УДК 51

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ БИЕКЦИЙ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

А.М. ГАЛЬМАК, Г.Н. ВОРОБЬЁВ, И.П. ОВСЯННИКОВА
Могилевский государственный университет продовольствия, Республика Беларусь

Биективные отображения одного множества на другое множество, в частности, биекции множества на себя, встречаются явно или неявно почти во всех разделах математики, в том числе и в тех, которые изучаются в технических вузах. На наш взгляд, для студентов этих вузов было бы нелишним хотя бы поверхностное знакомство с полиадическими биекциями произвольной арности, частным случаем которых являются обычные (бинарные) биекции. Формы такого знакомства могут быть самыми разными, всё зависит от бюджета времени, запланированного на изучение курса высшей математики. А так как в последние годы в технических вузах на изучение высшей математики отводится всё меньше и меньше часов, при этом сроки обучения постоянно сокращаются, то включение каких-либо новых тем в существующие курсы представляется нереальным. Поэтому наиболее подходящей формой знакомства студентов с полиадическими биекциями может служить подготовка докладов для вузовских студенческих конференций.

Для любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, n\}$ и любых множеств $A_1, \ldots, A_n$ одинаковой мощности символом $\mathbf{S}(\sigma, A_1, \ldots, A_n)$ обозначается множество всех элементов вида $(\sigma, \mathbf{f}) = (\sigma, (f_1, \ldots, f_n))$, где f_j – биекция A_j на $A_{\sigma(j)}$ для любого $j = 1, \ldots, n$. Элементы множества $\mathbf{S}(\sigma, A_1, \ldots, A_n)$ называются полиадическими биекциями арности $n + 1$, соответствующими подстановке $\sigma \in \mathbf{S}_n$, или более кратко $(n + 1)$-арными биекциями. Употребляют также термин $(n + 1)$-арные подстановки [1]. Это идёт от Э. Поста, который изучал в [2] частый случай $(n + 1)$-арных биекций, соответствующих циклу $(12 \ldots n)$ и конечным множествам $A_1, \ldots, A_n$.

В [1] доказано, что если σ^n – тождественная подстановка, то универсальная алгебра

$$< \mathbf{S}(\sigma, A_1, \ldots, A_n), [\ ]_{n+1, \sigma, n} >$$

с $(n + 1)$-арной операцией

$$[\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2 \ldots \mathbf{g}_{n+1}]_{n+1, \sigma, n} = (h_1, \ldots, h_n),$$

где $h_j = f_{1j} f_{2\sigma(j)} f_{3\sigma^2(j)} \cdots f_{n\sigma^{n-1}(j)} f_{(n+1)j}$ является $(n + 1)$-арной группой. Так как $(12 \ldots n)^n$ – тождественная подстановка, то это обобщает соответствующий результат Поста [2] для конечных множеств.

Пример. Пусть в пространстве через некоторую ось проходят $k \geq 1$ плоскостей так, что двугранный угол между любыми двумя соседними плоскостями равен $\frac{2\pi}{n}$, где $n = 2k$. В результате получается разбиение всего пространства на n областей $A_1, \ldots, A_n$. Считаем, что каждая область включает свои границы. На рисунке 1 показано сечение пространства плоскостью, перпендикулярной оси и проходящей через точку O этой оси для случая $n = 6$ $(k = 3)$.

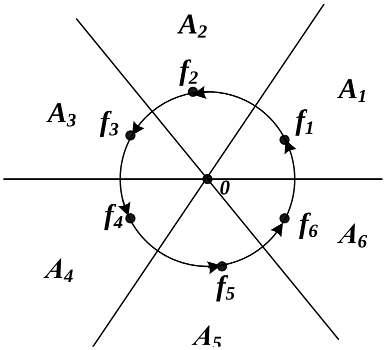

Рисунок 1

Пусть теперь f – поворот пространства на угол $\frac{2\pi}{n}$ против хода часовой стрелки вокруг выбранной оси, $\sigma = (12 \ldots n)$. Обозначим через f_j – сужение f на A_j. Так как f_j является биекцией A_j на $A_{\sigma(j)}$ для любого $j = 1, \ldots, n$, то

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathbf{S}((12 \ldots n), A_1, \ldots, A_n).$$

$(n + 1)$-арные подстановки можно использовать при изучении некоторых разделов математики, в которых они неявно присутствуют. Например, если в рассмотренном примере считать f поворотом плоскости вокруг некоторой точки O на угол $\frac{2\pi}{n}$, а $A_1, \ldots, A_n$ – соответствующими областями плоскости, то $(n + 1)$-арные подстановки можно использовать при изучении преобразований комплексной плоскости.

Взяв за основу рисунок 1, который легко построить в пакете Mathcad, можно разъяснить студентам понятие сужения f_j: $A_j \to A_{\sigma(j)}$ и роль подстановки $\sigma = (123456)$ в нём. Так как все $f_1, \ldots, f_6$ можно отождествить с комплексным числом $e^{i\frac{\pi}{3}}$, то, используя свойства операций над комплексными числами, легко доказать идемпотентность элемента

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_6) = (\underbrace{e^{i\frac{\pi}{3}}, \ldots, e^{i\frac{\pi}{3}}}_{6})$$

в 7-арной группе

$$< \mathbf{S}((123456), A_1, \ldots, A_6), [\ ]_{7,\,(123456),\,n} >:$$

$$[\underbrace{\mathbf{f} \ldots \mathbf{f}}_{7}]_{7,\,(123456),\,6} =$$

$$= [\underbrace{(\underbrace{e^{i\frac{\pi}{3}},\ldots,e^{i\frac{\pi}{3}}}_{6})\ldots(\underbrace{e^{i\frac{\pi}{3}},\ldots,e^{i\frac{\pi}{3}}}_{6})}_{7}] =$$

$$= (\underbrace{\underbrace{e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot\ldots\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}}_{7},\ldots,\underbrace{e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot\ldots\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}}_{7})}_{6}] =$$

$$= (\underbrace{e^{i\frac{7\pi}{3}},\ldots,e^{i\frac{7\pi}{3}}}_{6}) = (\underbrace{e^{i\frac{\pi}{3}},\ldots,e^{i\frac{\pi}{3}}}_{6}) = \mathbf{f}.$$

Подобные рутинные вычисления легко осуществляются в Mathcad.

Список литературы

1 **Гальмак, А.М.** *n*-арные группы. Ч. 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

2 **Post, E.L.** Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

УДК 51

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КУРСЫ МАТЕМАТИКИ В ДВУХСТУПЕНЧАТОЙ СИСТЕМЕ ОБРАЗОВАНИЯ

И.М. ДЕРГАЧЕВА, С.А. ДУДКО

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Очевидно, что переход к двуступенчатой системе образования в технических университетах породит целый ряд задач и проблем при изложении курса высшей математики, которые потребуют своего решения. По-видимому, на первой ступени образования придется перейти к изложению общего курса высшей математики в течение двух-трех семестров. За это время вполне можно дать студентам основы таких разделов математики, как дифференциальное и интегральное исчисление, элементы линейной алгебры и основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако с изложением целого ряда разделов, которые в курсах высшей математики для технических специальностей, как правило, объединяются под аббревиатурой «Специальные главы» [1, 2], возникнет целый ряд проблем. Используя свой опыт преподавания на механическом и электротехническом фа-