МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА”

Кафедра высшей математики

С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
А. И. ПРОКОПЕНКО

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ч а с т ь 1

МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА”

Кафедра высшей математики

С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК,
А. И. ПРОКОПЕНКО

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Часть 2

МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Одобрено методической комиссией электротехнического факультета в качестве учебно-методического пособия для студентов электротехнических специальностей

Гомель 2012

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6
Д81

Р е ц е н з е н т – зав. кафедрой высшей математики канд. физ.-мат. наук
С. П. Новиков (УО «БелГУТ»).

Дудко, С. А.

Д81 Системы дифференциальных уравнений : учеб.-метод. пособие : в 3 ч. / С. А. Дудко, Е. А. Задорожнюк, А. И. Прокопенко; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2012. – Ч. 1 : Метод собственных векторов и собственных значений. – 54 с.
ISBN 978-985-554-100-5 (ч. 1)

Изложены классические методы интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Разобрано большое количество примеров. Приведены упражнения для домашних заданий.

Предназначено для студентов электротехнических специальностей, а также может быть использовано студентами других факультетов.

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6

ISBN 978-985-554-100-5 (ч. 1)
ISBN 978-985-554-099-2

ВВЕДЕНИЕ

В пособии рассмотрены классические методы интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В первой главе изложены основы теории систем дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений. Приведены теоремы, позволяющие строить общее решение однородной и неоднородной систем линейных дифференциальных уравнений, а также метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа), который позволяет строить общее решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений.

Во второй главе рассмотрены конкретные методы интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для однородных систем линейных дифференциальных уравнений изложен метод собственных векторов и собственных значений, позволяющий быстро и эффективно строить общее решение системы уравнений. При построении общего решения системы линейных дифференциальных уравнений проанализированы все ситуации, т. е. случаи, когда характеристическое уравнение имеет простые корни, действительные кратные корни, комплексные корни. При рассмотрении неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений излагаются и метод неопределённых коэффициентов, и метод вариации произвольных постоянных.

В третьей главе изложены метод исключения и операторный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений.

В четвертой главе методы решений систем линейных дифференциальных уравнений, рассмотренные в предшествующих главах, применяются при решении задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

В пятой главе приведен операционный метод решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений, который является наиболее используемым методом для решения таких задач. Материал этой главы прежде всего предназначен для студентов-электротехников, так как операционный метод является основным методом решения систем дифференциальных уравнений, возникающих в различных задачах классической электротехники.

В шестой главе рассмотрено решение систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими внешними силами. Такие системы дифференциальных уравнений приходится решать в целом ряде задач теоретической и прикладной механики (прежде всего в теории колебаний), в задачах теории линейных электрических цепей, теории автоматического регулирования и т. д.

Пособие предназначено для студентов электротехнического факультета, а также может быть использовано студентами других технических специальностей БелГУТа.

1 СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1 Общие понятия

Нормальной системой n дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t),$ называется система

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1, \ldots, y_n); \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1, \ldots, y_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{1.1}$$

где функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ определены в некоторой $(n+1)$-мерной области D переменных $t, y_1, \ldots, y_n$.

Решением системы (1.1) на интервале $(a; b)$ называется совокупность n функций $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t),$ непрерывно дифференцируемых на $(a; b)$ и удовлетворяющих данной системе.

Задача Коши для системы (1.1) формулируется следующим образом: найти решение $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ этой системы, удовлетворяющее поставленным начальным условиям

$$y_1(t_0) = y_{10},\ y_2(t_0) = y_{20}, \ldots, y_n(t_0) = y_{n0}, \qquad (1.2)$$

где $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ – заданные числа.

Для нормальной системы (1.1) имеет место следующая теорема.

Теорема **1.1** (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть функции $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ непрерывны в окрестности точки $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in D$ и имеют в этой окрестности непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n.$ Тогда найдется интервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, в котором существует единственное решение нормальной системы (1.1), удовлетворяющее поставленным начальным условиям (1.2).

Введя вектор-столбцы

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ f_2(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix},$$

систему (1.1) можно записать в векторной форме:

$$\vec{y'}(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)).$$

Пусть $\vec{y} = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))^T$ – решение системы (1.1) на интервале $(a; b)$. Графиком этого решения служит множество точек из D, определяемое равенством

$$G_y = \{(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \mid t \in (a; b)\}.$$

Множество G_y представляет собой параметрически заданную кривую параметра $t \in (a; b)$ в $(n+1)$-мерной области переменных $(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))$. Эта кривая называется интегральной кривой системы (1.1). Начальные условия (1.2) определяют в области D точку $M_0(t_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$. Задача Коши состоит в том, чтобы среди всех интегральных кривых системы (1.1) найти ту, которая проходит через точку M_0. Если для системы (1.1) выполнены условия теоремы 1.1, то всякие две интегральные кривые этой системы, имеющие хотя бы одну общую точку, совпадают. Иначе говоря, интегральные кривые системы или совпадают, или не пересекаются (не имеют общих точек).

1.2 Линейные однородные системы дифференциальных уравнений

Система

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)\, y_1 + a_{12}(t)\, y_2 + \ldots + a_{1n}(t)\, y_n; \\ y_2'(t) = a_{21}(t)\, y_1 + a_{22}(t)\, y_2 + \ldots + a_{2n}(t)\, y_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)\, y_1 + a_{n2}(t)\, y_2 + \ldots + a_{nn}(t)\, y_n \end{cases} \qquad (1.3)$$

называется линейной однородной системой дифференциальных уравнений, записанной в нормальной форме.

В дальнейшем будем полагать, что $a_{ij}(t)$ – непрерывные на $(a; b)$ функции, $i,\ j = 1, 2, \ldots, n.$ Введя обозначения

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};\ A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \qquad (1.4)$$

эту систему можно записать в векторно-матричном виде:

$$\overrightarrow{y'}(t) = A(t)\,\vec{y}(t). \qquad (1.5)$$

Решения системы (1.5) обладают следующими свойствами:

1 Если $\vec{y}$ – решение системы, обращающееся в нуль хотя бы в одной точке $t_0 \in (a; b)$, то $\vec{y} \equiv 0,\ \forall t \in (a; b)$.

2 Если $\vec{y}^{\,1}, \vec{y}^{\,2}, \ldots, \vec{y}^{\,k}$ – решение системы (1.3), то их линейная комбинация $\vec{y} = c_1 \vec{y}^{\,1} + c_2 \vec{y}^{\,2} + \ldots + c_k \vec{y}^{\,k}$ является решением этой системы.

Из векторов решений $\vec{y}^{\,j}(t) = \left(y_{1j}(t), y_{2j}(t), \ldots, y_{nj}(t)\right)^T$, $j = 1, 2, \ldots n$ системы (1.5) образуем матрицу

$$W(t)=\begin{bmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{bmatrix}=\left[\vec{y}^{1},\vec{y}^{2},\dots,\vec{y}^{n}\right], \qquad (1.6)$$

столбцами которой являются решения этой системы.

1.3 Линейная зависимость решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений

Пусть

$$\vec{y}^{1}=\begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{21}(t) \\ \vdots \\ y_{n1}(t) \end{pmatrix},\ \vec{y}^{2}=\begin{pmatrix} y_{12}(t) \\ y_{22}(t) \\ \vdots \\ y_{n2}(t) \end{pmatrix},\dots,\ \vec{y}^{k}=\begin{pmatrix} y_{1k}(t) \\ y_{2k}(t) \\ \vdots \\ y_{nk}(t) \end{pmatrix} -$$

векторные функции, определенные на $(a;b)$. Функции $\vec{y}^{1},\vec{y}^{2},\dots,\vec{y}^{k}$ называются линейно зависимыми на $(a;b)$, если существуют числа $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ (из которых хотя бы одно отлично от нуля) такие, что

$$\alpha_1\vec{y}^{1}(t)+\alpha_2\vec{y}^{2}(t)+\dots+\alpha_k\vec{y}^{k}(t)\equiv 0,\ \forall t\in(a,b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 y_{11}(t)+\alpha_2 y_{12}(t)+\dots+\alpha_k y_{1k}(t)\equiv 0, \\ \alpha_1 y_{21}(t)+\alpha_2 y_{22}(t)+\dots+\alpha_k y_{2k}(t)\equiv 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_{n1}(t)+\alpha_2 y_{n2}(t)+\dots+\alpha_k y_{nk}(t)\equiv 0. \end{cases}$$

Если равенство $\alpha_1\vec{y}^{1}(t)+\alpha_2\vec{y}^{2}(t)+\dots+\alpha_k\vec{y}^{k}(t)\equiv 0,\quad \forall t\in(a;b)$ возможно в том и только том случае, если $\alpha_1=0,\alpha_2=0,\dots,\alpha_k=0,$ то функции $\vec{y}^{1},\vec{y}^{2},\dots,\vec{y}^{k}$ называются линейно независимыми.

Справедлива следующая

***Теорема* 1.2.** Пусть $\vec{y}^{1}, \vec{y}^{2}, \ldots, \vec{y}^{n}$ – решение системы (1.5) на интервале $(a;b)$. Тогда:

1 Если определитель $\det W(t)$ матрицы (1.6) отличен от нуля хотя бы в одной точке $t_0 \in (a;b)$, то решения $\vec{y}^{1}, \vec{y}^{2}, \ldots, \vec{y}^{n}$ системы (1.5) линейно независимы на $(a;b)$.

2 Если существует точка $t_0' \in (a;b)$, в которой $\det W(t_0') = 0$, то решения $\vec{y}^{1}, \vec{y}^{2}, \ldots, \vec{y}^{n}$ системы (1.5) линейно зависимы на $(a;b)$ и $\det W(t) \equiv 0$ для $\forall t \in (a;b)$.

Доказательство. Рассмотрим условие 1. Пусть $\det W(t) \neq 0$. Предположим, что решения $\vec{y}^{1}, \vec{y}^{2}, \ldots, \vec{y}^{n}$ системы (1.5) линейно зависимы. Пусть $\vec{y}^{n}$ является линейной комбинацией остальных решений $\vec{y}^{1}, \vec{y}^{2}, \ldots, \vec{y}^{n-1}$, т.е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ (не все равны нулю) такие, что

$$\vec{y}^{n} = \alpha_1 \vec{y}^{1} + \alpha_2 \vec{y}^{2} + \ldots + \alpha_n \vec{y}^{n} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{1n} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{1k}, \\ y_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{2k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{nn} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{nk}. \end{cases}$$

Тогда

$$\det W(t) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n-1} & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n-1} & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn-1} & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{nk} \end{vmatrix} \equiv 0, \ \forall t \in (a;b),$$

так как последний столбец определителя есть линейная комбинация остальных столбцов. Отсюда при $t = t_0$ получаем, что $\det W(t) = 0.$ Это противоречит условию. Следовательно, предположение, что решения $\vec{y}^{1}, \vec{y}^{2}, \ldots, \vec{y}^{n}$ линейно зависимы, неверно. Значит, функции $\vec{y}^{1}, \vec{y}^{2}, \ldots, \vec{y}^{n}$ линейно независимы.

