

УДК 539.21:531.43/46:539.3

С. А. ВОРОБЬЁВ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***КИНЕМАТИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СЭНДВИЧ-ОБОЛОЧКИ НА ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПРИ УЧЕТЕ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ В МАТЕРИАЛАХ СЛОЕВ**

Предложена постановка начально-краевой задачи о динамическом нагружении круговой цилиндрической трехслойной оболочки с учетом внутреннего трения в материалах слоев. В каждом слое оболочки предполагается выполнение кинематических гипотез Тимошенко, т.е. прямолинейный элемент, первоначально нормальный к срединной поверхности слоя, в процессе деформирования остается прямолинейным, но из-за деформации поперечного сдвига поворачивается на дополнительный угол и перестает быть перпендикулярным к срединной поверхности. Уравнения движения получены вариационным методом. Внутреннее трение учтено на основе концепции комплексных модулей упругости. Получено аналитическое решение модельной задачи о динамическом деформировании прямоугольной в плане цилиндрической сэндвич панели, на основе которого выполнен расчет кинематических параметров ее колебаний.

Ключевые слова: цилиндрическая трехслойная оболочка, колебания, внутреннее трение, комплексный модуль упругости, точечный импульс.

Введение. В связи с широким применением в промышленности и строительстве композитных элементов конструкций, актуальной становится проблема создания адекватных математических моделей описания их деформирования при квазистатических и динамических нагрузках в различных физико-механических средах. Свободные и вынужденные колебания трехслойного стержня при различных нагрузках, в том числе и резонансных, исследованы в работах [1–4]. Статьи [5–10] посвящены динамическому деформированию трехслойных пластин при силовых и термосиловых нагрузках. В статьях [11–15] рассмотрены свободные и вынужденные колебания неоднородных цилиндрических и сферических оболочек, а также вопросы распространения волн.

Внутреннее трение (внутреннее демпфирование) – это рассеяние энергии упругих колебаний за счет процессов, происходящих в твердом теле на микроуровне [16]. Оно обусловлено упругими несовершенствами материалов. Механизмы возникновения внутреннего трения в материалах весьма сложны и разнообразны. С их помощью энергия при колебаниях может поглощаться внутри некоторого малого объема материала при его циклическом деформировании. Перечислим лишь основные из них, представляющиеся наиболее существенными для линейного демпфирования [17]. Все рассмотренные и систематизированные в работе [17] механизмы внутреннего трения связаны с внутренними перестройками микро- или макроструктур, охватывающими

диапазон от кристаллических решеток до эффектов молекулярного уровня, для тех диапазонов частот и температур, в которых они, как правило, наиболее эффективны. Сюда входят магнитные эффекты (магнитоупругий и магнитомеханический гистерезисы), термоупругие эффекты (термоупругие явления, температурная диффузия, тепловые потоки) и перестройка атомарной структуры (дислокации, локальные дефекты кристаллических решеток, фотоэлектрические эффекты, релаксация напряжений на границах зерен, фазовые процессы, учитываемые в механике твердого деформируемого тела, блоки в поликристаллических материалах и т. п.).

Внутреннее трение, обусловленное упругими несовершенствами материалов, является важным благоприятным фактором в работе конструкций на динамические нагрузки, действию которых подвергаются многие виды инженерных сооружений (конструкции железнодорожного, автодорожного, водного и воздушного транспорта, высотные здания, башни, мачты и т. п.) [18]. Важная роль внутреннего трения подчеркивается также тем обстоятельством, что исключить резонансные режимы колебаний путем расчета и проектирования конструкций во многих случаях невозможно вследствие высокой плотности спектров частот как собственных колебаний конструкций, например междуэтажных перекрытий зданий, так и динамических нагрузок, вызванных работой группы машин и механизмов с различными числами оборотов. Колебания конструкций под действием нагрузок типа случайных процессов (пульсации давления ветра, морское волнение, полигармонические воздействия) имеют характер резонансных режимов. Таковы, например, горизонтальные колебания телевизионных башен и мачт, дымовых труб, высотных зданий. Неизбежен резонанс также в строительных конструкциях, поддерживающих машины, при медленных пусках и остановках машин, если число их оборотов в рабочем режиме выше основной частоты собственных колебаний этих конструкций, что обычно и имеет место. Главным образом благодаря внутреннему трению происходит быстрое затухание свободных колебаний конструкций, резкое ограничение роста амплитуд вынужденных колебаний при резонансах, сильное снижение напряжений от импульсов и ударов в конструкциях с большим числом степеней свободы и выравнивание динамических напряжений в местах их концентрации. Вследствие этого внутреннее трение является одной из важнейших динамических характеристик материала и конструкции. Чем больше внутреннее трение в конструкции, тем при прочих равных условиях она выгоднее для восприятия динамических воздействий. Частотные характеристики трехслойного стержня с учетом внутреннего трения на основе вязкой и комплексной моделей исследованы в работе [19].

