frac{1}{3}(2c_2 - c_5)\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{3}(2c_4 - c_6)\sin\sqrt{2}t,$

$$y\ \ t\ \ = \frac{1}{3}(c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}) + \frac{1}{3}(2c_5 - c_3)\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{3}(2c_6 - c_4)\sin\sqrt{2}t,$$

$$z\ \ t\ \ = \frac{1}{3}(c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}) - \frac{1}{3}(c_3 + c_5)\cos\sqrt{2}t - \frac{1}{3}(c_4 + c_6)\sin\sqrt{2}t.$$

$$\textbf{1.10}\begin{cases} x' + n^2 y = \cos nt, \\ y' + n^2 x = \sin nt. \end{cases}$$

Отв. $x(t) = c_1 e^{n^2 t} + c_2 e^{-n^2 t} + \dfrac{(n+1)\sin nt}{n(n^2+1)},$

$$y(t) = -c_1 e^{n^2 t} + c_2 e^{-n^2 t} + \frac{(n-1)\cos nt}{n(n^2+1)}.$$

1.11 $\begin{cases} x' + ny = \cos nt, \\ y' - nx = \sin nt. \end{cases}$

Отв. $x(t) = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt + t\cos nt,$

$$y(t) = c_1 \sin nt - c_2 \cos nt + t\sin nt.$$

1.12 $\begin{cases} x' + n^2 x + n^2 y = e^{nt}, \\ y' + n^2 x = e^{-nt}. \end{cases}$

Отв. $x(t) = e^{-\frac{1}{2}n^2 t}\left(c_1 \operatorname{ch}\dfrac{n^2 t\sqrt{5}}{2} + c_2 \operatorname{sh}\dfrac{n^2 t\sqrt{5}}{2}\right) + \dfrac{e^{nt}}{n(1+n-n^2)} + \dfrac{e^{-nt}}{n^2+n-1},$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}n^2 t}\left((c_1 + c_2\sqrt{5})\operatorname{ch}\frac{n^2 t\sqrt{5}}{2} + (c_2 + c_1\sqrt{5})\operatorname{sh}\frac{n^2 t\sqrt{5}}{2}\right) -$$

$$-\frac{(n+1)(n^2+1)-n^4}{n^2(1+n-n^2)}e^{nt} - \frac{n-1}{n^2+n-1}e^{-nt}.$$

1.13 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = z - x. \end{cases}$

Отв.

$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,\ y(t) = \dfrac{1}{2}(c_1 + c_2)\sin t - \dfrac{1}{2}(c_2 - c_1)\cos t + c_3 e^t + c_4,$

$z(t) = \dfrac{1}{2}(c_1 + c_2)\cos t + \dfrac{1}{2}(c_2 - c_1)\sin t + c_3 e^t.$

Упражнение **2.** Решить системы уравнений, не приведенные к нормальному виду:

2.1 $\begin{cases} x'' = 2x - 3y, \\ y'' = x - 2y. \end{cases}$

Отв. $x(t) = 3c_1 e^{t} + 3c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t,$

$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t.$

2.2 $\begin{cases} x'' = 3x + 4y, \\ y'' = -x - y. \end{cases}$

Отв. $x(t) = -2e^{t}(c_1 + c_2 + c_2 t) - 2e^{-t}(c_3 - c_4 + c_4 t),$

$y(t) = e^{t}(c_1 + c_2 t) + e^{-t}(c_3 + c_4 t).$

2.3 $\begin{cases} 2x' - 5y' = 4y - x, \\ 3x' - 4y' = 2x - y. \end{cases}$

Отв. $x(t) = 3c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}, \quad y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}.$

2.4 $\begin{cases} x'' = 3x - y - z, \\ y'' = -x + 3y - z, \\ z'' = -x - y + 3z. \end{cases}$

Отв. $x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_5 e^{-2t},$

$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_4 e^{2t} + c_6 e^{-2t},$

$z(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} - (c_3 + c_4) e^{2t} - (c_5 + c_6) e^{-2t}.$

2.5 $\begin{cases} x'' + x' + y' - 2y = 0, \\ x' - y' + x = 0. \end{cases}$

Отв. $x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + 2c_3 e^{-2t}, \quad y(t) = 2c_1 e^{t} + c_3 e^{-2t}.$

2.6 $\begin{cases} x'' - 2y'' + y' + x - 3y = 0, \\ 4y'' - 2x'' - x' - 2x + 5y = 0. \end{cases}$

Отв. $x(t) = 3ce^{-t}, \quad y(t) = ce^{-t}.$

2.7 $\begin{cases} x'' - x + 2y'' - 2y = 0, \\ x' - x + y' + y = 0. \end{cases}$

Отв. $x(t) = -2c_2 e^{3t} + c_3 e^{t}, \quad y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}.$

2.8 $\begin{cases} x'' - 2y' + 2x = 0, \\ 3x' + y'' - 8y = 0. \end{cases}$

Отв. $x(t) = 2c_1e^{2t} + 2c_2e^{-2t} + 2c_3\cos 2t + 2c_4\sin 2t,$

$y(t) = 3c_1e^{2t} - 3c_2e^{-2t} - c_3\sin 2t + c_4\cos 2t.$

2.9 $\begin{cases} x'' + 3y'' - x = 0, \\ x' + 3y' - 2y = 0. \end{cases}$

Отв. $x(t) = c_1e^{\frac{1}{2}t} - 4c_2e^{-2t}, \quad y(t) = c_1e^{\frac{1}{2}t} + c_2e^{-2t}.$

2.10 $\begin{cases} x'' + 5x' + 2y' + y = 0, \\ 3x'' + 5x + y' + 3y = 0. \end{cases}$

Отв. $x(t) = (c_1 + c_2t)e^t + c_3e^{-t}, \quad y(t) = (-2c_1 - c_2 - 2c_2t)e^t - 4c_3e^{-t}.$

2.11 $\begin{cases} x'' + 4x' - 2x - 2y' - y = 0, \\ x'' - 4x' - y'' + 2y' + 2y = 0. \end{cases}$

Отв. $x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t},$

$y(t) = c_1e^t + 5c_2e^{-t} + 2c_3e^{2t} + 2c_4e^{-2t}.$

***Упражнение* 3.** Решить системы дифференциальных уравнений:

3.1 $\begin{cases} y_1' = 4y_1, \\ y_2' = 4y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 4y_3, \\ y_4' = y_1 + 3y_4, \\ y_5' = y_4 + 3y_5. \end{cases}$

Отв. $y_1(t) = c_1e^{4t}$, $y_2(t) = (2c_3t + c_2)e^{4t}$, $y_3(t) = c_3e^{4t}$, $y_4(t) = c_1e^{4t} + c_4e^{3t}$,

$y_5(t) = c_1e^{4t} + c_4te^{3t} + c_5e^{3t}.$

$$\textbf{3.2}\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 4y_3, \\ y_4' = 3y_4, \\ y_5' = 3y_5 + 3y_4, \\ y_6' = 5y_6. \end{cases}$$

Отв. $y_1(t) = (c_1 + 2c_2 t + 2c_3 t^2)e^{4t}$, $y_2(t) = (c_2 + 2c_3 t)e^{4t}$, $y_3(t) = c_3 e^{4t}$, $y_4(t) = c_4 e^{3t}$, $y_5(t) = (3c_4 t + c_5)e^{3t}$, $y_6(t) = c_6 e^{5t}$.

4 ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе мы рассмотрим несколько характерных примеров на решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений. Очевидный метод решения этой задачи – найти общее решение системы дифференциальных уравнений, а затем по поставленным начальным условиям определить соответствующее значение произвольных постоянных.

***Пример* 1.** Найти решение поставленной задачи Коши.

$$\text{а)} \begin{cases} x'(t) = x - y; \\ y'(t) = x + z; \quad x(0) = 0, \quad y(0) = z(0) = 1. \\ z'(t) = x + z, \end{cases}$$

Решение. Находим общее решение системы уравнений. Характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_{2,3} = 1 \pm i.$$

Действительному собственному значению $\lambda_1 = 0$ отвечает собственный вектор $\vec{\gamma} = (1, 1, -1)^T$, комплексному собственному значению $\lambda_2 = 1 + i$ – собственный вектор $\vec{\alpha} = (i, 1, 1)^T$. В выражении $\vec{\alpha} e^{\lambda_2 t}$ выделяем действительную и мнимую части

$$\vec{\alpha} e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i)t} = e^t \begin{pmatrix} i\cos t - \sin t \\ \cos t + i\sin t \\ \cos t + i\sin t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\operatorname{Re} \vec{\alpha} e^{\lambda_2 t} = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}, \ \operatorname{Im} \vec{\alpha} e^{\lambda_2 t} = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение системы уравнений

$$\vec{y}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T = c_1 \vec{\gamma} + c_2 \operatorname{Re} \vec{\alpha} e^{(1+i)t} + c_3 \operatorname{Im} \vec{\alpha} e^{(1+i)t},$$

или

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \left(c_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} \right).$$

Итак, общее решение системы уравнений имеет вид

$$x(t) = c_1 + e^t (c_3 \cos t - c_2 \sin t),$$

$$y(t) = c_1 + e^t (c_2 \cos t + c_3 \sin t),$$

$$z(t) = -c_1 + e^t (c_2 \cos t + c_3 \sin t).$$

Из этих равенств получаем $x(0) = c_1 + c_3$, $y(0) = c_1 + c_2$, $z(0) = -c_1 + c_2$. Тогда, используя поставленные начальные условия, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0; \\ c_1 + c_2 = 1; \\ -c_1 + c_2 = 1, \end{cases}$$

из которой находим соответствующие величины $c_1 = 0, c_2 = 1$, $c_3 = 0$. Подставляя эти значения в уравнение общего решения системы, получаем решение поставленной задачи Коши

$$x(t) = -e^t \sin t, \; y(t) = e^t \cos t, \; z(t) = e^t \cos t.$$

б) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 + y_2 - t^2 + t - 2; \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -2y_1 + 4y_2 + 2t^2 - 4t - 7, \end{cases}$ $\qquad y_1(0) = 0, \; y_2(0) = 2.$

Решение. Сначала находим решение соответствующей однородной системы. Характеристическое уравнение

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)+2 = (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

имеет два действительных корня $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

Собственному значению $\lambda_1 = 2$ отвечает собственный вектор $\vec{\alpha} = (1,1)^T$, собственному значению $\lambda_2 = 3$ – собственный вектор $\vec{\beta} = (1,2)^T$. Как следствие, общее решение соответствующей однородной системы будет иметь вид $\begin{pmatrix} y_{10}(t) \\ y_{20}(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, или $y_{10}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$, $y_{20}(t) = c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{3t}$.