Предположим, что существует точка $t_0' \in (a; b)$, в которой $\det W(t_0') = 0.$ Это означает, что столбцы матрицы $W(t_0')$ линейно зависимы, т.е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (хотя бы одно из них отлично от нуля) такие, что $\alpha_1 \vec{y}^{1}(t_0') + \alpha_2 \vec{y}^{2}(t_0') + \ldots + \alpha_n \vec{y}^{n}(t_0') = 0.$

Рассмотрим функцию $\vec{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{y}^{k}(t)$, которая как линейная комбинация решений системы (1.5) тоже является решением этой системы. Для этой функции $\vec{y}(t_0') = 0.$ В силу единственности решения задачи Коши для системы (1.5) получаем

$$\vec{y}(t) = \alpha_1 \vec{y}^{1}(t) + {}+\alpha_2 \vec{y}^{2}(t) + \ldots + \alpha_n \vec{y}^{n}(t) \equiv 0,\ \forall t \in (a; b),$$

где не все коэффициенты α_k равны нулю, т.е. вектор-функции $\vec{y}^{1}, \vec{y}^{2}, \ldots, \vec{y}^{n}$ линейно зависимы на $(a, b),$ а в этом случае $\det W(t) \equiv 0$ для $\forall t \in (a; b)$. Таким образом, условие 2 также доказано.

***Следствие* 1.** Пусть $\vec{y}^{1}, \vec{y}^{2}, \ldots, \vec{y}^{n}$ – решения однородной системы (1.5) на $(a; b).$ Если $\det W(t)$ отличен от нуля хотя бы в одной точке $t_0 \in (a; b)$, то $\det W(t) \neq 0$ для $\forall t \in (a; b)$.

***Следствие* 2.** Пусть $\vec{y}^{1}, \vec{y}^{2}, \ldots, \vec{y}^{n}$ – решения линейной системы (1.5) на $(a; b).$ Для того, чтобы функции $\vec{y}^{1}, \vec{y}^{2}, \ldots, \vec{y}^{n}$ были линейно независимы на $(a, b),$ необходимо и достаточно, чтобы $\det W(t) \neq 0$ для $\forall t \in (a; b)$.

1.4 Структура общего решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений

Теорема **1.3** (о структуре общего решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений). Система линейных однородных уравнений (1.5) имеет ровно n линейно независимых решений. Любое решение этой системы имеет вид

$$\vec{y}=c_1\vec{y}^{\,1}+c_2\vec{y}^{\,2}+\ldots+c_n\vec{y}^{\,n}, \tag{1.7}$$

где $\vec{y}^{\,1},\vec{y}^{\,2},\ldots,\vec{y}^{\,n}$ – линейно независимые решения системы, а $c_1,c_2,\ldots\, c_n$ – произвольные постоянные.

Совокупность n линейно независимых на $(a;b)$ решений $\vec{y}^{\,1},\vec{y}^{\,2},\ldots,\vec{y}^{\,n}$ однородной системы дифференциальных уравнений называется фундаментальной системой решений этой системы, или базисом решений. Формула (1.7) определяет общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений.

Если решения $\vec{y}^{\,1},\vec{y}^{\,2},\ldots,\vec{y}^{\,n}$ линейно независимы, то матрица (1.6) называется фундаментальной матрицей системы. С помощью фундаментальной матрицы общее решение (1.7) системы можно записать в виде $\vec{y}(t)=W(t)\vec{c}$, где $\vec{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)^T$ – вектор-столбец произвольных постоянных.

1.5 Формула Остроградского – Лиувилля

Получим сначала формулу производной функционального определителя.

Пусть функции $y_{ij}(t)$, $i,j=1,2,\ldots,n$ непрерывно дифференцируемы на $(a;b)$. В этом случае для функционального определителя имеет место следующая формула, раскрывающая смысл производной от функционального определителя:

$$\frac{d}{dt}\det W(t)=\begin{vmatrix} y_{11}'(t) & \dots & y_{1n}'(t) \\ y_{21}(t) & \dots & y_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ y_{21}'(t) & \dots & y_{2n}'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}+\cdots$$

$$\cdots+\begin{vmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & \dots & y_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}'(t) & \dots & y_{nn}'(t) \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

Убедимся в справедливости этой формулы при $n=2$:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{vmatrix}=\frac{d}{dt}\left(y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}\right)=y_{11}'y_{22}+y_{11}y_{22}'-y_{12}'y_{21}-$$

$$-y_{12}y_{21}'=\left(y_{11}'y_{22}-y_{12}'y_{21}\right)+\left(y_{11}y_{22}'-y_{12}y_{21}'\right)=\begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21}' & y_{22}' \end{vmatrix}.$$

Совершенно аналогичным образом доказывается справедливость этой формулы при $n=3,4$ и т.д.

Получим далее формулу Остроградского – Лиувилля. Пусть $A(t)$ – матрица системы дифференциальных уравнений (1.3), а $W(t)$ – матрица, вектор-столбцы которой являются решениями этой системы на $(a;b)$. Рассмотрим j-й столбец матрицы $W(t)$ $\vec{y}^{\,j}=\left(y_{1j},y_{2j},\dots,y_{nj}\right)^T$. Так как $\vec{y}^{\,j}$ – решение системы (1.3), то

$$y_{ij}'=a_{i1}(t)\,y_{1j}+a_{i2}(t)\,y_{2j}+\ldots+a_{in}(t)\,y_{nj}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)\,y_{kj},\quad i=1,2,\dots,n. \tag{1.9}$$

Подставляя производную (1.9) в первый определитель в правой части равенства (1.8), получаем определитель вида

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}\ \ t\ \ y_{k1}\ \ t & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}\ \ t\ \ y_{k2}\ \ t & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}\ \ t\ \ y_{kn}\ \ t \\ y_{21}\ \ t & y_{22}\ \ t & \ldots & y_{2n}\ \ t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}\ \ t & y_{n2}\ \ t & \ldots & y_{nn}\ \ t \end{vmatrix}.$$

Этот определитель не изменится, если из элементов его первой строки вычесть элементы второй строки, умноженные на a_{12}, элементы третьей строки, умноженные на $a_{13}, \ldots,$ элементы n-й строки, умноженные на a_{1n}. В результате получим

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ \ t\ \ y_{11}\ \ t & a_{11}\ \ t\ \ y_{12}\ \ t & \ldots & a_{11}\ \ t\ \ y_{1n}\ \ t \\ y_{21}\ \ t & y_{22}\ \ t & \ldots & y_{2n}\ \ t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}\ \ t & y_{n2}\ \ t & \ldots & y_{nn}\ \ t \end{vmatrix} = a_{11}\ \ t\ \det W\ \ t\ \ .$$

Поступая аналогично с остальными определителями равенства (1.8), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\left|W\ \ t\ \right| = a_{11}\ \ t\ \left|W\ \ t\ \right| + a_{22}\ \ t\ \left|W\ \ t\ \right| + \ldots + a_{nn}\ \ t\ \left|W\ \ t\ \right| = \left|W\ \ t\ \right| Sp\ A\ \ t\ \ ,$$

где $Sp\ A\ \ t\ = a_{11}\ \ t\ + a_{22}\ \ t\ + \ldots + a_{nn}\ \ t\ \ .$

Решение полученного дифференциального уравнения имеет вид

$$\left|W\ \ t\ \right| = ce^{\int_{t_0}^{t} Sp\ A\ \ \tau\ \ d\tau},$$

где t_0 – произвольная точка из $(a; b)$; c – постоянная интегрирования. При $t = t_0$ получаем $c = \left|W\ \ t_0\ \right|$. Таким образом, окончательно приходим к следующему соотношению:

$$\det W\ \ t\ = \det W\ \ t_0\ \ e^{\int_{t_0}^{t} Sp\ A\ \ \tau\ \ d\tau}. \qquad (1.10)$$

Формула Остроградского – Лиувилля (1.10) позволяет судить о линейной зависимости или независимости решений системы дифференциальных уравнений (1.3). Например, если окажется, что хотя бы в одной точке t_0 $\det W\ \ t_0\ = 0$, то из формулы (1.10) следует, что

$\det W(t)=0,\ \ \forall t\in(a;b)$, т.е. решения системы (1.3) линейно зависимы.

1.6 Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений

Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} y_1'(t)=a_{11}(t)y_1+\ldots+a_{1n}(t)y_n+f_1(t); \\ y_2'(t)=a_{21}(t)y_1+\ldots+a_{2n}(t)y_n+f_2(t); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'(t)=a_{n1}(t)y_1+\ldots+a_{nn}(t)y_n+f_n(t) \end{cases} \tag{1.11}$$

или в векторно-матричной форме

$$\vec{y}'(t)=A(t)\vec{y}(t)+\vec{f}(t), \tag{1.12}$$

где $\vec{f}(t)=\left(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\right)^T$ – вектор-столбец свободных членов системы (1.11).

***Теорема* 1.4** (о структуре общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений). Любое решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений (1.12) представляет собой сумму частного решения $\vec{\vec{y}}$ неоднородной системы и общего решения $\vec{y}^{\,0}$ соответствующей однородной системы $\vec{y}'=A(t)\vec{y}$, т.е. общее решение неоднородной системы имеет вид

$$\vec{y}=\vec{\vec{y}}+\vec{y}^{\,0}=\vec{\vec{y}}+c_1\vec{y}^{\,1}+c_2\vec{y}^{\,2}+\ldots+c_n\vec{y}^{\,n}, \tag{1.13}$$

где $\vec{y}^{\,1}, \vec{y}^{\,2}, \ldots, \vec{y}^{\,n}$ – фундаментальная система решений однородной системы.

Отметим, что для системы

$$\vec{y}'(t)=A(t)\vec{y}(t)+\vec{f}^{\,1}(t)+\vec{f}^{\,2}(t)+\ldots+\vec{f}^{\,k}(t)$$

имеет место принцип суперпозиции частных решений, в соответствии с которым ее частное решение ищется в виде $\vec{\vec{y}}=\sum_{i=1}^{k}\vec{\vec{y}}^{\,i}$ – частное решение уравнения $\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y} + \vec{f}^{\,i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

1.7 Метод вариации (Лагранжа) произвольных постоянных для неоднородных систем

Общим приемом построения общего решения линейной неоднородной системы является метод вариации произвольных постоянных. Для изложения этого метода предварительно введем понятие производной и интеграла от функциональной матрицы.

Пусть задана матрица (1.6). По определению, производной этой матрицы называется матрица

$$W'(t) = \begin{bmatrix} y'_{11}(t) & \ldots & y'_{1n}(t) \\ y'_{21}(t) & \ldots & y'_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y'_{n1}(t) & \ldots & y'_{nn}(t) \end{bmatrix} = \left[\vec{y}^{\,1\prime}(t) \;\; \ldots \;\; \vec{y}^{\,n\prime}(t) \right]. \qquad (1.14)$$

В частности, если $\vec{y}'(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – решение системы (1.5), то с учетом формулы (1.14) имеем

$$W'(t) = \left[A(t)\vec{y}^{\,1}(t), A(t)\vec{y}^{\,2}(t), \ldots, A(t)\vec{y}^{\,n}(t) \right] =$$

$$= A(t)\left[\vec{y}^{\,1}(t), \vec{y}^{\,2}(t), \ldots, \vec{y}^{\,n}(t) \right] = A(t)W(t). \qquad (1.15)$$

Интегралом от матрицы $W(t)$ называется матрица

$$\int_{t_0}^{t} W(\tau)\,d\tau = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t} y_{11}(\tau)\,d\tau & \ldots & \int_{t_0}^{t} y_{1n}(\tau)\,d\tau \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{t_0}^{t} y_{n1}(\tau)\,d\tau & \ldots & \int_{t_0}^{t} y_{nn}(\tau)\,d\tau \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\int_{t_0}^{t} \vec{y}^{\,1}(\tau)\,d\tau, \ldots, \int_{t_0}^{t} \vec{y}^{\,n}(\tau)\,d\tau \right], \text{ где } t_0 \in (a; b).$$

Рассмотрим систему уравнений (1.12). Пусть известна фундаментальная система решений соответствующей однородной системы $\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}$, т.е. известна фундаментальная матрица системы $W(t)$. Решение однородной системы имеет вид

$$\vec{y}(t) = W(t)\vec{c},$$

где $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ – вектор-столбец произвольных постоянных.