Постановка начально-краевой задачи. Уравнения движения. Рассматривается динамическое нагружение трехслойной цилиндрической оболочки, несимметричного по высоте строения относительно срединной поверхности жесткого, несжимаемого в поперечном направлении заполнителя.

Толщины слоев постоянны и равны $2h_k$ ($k = 1, 2, 3$). Здесь и далее k – номер слоя. Верхнему несущему слою соответствует индекс $k = 1$, нижнему – $k = 2$, внутреннему (заполнителю) – $k = 3$.

Цилиндрическая ортогональная система координат x_1x_2Oz связана со срединной поверхностью заполнителя, которая принята за координатную. Ось z направлена по нормали к координатной поверхности в сторону первого слоя (рисунок 1).

Оси $x_1 = \varphi$ и $x_2 = x$ совпадают с линиями главных кривизны координатной поверхности $z = 0$ (z – расстояние по нормали от произвольной точки оболочки до координатной поверхности), т. е. x_1 направлена вдоль направляющей, x_2 – вдоль образующей цилиндрической оболочки. Начало координат расположено на торце оболочки. Таким образом, пределы изменения введенных координат: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq x_2 \leq L$; $-2h_2 - h_3 \leq z \leq h_3 + 2h_1$; L – длина оболочки.

Пусть на внешнюю поверхность первого несущего слоя действует распределенная нагрузка, компоненты которой по направлениям единичных ортов \vec{e}_1, \vec{e}_2 и оси z будут соответственно $q_\varphi^{(1)}(\varphi, x, t)$, $q_x^{(1)}(\varphi, x, t)$ и $q_z^{(1)}(\varphi, x, t)$ (рисунок 2).

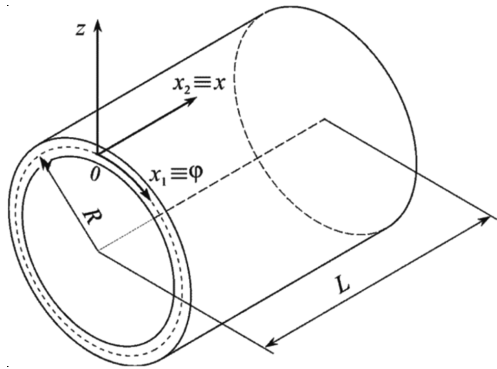


Рисунок 1 – Общий вид цилиндрической оболочки с криволинейной ортогональной системой координат

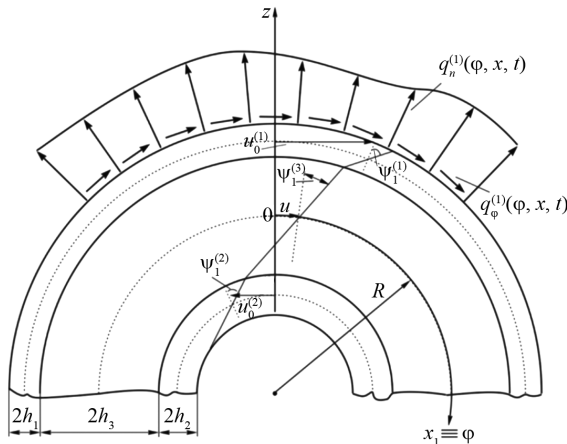


Рисунок 2 – Поперечное сечение оболочки. Картина распределения перемещений по толщине трехслойного пакета

На основе модели ломаной линии используются кинематические гипотезы Тимошенко для каждого слоя. Материалы слоев считаются линейно-упругими, изотропными и однородными. Полагая деформации малыми, а прогибы и углы поперечного сдвига независимыми от поперечной координаты z для всех слоев имеем:

$$w_z^{(k)}(\varphi, x, z, t) \approx w(\varphi, x, t), \quad \gamma_{z\varphi}^{(k)}(\varphi, x, z, t) \approx \gamma_\varphi^{(k)}(\varphi, x, t), \quad \gamma_{zx}^{(k)}(\varphi, x, z, t) \approx \gamma_x^{(k)}(\varphi, x, t).$$