Частное решение системы уравнений ищем методом неопределенных коэффициентов, полагая

$$\overline{y_1}(t) = At^2 + Bt + C, \; \overline{y_2}(t) = Kt^2 + Ft + L.$$

Подставляя эти функции в исходную систему дифференциальных уравнений, получаем

$$\begin{cases} 2At + B = (A+K-1)t^2 + (B+F+1)t + (C+L-2); \\ 2Kt + F = (4K-2A+2)t^2 + (4F-2B-4)t + (4L-2C-7). \end{cases}$$

Приравнивая в этих равенствах коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+K-1=0; & 4K-2A+2=0; \\ 2A = B+F+1; & 4F-2B-4=2K; \\ B = C+L-2; & 4L-2C-7=F. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим коэффициенты $A=1$, $B=0$, $C=0$, $K=0$, $F=1$, $L=2$.

Как следствие, частное решение системы уравнений принимает вид

$$\overline{y}_1(t)=t^2\ ,\ \overline{y}_2(t)=t+2\ .$$

Соответственно, общее решение системы уравнений будет иметь вид

$$y_1(t)=y_{10}(t)+y_1(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}+t^2,$$

$$y_2(t)=y_{20}(t)+y_2(t)=c_1e^{2t}+2c_2e^{3t}+t+2.$$

Используя поставленные начальные условия, получаем $y_1(0)=c_1+c_2=0$, $y_2(0)=c_1+2c_2+2=2$, т. е. приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} c_1+c_2=0; \\ c_1+2c_2=0. \end{cases}$$

Эта система имеет только тривиальное решение $c_1=c_2=0$.

Таким образом, решение задачи Коши для данной системы уравнений имеет вид

$$y_1(t)=t^2,\ y_2(t)=t+2\ .$$

Решение задачи Коши мы можем также найти, используя формулу (1.18)

$$\vec{y}(t)=w(t)w^{-1}(t_0)\vec{y}(t_0)+w(t)\int_{t_0}^{t}w^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau\ .$$

Пример 2. Найти решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-6y+\dfrac{1}{\cos^3 3t}; \\ \dfrac{dy}{dt}=3x-3y,\ \ x(0)=y(0)=1. \end{cases}$$

Решение. Находим корни характеристического уравнения

$$\det\ A-\lambda E\ =\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & -6 \\ 3 & -(3+\lambda) \end{bmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+3)+18=\lambda^2+9=0.$$

Получаем $\lambda_{1,2} = \pm i3$. Собственному значению $\lambda_1 = i3$ отвечает собственый вектор $\vec{\gamma} = (1+i, 1)^T$. В выражении $\vec{\gamma}e^{\lambda_1 t}$ выделяем действительную и мнимую части:

$$\vec{\gamma}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i3t} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos 3t + i \sin 3t) = \begin{pmatrix} \cos 3t - \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos 3t + \sin 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix},$$

т. е. $\operatorname{Re}\vec{\gamma}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} \cos 3t - \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}$, $\operatorname{Im}\vec{\gamma}e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} \cos 3t + \sin 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$.

Как следствие, фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений будет иметь вид

$$w(t) = \begin{bmatrix} \cos 3t - \sin 3t & \cos 3t + \sin 3t \\ \cos 3t & \sin 3t \end{bmatrix}.$$

Определитель фундаментальной матрицы

$$\det w(t) = \sin 3t\,(\cos 3t - \sin 3t) - \cos 3t\,(\cos 3t + \sin 3t) = -1.$$

Обратная матрица

$$w^{-1}(t) = -\begin{bmatrix} \sin 3t & -(\cos 3t + \sin 3t) \\ -\cos 3t & \cos 3t - \sin 3t \end{bmatrix}.$$

Так как $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{1}{\cos^3 3t}, \quad 0 \right)^T$, то получаем

$$w^{-1}(t)\vec{f}(t) = -\begin{bmatrix} \sin 3t & -(\cos 3t + \sin 3t) \\ -\cos 3t & \cos 3t - \sin 3t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cos^3 3t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin 3t}{\cos^3 3t} \\ \dfrac{1}{\cos^3 3t} \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем второе слагаемое в формуле Коши (в данном случае $t_0 = 0$):

$$w(t)\int_0^t w^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau = \begin{bmatrix} \cos 3t - \sin 3t & \cos 3t + \sin 3t \\ \cos 3t & \sin 3t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\displaystyle\int_0^t \frac{\sin 3\tau}{\cos^3 3\tau}\,d\tau \\ \displaystyle\int_0^t \frac{d\tau}{\cos^2 3\tau} \end{pmatrix} =$$

$$
=\begin{bmatrix} \cos 3t-\sin 3t & \cos 3t+\sin 3t \\ \cos 3t & \sin 3t \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{6\cos^2 3t}+\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}3t \end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix} -\dfrac{\cos 3t-\sin 3t}{6\cos^2 3t}+\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}3t(\cos 3t+\sin 3t) \\ -\dfrac{1}{6\cos 3t}+\dfrac{1}{3}\sin 3t\mathrm{tg}3t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \dfrac{1}{6}\ \ \cos 3t-\sin 3t \\ \dfrac{1}{6}\cos 3t \end{pmatrix}.
$$

Проделаем для элементов первого вектор-столбца следующие элементарные преобразования:

$$
-\frac{1}{6\cos^2 3t}\ \ \cos 3t-\sin 3t\ \ +\frac{1}{3\cos^2 3t}\sin 3t\cos 3t\ \ \cos 3t+\sin 3t\ \ =
$$

$$
=\frac{1}{6\cos^2 3t}\ \ \sin 3t-\cos 3t+2\cos^2 3t\sin 3t+2\sin^2 3t\cos 3t\ \ =
$$

$$
=\frac{1}{6\cos^2 3t}\ \ \sin 3t-\cos 3t+\ \ 1+\cos 6t\ \ \sin 3t+\ \ 1-\cos 6t\ \ \cos 3t\ \ =
$$

$$
=\frac{1}{6\cos^2 3t}\ \ 2\sin 3t+\cos 6t\ \ \sin 3t-\cos 3t\ \ \ ,
$$

$$
-\frac{1}{6\cos 3t}+\frac{\sin^2 3t}{3\cos 3t}=\frac{2\sin^2 3t-1}{6\cos 3t}=-\frac{\cos 6t}{6\cos 3t}.
$$

Используя полученные соотношения, окончательно получаем

$$
w\ \ t\ \int_0^t w^{-1}\ \ \tau\ \ \vec{f}\ \ \tau\ \ d\tau=
$$

$$
=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{6\cos^2 3t}\ \ 2\sin 3t+\cos 6t\ \ \sin 3t-\cos 3t \\ -\dfrac{\cos 6t}{6\cos 3t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \dfrac{1}{6}\ \ \cos 3t-\sin 3t \\ \dfrac{1}{6}\cos 3t \end{pmatrix}.
$$

Так как

$$
w^{-1}\ \ 0\ \ =\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ \vec{y}\ \ 0\ \ =\begin{pmatrix} x\ \ 0 \\ y\ \ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

то для первого слагаемого в формуле Коши получаем

$$w\;\; t\;\; w^{-1}\;\; 0\;\; \vec{y}\;\; 0\;\; = \begin{bmatrix} \cos 3t - \sin 3t & \cos 3t + \sin 3t \\ \cos 3t & \sin 3t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 3t + \sin 3t & -2\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t - \sin 3t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 3t - \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Суммируя полученные результаты, находим решение задачи Коши

$$\begin{pmatrix} x\;\; t \\ y\;\; t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 3t - \sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{6\cos^2 3t}\;\; 2\sin 3t + \cos 6t\;\; \sin 3t - \cos 3t \\ -\dfrac{\cos 6t}{6\cos 3t} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{1}{6}(\cos 3t - \sin 3t) \\ \dfrac{1}{6}\cos 3t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи Коши имеет вид

$$x\;\; t\;\; = \frac{7}{6}\;\; \cos 3t - \sin 3t\;\; + \frac{1}{6\cos^2 3t}\;\; 2\sin 3t + \cos 6t\;\; \sin 3t - \cos 3t\;\;\;\; ,$$

$$y\;\; t\;\; = \frac{7}{6}\cos 3t - \frac{\cos 6t}{6\cos 3t}.$$

Пример 3. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \cos 2t + \sin 2t,\;\; x\;\; 0\;\; = x'(0),\; y(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Продифференцировав первое уравнение системы и подставив в значение производной $\dfrac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы, получаем дифференциальное уравнение, содержащее только функцию $x\;\; t$:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + x = \cos 2t + \sin 2t.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3+1=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)=0$ имеет действительный корень $\lambda_1=-1$ и пару комплексно-сопряженных корней $\lambda_{2,3}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения будет иметь вид

$$x_0(t)=c_1e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Частное решение уравнения, которое находим методом неопределенных коэффициентов, имеет вид

$$\bar{x}(t)=\frac{1}{65}(9\cos 2t-7\sin 2t).$$

Как следствие, для общего решения неоднородного уравнения получаем функцию

$$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=c_1e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{1}{65}(9\cos 2t-7\sin 2t).$$