Решение неоднородной системы ищем в виде

$$\vec{y}(t) = W(t)\vec{c}(t), \qquad (1.16)$$

где $\vec{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t))^T$ – вектор-функция переменной t, подлежащая определению. Подставляя функцию (1.16) в систему (1.12), получаем

$$W'(t)\vec{c}(t) + W(t)\vec{c}'(t) = A(t)W(t)\vec{c}(t) + \vec{f}(t),$$

а из последнего равенства, с учетом формулы (1.15), приходим к уравнению

$$W(t)\vec{c}'(t) = \vec{f}(t). \qquad (1.17)$$

Решая эту алгебраическую относительно координат вектора $\vec{c}'(t) = (c_1'(t), c_2'(t), \ldots, c_n'(t))^T$ систему и интегрируя полученные выражения, находим вектор $\vec{c}(t)$.

Подставляя $\vec{c}(t)$ в формулу (1.16), получаем общее решение неоднородной системы (1.12).

1.8 Метод Коши

Из системы уравнений (1.17) после интегрирования получаем

$$\vec{c}(t) = \int_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau + \vec{c},$$

где $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ – произвольный постоянный вектор.

Подстановка $\vec{c}(t)$ в (1.16) дает общее решение системы (1.12):

$$\vec{y}(t)=W(t)\vec{c}+W(t)\int\limits_{t_0}^{t}W^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau. \qquad (1.18)$$

Выбирая в равенстве (1.18) $\vec{c}=0,$ получаем частное решение системы (1.12), обращающееся в нуль при $t=t_0$:

$$\overline{\overline{y}}(t)=W(t)\int\limits_{t_0}^{t}W^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, если известна фундаментальная матрица соответствующей однородной системы, то общее решение неоднородной системы (1.12) находится по формуле (1.18), называемой формулой Коши.

Рассмотрим теперь задачу Коши для неоднородной системы уравнений (1.12)

$$\vec{y}\,'(t)=A(t)\vec{y}+\vec{f}(t),\ \ \vec{y}(t_0)=\vec{y}^{\,0},\ \ t_0\in(a;b), \qquad (1.19)$$

где $\vec{y}^{\,0}=(y_{10},y_{20},\ldots,y_{n0})^T$ – вектор-столбец заданных начальных условий.

Из равенства (1.18) при $t=t_0$ получаем

$$\vec{y}^{\,0}=W(t_0)\vec{c},$$

тогда

$$\vec{c}=W^{-1}(t_0)\vec{y}^{\,0}.$$

Подставив $\vec{c}$ в формулу (1.18), находим решение поставленной задачи Коши (1.19) в виде

$$\vec{y}(t)=W(t)W^{-1}(t_0)\vec{y}^{\,0}+W(t)\int\limits_{t_0}^{t}W^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau. \qquad (1.20)$$

Формула (1.20) дает требуемое решение задачи Коши для неоднородной системы дифференциальных уравнений (1.12).

2 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

2.1 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение

Система

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n; \\ y_2'(t) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

в которой коэффициенты a_{ij} – постоянные действительные числа, $i, j = 1, 2, \ldots, n,$ называется нормальной линейной однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Если ввести обозначения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}\,(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

то систему (2.1) можно записать в векторно-матричном виде $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$.

По методу Эйлера решение системы (2.1) будем искать в виде

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda t},\ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda t}, \ldots,\ y_n = \gamma_n e^{\lambda t},$$

где числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ подлежат определению. В векторной форме эти решения имеют вид

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{\gamma} e^{\lambda t},$$

где вектор-столбец $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^T$. Тогда $\vec{y}'(t) = \vec{\gamma}\lambda e^{\lambda t}$. Подставив $\vec{y}(t)$ и $\vec{y}'(t)$ в систему

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t), \quad \vec{\gamma}\lambda e^{\lambda t} = A\vec{\gamma} e^{\lambda t},$$

получаем

$$A\vec{\gamma} = \lambda\vec{\gamma}, \text{ или } (A - \lambda E)\vec{\gamma} = 0, \tag{2.2}$$

здесь E – единичная матрица.

В развернутом виде система (2.2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение $\vec{\gamma}$, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е. чтобы выполнялось равенство

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) называется характеристическим уравнением системы (2.2). Решая его, находим собственные значения λ матрицы A. Эти значения подставляем в систему (2.2), которая является системой линейных однородных уравнений вида

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0; \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему для каждого числа λ, находим соответствующий собственный вектор $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^T$ матрицы A, отвечающий данному собственному значению.

Левая часть характеристического уравнения (2.3) представляет собой многочлен от λ степени n с действительными коэффициентами. Этот многочлен называется характеристическим многочленом системы (2.1). С учетом кратности он имеет n корней. При этом возможны следующие случаи.

1 Корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – действительные и различные. В этом случае матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов $\vec{\gamma}^1, \vec{\gamma}^2, \ldots, \vec{\gamma}^n$, где $\vec{\gamma}^j = \left(\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \ldots\right.$ $\left.\ldots, \gamma_{nj}\right)^T$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда решением системы (2.1) будут вектор-функции

$$\vec{y}^j = \vec{\gamma}^j e^{\lambda_j t} = \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \gamma_{2j} \\ \vdots \\ \gamma_{nj} \end{pmatrix} e^{\lambda_j t} = \begin{pmatrix} \gamma_{1j} e^{\lambda_j t} \\ \gamma_{2j} e^{\lambda_j t} \\ \vdots \\ \gamma_{nj} e^{\lambda_j t} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Функции $\vec{y}^j(t)$ линейно независимы, а значит, образуют фундаментальную систему решений системы уравнений (2.1). Действительно, матрица

$$W(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} e^{\lambda_1 t} & \gamma_{12} e^{\lambda_2 t} & \ldots & \gamma_{1n} e^{\lambda_n t} \\ \gamma_{21} e^{\lambda_1 t} & \gamma_{22} e^{\lambda_2 t} & \ldots & \gamma_{2n} e^{\lambda_n t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} e^{\lambda_1 t} & \gamma_{n2} e^{\lambda_2 t} & \ldots & \gamma_{nn} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

при $t = 0$ не вырождена, поскольку ее столбцы в этом случае образованы линейно независимыми собственными векторами $\vec{\gamma}^1, \ldots, \vec{\gamma}^n$ матрицы A. Тогда, согласно формуле Остроградского – Лиувилля (1.10), матрица $W(t)$ не вырождена для всех $t \in \mathbb{R}$.. Как следствие, вектор-функции $\vec{y}^j$ (2.4) образуют фундаментальную систему решений исходной системы дифференциальных уравнений.

Таким образом, общее решение системы (2.1) в случае действительных различных корней характеристического уравнения, согласно формулам (2.4) и (1.7), будет иметь вид (в векторной форме)

$$\vec{y}=c_1\vec{\gamma}^{1}e^{\lambda_1 t}+c_2\vec{\gamma}^{2}e^{\lambda_2 t}+\ldots+c_n\vec{\gamma}^{n}e^{\lambda_n t}, \qquad (2.5)$$

или, раскрывая полученное равенство в координатной форме,

$$\begin{pmatrix} y_1\ \ t \\ y_2\ \ t \\ \vdots \\ y_n\ \ t \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{21}\\ \vdots \\ \gamma_{n1}\end{pmatrix}e^{\lambda_1 t}+c_2\begin{pmatrix}\gamma_{12}\\ \gamma_{22}\\ \vdots \\ \gamma_{n2}\end{pmatrix}e^{\lambda_2 t}+\ldots+c_n\begin{pmatrix}\gamma_{1n}\\ \gamma_{2n}\\ \vdots \\ \gamma_{nn}\end{pmatrix}e^{\lambda_n t}.$$

Приравнивая соответствующие координаты вектор-функций в левой и правой частях полученного равенства, находим решение системы дифференциальных уравнений в явной координатной форме

$$\begin{cases} y_1(t)=c_1\gamma_{11}e^{\lambda_1 t}+c_2\gamma_{12}e^{\lambda_2 t}+\ldots+c_n\gamma_{1n}e^{\lambda_n t};\\ y_2(t)=c_1\gamma_{21}e^{\lambda_1 t}+c_2\gamma_{22}e^{\lambda_2 t}+\ldots+c_n\gamma_{2n}e^{\lambda_n t};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n(t)=c_1\gamma_{n1}e^{\lambda_1 t}+c_2\gamma_{n2}e^{\lambda_2 t}+\ldots+c_n\gamma_{nn}e^{\lambda_n t}. \end{cases}$$

***Пример* 1.** Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x'\ \ t\ =-5x-2y-2z;\\ y'\ \ t\ =10x+4y+2z;\\ z'\ \ t\ =\ \ 2x+\ \ y+\ 3z. \end{cases}$$

Решение. Матрица $A-\lambda E$ имеет вид

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -5-\lambda & -2 & -2\\ 10 & 4-\lambda & 2\\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$\det\ A-\lambda E\ =\begin{vmatrix} -5-1 & -2 & -2\\ 10 & 4-\lambda & 2\\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-\ 5+1\ \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 10 & 2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}-$$

$$-2\begin{vmatrix} 10 & 4-\lambda\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-\ 5+\lambda\ \ \lambda^2-7\lambda+10\ +48-24\lambda=-\ \lambda+5\ \ \lambda-2\ \ \lambda-5\ -$$

$$-24\ \lambda-2\ =-\ \lambda-2\ \ \lambda^2-1\ =-\ \lambda-2\ \ \lambda-1\ \ \lambda+1\ =0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет три различных действительных корня: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$.

Далее находим собственные векторы, отвечающие полученным собственным значениям. Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = -1$. Этот вектор находим из системы уравнений

$$(A - \lambda_1 E)\vec{\alpha} = 0, \text{ или } \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 10 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В явном виде система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0; \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0; \\ 10\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Полученная система однородных уравнений имеет бесконечно много решений. Нам требуется найти одно из частных решений этой системы. Отнимая из второго уравнения системы первое, получаем $\alpha_3 = 0$, тогда $2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Пусть $\alpha_1 = 1$ (полагаем α_1 свободной неизвестной), в этом случае $\alpha_2 = -2, \alpha_1 = -2$. Таким образом, собственный вектор $\vec{\alpha}$ имеет вид $\vec{\alpha} = (1, -2, 0)^T$.

Пусть $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 1$. Соответствующая система уравнений имеет вид

$$(A - \lambda_2 E)\vec{\beta} = 0, \begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 \\ 10 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или в явном виде

$$\begin{cases} 3\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0; \\ 10\beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3 = 0; \\ 2\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Отнимая из первого уравнения системы третье, получаем $\beta_1 - \beta_3 = 0$, т.е. $\beta_1 = \beta_3$. Тогда $4\beta_1 + \beta_2 = 0$. Полагаем β_1 свободной неизвестной. Пусть $\beta_1 = 1$, тогда $\beta_2 = -4$, $\beta_3 = 1$. Итак, собственный вектор $\vec{\beta} = (1, -4, 1)^T$.