В этом случае из условия непрерывности перемещений на границах контакта слоев получаем законы распределения перемещений внутри слоев:

$$\begin{aligned} u_z^{(3)}(\varphi, x, z, t) &= u^{(3)}(\varphi, x, t) + z\Psi_\varphi^{(3)}(\varphi, x, t), \\ v_z^{(3)}(\varphi, x, z, t) &= v^{(3)}(\varphi, x, t) + z\Psi_x^{(3)}(\varphi, x, t) \quad (-h_3 \leq z \leq h_3), \\ u_z^{(i)}(\varphi, x, z, t) &= u^{(3)} \pm h_3\Psi_\varphi^{(3)} + (z \mp h_3)\Psi_\varphi^{(i)}(\varphi, x, t), \\ v_z^{(i)}(\varphi, x, z, t) &= v^{(3)} \pm h_3\Psi_x^{(3)} + (z \mp h_3)\Psi_x^{(i)}(\varphi, x, t) \quad (i=1, 2), \end{aligned} \quad (1)$$

где при $i = 1$ ($h_3 \leq z \leq h_3 + 2h_1$) (для тангенциальных перемещений в первом несущем слое берется верхний знак; пределы изменения $-h_3 - 2h_2 \leq z \leq -h_3$) соответствуют второму несущему слою ($i = 2$), для которого в (1) надо использовать нижний арифметический знак; $\Psi_\varphi^{(k)} = -w_{,\varphi} + \gamma_\varphi^{(k)}$, $\Psi_x^{(k)} = -w_{,x} + \gamma_x^{(k)}$ – полные углы поворота прямолинейного элемента k -го слоя в координатных плоскостях φOz и xOz соответственно; $\gamma_\varphi^{(k)}$, $\gamma_x^{(k)}$ – углы поперечного сдвига в k -м слое; $u_z^{(k)}(\varphi, x, z, t)$, $v_z^{(k)}(\varphi, x, z, t)$ – тангенциальные перемещения в слоях по направлениям осей φ и x соответственно; $u^{(3)}(\varphi, x, t) \equiv u(\varphi, x, t)$, $v^{(3)}(\varphi, x, t) \equiv v(\varphi, x, t)$ – тангенциальные перемещения точек срединной плоскости заполнителя, $w(\varphi, x, t)$ – прогиб; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Таким образом, в качестве искоемых неизвестных функций в дальнейшем будут выступать девять независимых кинематических параметров – линейные и угловые перемещения:

$$\{U\}^T = \{u, v, w, \Psi_\varphi^{(k)}, \Psi_x^{(k)}\} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Уравнения движения линейно упругой цилиндрической оболочки, выполненной из изотропных материалов, получим, используя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [20]. Систему этих уравнений в матричной форме можно представить так:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [L]\{U\} = \{F\}, \quad (3)$$

где $[M]$ – симметричная недиагональная матрица масс размера 9×9 ; $\{\ddot{U}\}$ – вектор ускорений, соответствующий компонентам вектора (2); $[L] = [l_{ij}]$ – матри-

ца линейных дифференциальных операторов (по координатам φ и x) с постоянными коэффициентами, зависящими от геометрических и механических параметров слоев (не приведены из-за громоздкости выражений), $\{F\}^T = \{q_1; q_2; q_3; h_3 q_1; h_3 q_2; 2h_1 q_1; 2h_1 q_2; 0; 0\} (R + h_3 + 2h_1)$ – вектор нагрузок.

Внутреннее трение, которое характеризует демпфирующие свойства материалов слоев оболочки, учитывается на основе концепции комплексного модуля упругости [1–18] $E_k^* = E_k (a_k + i \cdot b_k)$, $G_k^* = G_k (a_k + i \cdot b_k)$, где E_k , G_k – модули упругости материала, $a_k = (4 - \gamma_k^2) / (4 + \gamma_k^2)$, $b_k = 4\gamma_k^2 / (4 + \gamma_k^2)$, γ_k – коэффициент внутреннего трения материала k -го слоя ($k = 1, 2, 3$), i – мнимая единица. Уравнения движения оболочки в этом случае получаются заменой в уравнениях идеально упругой конструкции модулей упругости E_k , G_k на соответствующие операторы E_k^* , G_k^* :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [\tilde{L}]\{U\} = \{F\}. \quad (4)$$

Здесь обозначения идентичны обозначениям параметров системы уравнений (3), а $[\tilde{L}] = [\tilde{l}_{ij}]$ ($i, j = 1, \dots, 9$) – матрица, элементами которой являются линейные дифференциальные операторы по переменным φ , x с постоянными комплексными коэффициентами.