Используя полученную функцию $x(t)$, из первого уравнения системы находим

$$y(t)=x''(t)=c_1e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_3-\frac{1}{2}c_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2+\frac{1}{2}c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-$$
$$-\frac{4}{65}(9\cos 2t+7\sin 2t).$$

Далее используем поставленные начальные условия

$$x(0)=c_1+c_2+\frac{9}{65},\ x'(0)=-c_1+\frac{1}{2}(c_2+\sqrt{3}c_3)+\frac{14}{65},$$
$$y(0)=c_1+\frac{1}{2}(\sqrt{3}c_3-c_2)-\frac{36}{65}.$$

Как следствие, получаем систему уравнений

$$
\begin{cases}
c_1 + c_2 = -\dfrac{9}{65}; \\
-c_1 + \dfrac{1}{2}\ \ c_2 + \sqrt{3}c_3\ \ = -\dfrac{14}{65}; \\
c_1 + \dfrac{1}{2}\ \ \sqrt{3}c_3 - c_2\ \ = \dfrac{36}{65},
\end{cases}
$$

из которой находим $c_1 = \dfrac{41}{195}$, $c_2 = -\dfrac{68}{195}$, $c_3 = \dfrac{22}{65\sqrt{3}}$. Подставляя найденные величины коэффициентов c_1, c_2, c_3 в общее решение системы дифференциальных уравнений, получаем решение поставленной задачи Коши:

$$
x\ \ t\ \ = \frac{41}{195}e^{-t} + \frac{2}{65\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\left(11\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{34}{\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{65}\ \ 9\cos 2t - 7\sin 2t\ \ ,
$$

$$
y\ \ t\ \ = \frac{41}{195}e^{-t} + \frac{1}{65\sqrt{3}}\left(\frac{67}{\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + 23\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{4}{95}\ \ 9\cos 2t + 7\sin 2t\ \ .
$$

ЗАДАЧИ

***Упражнение* 1.** Найти решение задачи Коши для данных систем дифференциальных уравнений:

1.1 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y,\ \ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

Отв. $x\ \ t\ \ = y\ \ t\ \ = e^t$.

1.2 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y + 2e^{2t},\ \ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

Отв. $x\ \ t\ \ = 1 + e^t - e^{2t}$, $y\ \ t\ \ = -1 - 2e^t + 4e^{2t}$.

1.3 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y + 37\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 5y, \;\; x(0) = 0, \, y(0) = -1. \end{cases}$

Отв. $x\;\;t\;\; = 15e^{-t} - 15\cos t + 16\sin t$, $y\;\;t\;\; = -15e^{-t} + 14\cos t - 10\sin t.$

1.4 $\begin{cases} x'\;\;t\;\; = x - z, \\ y'\;\;t\;\; = y + z, \\ z'\;\;t\;\; = -x - y - z, \quad x(0) = y(0) = 1, \, z(0) = -1. \end{cases}$

Отв. $x\;\;t\;\; = (1+t)e^{t}$, $y\;\;t\;\; = (1-t)e^{t}$, $z\;\;t\;\; = -e^{t}$.

1.5 $\begin{cases} x'\;\;t\;\; = x - 2y + z, \\ y'\;\;t\;\; = -y + z, \\ z'\;\;t\;\; = x - y - z, \quad x(0) = y(0) = 0, \, z(0) = 1. \end{cases}$

Отв. $x\;\;t\;\; = te^{-t}$, $y\;\;t\;\; = te^{-t}$, $z\;\;t\;\; = e^{-t}$.

1.6 $\begin{cases} x'\;\;t\;\; = 2x + y + e^{2t}, \\ y'\;\;t\;\; = 2y + 4z - 4e^{-t}, \\ z'\;\;t\;\; = x - z, \;\; x(0) = 0, \, y(0) = -1, \, z(0) = 1. \end{cases}$

Отв. $x\;\;t\;\; = 0$, $y\;\;t\;\; = -e^{2t}$, $z\;\;t\;\; = e^{-t}$.

5 ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

5.1 Основные понятия и теоремы операционного метода

Оригиналы и изображения. В основе операционного метода решения дифференциальных уравнений (использующегося как для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем уравнений, так и уравнений в частных производных) лежит переход от исходного дифференциального уравнения к более простому, так называемому операторному уравнению (алгебраическому для обыкновенных дифференциальных уравнений и обыкновенному дифференциальному уравнению для уравнений в частных производных). При этом учитываются также и дополнительные условия задачи Коши. Затем обратное преобразование решения операторного уравнения позволяет восстановить решение исходного дифференциального уравнения.

Рассмотрим применение интегрального преобразования Лапласа для построения решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений.

Функцией-оригиналом называется комплексная функция $f(t)$ действительной переменной t $(f(t)=u(t)+iv(t))$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(t)\equiv 0$ для $t<0$;

2) $f(t)$ для $t>0$ является кусочно-гладкой на любом конечном отрезке (т. е. на таком отрезке $f(t)$ кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную);

3) $f(t)$ при $t\to+\infty$ имеет ограниченную степень роста, т. е. существуют такие постоянные $M>0$ и a, что для всех $t>0$

$$\left|f(t)\right|\le Me^{at}.$$

Точная нижняя величина $a_0=\min a$ тех значений a, для которых имеет место это неравенство, называется показателем роста функции $f(t)$ при $t\to+\infty$.

Для краткости функцию-оригинал $f(t)$ будем называть просто оригиналом. Простейшим оригиналом является так называемая единичная функция Хевисайда

$$\theta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \tag{5.1}$$

З а м е ч а н и е 1. Строго говоря, все функции-оригиналы имеют вид

$$f(t)\theta(t)=\begin{cases}f(t), & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

В дальнейшем, используя обычное обозначение $f(t)$, мы будем предполагать, что для $t<0$ функция продолжена нулем.

З а м е ч а н и е 2. Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста a_0, то функция $tf(t)$ также будет функцией-оригиналом с тем же показателем роста a_0. Следовательно, после умножения функции-оригинала на любую степень t^n снова получается оригинал с тем же показателем роста.

Изображением по Лапласу функции-оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексной переменной p, определяемая формулой

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \qquad (5.2)$$

где $\operatorname{Re} p > a_0$ [условие, обеспечивающее сходимость интеграла (5.2)].

Связь оригинала $f(t)$ с его лаплас-образом (изображением) $F(p)$ символически будем записывать так:

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

Некоторые важнейшие свойства преобразования Лапласа. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$.

1 *Свойство линейности преобразования*

$$\alpha f(t)+\beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p)+\beta G(p),$$

где α и β – произвольные постоянные.

2 *Теорема подобия*. Для любого $\alpha>0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3 *Теорема смещения*. Для любого комплексного числа α

$$e^{\alpha t}f(t) \risingdotseq F(p-\alpha).$$

Из определения изображения Лапласа и свойств 1 – 3 получаются изображения основных элементарных функций. Например:

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}.$$

Действительно, непосредственным вычислением получаем

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t}\,dt = \frac{1}{p-\alpha}.$$

$t^{\nu} \risingdotseq \dfrac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$ $(\nu > -1,$ $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция Эйлера (приложение 1).

Действительно, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\nu} e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p^{\nu+1}} \int_0^{+\infty} \tau^{\nu} e^{-\tau}\,d\tau = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$.

В частности,

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p},\ \theta(t) \risingdotseq \frac{1}{p},\ t^n = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \risingdotseq \frac{1}{p-i\omega} = \frac{p+i\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$\cos\omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t} \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

$$\sin\omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t} \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$e^{(\alpha+i\omega)t} \risingdotseq \frac{1}{(p-\alpha)-i\omega} = \frac{(p-\alpha)+i\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2},$$

$$e^{\alpha t}\cos\omega t = \operatorname{Re} e^{(\alpha+i\omega)t} \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2},$$

$$e^{\alpha t}\sin\omega t = \operatorname{Im} e^{(\alpha+i\omega)t} \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}.$$

На основании теоремы смещения и полученного изображения для t^{ν} находим

$$e^{\alpha t} t^{\nu} \risingdotseq \frac{\Gamma(\nu+1)}{(p-\alpha)^{\nu+1}}\ (\nu > -1).$$

В частности,

$$e^{\alpha t} t^n \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}} \quad (\alpha \in \mathbb{C},\quad n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$e^{(\alpha+i\omega)t}t^n \risingdotseq \frac{n!}{\left[(p-\alpha)-i\omega\right]^{n+1}} = n!\frac{\left[(p-\alpha)+i\omega\right]^{n+1}}{\left[(p-\alpha)^2+\omega^2\right]^{n+1}},$$

$$e^{\alpha t}t^n\cos\omega t = \operatorname{Re} e^{(\alpha+i\omega)t}t^n \risingdotseq n!\frac{\operatorname{Re}\left[(p-\alpha)+i\omega\right]^{n+1}}{\left[(p-\alpha)^2+\omega^2\right]^{n+1}},$$

$$e^{\alpha t}t^n\sin\omega t = \operatorname{Im} e^{(\alpha+i\omega)t}t^n \risingdotseq n!\frac{\operatorname{Im}\left[(p-\alpha)+i\omega\right]^{n+1}}{\left[(p-\alpha)^2+\omega^2\right]^{n+1}}.$$

Таким образом, найдены изображения Лапласа основных элементарных функций.

4 *Дифференцирование оригинала*. Пусть функция $f(t)$ n раз дифференцируема. Тогда

$$
\begin{aligned}
&f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),\\
&f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \qquad (5.3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),
\end{aligned}
$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

5 *Дифференцирование изображения*.

$$F'(p) \risingdotseq -tf(t).$$

6 *Интегрирование оригинала*.