Пусть $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_3 = 2$. Находим этот вектор из системы уравнений

$$(A - \lambda_3 E)\vec{\gamma} = 0, \quad \begin{pmatrix} -7 & -2 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} 7\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0; \\ 5\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0; \\ 2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Из системы уравнений получаем $\gamma_1 = 0$, поэтому $\gamma_2 + \gamma_3 = 0$. Пусть $\gamma_3 = -1$, тогда собственный вектор $\vec{\gamma} = (0, 1, -1)^T$.

По формуле (2.5) находим общее решение системы уравнений. Пусть $\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$. Тогда

$$\vec{X}(t) = c_1\vec{\alpha}e^{-t} + c_2\vec{\beta}e^{t} + c_3\vec{\gamma}e^{2t},$$

или, с учетом явного вида полученных собственных векторов

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Таким образом, решение исходной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}; \\ y(t) = -2c_1 e^{-t} - 4c_2 e^{t} + c_3 e^{2t}; \\ z(t) = c_2 e^{t} - c_3 e^{2t}. \end{cases}$$

2 Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения (2.3) различные, но среди них имеются комплексные.

Пусть таким корнем является $\lambda = \alpha + i\beta$. Так как коэффициенты характеристического уравнения – действительные числа, то $\lambda = \alpha - i\beta$ также будет корнем характеристического уравнения. Отвечающие комплексно-сопряженным корням собственные векторы также будут иметь комплексно-сопряженные коэффициенты.

Пусть $\vec{\gamma} = \vec{u} + i\vec{v}$ – собственный вектор, отвечающий комплексному собственному значению $\lambda = \alpha + i\beta$. Тогда, согласно равенству (2.4), вектор-функция

$$\vec{y} = \vec{\gamma} e^{\lambda t} = \left(\vec{u} + i\vec{v}\right) e^{(\alpha + i\beta)t}$$

является решением системы (2.1). Применяя формулу Эйлера, находим комплексное решение

$$\vec{y} = e^{\alpha t}\left(\vec{u} + i\vec{v}\right)\left(\cos\beta t + i\sin\beta t\right) = e^{\alpha t}\left(\vec{u}\cos\beta t - \vec{v}\sin\beta t\right) +$$

$$+ie^{\alpha t}\left(\vec{v}\cos\beta t + \vec{u}\sin\beta t\right).$$

Очевидно, что действительная часть $e^{\alpha t}\left(\vec{u}\cos\beta t - \vec{v}\sin\beta t\right)$ и мнимая часть $e^{\alpha t}\left(\vec{v}\cos\beta t + \vec{u}\sin\beta t\right)$ полученного комплексного решения будут линейно независимыми решениями системы (2.1).

Таким образом, паре комплексно-сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения отвечает пара действительных решений

$$\vec{y}^{\,1} = \operatorname{Re}\vec{\gamma} e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t}\left(\vec{u}\cos\beta t - \vec{v}\sin\beta t\right),$$

$$\vec{y}^{\,2} = \operatorname{Im}\vec{\gamma} e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t}\left(\vec{v}\cos\beta t + \vec{u}\sin\beta t\right).$$

***Пример* 2.** Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 3y + z; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 2z; \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + 2y. \end{cases}$$

Решение. Находим корни характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -3 & 1\\ 3 & -2-\lambda & 2\\ -1 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}-(\lambda+2) & 2\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}3 & -(\lambda+2)\\ -1 & 2\end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-4)+10-10\lambda=-\lambda^3+\lambda^2-2=0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3-\lambda^2+2=0,$$

или

$$\lambda^3-\lambda^2+2=\lambda^3+1-(\lambda^2-1)=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)-(\lambda-1)(\lambda+1)=$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+2)=0.$$

Получаем действительный корень $\lambda_1=-1,$ а уравнение $\lambda^2-2\lambda+$ $+2=0$ дает пару комплексно-сопряженных корней $\lambda_{2,3}=1\pm i.$

Пусть $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^T$ – собственный вектор, отвечающий действительному собственному значению $\lambda_1=-1.$ Координаты вектора $\vec{\alpha}$ находим из уравнения

$$(A-\lambda_1 E)\vec{\alpha}=0,\ \text{или}\ \begin{pmatrix}4 & -3 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}4\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3=0;\\ 3\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0;\\ -\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0.\end{cases}$$

Прибавляя ко второму уравнению системы третье, умноженное на коэффициент 3, получаем равенство $\alpha_2+\alpha_3=0,$ или $\alpha_3=-\alpha_2.$ Используя это равенство, из второго уравнения системы находим $\alpha_1-\alpha_2=0,$ $\alpha_1=\alpha_2.$ Пусть $\alpha_1=1.$ Тогда $\alpha_2=1,$ $\alpha_3=-1.$ Итак, $\vec{\alpha}=(1,1,-1)^T$ – собственный вектор, отвечающий действительному собственному значению.

Далее находим собственный вектор $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)^T,$ отвечающий комплексному собственному значению $\lambda_2 = 1+i.$ Из матричного уравнения

$$A - \lambda_2 E \ \vec{\gamma} = 0, \quad \begin{pmatrix} 2-i & -3 & 1 \\ 3 & -3-i & 2 \\ -1 & 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \ 2-i \ \ \gamma_1 - 3\gamma_2 + \gamma_3 = 0; \\ 3\gamma_1 - \ 3+i \ \ \gamma_2 + 2\gamma_3 = 0; \\ -\gamma_1 + 2\gamma_2 - \ 1+i \ \ \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Прибавляем ко второму уравнению системы третье, умноженное на коэффициент 3, и после элементарных преобразований приходим к равенству $\ 3-i \ \ \gamma_2 = \ 1+i3 \ \ \gamma_3,$ из которого получаем

$$\gamma_2 = \frac{1+i3}{3-i}\gamma_{3.}$$

Пусть $\gamma_3 = 3-i,$ тогда $\gamma_2 = 1+i3.$ Подставляя полученные для γ_2 и γ_3 величины в третье уравнение системы, находим $\gamma_1 = -2+i4.$

Итак, собственный вектор $\vec{\gamma} = \ -2+i4, 1+i3, 3-i \ ^T.$

В комплексном решении $\vec{\gamma}e^{\lambda_2 t}$ выделяем действительную и мнимую части:

$$\vec{\gamma}e^{\lambda_2 t} = \vec{\gamma}e^{\ 1+i \ t} = e^t \begin{pmatrix} -2+i4 \\ 1+i3 \\ 3-i \end{pmatrix} \ \cos t + i\sin t \ = e^t \begin{pmatrix} -2+i4 \ \ \cos t + i\sin t \\ 1+i3 \ \ \cos t + i\sin t \\ (3-i) \ \cos t + i\sin t \end{pmatrix} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} -2\cos t - 4\sin t + i \ \ 4\cos t - 2\sin t \\ \cos t - 3\sin t + i \ \ 3\cos t + \sin t \\ 3\cos t + \sin t + i \ \ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix} =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} -2\cos t - 4\sin t \\ \cos t - 3\sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} 4\cos t - 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \\ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем

$$\operatorname{Re}\vec{\gamma}e^{\lambda_2 t} = e^t\begin{pmatrix} -2\cos t - 4\sin t \\ \cos t - 3\sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix},\quad \operatorname{Im}\vec{\gamma}e^{\lambda_2 t} = e^t\begin{pmatrix} 4\cos t - 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \\ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

По формуле (2.5) находим общее решение системы уравнений

$$\vec{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T = c_1\vec{\alpha}e^{\lambda_1 t} + c_2\operatorname{Re}\vec{\gamma}e^{\lambda_2 t} + c_3\operatorname{Im}\vec{\gamma}e^{\lambda_2 t}.$$

Получаем

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t\begin{pmatrix} -2\cos t - 4\sin t \\ \cos t - 3\sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_3 e^t\begin{pmatrix} 4\cos t - 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \\ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение исходной системы уравнений имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{-t} + e^t\left(c_2(-2\cos t - 4\sin t) + c_3(4\cos t - 2\sin t)\right) =$$

$$= c_1 e^{-t} + e^t\left((4c_3 - 2c_2)\cos t - (4c_2 + 2c_3)\sin t\right),$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + e^t\left(c_2(\cos t - 3\sin t) + c_3(3\cos t + \sin t)\right) =$$

$$= c_1 e^{-t} + e^t\left((c_2 + 3c_3)\cos t + (c_3 - 3c_2)\sin t\right),$$

$$z(t) = -c_1 e^{-t} + e^t\left(c_2(3\cos t + \sin t) + c_3(3\sin t - \cos t)\right) =$$

$$= -c_1 e^{-t} + e^t\left((3c_2 - c_3)\cos t + (c_2 + 3c_3)\sin t\right).$$

Заметим, что при нахождении коэффициентов собственного вектора вместо линейных преобразований с уравнениями системы, можно использовать формулы Крамера. Пусть линейно независимыми будут два первых уравнения системы

$$\begin{cases} a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2 + c_1\gamma_3 = 0; \\ a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 + c_2\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

И пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, т.е. γ_1 и γ_2 будут базисными неизвестными. Тогда, записав эту систему уравнений в виде

$$\begin{cases} a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2 = -c_1\gamma_3; \\ a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 = -c_2\gamma_3, \end{cases}$$

по формулам Крамера получаем

$$\gamma_1 = -\frac{\gamma_3}{\Delta}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{\gamma_3}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \ \gamma_2 = -\frac{\gamma_3}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Пусть $\gamma_3 = \Delta,$ тогда решение системы уравнений будет иметь вид

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \ \gamma_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \ \gamma_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (2.6)$$

***Пример* 3.** Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x'\ \ t\ \ = x + 2y - z; \\ y'\ \ t\ \ = -2x + y - 2z; \\ z'\ \ t\ \ = x + 2y + z. \end{cases}$$

Решение. Найдем корни характеристического уравнения

$$\det\ \ A - \lambda E\ \ = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ 1-\lambda\ \ \ \ \lambda - 1\ ^2 + 4\ \ + 5 - 5\lambda =$$

$$= \ 1-\lambda\ \ \ \ \lambda - 1\ ^2 + 9\ \ = \ 1-\lambda\ \ \ \lambda^2 - 2\lambda + 10\ \ = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_{2,3} = 1 \pm i3.$$

Собственный вектор $\vec{\alpha} = \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ ^T,$ отвечающий действительному собственному значению $\lambda_1,$ находим из уравнения

$$A - \lambda_1 E\ \ \vec{\alpha} = 0, \ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0; \\ -2\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0; \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0; \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0; \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

имеет решение $\vec{\alpha} = \ -2, 1, 2\ ^T.$

Комплексный вектор $\vec{\gamma} = \ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\ ^T,$ отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 1 + i3$, находим из уравнения

$$A-\lambda_2 E\ \ \vec{\gamma}=0,\ \begin{pmatrix}-i3 & 2 & -1\\ -2 & -i3 & -2\\ 1 & 2 & -i3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases}-i3\gamma_1+\ 2\gamma_2-\gamma_3=0;\\ 2\gamma_1+i3\gamma_2+2\gamma_3=0;\\ \gamma_1+2\gamma_2-i3\gamma_3=0.\end{cases}$$

Решение этой системы уравнений найдем по формулам (2.6). Оставив два первых уравнения системы

$$\begin{cases}-i3\gamma_1+2\gamma_2-\gamma_3=0;\\ 2\gamma_1+i3\gamma_2+2\gamma_3=0,\end{cases}$$

получаем

$$\gamma_1=\begin{vmatrix}2 & -1\\ i3 & 2\end{vmatrix}=4+i3,\ \ \gamma_2=\begin{vmatrix}-i3 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2+i6,\ \ \gamma_3=\begin{vmatrix}-i3 & 2\\ 2 & i3\end{vmatrix}=5.$$

Таким образом, собственный вектор $\vec{\gamma}=\ 4+i3,-2+i6,5\ ^T$.