Решение модельной задачи. Рассмотрим воздействие мгновенного точечного импульса, направленного перпендикулярно к поверхности первого несущего слоя оболочки, находящейся в покое (см. рисунок 2). Аналитическое выражение нагрузки следующее:

$$q_z(x_1, x_2, t) = \delta(t)\delta(x_1 - x_{1p})\delta(x_2 - x_{2p}), \quad (5)$$

где $\delta(t)$, $\delta(x_1 - x_{1p})$, $\delta(x_2 - x_{2p})$ – дельта-функции Дирака (Dirac P. A. M.); x_{1p} и x_{2p} – координаты точки воздействия импульса.

Для шарнирно свободного края в тангенциальном направлении вдоль координатных линий x_1 и x_2 должны выполняться граничные кинематические условия в перемещениях:

$$u_{,1} = v_{,2} = w = \psi_1^{(k)}{}_{,1} = \psi_2^{(k)}{}_{,2} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Искомые перемещения представим в виде

$$u = \sum_{m,n} \tilde{U}_{mn}(t) \cos(m\varphi) \sin(\hat{n}x), \quad v = \sum_{m,n} \tilde{V}_{mn}(t) \sin(m\varphi) \cos(\hat{n}x),$$

$$w = \sum_{m,n} \tilde{W}_{mn}(t) \sin(m\varphi) \sin(\hat{n}x), \quad (7)$$

$$\psi_1^{(k)} = \sum_{m,n} \tilde{\Psi}_{1mn}^{(k)}(t) \cos(m\varphi) \sin(\hat{n}x), \quad \psi_2^{(k)} = \sum_{m,n} \tilde{\Psi}_{2mn}^{(k)}(t) \sin(m\varphi) \cos(\hat{n}x) \quad (k = 1, 2, 3),$$

где $m = 1, 2, \dots, \infty$; $\hat{n} = n\pi / L$; $n = 1, 2, \dots, \infty$; $\tilde{U}_{mn}(t)$, $\tilde{V}_{mn}(t)$, $\tilde{W}_{mn}(t)$, $\tilde{\Psi}_{1mn}^{(k)}(t)$, $\tilde{\Psi}_{2mn}^{(k)}(t)$ – искомые комплексные функции действительной переменной t .

Выражения (7) обеспечивают автоматическое выполнение граничных условий (6) на торцах оболочки $x = 0$ и $x = L$. В уравнениях движения (3) все компоненты вектора нагрузок $\{F\}$, кроме третьей будут для рассматриваемого вида нагружения нулевыми. Третья компонента определяется по формуле (5).

Подставим функции перемещений (7) в уравнения движения (3), умножим первое из них на $\cos(m\varphi)\sin(\tilde{n}x)$, второе – на $\sin(m\varphi)\cos(\tilde{n}x)$, третье – на $\sin(m\varphi)\sin(\tilde{n}x)$, четвертое – на $\cos(m\varphi)\sin(\tilde{n}x)$, пятое – на $\sin(m\varphi)\cos(\tilde{n}x)$. Шестое и седьмое, восьмое и девятое уравнения умножаются аналогично последней паре действий. Интегрируем поэлементно все уравнения в пределах от 0 до 2π по координате φ , если оболочка замкнута (или от 0 до φ_e для цилиндрической панели с центральным углом φ_e дуги срединной поверхности), и от 0 до L по координате x . Учитывая свойства ортогональности тригонометрических функций, получим следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$[M]\{\ddot{\tilde{U}}_{mn}(t)\} + [A]\{\tilde{U}_{mn}(t)\} = \{F_{mn}(t)\}, \quad (8)$$

где $F_{jmn} = 0$, ($j = 1, 2; j = 4, \dots, 9$), $F_{3mn} = (4/\pi L)\sin(x_{1p})\sin(x_{2p})\delta(t)$; $[A]$ – матрица, являющаяся аналогом матрицы жесткости, в которую входят геометрические параметры и механические константы материалов слоев оболочки. Она также содержит параметры волнообразования m и n , которые присутствуют в выражениях для функций перемещений (7).