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

7 *Интегрирование изображения*. Если интеграл $\int_p^\infty F(q)\,dq$ сходится, то

$$\int_0^t F(q)\,dq \risingdotseq \frac{f(t)}{t}.$$

8 *Теорема об умножении изображений* (*теорема о свертке*).

$$F(p)G(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau. \qquad (5.4)$$

Правая часть называется сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$. Говорят: умножение изображений соответствует свертыванию оригиналов.

9 *Теорема запаздывания*. Для любого $\tau > 0$

$$f(t-\tau) = f(t-\tau)\theta(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p), \qquad (5.5)$$

где функция-оригинал $f(t-\tau)\theta(t-\tau) = \begin{cases} f(t), & t \geq \tau \\ 0, & 0 < t < \tau. \end{cases}$

10 *Изображение периодической функции*. Пусть $f(t)$ – периодическая функция с периодом T. Тогда

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{1-e^{-pt}} \int_0^t e^{-pt} f(t)\,dt \quad (\operatorname{Re} p > 0). \qquad (5.6)$$

Восстановление оригинала по изображению Лапласа. После решения операторного уравнения (алгебраического, если исходное уравнение было обыкновенным дифференциальным уравнением) относительно изображения $F(p)$, необходимо по найденному изображению $F(p)$ восстановить оригинал $f(t)$, являющийся решением исходной задачи. Для этого используются следующие приемы.

1 Пусть изображение $F(p)$ представляет собой правильную рациональную дробь, т. е. $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ [степень многочлена $A(p)$ меньше степени многочлена $B(p)$]. Эту дробь разлагают на сумму элементарных дробей, для каждой из которых находят оригиналы, используя свойства преобразования Лапласа. Основные оригиналы и их изображения сведены в таблицу (Приложение 2).

2 В общем случае для отыскания оригинала по изображению используется формула Меллина (или формула обратного преобразования Лапласа)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp, \qquad (5.7)$$

где интегрирование ведется по прямой, параллельной мнимой оси, расположенной правее всех особых точек изображения $F(p)$. Для вычисления интеграла в формуле (5.7) можно использовать лемму Жордана и теорему вычетов. Если $F(p) \to 0$ при $|p| \to \infty$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{p=p_k} \left[F(p) e^{pt} \right], \quad t > 0 \tag{5.8}$$

[суммирование ведется по всем полюсам $p_1, \ldots, p_m$ функции $F(p)$]. Для $t < 0$ $f(t) = 0$, как и должно быть для функции-оригинала.

Используя формулу для вычисления вычета в полюсе $p = p_k$ порядка n_k, приводим формулу (5.8) к следующему виду:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} \left[(p - p_k)^{n_k} F(p) e^{pt} \right]. \tag{5.9}$$

Если $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ – правильная рациональная дробь, то полюса $p = p_k$ функции $F(p)$ – нули знаменателя, т. е. корни уравнения $B(p) = 0$.

В случае если все корни уравнения $B(p) = 0$ – простые (1-й кратности, т. е. все $n_k = 1$), формула (5.9) упрощается и принимает вид

$$\frac{A(p)}{B(p)} \fallingdotseq \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{5.10}$$

В приложениях часто встречается случай, когда лаплас-образ имеет вид $F(p) = \dfrac{A(p)}{pB(p)}$, где степень многочлена $A(p)$ не превосходит степени многочлена $B(p)$, и многочлен $B(p)$ имеет только простые корни, отличные от нуля. В этом случае формула (5.10) принимает вид

$$\frac{A(p)}{pB(p)} \fallingdotseq \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)} e^{p_k t},$$

где сумма берется по всем корням уравнения $B(p)=0$.

Если многочлен $B(p)$ имеет действительные коэффициенты, то каждому его комплексному корню $p_k=\alpha_k+i\beta_k$ отвечает комплексно-сопряженный корень $\overline{p}_k=\alpha_k-i\beta_k$. Если, кроме того, и многочлен $A(p)$ имеет действительные коэффициенты, то

$$\frac{A(\overline{p}_k)}{B'(\overline{p}_k)}e^{\overline{p}_k t}=\overline{\left(\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}\right)},$$

т. е. вычет в комплексно-сопряженном полюсе будет иметь противоположный знак мнимой части, и, следовательно, сумма выраженной для вычетов в комплексно сопряженных полюсах будет равна

$$\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}+\frac{A(\overline{p}_k)}{B'(\overline{p}_k)}e^{\overline{p}_k t}=2\,\mathrm{Re}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}.$$

В этом случае формула (5.10) принимает вид

$$\frac{A(p)}{B(p)}\risingdotseq\sum\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}+\sum 2\,\mathrm{Re}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}, \qquad (5.11)$$

где первая сумма в формуле (5.11) распространяется на все действительные корни $B(p)$, а вторая сумма – на все комплексные корни с положительными мнимыми частями.

5.2 Применение преобразования Лапласа для решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть задана задача Коши для неоднородного уравнения

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n y=f(t), \qquad (5.12)$$

с начальными условиями

$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_0',\ldots y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}.$$

Предполагается, что функция $f(t)$ и искомое решение уравнения (5.12) удовлетворяют условиям существования преобразования Лапласа.

Обозначаем через $Y(p)$ изображение неизвестной функции (оригинала) $y(t)$, а через $F(p)$ – изображение правой части $f(t)$, т. е.

$$y(t) \fallingdotseq Y(p), \quad f(t) \fallingdotseq F(p).$$

Используя формулы (5.3), получаем

$$y'(t) \fallingdotseq pY(p) - y_0,$$

$$y''(t) \fallingdotseq p^2Y(p) - py_0 - y_0',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)}(t) \fallingdotseq p^nY(p) - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_0' - \ldots - y_0^{(n-1)}.$$

Тогда, переходя к соответствующим лаплас-образам в обеих частях уравнения (5.12), с учетом полученных соотношений для лаплас-образов производных функции $y(t)$, получаем уравнение вида

$$D(p)Y(p) - N(p) = F(p),$$

где многочлен $D(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$, а $N(p)$ – многочлен, содержащий начальные данные задачи Коши (обращается в нуль при нулевых начальных условиях).

Из полученного уравнения находим требуемый лаплас-образ $Y(p)$, оригиналом которого является решение $y(t)$ исходного уравнения (5.12) в виде

$$Y(p) = \frac{F(p) + N(p)}{D(p)}.$$

Восстанавливая функцию-оригинал, отвечающую полученному лаплас-образу $Y(p)$, находим решение исходного уравнения (5.12), удовлетворяющее начальным условиям.

***Пример* 1.** Найти решение задачи Коши.

а) $x''' + x = \frac{1}{2}t^2e^t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Решение. Вводим лаплас-образ неизвестной функции $x(t) \risingdotseq X(p)$. Из таблицы элементарных лаплас-образов (Приложение 2) находим

$$t^2 e^t \risingdotseq \frac{2!}{(p-1)^3} = \frac{2}{(p-1)^3}.$$

Переходя к лаплас-образам в обеих частях исходного уравнения, с учетом нулевых начальных условий, получаем уравнение вида

$$(p^3+1)X(p) = \frac{1}{(p-1)^3},$$

из которого находим

$$X(p) = \frac{1}{(p-1)^3(p^3+1)} = \frac{1}{(p-1)^3(p+1)(p^2-p+1)}.$$

Функцию-оригинал, отвечающую полученному лаплас-образу, найдем, используя формулу (5.8), которую представим в виде

$$x(t) = \sum \operatorname*{Res}_{p=a_k}\left(X(p)e^{pt}\right) + \sum 2\operatorname{Re}\left(\operatorname*{Res}_{p=\alpha_k+i\beta_k}\left(X(p)e^{pt}\right)\right), \qquad (5.13)$$

где первая сумма включает вычеты функции $X(p)e^{pt}$ в действительных полюсах функции $X(p)$, а вторая сумма – в комплексных полюсах.

Вычет функции $X(p)e^{pt}$ в полюсе $p=a$ m-й кратности вычисляем по формуле

$$\operatorname*{Res}_{p=a}\left(X(p)e^{pt}\right) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{p\to a}\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\left[(p-a)^m X(p)e^{pt}\right], \qquad (5.14)$$

для простого полюса $(m=1)$ из (5.14) получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=a}\left(X(p)e^{pt}\right) = \lim_{p\to a}\left[(p-a)X(p)e^{pt}\right]. \qquad (5.15)$$

Функция $X(p)$ имеет полюс $p=-1$ кратности 1. Используя формулу (5.15), получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=-1} X(p)\,e^{pt} = \lim_{p\to-1}\left[(p+1)\frac{e^{pt}}{(p-1)^3(p+1)(p^2-p+1)}\right] = \frac{e^{-t}}{(-2)^3\cdot 3} =$$

$$= -\frac{1}{24}e^{-t}\,.$$

Из уравнения $p^2 - p + 1 = 0$ находим пару простых комплексно сопряженных полюсов

$$p_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\;,\; p_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Представив лаплас-образ $X(p)$ в виде

$$X(p) = \frac{1}{(p-1)^3(p+1)(p-p_1)(p-p_2)}\,,$$

находим

$$\operatorname*{Res}_{p=p_1} X(p)\,e^{pt} = \lim_{p\to p_1}\left[(p-p_1)\frac{e^{pt}}{(p-1)^3(p+1)(p-p_1)(p-p_2)}\right] =$$

$$= \frac{e^{p_1 t}}{(p_1-1)^3(p_1+1)(p_1-p_2)} = \frac{e^{\frac{1}{2}t}e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t}}{\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{16}{32\left(\sqrt{3}\right)^2}e^{\frac{1}{2}t}\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - i\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = \frac{1}{6}e^{\frac{1}{2}t}\left(\sqrt{3}-i\right)\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - i\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Выделяя в полученном выражении действительную часть, находим