Выделяем действительную и мнимую части в выражении

$$\vec{\gamma}e^{\lambda_2 t}=\begin{pmatrix}4+i3\\ -2+i6\\ 5\end{pmatrix}e^{\ 1+i3\ t}=e^t\begin{pmatrix}4+i3\\ -2+i6\\ 5\end{pmatrix}\ \cos 3t+i\sin 3t\ =$$

$$=e^t\begin{pmatrix}4\cos 3t-3\sin 3t+i\ \ 3\cos 3t+4\sin 3t\\ -2\cos 3t-6\sin 3t+i\ \ 6\cos 3t-2\sin 3t\\ 5\cos 3t+i5\sin 3t\end{pmatrix}=$$

$$=e^t\begin{pmatrix}4\cos 3t-3\sin 3t\\ -2\cos 3t-6\sin 3t\\ 5\cos 3t\end{pmatrix}+ie^t\begin{pmatrix}3\cos 3t+4\sin 3t\\ 6\cos 3t-2\sin 3t\\ 5\sin 3t\end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\mathrm{Re}\,\vec{\gamma}e^{\lambda_2 t}=e^t\begin{pmatrix}4\cos 3t-3\sin 3t\\ -2\cos 3t-6\sin 3t\\ 5\cos 3t\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Im}\vec{\gamma}e^{\lambda_2 t} = e^t\begin{pmatrix} 3\cos 3t + 4\sin 3t \\ 6\cos 3t - 2\sin 3t \\ 5\sin 3t \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений

$$\vec{X}(t) = c_1\vec{\alpha}e^{\lambda_1 t} + c_2\operatorname{Re}\vec{\gamma}e^{\lambda_2 t} + c_3\operatorname{Im}\vec{\gamma}e^{\lambda_2 t},$$

или

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1e^t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2e^t\begin{pmatrix} 4\cos 3t - 3\sin 3t \\ -2\cos 3t - 6\sin 3t \\ 5\cos 3t \end{pmatrix} + c_3e^t\begin{pmatrix} 3\cos 3t + 4\sin 3t \\ 6\cos 3t - 2\sin 3t \\ 5\sin 3t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, окончательно получаем решение системы уравнений в следующем виде:

$$x(t) = e^t\left(-2c_1 + c_2(4\cos 3t - 3\sin 3t) + c_3(3\cos 3t + 4\sin 3t)\right) =$$

$$= e^t\left(-2c_1 + (4c_2 + 3c_3)\cos 3t + (4c_3 - 3c_2)\sin 3t\right),$$

$$y(t) = e^t\left(c_1 + c_2(-2\cos 3t - 6\sin 3t) + c_3(6\cos 3t - 2\sin 3t)\right) =$$

$$= e^t\left(c_1 + (6c_3 - 2c_2)\cos 3t - (6c_2 + 2c_3)\sin 3t\right),$$

$$z(t) = e^t\left(2c_1 + 5(c_2\cos 3t + c_3\sin 3t)\right).$$

3 Среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения имеются кратные. Пусть λ – корень кратности $m > 1$ характеристического уравнения (2.3). Этому корню соответствуют $l < m$ (т.е. меньше кратности корня) собственных векторов матрицы *A*. Заметим, что в общем случае количество собственных векторов матрицы *A*, отвечающих собственному значению λ, равно $n - r$, где n – порядок матрицы *A*, а r – ранг матрицы $A - \lambda E$, т.е. $l = n - r$.

В случае, когда $l < m$, недостающие $m - l$ векторов, отвечающих корню характеристического уравнения λ, могут быть построены как так называемые присоединенные векторы.

Пусть $\vec{\alpha}$ – один из собственных векторов матрицы *A*, отвечающий собственному значению λ. Если система алгебраических уравнений

$$(A - \lambda E)\vec{\beta_1} = \vec{\alpha}$$

имеет решение, то вектор $\vec{\beta}_1$ называется присоединенным вектором матрицы A, порожденным собственным вектором $\vec{\alpha}$. Следующие собственные векторы, порожденные собственным вектором $\vec{\alpha}$, строятся как решения систем

$$A-\lambda E\ \vec{\beta}_{i+1}=\vec{\beta}_i,\ \ i=1,2,\ldots.$$

Выбранный собственный вектор $\vec{\alpha}$ может не иметь присоединенных векторов или иметь их конечное количество. В совокупности же общее количество собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственному значению λ, равно его кратности m.

Если собственный вектор $\vec{\alpha}$ имеет присоединенные векторы $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \ldots, \vec{\beta}_q$, то им отвечают линейно независимые решения системы (2.1) следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\vec{y}_1 = \ \vec{\beta}_1 + t\vec{\alpha}\ \ e^{\lambda t},\\
&\vec{y}_2 = \left(\vec{\beta}_2 + t\vec{\beta}_1 + \frac{1}{2!}t^2\vec{\alpha}\right)e^{\lambda t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\vec{y}_q = \left(\vec{\beta}_q + t\vec{\beta}_{q-1} + \ldots + \frac{1}{q-1\ !}t^{q-1}\vec{\beta}_1 + \frac{1}{q!}t^q\vec{\alpha}\right)e^{\lambda t}.
\end{aligned} \qquad (2.7)$$

Линейная комбинация решений вида (2.7) и всех решений вида $\vec{\alpha}e^{\lambda t}$, отвечающих собственным векторам, образует общее решение системы (2.1).

***Пример* 4.** Найти общее решение следующих систем:

$$\text{а)}\ \begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y + \ 9z;\\
\dfrac{dy}{dt} = \ 10x + 9y - 10z;\\
\dfrac{dz}{dt} = \ x + \ \ y + \ \ 3z.
\end{cases}$$

Решение. Находим корни характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{vmatrix} -5+\lambda & -4 & 9 \\ 10 & 9-\lambda & -10 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+5)\begin{vmatrix} 9-\lambda & -10 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}+$$

$$+4\begin{vmatrix} 10 & -10 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}+9\begin{vmatrix} 10 & 9-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-\lambda^3+7\lambda^2-8\lambda-16=0,$$

или $\lambda^3-7\lambda^2+8\lambda+16=0.$

Корень $\lambda_1=-1$ находим подбором. Выполняя деление многочленов

$$\begin{array}{r|l} -\;\lambda^3-7\lambda^2+8\lambda+16 & \lambda+1 \\ \cline{2-2} \underline{\lambda^3+\lambda^2\qquad\qquad\quad} & \lambda^2-8\lambda+16 \\ -\;-8\lambda^2+8\lambda+16 & \\ \underline{-8\lambda^2-8\lambda\qquad} & \\ -\;16\lambda+16 & \\ \underline{16\lambda+16} & \\ 0 & \end{array},$$

получаем $\lambda^2-8\lambda+16=(\lambda-4)^2=0,\ \lambda_2=4,$ кратность корня $m=2.$

Пусть $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)^T$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1.$ Решая систему уравнений

$$(A-\lambda_1 E)\vec{\gamma}=0,\ \begin{bmatrix} -4 & -4 & 9 \\ 10 & 10 & -10 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} -4\gamma_1-4\gamma_2+9\gamma_3=0; \\ \gamma_1+\gamma_2-\gamma_3=0; \\ \gamma_1+\gamma_2+4\gamma_3=0, \end{cases}$$

получаем $\vec{\gamma}=(1,-1,0)^T.$

Пусть $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^T$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2=4$ (кратности 2). Этот собственный вектор находим из системы уравнений

$$A-\lambda_2 E\ \vec{\alpha}=0,\ \begin{pmatrix}-9 & -4 & 9\\ 10 & 5 & -10\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases}-9\alpha_1-4\alpha_2+9\alpha_3=0;\\ 2\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3=0;\\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0.\end{cases}$$

Отнимая из второго уравнения системы третье, получаем $\alpha_1-\alpha_3=0$, $\alpha_1=\alpha_3$. Тогда $\alpha_2=0$. Пусть $\alpha_1=\alpha_3=1$, и поэтому $\vec{\alpha}=\ 1,0,1\ ^T$. По формулам (2.6) находим присоединенный вектор $\vec{\beta}_1=\ \beta_1,\beta_2,\beta_3\ ^T$:

$$A-\lambda_2 E\ \vec{\beta}_1=\vec{\alpha},\ \begin{pmatrix}-9 & -4 & 9\\ 10 & 5 & -10\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases}-9\beta_1-4\beta_2+9\beta_3=1;\\ 2\beta_1+\beta_2-2\beta_3=0;\\ \beta_1+\beta_2-\beta_3=1.\end{cases}$$

Отнимая из второго уравнения этой системы третье, получаем $\beta_1-\beta_3=-1$, тогда $\beta_2=2$. Пусть $\beta_3=1$, тогда $\beta_1=0$, и присоединенный вектор $\vec{\beta}_1=\ 0,2,1\ ^T$.

Используя формулы (2.7), строим фундаментальную систему решений

$$\vec{y}_1=\vec{\gamma}e^{\lambda_1 t}=\vec{\gamma}e^{-t},\ \vec{y}_2=\vec{\alpha}e^{\lambda_2 t}=\vec{\alpha}e^{4t},\ \vec{y}_3=\ \vec{\beta}_1+t\vec{\alpha}\ e^{\lambda_2 t}=\ \vec{\beta}_1+t\vec{\alpha}\ e^{4t}.$$

Поэтому общее решение системы уравнений имеет вид

$$\vec{X}\ t\ =\ x\ t\ ,y\ t\ ,z\ t\ ^T=c_1\vec{\gamma}e^{-t}+c_2\vec{\alpha}e^{4t}+c_3\ \vec{\beta}_1+t\vec{\alpha}\ e^{4t},$$

или, с учетом явного вида собственных векторов,

$$\begin{pmatrix}x\ t\\ y\ t\\ z\ t\end{pmatrix}=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+c_2e^{4t}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+c_3e^{4t}\left(t\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right).$$

Таким образом, решение системы уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{-t} + e^{4t}(c_2 + c_3t), \\ y(t) = -c_1e^{-t} + c_3e^{4t}(0+2) = -c_1e^{-t} + 2c_3e^{4t}, \\ z(t) = c_2e^{4t} + c_3e^{4t}(t+1) = e^{4t}(c_2 + c_3(t+1)). \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y - 8z; \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x - 11y - 17z; \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x + 4y + 6z. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 & -8 \\ 7 & -(11+\lambda) & -17 \\ -3 & 4 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 + 5\lambda + 2) -$$

$$-(-5)(7\lambda + 9) + 8(3\lambda + 5) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0,$$

или

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = -1,$ кратность корня $m = 3.$

Далее находим собственный вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T,$ отвечающий собственному значению $\lambda = -1.$ Решая систему уравнений

$$(A - \lambda E)\vec{\alpha} = 0, \quad \begin{pmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 7 & -10 & -17 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - 5\alpha_2 - 8\alpha_3 = 0; \\ 7\alpha_1 - 10\alpha_2 - 17\alpha_3 = 0; \\ -3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0, \end{cases}$$

получаем $\vec{\alpha} = (1, -1, 1)^T.$

Далее находим присоединенные векторы. Вектор $\vec{\beta}_1 = (b_1, b_2, b_3)^T$ находим из системы уравнений

$$(A-\lambda E)\vec{\beta}_1 = \vec{\alpha}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 7 & -10 & -17 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} 3b_1 - 5b_2 - 8b_3 = 1; \\ 7b_1 - 10b_2 - 17b_3 = -1; \\ -3b_1 + 4b_2 + 7b_3 = 1. \end{cases}$$