Аналитические решения системы (8) построим, используя интегральное преобразование Лапласа по времени при нулевых начальных условиях. В результате получим в изображениях систему алгебраических уравнений относительно амплитудных функций в выражениях (7):

$$([M]s^2 + [A])\{\tilde{U}_{mn}^L(s)\} = \{F_{mn}^L(s)\}, \quad (9)$$

где s – параметр преобразования Лапласа, верхний индекс “L” в (9) означает изображение функции по Лапласу. Раскрытие определителей матрицы коэффициентов системы (9) для каждого сочетания m и n дает полиномы восемнадцатого порядка $f_{18}(s, m, n) = D(s, m, n)$. Когда представляют интерес изображения лишь некоторых компонентов вектора $\{\tilde{U}_{mn}^L(s)\}$, то решение системы (9) целесообразно строить по методу Крамера. Например, изображение функции прогиба можно представить в виде дробно-рациональной функции так:

$$W_{mn}^L(s) = \frac{D_3(s, m, n)}{D(s, m, n)} = (4/\pi L)\sin(\varphi_p)\sin(x_p) \frac{f_{16}^w(s, m, n)}{f_{18}(s, m, n)}, \quad (10)$$

где $f_{16}^w(s, m, n)$ – определитель, полученный из основного определителя системы (9) путем замены в нем третьего столбца на столбец правой части.

Так как у этого столбца все коэффициенты, кроме третьего, нулевые, то $D_3(s, m, n)$ можно представить в виде разложения по элементам третьего

столбца. Для того чтобы в конечном итоге перейти из пространства изображений (10) в пространство оригиналов для функции прогиба, представим (10) в виде разложения на элементарные дроби:

$$\tilde{W}_{mn}^L(s) = \sum_{j=1}^{18} B_{jnm}^w / (s - s_{jnm}), \quad (11)$$

где s_{jnm} – полюсы полинома $f_{18}(s, m, n)$ (собственные частоты); B_{jnm}^w – вычеты полюсов.

Верхний индекс “w” у полиномов и вычетов полюса означает, что они используются для определения указанной компоненты вектора перемещений. Используя известные теоремы и методы операционного исчисления, можно найти оригиналы выражений вида (11). Эти оригиналы будут комплексными функциями действительной переменной времени, поэтому в качестве окончательных выражений компонент искомого вектора перемещений будем принимать действительные части комплексных функций. Полученные таким способом решения будут содержать устойчивые и неустойчивые составляющие. Последние приводят к непрерывно нарастающему движению механической системы, что возможно при наличии в системе неиссякаемого источника энергии. При отсутствии такого источника энергии в оболочке необходимо в итоговом решении исключать неустойчивые компоненты. В силу сделанных замечаний действительная часть оригиналов функций прогиба будет иметь следующий вид:

$$\text{Re}(\tilde{W}(t)) = \sum_{j=1,3,5,7,\dots}^{17} e^{\text{Re}(s_{jnm})t} \left\{ A_{jnm}^w \sin[\text{Im}(s_{jnm})t + \varphi_{jnm}^w] \right\}. \quad (12)$$

Эта процедура нахождения оригиналов аналогична и для всех других функций перемещений.

Численные результаты. На основе решения (12) проведены численные исследования, при этом использовались следующие безразмерные параметры:

$$\xi = x'/R'; \quad h_k = h'_k/R'_1; \quad L = R'; \quad u = u'/R'_1; \quad v = v'/R'_1; \quad w = w'/R';$$

$$E_k = E'_k/P'_0; \quad \lambda = (\omega')^2 \rho'_0 (L')^2 / P'_0; \quad c_0 = \sqrt{P'_0 / \rho'_0}; \quad \tau = t' c_0 / R'; \quad R' = 1 \text{ м};$$

$$\rho_k = \rho'_k / \rho'_0; \quad \rho'_0 = 100 \text{ кг/м}^3; \quad P'_0 = 10^4 \text{ МПа}; \quad (k = 1, 2, 3),$$

где t' – время, R' – радиус срединной поверхности заполнителя, E'_k – модуль Юнга, ω' – круговая собственная частота, штрих сверху означает размерную величину.