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_1} X(p)\,e^{pt} = \frac{1}{6}e^{\frac{1}{2}t}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

В точке $p = 1$ функция $X(p)$ имеет полюс кратности $m = 3$. Представив лаплас-образ $X(p)$ в виде

$$X(p)=\frac{1}{(p-1)^3(p^3+1)}=\frac{v(p)}{(p-1)^3}, \text{ где } v(p)=\frac{1}{p^3+1},$$

и используя формулу (5.14), получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=1}\left(X(p)e^{pt}\right)=\frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p-1)^3\frac{v(p)e^{pt}}{(p-1)^3}\right]=\frac{1}{2}\left(v(p)e^{pt}\right)''\Big|_{p=1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t^2e^{pt}v(p)+2te^{pt}v'(p)+e^{pt}v''(p)\right)\Big|_{p=1}=\frac{1}{2}e^t\left(t^2v(1)+2tv'(1)+v''(1)\right).$$

Вычисляя производные

$$v'(p)=-\frac{3p^2}{(p^3+1)^2},\quad v''(p)=-\frac{3(4p''-2p)}{(p^3+1)^3},$$

находим $v'(1)=-\frac{3}{4}$, $v''(1)=\frac{3}{4}$, и так как $v(1)=\frac{1}{2}$, то окончательно получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=1}\left(X(p)e^{pt}\right)=\frac{1}{2}e^t\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}e^t\left(t^2-3t+\frac{3}{2}\right).$$

Тогда, используя полученные выражения для вычетов функции $X(p)e^{pt}$, по формуле (5.13) находим оригинал $x(t)$, являющийся решением исходного уравнения

$$x(t)=\frac{1}{4}e^t\left(t^2-3t+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{24}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

б) $x''+n^2x=\sin(mt+\alpha)$, $m\neq n$, $x(0)=x'(0)=0$.

Решение. Записав уравнение в виде

$$x''+n^2x=\cos\alpha\sin mt+\sin\alpha\cos mt,$$

переходим к лаплас-образам в обеих частях уравнения и получаем уравнение вида

$$(p^2+n^2)X(p)=\frac{m\cos\alpha}{p^2+m^2}+\frac{p\sin\alpha}{p^2+m^2},$$

из которого находим требуемый лаплас-образ

$$X(p)=\frac{p\sin\alpha+m\cos\alpha}{(p^2+n^2)(p^2+m^2)}.$$

Функция $X(p)$ имеет две пары комплексно-сопряженных полюсов $p=\pm in$, $p=\pm im$ (1-й кратности). Представив изображение $X(p)$ в виде

$$X(p)=\frac{p\sin\alpha+m\cos\alpha}{(p-in)(p+in)(p^2+m^2)},$$

вычисляем вычет в полюсе $p=in$:

$$\operatorname*{Res}_{p=in}\left(X(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to in}\left[(p-in)\frac{(p\sin\alpha+m\cos\alpha)e^{pt}}{(p-in)(p+in)(p^2+m^2)}\right]=$$

$$=\frac{(m\cos\alpha+in\sin\alpha)e^{int}}{2in(m^2-n^2)}=\frac{1}{2n(m^2-n^2)}(m\cos\alpha+in\sin\alpha)(\sin nt-i\cos nt).$$

Выделяя в полученном выражении действительную часть, находим

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=in}\left(X(p)e^{pt}\right)=\frac{1}{2n(m^2-n^2)}(m\cos\alpha\sin nt+n\sin\alpha\cos nt).$$

Аналогичным образом, представив лаплас-образ $X(p)$ в виде

$$X(p)=\frac{p\sin\alpha+m\cos\alpha}{(p^2+n^2)(p-im)(p+im)},$$

находим вычет в полюсе $p=im$:

$$\operatorname*{Res}_{p=im}\left(X(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to im}\left[(p-im)\frac{(p\sin\alpha+m\cos\alpha)e^{pt}}{(p-im)(p+im)(p^2+n^2)}\right]=$$

$$=\frac{(im\sin\alpha+m\cos\alpha)e^{imt}}{2im(n^2-m^2)}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{2i(n^2-m^2)}(\cos mt+i\sin mt)=$$

$$=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{2(n^2-m^2)}(\sin mt-i\cos mt).$$

Действительная часть полученного выражения

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=im}\left[X(p)\,e^{pt}\right]=\frac{1}{2\left(n^2-m^2\right)}\left(\cos\alpha\sin mt+\sin\alpha\cos mt\right).$$

Тогда оригинал $x(t)$ (решение исходного уравнения) будет иметь вид

$$x(t)=2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=in}\left[X(p)\,e^{pt}\right]+2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=im}\left[X(p)\,e^{pt}\right]=$$

$$=\frac{1}{n\left(m^2-n^2\right)}\left(\cos\alpha\left(m\sin mt-n\sin mt\right)+n\sin\alpha\left(\cos nt-\cos mt\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{n\left(m^2-n^2\right)}\left(m\cos\alpha\sin nt+n\sin\alpha\cos nt-n\sin\left(mt+\alpha\right)\right).$$

в) $y'''+y''-4y'-4y=f_0\sin\omega t$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

Пусть $y(t)\risingdotseq Y(p)$, тогда, переходя к лаплас-образам в обеих частях уравнения, получаем

$$\left(p^3+p^2-4p-4\right)Y(p)=\frac{f_0\omega}{p^2+\omega^2},$$

или

$$(p+1)(p-2)(p+2)\,Y(p)=\frac{f_0\omega}{p^2+\omega^2},$$

а из последнего уравнения находим требуемый лаплас-образ

$$Y(p)=\frac{f_0\omega}{(p+1)(p-2)(p+2)\left(p^2+\omega^2\right)}.$$

Функция $Y(p)$ имеет три действительных полюса $p_1=-2$, $p_2=-1$, $p_3=2$ и пару комплексно-сопряженных полюсов в точках $p=\pm i\omega$ (все полюса 1-й кратности). Вновь используя формулу (5.14), вычисляем вычеты в полюсах 1-го порядка

$$\operatorname*{Res}_{p=p_1=-2}\left[Y(p)\,e^{pt}\right]=\frac{f_0\omega e^{-2t}}{(-1)(-4)\left(\omega^2+4\right)}=\frac{1}{4}\frac{f_0\omega}{\omega^2+4}e^{-2t},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=p_2=-1}\left[Y(p)\,e^{pt}\right]=-\frac{1}{3}\frac{f_0\omega}{\omega^2+1}e^{-t},\quad \operatorname*{Res}_{p=p_3=2}\left[Y(p)\,e^{pt}\right]=\frac{1}{12}\frac{f_0\omega}{\omega^2+4}e^{2t}.$$

Представив лаплас-образ в виде

$$Y(p)=\frac{f_0\omega}{(p+1)(p^2-4)(p-i\omega)(p+i\omega)},$$

вычисляем вычет в полюсе $p=i\omega$:

$$\operatorname*{Res}_{p=i\omega}\left(Y(p)e^{pt}\right)=-\frac{f_0\omega e^{i\omega t}}{2i\omega(1+i\omega)(\omega^2+4)}=-\frac{f_0\omega(1-i\omega)}{2i\omega(\omega^2+4)(\omega^2+1)}\times$$

$$\times(\cos\omega t+i\sin\omega t)=-\frac{f_0}{2(\omega^2+4)(\omega^2+1)}(1-i\omega)(\sin\omega t-i\cos\omega t).$$

Действительная часть вычета в комплексном полюсе

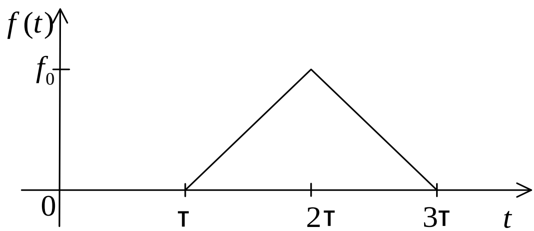
$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i\omega}\left(Y(p)e^{pt}\right)=\frac{f_0}{2(\omega^2+1)(\omega^2+4)}(\omega\cos\omega t-\sin\omega t).$$

Решением исходной задачи Коши будет функция-оригинал $y(t)$, отвечающая изображению $Y(p)$, которую находим из соотношения

$$y(t)=\sum_{k=1}^{3}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left(Y(p)e^{pt}\right)+2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i\omega}\left(Y(p)e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{f_0\omega}{\omega^2+4}\left(e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right)-\frac{1}{3}\frac{f_0\omega}{\omega^2+1}e^{-t}+\frac{f_0}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}(\omega\cos\omega t-\sin\omega t).$$

Пример **2.** Найти решение задачи Коши $x''+9x=f(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$, а функция $f(t)$ имеет следующий вид:



Аналитическое задание функции $f(t)$ имеет вид

$$
f(t)=\begin{cases}
0, & 0\le t<\tau;\\
f_0\left(\dfrac{1}{\tau}t-1\right), & \tau\le t<2\tau;\\
f_0\left(3-\dfrac{1}{\tau}t\right), & 2\tau\le t<3\tau;\\
0, & 3\tau\le t<+\infty.
\end{cases}
$$