Сложив первое и третье уравнение системы, получаем $b_2 = -b_3 - 2.$ Используя это равенство, из первого уравнения системы получаем $b_1 = b_3 - 3.$ Пусть $b_3 = 0,$ тогда $b_1 = -3,$ $b_2 = -2,$ и $\vec{\beta}_1 = (-3, -2, 0)^T.$

Присоединенный вектор $\vec{\beta}_2 = (B_1, B_2, B_3)^T$ находим из системы уравнений

$$(A-\lambda E)\vec{\beta}_2 = \vec{\beta}_1, \quad \begin{pmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 7 & -10 & -17 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} 3B_1 - 5B_2 - 8B_3 = -3; \\ 7B_1 - 10B_2 - 17B_3 = -2; \\ -3B_1 + 4B_2 + 7B_3 = 0. \end{cases}$$

Вновь сложив первое и третье уравнение системы, получаем $B_2 = 3 - B_3,$ тогда из первого уравнения системы, используя это равенство, находим $B_1 = B_3 + 4.$ Пусть $B_3 = 1,$ тогда $B_2 = 2,$ $B_1 = 5,$ и $\vec{\beta}_2 = (5, 2, 1)^T.$

Используя формулы (2.7), строим фундаментальную систему решений:

$\vec{y}_1 = \vec{\alpha}e^{\lambda t} = \vec{\alpha}e^{-t},$

$$\vec{y}_2 = (\vec{\beta}_1 + t\vec{\alpha})e^{-t} = \left(t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{-t},$$

$$\vec{y}_3 = \left(\vec{\beta}_2 + t\vec{\beta}_1 + \frac{1}{2}t^2\vec{\alpha} \right) e^{-t} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^{-t}.$$

Как следствие, общее решение системы уравнений будет иметь вид

$$\vec{X}(t) = \left(c_1\vec{\alpha} + c_2(\vec{\beta}_1 + t\vec{\alpha}) + c_3\left(\vec{\beta}_2 + t\vec{\beta}_1 + \frac{1}{2}t^2\vec{\alpha} \right) \right) e^{-t},$$

или

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \left(t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{-t} \left(\frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Таким образом, решение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = \left(c_1 + c_2(t-3) + c_3\left(\dfrac{1}{2}t^2 - 3t + 5 \right) \right) e^{-t}, \\ y(t) = -\left(c_1 + c_2(t+2) + c_3\left(\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 2 \right) \right) e^{-t}, \\ z(t) = \left(c_1 + c_2 t + c_3\left(\dfrac{1}{2}t^2 + 1 \right) \right) e^{-t}. \end{cases}$$

2.2 Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами

Системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется система вида

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t); \\ y_2'(t) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(t); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{cases} \tag{2.8}$$

или в векторном виде

$$\vec{y'}(t) = A\vec{y}(t) + \vec{f}(t),$$

где $\vec{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^T$, $\vec{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^T$, a_{ik} – постоянные коэффициенты, $i, k = 1, \ldots, n,$ $\vec{f}(t)$ – непрерывная на интервале $(a; b)$ функция.

2.3 Метод неопределенных коэффициентов

Общее решение системы (2.8) строится как сумма общего решения соответствующей однородной системы $\vec{y'}(t) = A\vec{y}(t)$ и частного решения неоднородной системы. Для специального, но важного для приложений, вида функции $\vec{f}(t)$ используется подбор частного решения системы (2.8) методом неопределенных коэффициентов (метод Эйлера).

Рассмотрим возможные случаи.

1 Пусть функции $f_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ имеют специальный вид

$$f_i(t) = P_i^{q_i}(t)e^{\alpha t}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.9}$$

где α – постоянный коэффициент (вещественный), $P_i^{q_i}(t)$ – многочлен степени q_i (такую функцию $f_i(t)$ называют квазимногочленом). $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ – корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ кратностей $m_1, \ldots, m_l$ соответственно ($m_1 + \ldots + m_l = n$).

Тогда частное решение $\vec{\bar{y}}(t) = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)^T$ системы (2.8) с правыми частями (2.10) ищется в виде

$$\bar{y}_i(t) = A_i^{q+s}(t)e^{\alpha t}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.10}$$

где:

а) $s=0,$ если $\alpha\neq\lambda_k$ $(k=1,\ldots,l)$, т.е. параметр α не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения системы (2.8);

б) $s=m_k$, если $\alpha=\lambda_k$; m_k – кратность корня λ_k.

Здесь $A_i^{q+s}(t)$ – многочлен степени $q+s$ ($q=\max\limits_{i=1,\ldots,n}(q_i)$), конкретный вид которого находится методом неопределенных коэффициентов. Искомая форма многочлена $A_i^{q+s}(t)$ должна содержать все степени t от 1 до $q+s$.

2 Пусть

$$f_i(t)=e^{\alpha t}\left(P_i^{q_i}(t)\cos\beta t+Q_i^{r_i}(t)\sin\beta t\right), \qquad (2.11)$$

где α и β – вещественные постоянные; $P_i^{q_i}(t)$ и $Q_i^{r_i}(t)$ – многочлены степеней q_i и r_i соответственно.

Тогда частное решение системы (2.8) с правыми частями (2.11) можно искать в виде

$$\overline{y}_i(t)=e^{\alpha t}\left(A_i^{p+s}(t)\cos\beta t+B_i^{p+s}(t)\sin\beta t\right), \qquad (2.12)$$

где:

а) $s=0,$ если $\delta=\alpha+i\beta\neq\lambda_k$ $(k=1,\ldots,l)$, т.е. комплексный параметр $\delta=\alpha+i\beta$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$;

б) $s=m_k$, если $\delta=\alpha+i\beta=\lambda_k$, m_k – кратность корня λ_k.

Здесь $A_i^{p+s}(t)$ и $B_i^{p+s}(t)$ – многочлены степени $p+s$, $p=\max\limits_{i=1,\ldots,n}(q_i,r_i)$, конкретный вид которых находится методом неопределенных коэффициентов. Искомая форма многочленов $A_i^{p+s}(t)$ и $B_i^{p+s}(t)$ должна содержать все степени t от 1 до $p+s$.

Пример **5.** Найти общее решение системы уравнений.

а) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\ \ x-y+4\cos 2t;\\ \dfrac{dy}{dt}=3x-2y+8\cos 2t+5\sin 2t.\end{cases}$$

Решение. Сначала находим решение соответствующей системы однородных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 3 & -(2+\lambda) \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)+3 = \lambda^2+\lambda+1 = 0$$

имеет пару комплексных корней $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Собственный вектор $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)^T$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ находим из системы уравнений

$$(A - \lambda_1 E)\vec{\gamma} = 0, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 3 & -\left(\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из первого уравнения системы получаем

$$(3 - i\sqrt{3})\gamma_1 = 2\gamma_2.$$

Пусть $\gamma_2 = 3 - i\sqrt{3}$, тогда $\gamma_1 = 2$, и собственный вектор $\vec{\gamma} = (2, 3 - i\sqrt{3})^T$.

Далее в выражении $\vec{\gamma}e^{\lambda_1 t}$ выделяем действительную и мнимую части:

$$\vec{\gamma}e^{-\frac{1}{2}t}e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t} = e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 - i\sqrt{3} \end{pmatrix}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix} 2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + i2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ 3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + i\left(3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\operatorname{Re}\vec{\gamma}e^{\lambda_1 t}=e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix}2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ 3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Im}\vec{\gamma}e^{\lambda_1 t}=e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix}2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ 3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{pmatrix}x_0\ \ t\\ y_0\ \ t\end{pmatrix}=c_1\operatorname{Re}\vec{\gamma}e^{\lambda_1 t}+c_2\operatorname{Im}\vec{\gamma}e^{\lambda_1 t}=$$

$$=c_1e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix}2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ 3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{pmatrix}+c_2e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix}2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\\ 3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{pmatrix},$$

или

$$x_0(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left(2c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+2c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

$$y_0\ \ t\ =e^{-\frac{1}{2}t}\left(\ 3c_1-\sqrt{3}c_2\ \ \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\ \sqrt{3}c_1+3c_2\ \ \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Частное решение системы находим методом неопределенных коэффициентов. Так как функции $f_1\ \ t\ =4\cos 2t+0\cdot\sin 2t,$ $f_2\ \ t\ =8\cos 2t+5\sin 2t,$ то по формуле (2.12) получаем

$$\bar{x}\ \ t\ =A\cos 2t+B\sin 2t,\quad \bar{y}\ \ t\ =C\cos 2t+D\sin 2t.$$

Подставляя функции $\bar{x}\ \ t$ и $\bar{y}\ \ t$, а также их производные $\bar{x}'\ \ t\ =-2A\sin 2t+2B\cos 2t,$ $\bar{y}'\ \ t\ =-2C\sin 2t+2D\cos 2t,$ в исходную систему дифференциальных уравнений, получаем

$$\begin{cases} (-A+2B+C)\cos 2t+(-2A-B+D)\sin 2t = 4\cos 2t + 0\cdot\sin 2t, \\ (-3A+2C+2D)\cos 2t+(-3B-2C+2D)\sin 2t = 8\cos 2t+5\sin 2t. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях полученных равенств, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} -A+2B+C=4; \\ -2A-B+D=0; \\ -3A+2C+2D=8; \\ -3B-2C+2D=5. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим $A=2$, $B=3$, $C=0$, $D=7$.

Таким образом, частное решение исходной системы уравнений имеет вид

$$\bar{x}(t)=2\cos 2t+3\sin 2t,\ \ \bar{y}(t)=7\sin 2t.$$

Тогда общее решение неоднородной системы уравнений

$$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=2e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+2\cos 2t+3\sin 2t,$$

$$y(t)=y_0(t)+\bar{y}(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left((3c_1-\sqrt{3}c_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+(\sqrt{3}c_1+3c_2)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+$$

$$+7\sin 2t.$$

б) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=2y-z+2e^t; \\ \dfrac{dz}{dt}=3y-2z+4e^t. \end{cases}$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -(2+\lambda) \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+2)+3=\lambda^2-1=$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$.

Собственному значению $\lambda_1=1$ отвечает собственный вектор $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)^T$, который находим из системы уравнений

$$(A-\lambda_1 E)\vec{\alpha}=0,\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Получаем $\alpha_1=\alpha_2$. Пусть $\alpha_1=\alpha_2=1$, т.е. $\vec{\alpha}=(1,1)^T$.

Из системы уравнений $(A-\lambda_2 E)\vec{\beta}=0$ находим собственный вектор $\vec{\beta}=(1,3)^T$.

Общее решение соответствующей однородной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix}y_0(t)\\ z_0(t)\end{pmatrix}=c_1\vec{\alpha}e^{\lambda_1 t}+c_2\vec{\beta}e^{\lambda_2 t}=c_1 e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+c_2 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix},$$

или

$$y_0(t)=c_1e^t+c_2e^{-t},\ z_0(t)=c_1e^t+3c_2e^{-t}.$$

Частное решение неоднородной системы ищем в виде $\overline{y}(t)=(At+B)e^t$, $\overline{z}(t)=(Ct+D)e^t$ [см. формулу (2.10)]. При построении частного решения мы учитываем тот факт, что характеристическое число функции $\vec{f}(t)=(2e^t,4e^t)^T$ (показатель экспоненты), равное 1, совпадает с одним из корней характеристического уравнения.