Все представленные ниже численные результаты получены для круговой цилиндрической сэндвич панели, квадратной в плане, а точка импульсного воздействия всегда расположена в центре панели. Центральный угол $x_1 = \varphi$ поперечного сечения (вдоль направляющей) изменяется в диапазоне $0 \leq z \leq \pi$, а область изменения продольной безразмерной координаты ξ находится в этих же пределах: $0 \leq \xi \leq \pi$. Таким образом, координаты точки импульсного воз-

действия в соответствии с формулой (5): $x_{1p} \equiv \varphi_p = \pi/2$, $x_{2p} \equiv \xi_p = \pi/2$. Коэффициенты внутреннего трения для несущих слоев принимались $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,01$, а для заполнителя – $\gamma_3 = 0,7$. Толщины слоев: $2h_1 = 2h_2 = 0,02$; $2h_3 = 0,06$.

На рисунке 3 показано изменение во времени нормированного прогиба $\bar{w}(\tau) = w/w_{\max}$ центральной точки панели в течение периода собственных колебаний по частоте основного тона ω_{11} . Здесь w_{\max} – максимальный прогиб упругой оболочки в течение периода сводных колебаний по частоте основного тона (минимальной). В среднем внутреннее трение снижает прогибы на временном интервале $\tau = 20 \dots 45$ относительных единиц на 2,8 %. Причем, размахи колебаний, т. е. движения в направлении оси z и обратно, практически исчезают. На рисунке 4 показано изменение нормированной скорости панели $\bar{v}(\tau) = v/v_{\max}$ в точке воздействия импульса; v_{\max} – максимальное значение скорости точки упругой оболочки в течение указанного промежутка времени. Внутреннее трение приводит к снижению скоростей точки в течение отрезка времени $\tau = 10 \dots 25$ относительных единиц в среднем на 7,9 %.

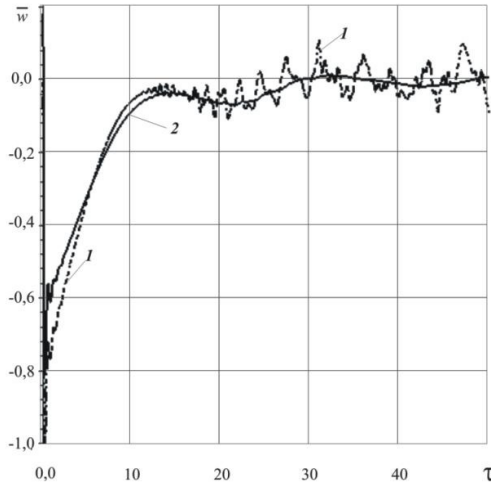


Рисунок 3 – Изменение во времени нормированных прогибов идеально упругой оболочки и при учете внутреннего трения:

- 1 – прогиб упругой оболочки (штрихпунктирная линия),
- 2 – прогиб при учете демпфирующих свойств материалов слоев (сплошная)

Заключение. Предложенная механико-математическая модель трехслойной цилиндрической оболочки позволяет учитывать внутреннее трение в материалах слоев, что более адекватно реальной конструкции. Численные исследования кинематических параметров показали его существенное влияние на снижение пиковых значений прогибов, скоростей и ускорений по сравнению с идеально упругой оболочкой.