Решение. Непосредственным вычислением, используя формулу (5.2), находим изображение функции $f(t)$

$$
F(p)=\frac{f_0}{\tau}\int_{\tau}^{2\tau}te^{-pt}dt-f_0\int_{\tau}^{2\tau}e^{-pt}dt+3f_0\int_{2\tau}^{3\tau}e^{-pt}dt-\frac{f_0}{\tau}\int_{2\tau}^{3\tau}te^{-pt}dt=
$$

$$
=-\frac{f_0}{p\tau}\left(2\tau e^{-2p\tau}-\tau e^{-p\tau}+\frac{1}{p}\left(e^{-2p\tau}-e^{-p\tau}\right)\right)+\frac{f_0}{p}\left(e^{-2p\tau}-e^{-p\tau}\right)-\frac{3f_0}{p}\left(e^{-3p\tau}-\right.
$$

$$
\left.-e^{-2p\tau}\right)+\frac{f_0}{p\tau}\left(3\tau e^{-3p\tau}-2\tau e^{-2p\tau}+\frac{1}{p}\left(e^{-3p\tau}-e^{-2p\tau}\right)\right)=\frac{f_0}{p^2\tau}\left(e^{-3p\tau}-2e^{-2p\tau}+e^{-p\tau}\right).
$$

Далее, с учетом начальных условий, переходим к соответствующим лаплас-образам в обеих частях исходного уравнения [вводим лаплас-образ неизвестной функции $x(t)\risingdotseq X(p)$], получаем

$$
\left(p^2+9\right)X(p)=1+F(p).
$$

Из этого уравнения находим требуемый лаплас-образ

$$
X(p)=\frac{1}{p^2+9}+\frac{F(p)}{p^2+9},
$$

или, подставляя ранее полученное выражение для лаплас-образа $F(p)$, получаем

$$
X(p)=\frac{1}{p^2+9}+\frac{f_0}{\tau}\cdot\frac{1}{p^2\left(p^2+9\right)}\left(e^{-3p\tau}-2e^{-2p\tau}+e^{-p\tau}\right).
$$

Первое слагаемое легко сводится к табличному лаплас-образу

$$\frac{1}{p^2+9}=\frac{1}{3}\frac{3}{p^2+9}\risingdotseq\frac{1}{3}\sin 3t\,.$$

Оригинал, отвечающий дроби $\dfrac{1}{p^2\left(p^2+9\right)}$, найдем, используя свойство 6 преобразования Лапласа (интегрирование оригинала):

$$\frac{1}{p\left(p^2+9\right)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+9}\risingdotseq\frac{1}{3}\int_0^t\sin 3\tau d\tau=\frac{1}{9}\left(1-\cos 3t\right).$$

$$\frac{1}{p^2\left(p^2+9\right)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p\left(p^2+9\right)}\risingdotseq\frac{1}{9}\int_0^t\left(1-\cos 3\tau\right)d\tau=\frac{1}{9}\left(t-\frac{1}{3}\sin 3t\right).$$

Решение поставленной задачи Коши находим, используя формулу (5.5):

$$x(t)=\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{f_0}{9\tau}\left(t-3\tau-\frac{1}{3}\sin 3\left(t-3\tau\right)\right)\theta\left(t-3\tau\right)-$$

$$-\frac{2f_0}{9\tau}\cdot\left(t-2\tau-\frac{1}{3}\sin 3\left(t-2\tau\right)\right)\theta\left(t-2\tau\right)+\frac{f_0}{9\tau}\left(t-\tau-\frac{1}{3}\sin 3\left(t-\tau\right)\right)\theta\left(t-\tau\right).$$

5.3 Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка с заданными начальными условиями

$$\begin{cases} x''+\omega_1^2x+\lambda_1y=f_1(t); \\ y''+\omega_2^2y+\lambda_2x=f_2(t), \end{cases}$$

$x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$, $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_1$.

Полагаем, что функции $f_i(t)$, $i=1,2$ являются оригиналами. Пусть $f_1(t)\risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t)\risingdotseq F_2(p)$.

Вводим лаплас-образы неизвестных функций $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$, для которых, с учетом начальных условий, получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} \left(p^2+\omega_1^2\right)X(p)+\lambda_1 Y(p)=F_1(p)+px_0+x_1; \\ \lambda_2 Y(p)+\left(p^2+\omega_2^2\right)Y(p)=F_2(p)+py_0+y_1. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим требуемые лаплас-образы

$$X(p)=\frac{\left(p^2+\omega_2^2\right)\left(F_1(p)+px_0+x_1\right)-\lambda_1\left(F_2(p)+py_0+y_1\right)}{\left(p^2+\omega_1^2\right)\left(p^2+\omega_2^2\right)-\lambda_1\lambda_2},$$

$$Y(p)=\frac{\left(p^2+\omega_1^2\right)\left(F_2(p)+py_0+y_1\right)-\lambda_2\left(F_1(p)+px_0+x_1\right)}{\left(p^2+\omega_1^2\right)\left(p^2+\omega_2^2\right)-\lambda_1\lambda_2}.$$

Далее, используя полученные лаплас-образы, находим отвечающие им оригиналы $x(t)$ и $y(t)$, т. е. решение исходной задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

Пример **3.** Найти решение задачи Коши.

а) $$\begin{cases} x''-x+y+z=0; & x(0)=x'(0)=1; \\ x+y''-y+z=0; & y(0)=y'(0)=0; \\ x+y+z''-z=0; & z(0)=z'(0)=0. \end{cases}$$

Решение. Вводим лаплас-образы неизвестных функций $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $z(t) \risingdotseq Z(p)$, переходим к соответствующим лаплас-образам в системе дифференциальных уравнений. С учетом начальных условий получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} p^2X(p)-p-1-X(p)+Y(p)+Z(p)=0; \\ X(p)+p^2Y(p)-Y(p)+Z(p)=0; \\ X(p)+Y(p)+p^2Z(p)-Z(p)=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left(p^2-1\right)X(p)+Y(p)+Z(p)=p+1; \\ X(p)+\left(p^2-1\right)Y(p)+Z(p)=0; \\ X(p)+Y(p)+\left(p^2-1\right)Z(p)=0. \end{cases}$$

Отнимая из первого уравнения полученной системы второе, приходим к уравнению вида

$$(p^2-2)X(p)-(p^2-2)Y(p)=p+1.$$

Из третьего уравнения отнимаем второе, умноженное на (p^2-1), и после элементарных преобразований приходим к соотношению

$$Y(p)=-\frac{X(p)}{p^2}.$$

Подставляя это равенство в предыдущее уравнение, получаем, выполнив элементарные преобразования, лаплас-образ

$$X(p)=\frac{p^2(p+1)}{(p^2-2)(p^2+1)}=\frac{p^2(p+1)}{(p-\sqrt{2})(p+\sqrt{2})(p^2+1)},$$

как следствие

$$Y(p)=-\frac{p+1}{(p^2-2)(p^2+1)}=-\frac{p+1}{(p-\sqrt{2})(p+\sqrt{2})(p^2+1)}.$$

Функция $X(p)$ имеет простые полюса в точках $p=\pm\sqrt{2}$, и пару комплексно-сопряженых полюсов $p=\pm i$. Вычисляем вычеты функции $X(p)e^{pt}$ в этих полюсах [используем формулу (5.15)]:

$$\operatorname*{Res}_{p=\sqrt{2}}\left(X(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to\sqrt{2}}\left[(p-\sqrt{2})\frac{p^2(p+1)e^{pt}}{(p-\sqrt{2})(p+\sqrt{2})(p^2+1)}\right]=$$

$$=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{6\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}=\frac{\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-\sqrt{2}}\left(X(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to-\sqrt{2}}\left[(p+\sqrt{2})\frac{p^2(p+1)e^{pt}}{(p-\sqrt{2})(p+\sqrt{2})(p^2+1)}\right]=$$

$$=\frac{2(-\sqrt{2}+1)}{3(-2\sqrt{2})}e^{-\sqrt{2}t}=\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=i}\left(X(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to i}\left[(p-i)\frac{p^2(p+1)e^{pt}}{(p^2-2)(p-i)(p+i)}\right]=$$

$$=\frac{i^2(1+i)e^{it}}{2i(-3)}=\frac{1}{6}(1-i)(\cos t+i\sin t)=\frac{1}{6}\big(\cos t+\sin t+i(\sin t-\cos t)\big).$$

Функцию-оригинал $x(t)$ находим, используя формулу (5.13):

$$x(t)=\operatorname*{Res}_{p=\sqrt{2}}\left(X(p)e^{pt}\right)+\operatorname*{Res}_{p=-\sqrt{2}}\left(X(p)e^{pt}\right)+2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i}\left(X(p)e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left((\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}+(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t}\right)+\frac{1}{3}(\cos t+\sin t)=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\left(e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t}\right)+e^{\sqrt{2}t}-e^{-\sqrt{2}t}\right)+\frac{1}{3}(\cos t+\sin t)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\sqrt{2}t+\operatorname{sh}\sqrt{2}t\right)+\frac{1}{3}(\cos t+\sin t).$$

Аналогичным образом вычисляем:

$$\operatorname*{Res}_{p=\sqrt{2}}\left(Y(p)e^{pt}\right)=-\frac{\sqrt{2}+1}{6\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t},\quad \operatorname*{Res}_{p=-\sqrt{2}}\left(Y(p)e^{pt}\right)=-\frac{\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t},$$

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i}\left(Y(p)e^{pt}\right)=\frac{1}{6}(\cos t+\sin t).$$

Тогда функция-оригинал

$$y(t)=-\frac{1}{6\sqrt{2}}\left((\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}+(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t}\right)+\frac{1}{3}(\cos t+\sin t)=$$

$$=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\sqrt{2}t+\operatorname{sh}\sqrt{2}t\right)+\frac{1}{3}(\cos t+\sin t).$$

Используя равенство $X(p)=-p^2Y(p)$, из третьего равенства системы уравнений для лаплас-образов получаем $Z(p)=Y(p)$, т. е. $z(t)=y(t)$.