Подставляя функции $\overline{y}(t)$ и $\overline{z}(t)$ и их производные $\overline{y}'(t)=(At+A+B)e^t$, $\overline{z}'(t)=(Ct+C+D)e^t$, в исходную систему дифференциальных уравнений и группируя слагаемые с одинаковыми степенями t, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(-A+C)t+(A-B+D)=2;\\ (3C-3A)t+(C+3D-3B)=4.\end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в обоих частях равенств, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}A-C=0;\\ A-B+D=2;\\ C+3D-3B=4.\end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим $A=C=1$, $D-B=1$. Пусть $B=0$, тогда $D=1$.

Таким образом, частное решение исходной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\bar{y}(t) = te^t, \ \bar{z}(t) = (t+1)e^t.$$

Суммируя общее решение соответствующей однородной системы и частное решение неоднородной, получаем общее решение системы уравнений

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + te^t,$$

$$z(t) = c_1e^t + 3c_2e^{-t} + (t+1)e^t.$$

2.4 Метод вариации постоянных (метод Лагранжа) и метод Коши

Общими методами построения решения системы уравнений (2.8) (как и в случае линейной системы с переменными коэффициентами) являются метод вариации постоянных (метод Лагранжа) и метод Коши.

***Пример* 6.** Найти общее решение системы уравнений, используя метод вариации постоянных:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 4y + \dfrac{e^{3t}}{1+e^{2t}}; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 5y. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -(1+\lambda) & -4 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 3$.

Собственному значению $\lambda_1 = 1$ отвечает собственный вектор $\vec{\alpha} = (2, -1)^T$, собственному значению $\lambda_2 = 3$ – вектор $\vec{\beta} = (1, -1)^T$. Поэтому фундаментальная система решений соответствующей однородной системы будет иметь вид

$$\vec{y}_1 = \vec{\alpha}e^t = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \ \vec{y}_2 = \vec{\beta}e^{3t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Как следствие, фундаментальная матрица системы

$$W\ \ t\ =\begin{pmatrix} 2e^{t} & e^{3t} \\ -e^{t} & -e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Вектор-функция $\vec{f}\ \ t\ =\left(\dfrac{e^{3t}}{1+e^{2t}}, 0\right)^{T}$. Вводим в рассмотрение вектор-функцию $\vec{c}\ \ t\ =\ c_1\ \ t\ , c_2\ \ t\ \ ^{T}$, компоненты которой находим, используя систему уравнений (1.17), которая для данной системы дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2e^{t} & e^{3t} \\ -e^{t} & -e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'\ \ t \\ c_2'\ \ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t}}{1+e^{2t}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} 2e^{t}c_1'\ \ t\ +e^{3t}c_2'\ \ t\ =\dfrac{e^{3t}}{1+e^{2t}}; \\ \ \ e^{t}c_1'\ \ t\ +e^{3t}c_2'\ \ t\ =0. \end{cases}$$

Отнимая из первого уравнения системы второе, получаем

$$e^{t}c_1'\ \ t\ =\frac{e^{3t}}{e^{2t}+1},\ \text{тогда}\ c_1'\ \ t\ =\frac{e^{2t}}{e^{2t}+1}.$$

Из второго уравнения системы получаем

$$c_2'\ \ t\ =-e^{-2t}c_1'\ \ t\ =-\frac{1}{e^{2t}+1}.$$

Интегрируя, находим функции

$$c_1\ \ t\ =\int\frac{e^{2t}dt}{e^{2t}+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d\ \ e^{2t}+1}{e^{2t}+1}=\frac{1}{2}\ln\ \ e^{2t}+1\ +c_1.$$

$$c_2\ \ t\ =-\int\frac{dt}{e^{2t}+1}=-\int\frac{e^{-2t}dt}{e^{-2t}+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d\ \ e^{-2t}+1}{e^{-2t}+1}=\frac{1}{2}\ln\ \ e^{-2t}+1\ +c_2,$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Таким образом, функция $\vec{c}\ \ t\ =\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\ln\ \ e^{2t}+1 \\ \dfrac{1}{2}\ln\ \ e^{-2t}+1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$

Тогда общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений будет иметь вид (формула (1.16))

$$\overrightarrow{X}(t) = (x(t), y(t))^T = W(t)\vec{c}(t),$$

или

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{3t} \\ -e^t & -e^{3t} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln\left(e^{2t}+1\right) \\ \frac{1}{2}\ln\left(e^{-2t}+1\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Окончательно получаем решение системы уравнений в следующем виде:

$$x(t) = e^t \ln\left(e^{2t}+1\right) + \frac{1}{2}e^{3t}\ln\left(e^{-2t}+1\right) + 2c_1e^t + c_2e^{3t};$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t \ln\left(e^{2t}+1\right) - \frac{1}{2}e^{3t}\ln\left(e^{-2t}+1\right) - c_1e^t - c_2e^{3t}.$$

***Пример* 7.** Решить систему уравнений, используя метод Коши,

$$\begin{cases} x'(t) = 3x + y; \\ y'(t) = -4x - y + \dfrac{e^t}{2\sqrt{t}}. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3)+4 = (\lambda-1)^2 = 0$$

имеет корень $\lambda = 1$ кратности 2.

Из системы уравнений

$$(A-\lambda E)\vec{\gamma}_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

находим собственный вектор $\vec{\gamma}$. Первое уравнение системы дает $2\gamma_1 + \gamma_2 = 0.$ Пусть $\gamma_1 = 1,$ тогда $\gamma_2 = -2,$ и $\vec{\gamma} = (1, -2)^T$.

Из системы уравнений

$$(A-\lambda E)\vec{\alpha} = \vec{\gamma}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

находим присоединенный вектор $\vec{\alpha}.$ Из первого уравнения системы

$2\alpha_1+\alpha_2=1$. Полагая $\alpha_1=1$, получаем $\alpha_2=-1$, поэтому $\vec{\alpha}=(1,-1)^T$.
Фундаментальная система решений однородной системы

$$\vec{y}_1=\vec{\gamma}e^{\lambda t}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^t=\begin{pmatrix}e^t\\-2e^t\end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_2=(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}t)e^{\lambda t}=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}t\right)e^t=\begin{pmatrix}(t+1)e^t\\-(2t+1)e^t\end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица системы

$$W(t)=\begin{pmatrix}e^t & (t+1)e^t\\-2e^t & -(2t+1)e^t\end{pmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов фундаментальной матрицы $w_{11}=-(2t+1)e^t$, $w_{12}=2e^t$, $w_{21}=-(t+1)e^t$, $w_{22}=e^t$, $\det W(t)=e^{2t}$.
Поэтому обратная матрица

$$W^{-1}(t)=\frac{1}{e^{2t}}\begin{pmatrix}-(2t+1)e^t & -(t+1)e^t\\ 2e^t & e^t\end{pmatrix}.$$

Так как функция $\vec{f}(t)=\left(0,\dfrac{e^t}{2\sqrt{e}}\right)^T$, то произведение

$$W^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)=\frac{1}{e^{2\tau}}\begin{pmatrix}-(2\tau+1)e^\tau & -(\mathrm{t}+1)e^\tau\\ 2e^\tau & e^\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{e^\tau}{2\sqrt{\tau}}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{e^{2\tau}}\begin{pmatrix}-\dfrac{\tau+1}{2\sqrt{\tau}}e^{2\tau}\\ \dfrac{e^{2\tau}}{2\sqrt{\tau}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\tau+1}{2\sqrt{\tau}}\\ \dfrac{1}{2\sqrt{\tau}}\end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем интеграл:

$$\int_{t_0}^{t}W^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau=\begin{pmatrix}-\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{\tau+1}{2\sqrt{\tau}}d\tau\\ \displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\displaystyle\int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right)d\tau\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{3}\sqrt{t^3}+\sqrt{t}\right)+\left(\frac{1}{3}\sqrt{t_0^{\,3}}+\sqrt{t_0}\right) \\ \sqrt{t}-\sqrt{t_0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{3}\sqrt{t^3}+\sqrt{t}\right) \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \end{pmatrix},$$

где мы обозначили $c_{10}=\frac{1}{3}\sqrt{t_0^{\,3}}+\sqrt{t_0}$, $c_{20}=-\sqrt{t_0}$.

Общее решение системы находим по формуле (1.18). Пусть произвольный постоянный вектор $\vec{c}=\left(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\right)^T$. Получаем

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t & (t+1)e^t \\ -2e^t & -(2t+1)e^t \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{3}\sqrt{t^3}+\sqrt{t}\right) \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \tilde{c}_1+c_{10} \\ \tilde{c}_2+c_{20} \end{pmatrix}\right\}.$$

Пусть $c_1=\tilde{c}_1+c_{10}$, $c_2=\tilde{c}_2+c_{20}$. Тогда решение исходной системы дифференциальных уравнений будет иметь вид

$$x(t)=\frac{2}{3}t\sqrt{t}e^t+c_1e^t+c_2(t+1)e^t=(c_1+c_2)e^t+c_2te^t+\frac{2}{3}t\sqrt{t}e^t,$$

$$y(t)=\left(\sqrt{t}-\frac{4}{3}t\sqrt{t}\right)e^t-2c_1e^t-c_2(2t+1)e^t=-(2c_1+c_2)e^t-2c_2te^t+$$

$$+\left(\sqrt{t}-\frac{4}{3}t\sqrt{t}\right)e^t.$$

ЗАДАЧИ

***Упражнение* 1.** Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

1.1 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y; \\ \dfrac{dy}{dt}=3+4y. \end{cases}$

Ответ: $x(t)=c_1e^t+c_2e^{5t}$, $y(t)=-c_1e^t+3c_2e^{5t}$.

1.2 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y; \\ \dfrac{dy}{dt}=y-4x. \end{cases}$

Ответ: $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$, $y(t) = 2c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{3t}$.

1.3 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$

Ответ: $x(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$, $y(t) = e^{2t}\big((c_1 + c_2)\cos t +$

$+ (c_2 - c_1)\sin t\big)$.

1.4 $\begin{cases} x'(t) = 2x - y + z; \\ y'(t) = x + 2y - z; \\ z'(t) = x - y + 2z, \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3). \end{cases}$

Ответ: $x(t) = c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$, $y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$, $z(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$.

1.5 $\begin{cases} x'(t) = 3x - y + z; \\ y'(t) = x + y + z; \\ z'(t) = 4x - y + 4z, \quad (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5). \end{cases}$

Ответ: $x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}$, $y(t) = c_1 e^{t} - 2c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}$,

$z(t) = -c_1 e^{t} - 3c_2 e^{2t} + 3c_3 e^{5t}$.

1.6 $\begin{cases} x'(t) = x - 2y - z; \\ y'(t) = x - y + z; \\ z'(t) = x - z. \end{cases}$

Ответ: $x(t) = c_1 e^{t} + 3c_2 e^{2t}$, $y(t) = 2c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t}$,

$z(t) = c_1 + c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{t}$.

1.7 $\begin{cases} x'(t) = 2x + y; \\ y'(t) = x + 3y - z; \\ z'(t) = 2y + 3z - x, \quad (\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3 \pm i). \end{cases}$

Ответ: $x(t) = c_1 e^{2t} + e^{3t}(c_2 \cos t + c_3 \sin t)$, $y(t) = e^{3t}\big((c_2 + c_3)\cos t +$

$+ (c_3 - c_2)\sin t\big)$, $z(t) = c_1 e^{2t} + e^{3t}\big((2c_2 - c_3)\cos t + (2c_3 + c_2)\sin t\big)$.