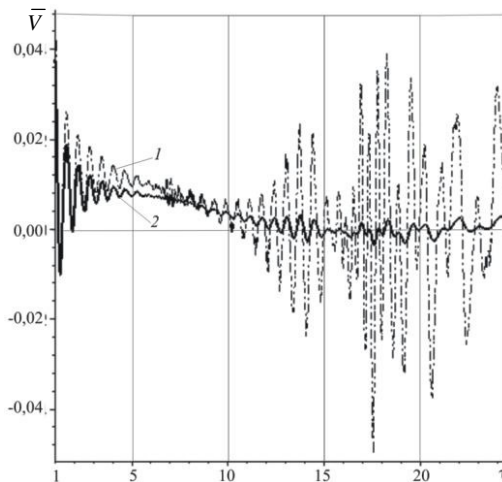


Рисунок 4 – Изменение во времени нормированных скоростей идеально упругой оболочки и при учете внутреннего трения:
 1 – упругая оболочка (штрихпунктирная линия),
 2 – расчет при учете демпфирующих свойств материалов слоев (сплошная)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Воробьев, С. А.** Истинные и ложные резонансные режимы колебаний трехслойного стержня / С. А. Воробьев // *Материалы. Технологии. Инструменты.* – 2002. – Т. 7, № 2. – С. 14–19.
- 2 **Воробьев, С. А.** Ударное деформирование композитного стержня, связанного с упругим основанием / С. А. Воробьев // *Механика машин, механизмов и материалов.* – 2008. – № 4. – С. 52–55.
- 3 **Starovoitov, E. I.** Vibration of sandwich rod under local and impulsive forces / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya / *International Applied Mechanics.* – 2005. – Т. 41, No. 7. – С. 809–816.
- 4 Natural vibrations of a sandwich beam on an elastic foundation / V. D. Kubenko [et al.] // *International Applied Mechanics.* – 2006. – Vol. 42, No. 5. – С. 541–547.
- 5 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation / E. I. Starovoitov, V. D. Kubenko, D. V. Tarlakovskii // *Russian Aeronautics.* – 2009. – Vol. 52, No. 2. – P. 151–157.
- 6 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads under local and impulsive forces / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *Strength of Materials.* – 2002. – Vol. 34, No. 5. – С. 474–481.
- 7 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *Strength of Materials.* – 2003. – Vol. 35, No. 4. – P. 346–352.
- 8 **Leonenko, D. V.** Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // *Mechanics of Solids.* – 2009. – Vol. 44, No. 5. – P. 744–755.
- 9 **Leonenko, D. V.** Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // *Mechanics of Solids.* – 2012. – Vol. 47, No. 1. – P. 111–118.

10 **Starovoitov, E. I.** Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2007. – Vol. 43, No. 4. – P. 451–459.

11 **Kuznetsova, E. L.** Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E. L. Kuznetsova, D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2015. – Vol. 50, No. 3. – P. 359–366.

12 **Tarlakovskiy, D. V.** Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries / D. V. Tarlakovskiy, G. V. Fedotenkov // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2009. – Vol. 162, No. 2. – P. 246 – 253.

13 **Tarlakovskiy, D. V.** Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskiy, G. V. Fedotenkov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol. 43, No. 2. – P. 145–152.

14 **Tarlakovskiy, D. V.** Non-stationary problems for elastic half-plane with moving point of changing boundary conditions / D. V. Tarlakovskiy, G. V. Fedotenkov // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2016. – No. 3. – P. 188–206. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.13.

15 **Tarlakovskiy, D. V.** Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell / D. V. Tarlakovskiy, G. V. Fedotenkov // *Mechanics of Solids*. – 2015. – Vol. 46, No. 5. – P. 779–787.

16 **Блантер, М. С.** Что такое внутреннее трение / М. С. Блантер // *Соросовский образовательный журнал*. – 2004. – Т. 8, № 2. – С. 80–85.

17 **Нашиф, А.** Демпфирование колебаний / А. Нашиф, Д. Джоунс, Дж. Хендерсон. – М. : Мир, 1988. – 416 с.

18 **Кочнева, Л. Ф.** Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях / Л. Ф. Кочнева. – М. : Наука, 1979. – 96 с.

19 **Воробьев, С. А.** Частотные характеристики трехслойного стержня с учетом внутреннего трения на основе вязкой и комплексной моделей / С. А. Воробьев // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2007. – Т. 12, № 2. – С. 12–16.

20 **Перцев, А. К.** Динамика оболочек и пластин / А. К. Перцев, Э. Г. Платонов. – Л. : Судостроение, 1987. – 316 с.

S. A. VOROBYOV

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

KINEMATIC REACTION OF A CIRCULAR CYLINDRICAL SANDWICH SHELL ON PULSE ACTION CONSIDERING THE INTERNAL FRICTION IN LAYERS' MATERIALS

The formulation of the initial-boundary value problem on the dynamic loading of a circular cylindrical sandwich shell on pulse action considering the internal friction in layers' materials is proposed. The kinematic hypotheses of Timoshenko are supposed to operate in each shell, that is, the rectilinear element, originally normal to the layer middle surface, remains rectilinear during deformation; due to the transverse shear deformation it rotates by an additional angle and becomes non perpendicular to the layer middle surface. The motion equations are obtained by a variational method. The internal friction is taken into account on the basis of the complex elastic moduli concept. An analytical solution is obtained for the model problem of dynamic deformation of a rectangular in plan cylindrical sandwich panel. On its basis the kinematic parameters of the panel oscillations are calculated.

Получено 30.09.2017