Таким образом, решение исходной задачи Коши для системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$x(t)=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\sqrt{2}t+\operatorname{sh}\sqrt{2}t\right)+\frac{1}{3}(\cos t+\sin t),$$

$$y(t)=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\sqrt{2}t+\operatorname{sh}\sqrt{2}t\right)+\frac{1}{3}(\cos t+\sin t),$$

$$z(t)=y(t).$$

б) $\begin{cases} x' - x + 2y = 0; & x(0) = 0; \quad x'(0) = -1, \\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t. & y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Решение. Вводим лаплас-образы неизвестных функций $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Используя табличные лаплас-образы, получаем систему уравнений для изображений

$$\begin{cases} (p-1)X(p) + 2Y(p) = 0; \\ p^2 X(p) + 1 - 2\left(pY(p) - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{p}{p^2+4}. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим лаплас-образ

$$X(p) = \frac{8 - p^3 - 2p^4 - 6p^2}{2p^3\left(p - \dfrac{1}{2}\right)(p^2+4)}.$$

Вычисляем вычеты функций $X(p)e^{pt}$ в простых полюсах [формула (5.15)]:

$$\operatorname*{Res}_{p=\frac{1}{2}} \left(X(p)e^{pt}\right) = \frac{1}{2}\lim_{p\to\frac{1}{2}}\left[\left(p - \frac{1}{2}\right)\frac{(8 - p^3 - 2p^4 - 6p^2)e^{pt}}{p^3\left(p - \dfrac{1}{2}\right)(p^2+4)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{8 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 - 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)}e^{\frac{1}{2}t} = \frac{100}{17}e^{\frac{1}{2}t},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=i2} \left(X(p)e^{pt}\right) = \frac{1}{2}\lim_{p\to i2}\left[(p - i2)\frac{(8 - p^3 - 2p^4 - 6p^2)e^{pt}}{p^3\left(p - \dfrac{1}{2}\right)(p - i2)(p + i2)}\right] =$$

$$= \frac{\left(8-(i2)^3-2(i2)^4-6(i2)^2\right)}{4(i2)^4\left(i2-\frac{1}{2}\right)}e^{i2t} = \frac{i}{8\left(i2-\frac{1}{2}\right)}(\cos 2t + i\sin 2t) =$$

$$= -\frac{i\left(\frac{1}{2}+i2\right)}{8\left(4+\frac{1}{4}\right)}(\cos 2t + i\sin 2t) = \frac{1}{34}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + 2\cos 2t + i\left(2\sin 2t - \frac{1}{2}\cos 2t\right)\right).$$

Вычисляем вычет в полюсе $p=0$ 3-го порядка [формула (5.14)]:

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left[X(p)e^{pt}\right] = \frac{1}{4}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\left[p^3\frac{(8-p^3-2p^4-6p^2)e^{pt}}{p^3\left(p-\frac{1}{2}\right)(p^2+4)}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{(8-p^3-2p^4-6p^2)e^{pt}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)(p^2+4)}\right]_{p=0}.$$

Пусть

$$u(p) = (8-p^3-2p^4-6p^2)e^{pt},\quad v(p) = p^3-\frac{1}{2}p^2+4p-2.$$

Тогда

$$u'(p) = (-3p^2-8p^3-12p)e^{pt} + te^{pt}(8-p^3-2p^4-6p^2),$$

$$u''(p) = (-6p-24p^2-12)e^{pt} + 2te^{pt}(-3p^2-8p^3-12p) + t^2e^{pt}\times$$

$$\times(8-p^3-2p^4-6p^2),$$

$$v'(p) = 3p^2-p+4,\quad v''(p) = 6p-1.$$

При $p=0$ получаем

$u(0)=8$, $u'(0)=8t$, $u''(0)=8t^2-12$, $v(0)=-2$, $v'(0)=4$, $v''(0)=-1$.

Используя эти величины, вычисляем

$$\operatorname*{Res}_{p=0} X(p)\,e^{pt} = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{u(p)}{v(p)}\right]_{p=0} = \frac{1}{4}\frac{(u''v-uv'')v-2v'(u'v-uv')}{v^3}\Bigg|_{p=0} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{v(u''v-uv''-2v'u')+2u(v')^2}{v^3}\Bigg|_{p=0} = \frac{1}{4}\left(-4t^2-16t-24\right) = -t^2-4t-16 .$$

Как следствие, функция-оригинал $x(t)$ будет иметь вид

$$x(t) = \operatorname*{Res}_{p=0} X(p)\,e^{pt} + \operatorname*{Res}_{p=\frac{1}{2}} X(p)\,e^{pt} + 2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i2} X(p)\,e^{pt} =$$

$$= -t^2-4t-6+\frac{100}{17}e^{\frac{1}{2}t}+\frac{2}{17}\cos 2t+\frac{1}{34}\sin 2t .$$

Функцию $y(t)$ находим из первого уравнения исходной системы дифференциальных уравнений:

$$2y(t) = x(t)-x'(t) = -t^2-4t-6+2t+4+\frac{100}{17}\left(1-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{2}t}+\left(\frac{1}{34}+\frac{4}{17}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2}{17}-\frac{1}{17}\right)\cos 2t++\sin 2t = -t^2-2t-2+\frac{1}{17}\cos 2t+\frac{9}{34}\sin 2t+\frac{50}{17}e^{\frac{1}{2}t} .$$

Итак, решение исходной задачи Коши имеет вид

$$x(t) = -6-4t-t^2+\frac{100}{17}e^{\frac{1}{2}t}+\frac{2}{17}\cos 2t+\frac{1}{34}\sin 2t ,$$

$$y(t) = -1-t-\frac{1}{2}t^2+\frac{25}{17}e^{\frac{1}{2}t}+\frac{1}{34}\cos 2t+\frac{9}{68}\sin 2t .$$

***Пример* 4.** Найти решение задачи Коши с нулевыми начальными условиями.

а) $$\begin{cases} x''-y'+z'-4x-2y-2z=\sin 2t; \\ 2x'-y''+z''+3y-4z=0; \\ x'+z''-2x-y-4z=0, \end{cases}$$

$$x(0)=x'(0)=y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0 .$$

Решение. Вводим соответствующие лаплас-образы $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$, $z(t)\risingdotseq Z(p)$, с учетом нулевых начальных условий получаем систему уравнений для изображений

$$\begin{cases} (p^2-4)X(p)-(p+2)Y(p)+(p-2)Z(p)=\dfrac{2}{p^2+4}; \\ 2pX(p)-(p^2-3)Y(p)+(p^2-4)Z(p)=0; \\ (p-2)X(p)-Y(p)+(p^2-4)Z(p)=0. \end{cases}$$

Отнимая от второго уравнения системы третье, после элементарных преобразований приходим к соотношению

$$X(p)=(p-2)Y(p).$$

Используя это равенство, из третьего уравнения системы получаем

$$Z(p)=\frac{(p-1)(3-p)Y(p)}{(p-2)(p+2)}.$$

Тогда, подставляя два последних равенства в первое уравнение системы для изображений, приходим к уравнению

$$\left((p^2-4)(p-2)-(p+2)-\frac{(p-1)(p-3)}{p+2}\right)Y(p)=\frac{2}{p^2+4},$$

из которого получаем

$$Y(p)=\frac{2(p+2)}{(p^2-1)(p^2-9)(p^2+4)}=\frac{2(p+2)}{(p-1)(p+1)(p-3)(p+3)(p^2+4)}.$$

Функция $Y(p)$ имеет действительные простые полюса в точках $p=\pm1$, $p=\pm3$, и пару комплексно-сопряженных полюсов $p=\pm i2$. Аналогично предыдущим примерам, вычисляем:

$$\operatorname*{Res}_{p=1} Y(p)e^{pt}=\left.\frac{2(p+2)e^{pt}}{(p+1)(p^2-9)(p^2+4)}\right|_{p=1}=-\frac{3}{40}e^{t},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-1} Y(p)e^{pt}=\left.\frac{2(p+2)e^{pt}}{(p-1)(p^2-9)(p^2+4)}\right|_{p=-1}=-\frac{1}{40}e^{-t},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=3} Y(p)e^{pt}=\left.\frac{2(p+2)e^{pt}}{(p^2-1)(p+3)(p^2+4)}\right|_{p=3}=\frac{5}{312}e^{3t},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-3} Y(p)\,e^{pt} = \left.\frac{2(p+2)e^{pt}}{(p^2-1)(p-3)(p^2+4)}\right|_{p=-3} = \frac{1}{312}e^{-3t}.$$

Представив лаплас-образ в виде

$$Y(p) = \frac{2(p+2)}{(p^2-1)(p^2-9)(p-i2)(p+i2)},$$

получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=i2} Y(p)\,e^{pt} = \left.\frac{2(p+2)e^{pt}}{(p^2-1)(p^2-9)(p+i2)}\right|_{p=i2} = \frac{1+i}{i65}(\cos 2t + i\sin 2t) =$$

$$= \frac{1}{65}\left(\sin 2t + \cos 2t + i(\sin 2t - \cos 2t)\right).$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i2} Y(p)\,e^{pt} = \frac{1}{65}(\sin 2t + \cos 2t).$$

Используя найденные величины вычетов, находим оригинал

$$y(t) = \sum \operatorname*{Res}_{p=\pm 1,\ \pm 3} Y(p)\,e^{pt} + 2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i2} Y(p)\,e^{pt} =$$

$$= \frac{1}{312}\left(5e^{3t} + e^{-3t}\right) - \frac{1}{40}\left(3e^{t} + e^{-t}\right) + \frac{2}{65}(\cos 2t + \sin 2t).$$

Далее, используя полученное выражение для лаплас-образа $Y(p)$, находим лаплас-образ

$$X(p) = \frac{2(p^2-4)}{(p-1)(p+1)(p-3)(p+3)(p^2+4)}.$$

Функция $X(p)$ имеет те же полюса, что и функция $Y(p)$. Вычисляя соответствующие вычеты, получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=1} X(p)\,e^{pt} = \frac{3}{40}e^{t},\ \operatorname*{Res}_{p=-1} X(p)\,e^{pt} = -\frac{3}{40}e^{-t},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=3} X(p)\,e^{pt} = \frac{5}{312}e^{3t},\ \operatorname*{Res}_{p=-3} X(p)\,e^{pt} = -\frac{5}{312}e^{-3t},$$