1.8 $\begin{cases} x'\ t\ = 2x - y + 2z; \\ y'\ t\ = x + 2z; \\ z'\ t\ = -2x + y - z, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i\ . \end{cases}$

Ответ: $x\ t\ = c_2 \cos t\ \ c_2 + 2c_3\ \sin t$, $y\ t\ = 2c_1 e^t + c_2 \cos t +\ c_2 +$ $+ 2c_3\ \sin t$, $z\ t\ = c_1 e^t + c_3 \cos t -\ c_2 + c_3\ \sin t$.

1.9 $\begin{cases} x'\ t\ = 4x - y - z; \\ y'\ t\ = x + 2y - z; \\ z'\ t\ = x - y + 2z, \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3\ . \end{cases}$

Ответ: $x\ t\ = c_1 e^{2t} +\ c_2 + c_3\ e^{3t}$, $y\ t\ = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$, $z\ t\ = c_1 e^{2t} + c_3 e^{3t}$.

1.10 $\begin{cases} x'\ t\ = x - y + z; \\ y'\ t\ = x + y - z; \\ z'\ t\ = -y + 2z, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2\ . \end{cases}$

Ответ: $x\ t\ =\ c_1 + c_2 t\ e^t + c_3 e^{2t}$, $y\ t\ =\ c_1 - 2c_2 + c_2 t\ e^t$,
$z\ t\ =\ c_1 - c_2 + c_2 t\ e^t + c_3 e^{2t}$.

Упражнение **2.** Решить системы уравнений (для систем с тремя неизвестными приведены корни характеристического уравнения):

2.1 $\begin{cases} x'\ t\ = x - 8y; \\ y'\ t\ = x + y. \end{cases}$

Ответ: $x\ t\ = 2c_1 e^{3t} - 4c_2 e^{-3t}$, $y\ t\ = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$.

2.2 $\begin{cases} x'\ t\ = x - 2y; \\ y'\ t\ = x - y. \end{cases}$

Ответ: $x\ t\ = 2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t$, $y\ t\ =\ c_1 - c_2\ \cos t +\ c_1 + c_2\ \sin t$.

2.3 $\begin{cases} x'\ t\ = 2x - y - z; \\ y'\ t\ = 3x - 2y - 3z. \\ z'\ t\ = 2 - x - y, \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1\ . \end{cases}$

Ответ: $x\ t\ = c_1 + c_2 e^t$, $y\ t\ = 3c_1 + c_3 e^t$, $z\ t\ = -c_1 +\ c_2 - c_3\ e^t$.

$$\textbf{2.4}\ \begin{cases} x'(t) = y - 2x - 2z; \\ y'(t) = x - 2y + 2z. \\ z'(t) = 3x - 3y + 5z, \quad (\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = -1). \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$, $y(t) = -c_1e^{3t} + (c_2 + 2c_3)e^{-t}$, $z(t) = -3c_1e^{3t} + c_3e^{-t}$.

$$\textbf{2.5}\ \begin{cases} x'(t) = 2x + y; \\ y'(t) = 2y + 4z; \\ z'(t) = x - z, \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3). \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = c_1 + c_2t + 4c_3e^{3t}$, $y(t) = c_2 - 2c_1 + 4c_3e^{3t}$, $z(t) = c_1 - c_2 + c_2t + c_3e^{3t}$.

$$\textbf{2.6}\ \begin{cases} x'(t) = z - y; \\ y'(t) = 3z - x - 2y; \\ z'(t) = 2z - x - y, \quad (\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1). \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = c_2 + c_3e^{-t}$, $y(t) = c_1e^{t} + c_2 + 2c_3e^{-t}$, $z(t) = c_1e^{t} + c_2 + c_3e^{-t}$.

$$\textbf{2.7}\ \begin{cases} x'(t) = x - z; \\ y'(t) = -2x + 3y - z; \\ z'(t) = 4x + 5z, \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3). \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{3t} + c_3te^{3t}$, $y(t) = c_2e^{3t} + c_3te^{3t}$, $z(t) = -2c_1e^{3t} - 2c_2e^{3t} + c_3e^{3t}(-2t - 1)$.

***Упражнение* 3.** Решить данные системы уравнений методом вариации постоянных:

$$\textbf{3.1}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + \operatorname{tg} t$, $y(t) = -c_1\sin t + c_2\cos t + 2$.

$$\textbf{3.2}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x; \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}. \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = c_1e^t + 2c_2e^{2t} - e^t\ln\left(e^{2t}+1\right) + 2e^{2t}\operatorname{arctg}e^t$,

$y(t) = c_1e^t + 3c_2e^{2t} - e^t\ln\left(e^{2t}+1\right) + 3e^{2t}\operatorname{arctg}e^t$.

$$\textbf{3.3}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t-1}; \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t-1}. \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = c_1 + 2c_2e^{-t} + 2e^{-t}\ln\left|e^t-1\right|$,

$y(t) = -2c_1 - 3c_2e^{-t} - 3e^{-t}\ln\left|e^t-1\right|$.

$$\textbf{3.4}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + t\left(\cos t + \sin t\right) + \left(\cos t - \sin t\right)\ln\left|\cos t\right|$,

$y(t) = \left(c_1 - c_2\right)\cos t + \left(c_1 + c_2\right)\sin t + 2\cos t\ln\left|\cos t\right| + 2t\sin t$.

$$\textbf{3.5}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = \left(c_1 + 2c_2t - 8\sqrt{t^5}\right)e^t$, $y(t) = \left(c_1 + 2c_2t - 8\sqrt{t^5} + 10\sqrt{t^3}\right)e^t$.

***Упражнение* 4.** Решить следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\textbf{4.1}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Ответ: $x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + \cos t\ln\left|\cos t\right| + t\sin t$,

$$y(t) = -c_1\sin t + c_2\cos t - \sin t\ln\left|\cos t + t\cos t\right|.$$

4.2 $\begin{cases} x'(t) + 2x - y = -e^{2t}; \\ y'(t) + 3x - 2y = 6e^{2t}. \end{cases}$

Ответ: $x(t) = \dfrac{8}{3}e^{2t} + 2c_1e^{t} + c_2e^{-t}$, $y(t) = \dfrac{29}{3}e^{2t} + c_2e^{-t}$.

4.3 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

Ответ: $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} - 2\sin t - \cos t$,

$y(t) = 2c_1e^{2t} - c_2e^{-t} + \sin t + 3\cos t$.

4.4 $\begin{cases} x'(t) = 3x + 2y + 4e^{5t}; \\ y'(t) = x + 2y. \end{cases}$

Ответ: $x(t) = c_1e^{t} + 2c_2e^{4t} + 3e^{5t}$, $y(t) = -c_1e^{t} + c_2e^{4t} + e^{5t}$.

4.5 $\begin{cases} x'(t) = 4x + y - e^{2t}; \\ y'(t) = y - 2x. \end{cases}$

Ответ: $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + (t+1)e^{2t}$, $y(t) = -2c_1e^{2t} - c_2e^{3t} - 2te^{2t}$.

4.6 $\begin{cases} x'(t) = 5x - 3y + 2e^{3t}; \\ y'(t) = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

Ответ: $x(t) = c_1e^{2t} + 3c_2e^{4t} - e^{t} - 4e^{-t} - 4e^{3t}$,

$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}$.

4.7 $\begin{cases} x'(t) = 2x - y; \\ y'(t) = y - 2x + 18t. \end{cases}$

Ответ: $x(t) = c_1e^{3t} + c_2 + 3t^2 + 2t$, $y(t) = -c_1e^{3t} + 2c_2 + 6t^2 - 2t - 2$.

4.8 $\begin{cases} x'(t) = 2x + y + 2e^{t}; \\ y'(t) = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

Ответ: $x(t)=c_1e^t+c_2e^{3t}+te^t-e^{4t}$, $y(t)=-c_1e^t+c_2e^{3t}-(t+1)e^t-2e^{4t}$.

4.9 $\begin{cases} x'(t)=x-y+8t; \\ y'(t)=5x-y. \end{cases}$

Ответ: $x(t)=(c_1+c_2t-t^2)e^t$, $y(t)=(c_1-c_2+c_2t+2t-t^2)e^t$.

4.10 $\begin{cases} x'(t)=2x-3y; \\ y'(t)=x-2y+2\sin t. \end{cases}$

Ответ: $x(t)=3c_1e^t+c_2e^{-t}+3\sin t$, $y(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}-\cos t+2\sin t$.

Упражнение **5.** Найти общее решение неоднородной системы уравнений:

5.1 $\begin{cases} x'(t)=y; \\ y'(t)=-x+\dfrac{1}{\sin t}. \end{cases}$

Ответ: $x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+\sin t\ln|\sin t|-t\cos t$,

$y(t)=-c_1\sin+c_2\cos t+\cos t\ln|\sin t|+t\sin t$.

5.2 $\begin{cases} x'(t)=x-2y-2te^t; \\ y'(t)=5x-y-(2t+6)e^t. \end{cases}$

Ответ: $x(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t+e^t$,

$y(t)=\dfrac{1}{2}(c_1-3c_2)\cos 3+t+\dfrac{1}{2}(3c_1+c_2)\sin 3t-te^t$.

5.3 $\begin{cases} x'(t)=5x-y+5\sin t; \\ y'(t)=4x+y+3\sin t-\cos t. \end{cases}$

Ответ: $x(t)=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}-\sin t$, $y(t)=2c_1e^{3t}+c_2e^{3t}(2t-1)+\cos t$.

5.4 $\begin{cases} x'(t)=-x-y+t^2; \\ y'(t)=y-z+2t; \\ z'(t)=-z+t \end{cases}$

Ответ: $x(t)=\left(c_1+c_2t+\dfrac{1}{2}c_3t^2\right)e^{-t}+t^2-3t+3$, $y(t)=-(c_2+c_3t)e^{-t}+t$, $z(t)=c_3e^{-t}+t-1$.

5.5 $\begin{cases} x'(t)=2x-y+z-2e^{-t}; \\ y'(t)=x+2y-z-e^{-t}; \\ z'(t)=x-y+2z-3e^{-t}. \end{cases}$

Ответ: $x(t)=c_2e^{2t}+c_3e^{3t}+\dfrac{1}{2}e^{-t}$, $y(t)=c_1e^{t}+c_2e^{2t}+\dfrac{1}{2}e^{-t}$, $z(t)=c_1e^{t}+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}+e^{-t}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Богданов, Ю. С.** Курс дифференциальных уравнений / Ю. С. Богданов, С. А. Мазаник, Ю. Б. Сыроид. – Минск : Універсітэцкае, 1996. – 287 с.

2 **Минюк, С. А.** Математика для инженеров. В 2 т. / С. А. Минюк, Н. С. Березкина, А. В. Метельский. – Минск : Элайда, 2004. – Т. 2. – 592 с.

3 **Матвеев, Н. М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – Минск : Вышэйшая школа, 1974. – 766 с.

4 **Тихонов, А. Н.** Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – Москва : Наука, 1985. – 231 с.

5 **Эльсгольц, Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1969. – 320 с.

6 **Краснов, М. Л.** Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 176 с.

7 Дудко, С. А. Операционное исчисление и его приложение : пособие. В 2 ч. / С. А. Дудко, Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – Ч. 1. – 87 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ДУДКО Сергей Алексеевич
ЗАДОРОЖНЮК Елена Андреевна
ПРОКОПЕНКО Алла Ивановна

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Часть 1. Метод собственных векторов и собственных значений

Учебно-методическое пособие

Редактор И. И. Эвентов
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 31.10.2012 г. Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 3,26 Уч.-изд. л. 2,07. Тираж 250 экз.
Зак № 3248. Изд № 53

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34