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i2}\left(X(p)\,e^{pt}\right)=-\frac{4}{65}\sin 2t\,.$$

Суммируя эти результаты, находим функцию-оригинал

$$x(t)=\frac{3}{40}\left(e^{t}-e^{-t}\right)+\frac{5}{312}\left(e^{3t}-e^{-3t}\right)-\frac{8}{65}\sin 2t=\frac{3}{20}\operatorname{sh}t+\frac{5}{156}\operatorname{sh}3t-\frac{8}{65}\sin 2t.$$

Из соотношения

$$Z(p)=-\frac{(p-1)(p-3)\,Y(p)}{(p-2)(p+2)}$$

находим лаплас-образ

$$Z(p)=-\frac{2}{(p+1)(p+3)(p-2)\left(p^{2}+4\right)}\,.$$

Далее вычисляем вычеты в полюсах функции $Z(p)$:

$$\operatorname*{Res}_{p=-1}\left(Z(p)\,e^{pt}\right)=-\left.\frac{2e^{pt}}{(p+3)(p-2)\left(p^{2}+4\right)}\right|_{p=-1}=\frac{1}{15}e^{-t},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-3}\left(Z(p)\,e^{pt}\right)=-\left.\frac{2e^{pt}}{(p+1)(p-2)\left(p^{2}+4\right)}\right|_{p=-3}=-\frac{1}{65}e^{-3t},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=2}\left(Z(p)\,e^{pt}\right)=-\left.\frac{2e^{pt}}{(p+1)(p+3)\left(p^{2}+4\right)}\right|_{p=2}=-\frac{1}{60}e^{2t},$$

$$\operatorname*{Res}_{p=i2}\left(Z(p)\,e^{pt}\right)=-\left.\frac{2e^{pt}}{(p+1)(p+3)(p-2)(p+i2)}\right|_{p=i2}=$$

$$=-\frac{1}{520i}\,(1+i8)(1+i)\left(\cos 2t+i\sin 2t\right)=\frac{1}{520}\,(7-i9)\left(\sin 2t-i\cos 2t\right)=$$

$$=\frac{1}{520}\left(7\sin 2t-9\cos 2t-i\left(9\sin 2t+7\cos 2t\right)\right).$$

Функцию $z(t)$ находим, суммируя полученные величины вычетов:

$$z(t)=\sum\operatorname*{Res}_{p=-1,\,-3,\;2}\left(Z(p)\,e^{pt}\right)+2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i2}\left(Z(p)\,e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{65}e^{-3t}-\frac{1}{60}e^{2t}+\frac{1}{260}\left(7\sin 2t-9\cos 2t\right).$$

Таким образом, решение поставленной задачи Коши имеет вид

$$x(t)=\frac{3}{20}\operatorname{sh}t+\frac{5}{156}\operatorname{sh}3t-\frac{8}{65}\sin 2t,$$

$$y(t)=\frac{1}{312}\left(5e^{3t}+e^{-3t}\right)-\frac{1}{40}\left(3e^{t}+e^{-t}\right)+\frac{2}{65}\left(\cos 2t+\sin 2t\right),$$

$$z(t)=\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{65}e^{-3t}-\frac{1}{60}e^{2t}+\frac{1}{260}\left(7\sin 2t-9\cos 2t\right).$$

ЗАДАЧИ

***Упражнение* 1.** Найти решение поставленной задачи Коши:

1.1 $y''-4y'+3y=2\left(e^{t}+e^{3t}\right)$, $y(0)=-1$, $y'(0)=1$.

Отв. $y(t)=(t+1)e^{3t}-(t+2)e^{t}$.

1.2 $y''-3y'+2y=e^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Отв. $y(t)=\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{3}{2}e^{t}+\frac{4}{3}e^{2t}$.

1.3 $y''-y'-2y=3te^{t}$, $y(0)=y'(0)=0$.

Отв. $y(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+e^{2t}-\frac{3}{4}(2t+1)e^{t}$.

1.4 $y''+y'=2(\cos t-\sin t)$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Отв. $y(t)=(t+1)(\cos t+\sin t)$.

1.5 $y''+2y'+y=\sin t$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

Отв. $y(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-te^{-t}-\cos t\right)$.

1.6 $x'''-3x''+3x'-x=e^{t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=1$.

Отв. $x(t)=e^{t}\left(\frac{1}{6}t^{3}+2t^{2}-2t+1\right)$.

1.7 $x''+4x=\sin 3t$, $x(0)=x'(0)=0$.

Отв. $x(t)=\frac{3}{10}\sin 2t-\frac{1}{5}\sin 3t$.

1.8 $x''+x=t\cos 2t$, $x(0)=x'(0)=0$.

Отв. $x(t)=-\dfrac{5}{9}\sin t+\dfrac{5}{18}\sin 2t+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2t-t\cos 2t\right).$

***Упражнение* 2.** Найти решение задачи Коши системы дифференциальных уравнений:

2.1 $\begin{cases}3x'+2x+y'=1,\\ x'+4y'+3y=0,\;\; x(0)=0,\, y(0)=0.\end{cases}$

Отв. $x(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}e^{-t}-\dfrac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t},\;\; y(t)=\dfrac{1}{5}\left(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}\right).$

2.2 $\begin{cases}x'=x+2y-9t,\\ y'=2x+y+4e^{t},\;\; x(0)=1,\, y(0)=2.\end{cases}$

Отв. $x(t)=2e^{3t}-4e^{-t}-2e^{t}+5-3t,\;\; y(t)=6t-4+4e^{-t}+2e^{3t}.$

2.3 $\begin{cases}y'-y-z=-\cos t,\\ z'+2y+z=\cos t+\sin t,\;\; y(0)=z(0)=0.\end{cases}$

Отв. $y(t)=-t\cos t,\;\; z(t)=t(\cos t+\sin t).$

2.4 $\begin{cases}y'-y-z=0,\\ z'-y+z=t,\;\; y(0)=0,\quad z(0)=1.\end{cases}$

Отв. $y(t)=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\operatorname{sh}\sqrt{2}t-\dfrac{1}{2}t,\;\; z(t)=\dfrac{3}{2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}\sqrt{2}t\right)+\dfrac{1}{2}(t-1).$

2.5 $\begin{cases}y''+2z=0,\\ z''-2y=0,\;\; y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad z(0)=0,\quad z'(0)=1.\end{cases}$

Отв. $y(t)=\dfrac{1}{2}(\cos t\operatorname{sh}t+\sin t\operatorname{ch}t),\;\; z(t)=\dfrac{1}{2}(\sin t\operatorname{ch}t-\cos t\operatorname{sh}t).$

2.6 $\begin{cases}y''-z=\cos\omega t,\\ z''+y=0,\;\; y(0)=y'(0)=0,\quad z(0)=z'(0)=0.\end{cases}$

Отв. $y(t)=\dfrac{\omega^2}{\omega^4+1}\left(\operatorname{ch}\dfrac{t}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{t}{\sqrt{2}}-\omega^2\operatorname{sh}\dfrac{t}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{t}{\sqrt{2}}-\cos\omega t\right),$

$$z(t)=-\frac{1}{\omega^4+1}\left(\omega^4\operatorname{ch}\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}+\omega^2\operatorname{sh}\frac{t}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}+\cos\omega t\right).$$

2.7 $\begin{cases} y'' + z = \cos 2t, \\ z'' + y = 0, \ \ y(0) = y'(0) = 0, \quad z(0) = z'(0) = 0. \end{cases}$

Отв. $y(t) = \dfrac{2}{3}\cos t - \dfrac{4}{15}\cos 2t - \dfrac{2}{5}\operatorname{ch} t, \ \ z(t) = \dfrac{2}{3}\cos t - \dfrac{1}{15}\cos 2t + \dfrac{2}{5}\operatorname{ch} t$.

2.8 $\begin{cases} x' - x + 2y = \sin 2t, \\ x'' - 2y' = \cos 2t, \ \ x(0) = x'(0) = 0, \quad y(0) = 0. \end{cases}$

Отв. $x(t) = \dfrac{6}{17}e^{\frac{1}{2}t} - \dfrac{3}{34}(4\cos 2t + \sin 2t),$

$y(t) = \dfrac{3}{34}e^{\frac{1}{2}t} + \dfrac{1}{34}\left(\dfrac{7}{2}\sin 2t - 3\cos 2t\right).$

2.9 $\begin{cases} x'(t) = 3y - x, \\ y'(t) = y + x + \cos \omega t, \ \ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

Отв. $x(t) = \dfrac{3}{\omega^2 + 4}(\operatorname{ch} 2t - \cos \omega \mathrm{t}),$

$y(t) = \dfrac{1}{\omega^2 + 4}\left(\dfrac{3}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^{-2t} - \cos \omega t + \omega \sin \omega t\right).$

2.10 $\begin{cases} y' - z' - 2y + 2z = 1 - 2t, \\ y'' + 2z' + y = 0, \ \ y(0) = y'(0) = 0, \quad z(0) = 0. \end{cases}$

Отв. $y(t) = 2 - 2(t+1)e^{-t}, \ \ z(t) = 2 - t - 2(t+1)e^{-t}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ДУДКО Сергей Алексеевич
ЗАДОРОЖНЮК Елена Андреевна
ПРОКОПЕНКО Алла Ивановна

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Часть 2. Операционный метод

Учебно-методическое пособие

Редактор И. И. Эвентов
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 07.12.2012 г. Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 2,22. Тираж 250 экз.
Зак № 3570. Изд № 54.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34